Material de Apoyo

11°

Contenidos	Habilidades
Función Inversa	H5: Determinar y graficar la función inversa de $f(x) = a\sqrt{bx \pm c} \pm d$.

Colaboradores:

Céspedes Gómez Lency Francini
Guillén Méndez Jean Carlo
Nuñez Morales Gustavo
Segura Siles Verónica

Resumen: Transformaciones de una función

El tema de transformaciones geométricas se estudiará más adelante con más detalle. Lo que se estudiará ahora son las modificaciones que sufre una función cuando se varía losn coeficientes a, b, c, d tal que

$$f(x) = a\sqrt{bx \pm c} \pm d$$

Traslación vertical

$$f(x) = \sqrt{x} \pm d$$

La gráfica de f se traslada d unidades:

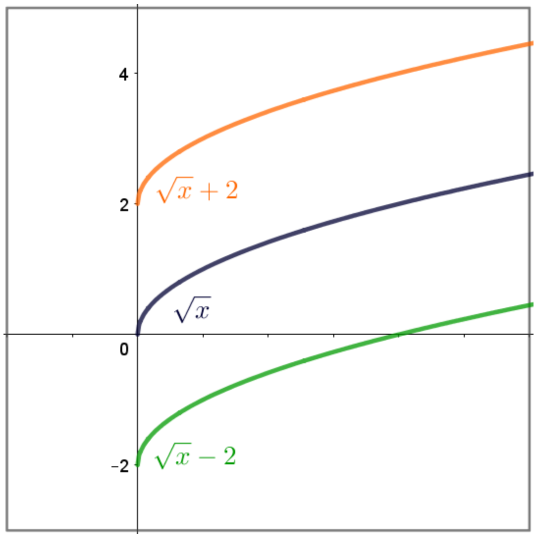
Hacia arriba

$$g(x) = \sqrt{x} + 2$$

Hacia abajo si

$$h(x) = \sqrt{x} - 2$$

Comparemos respecto $f(x) = \sqrt{x}$



Traslación horizontal

$$f(x) = \sqrt{x \pm c}$$

La gráfica de f se traslada c unidades:

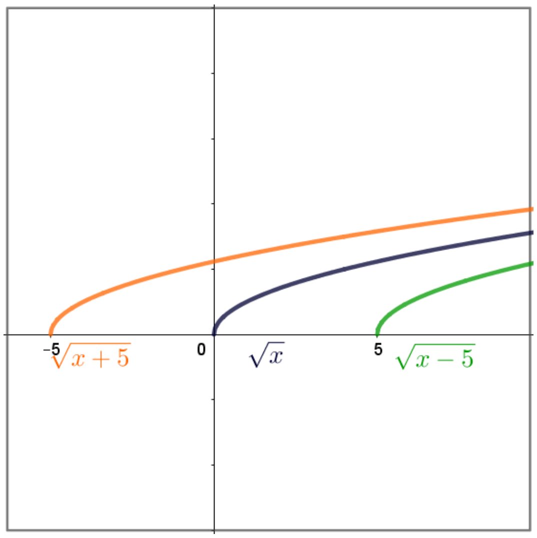
Hacia la izquierda

$$g(x) = \sqrt{x+5}$$

Hacia la derecha

$$h(x) = \sqrt{x-5}$$

Comparemos respecto $f(x) = \sqrt{x}$



Reflexión

$$f(x) = a\sqrt{bx}.$$

La gráfica de f se puede reflejar cuando $a = -1$ o $b = -1$.

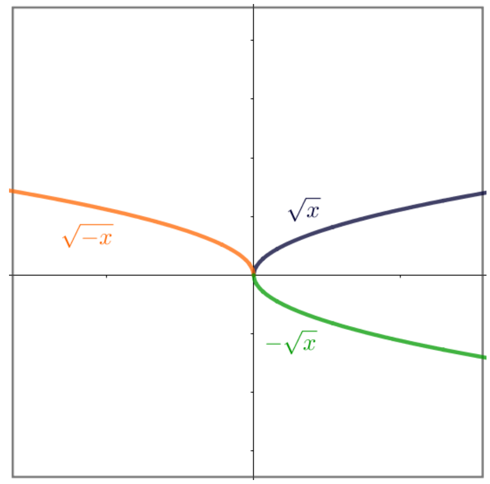
Reflexión respecto al eje Y

$$g(x) = \sqrt{-x}$$

Reflexión respecto al eje X

$$h(x) = -\sqrt{x}$$

Comparemos respecto $f(x) = \sqrt{x}$



Homotecia vertical

$$f(x) = a\sqrt{x}$$

La gráfica de f se contrae o dilata verticalmente según en valor de a.

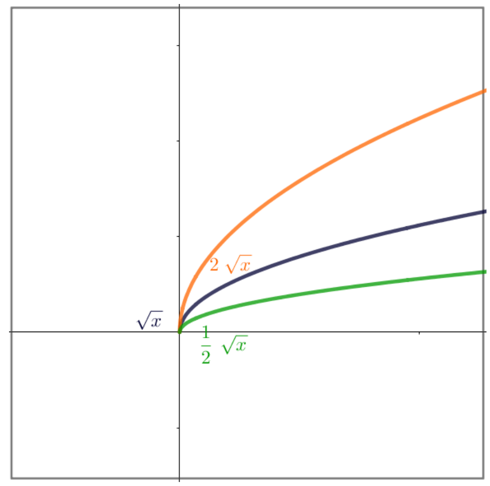
Dilatación o estiramiento

$$g(x) = 2\sqrt{x}$$

Contracción o encogimiento

$$h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

Comparemos respecto $f(x) = \sqrt{x}$



Homotecia horizontal

$$f(x) = \sqrt{bx}$$

La gráfica de f se contrae o dilata horizontalmente según en valor de b.

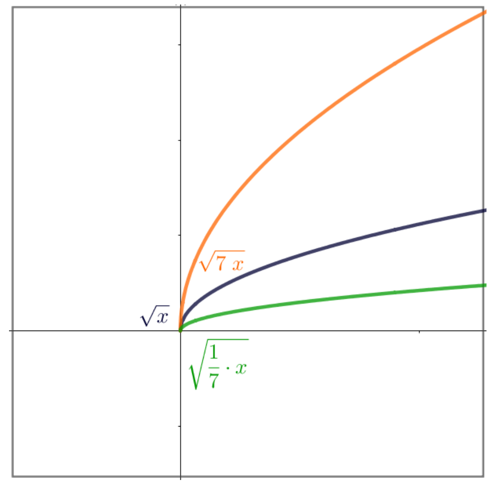
Dilatación o estiramiento

$$g(x) = \sqrt{7x}$$

Contracción o encogimiento

$$h(x) = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot x}$$

Comparemos respecto $f(x) = \sqrt{x}$



Ejemplos

Con la información de la transformación de la función raíz cuadrada, determine las intersecciones con los ejes y la gráfica correspondiente.

1) $f(x) = -\sqrt{x-2}+1,$

Dominio: $D_f = [2,+\infty[$.

Intersección con el eje y **:** $(0,y)$

Note que no existe intersección con el eje y pues x nunca es cero.

Intersección con el eje x **:** $(x,0)$

$\Rightarrow 0 = -\sqrt{x-2}+1$

$\Rightarrow 0-1 = -\sqrt{x-2}$

$\Rightarrow -1 = -\sqrt{x-2}$

$\Rightarrow 1 = \sqrt{x-2}$

$\Rightarrow 1^2 = (\sqrt{x-2})^2$

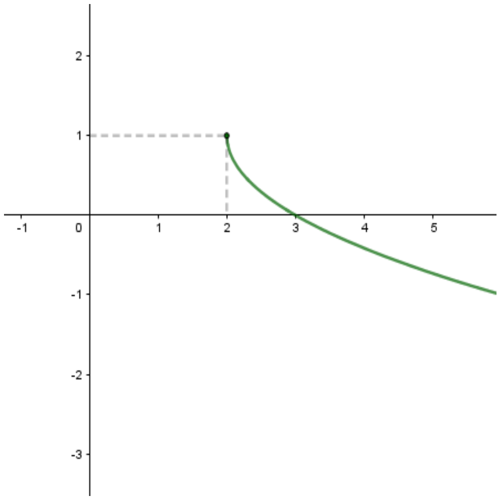
$\Rightarrow 1 = x-2$

$\Rightarrow 1+2 = x$

$\Rightarrow x = 3$

La intersección del eje x es (3,0)

Gráficamente la traslación se vería:



2) $f(x) = \sqrt{-x+5}-3.$

Dominio: $D_f =]-\infty,5]$.

Intersección con el eje y **:** $(0,y)$

$f(0) = \sqrt{-0+5}-3 = \sqrt{5}-3 \approx -0{,}764$

La intersección con el eje y es $(0,-0{,}764)$

Intersección con el eje x **:** $(x,0)$

$\Rightarrow 0 = \sqrt{-x+5}-3$

$\Rightarrow 0+3 = \sqrt{-x+5}$

$\Rightarrow 3 = \sqrt{-x+5}$

$\Rightarrow 3^2 = (\sqrt{-x+5})^2$

$\Rightarrow 9 = -x+5$

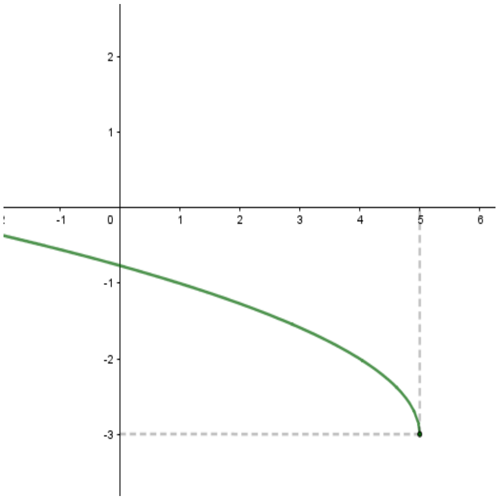
$\Rightarrow 9-5 = -x$

$\Rightarrow -4 = x$

$\Rightarrow x = -4$

La intersección del eje x es (-4,0)

Gráficamente la traslación se vería:



3) Sea $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 3$, Dominio: $D_f = [1, +\infty]$.

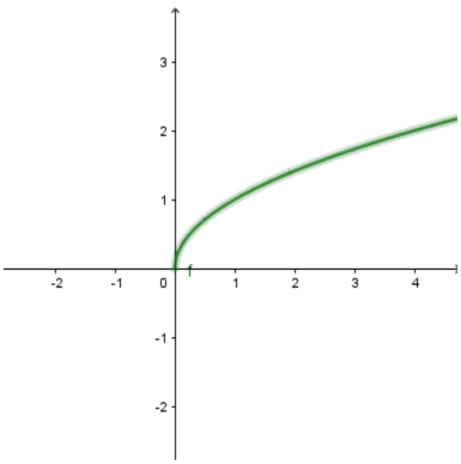
a. Determine el tipo de transformación que se aplicó a $g(x) = \sqrt{x}$
b. Grafique la función $f(x) = 2\sqrt{x-1} + 3$
c. Determine el ámbito de f

Solución:

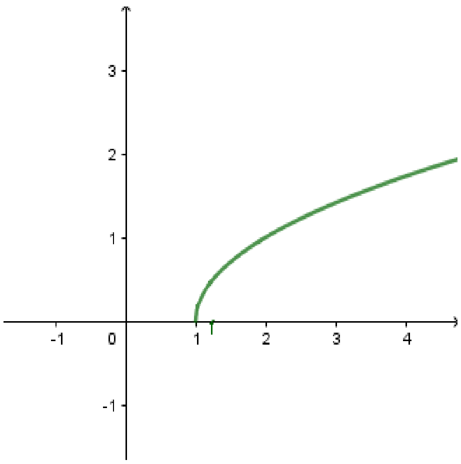
a. La función g se trasladó una unidad a la derecha. Luego, se dilató verticalmente con $a = 2$. Finalmente, se trasladó 3 unidades hacia arriba.

b. Gráficamente, la función f se vería:

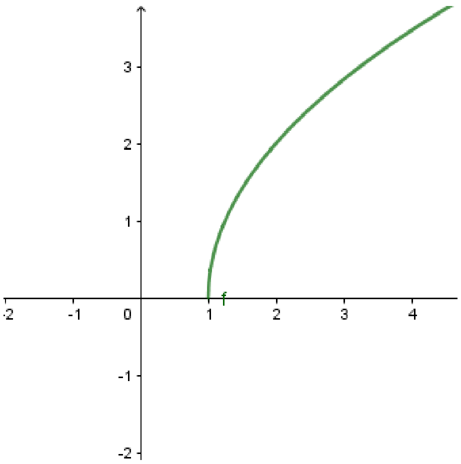
Paso 1: Graficar $\sqrt{x}$.



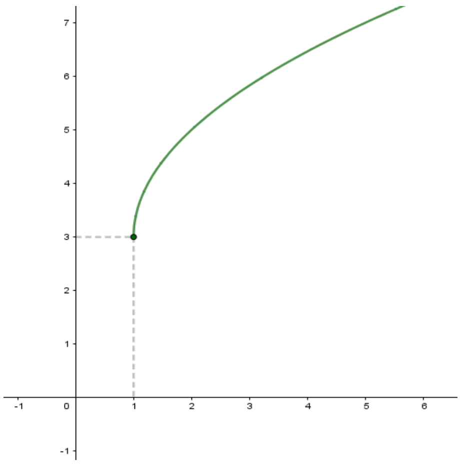
Paso 2: Graficar $\sqrt{x-1}$.



Paso 3: Graficar $2\sqrt{x-1}$.



Paso 4: Graficar $2\sqrt{x-1} + 3$.



c. Para hallar el ámbito de f se puede leer la gráfica de abajo hacia arriba. Note que el valor más bajo respecto al eje y corresponde a $f(1) = 3$ y la función crece hacia $+\infty$.

Por tanto $A_f = [3, \infty[$

Práctica: Transformaciones de la función inversa

Indicaciones generales

Realice en su cuaderno todos los procedimientos necesarios para llegar a la solución correcta.

1. Sea $f(x) = \sqrt{x} + 2$, Dominio: $D_f = [0, +\infty[$
   a. Determine el tipo de transformación que se aplicó a $g(x) = \sqrt{x}$.
   b. Grafique la función $f(x) = \sqrt{x} + 2$.

2. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, Dominio: $D_f = [0, +\infty[$. Aplique a $f(x)$ una traslación de 3 unidades hacia arriba.
   a. ¿Cuál es el criterio de la función trasladada?
   b. Grafique la función trasladada.

3. Sea $g(x) = \sqrt{x}$, Dominio: $D_g = [0, +\infty[$. Aplique a $g(x)$ una traslación de 5 unidades hacia abajo.
   a. ¿Cuál es el criterio de la función trasladada?
   b. Grafique la función trasladada.

4. Sea $f(x) = \sqrt{x+3}$, Dominio: $D_f = [-3, +\infty[$
   a. Determine el tipo de transformación que se aplicó a $g(x) = \sqrt{x}$.
   b. Grafique la función $f(x) = \sqrt{x+3}$.

5. Sea $g(x) = \sqrt{x-6}$, Dominio: $D_g = [6, +\infty[$
   a. Determine el tipo de transformación que se aplicó a $f(x) = \sqrt{x}$.
   b. Grafique la función $f(x) = \sqrt{x-6}$.

6. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, Dominio: $D_f = [0, +\infty[$. Aplique a $f(x)$ una traslación de 4 unidades hacia la izquierda.
   a. ¿Cuál es el criterio de la función trasladada?
   b. Grafique la función trasladada.

7. Sea $g(x) = \sqrt{x}$, Dominio: $D_g = [0, +\infty[$. Aplique a $g(x)$ una traslación de 8 unidades hacia la derecha.
   a. ¿Cuál es el criterio de la función trasladada?
   b. Grafique la función trasladada.

8. Sea $f(x) = \sqrt{-x+2}$, Dominio: $D_f =]-\infty, 2]$
   a. Determine el tipo de transformación que se aplicó a $g(x) = \sqrt{x}$.
   b. Grafique la función $f(x) = \sqrt{-x+2}$.

9. Sea $f(x) = -\sqrt{x+2}$, Dominio: $D_f = [-2, +\infty[$
   a. Determine el tipo de transformación que se aplicó a $g(x) = \sqrt{x}$.
   b. Grafique la función $f(x) = \sqrt{-x+2}$.

10. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, Dominio: $D_f = [0, +\infty[$. Aplique a $f(x)$ una reflexión con respecto al eje y y una traslación de 3 unidades hacia la derecha.
    a. ¿Cuál es el criterio de la función trasladada?
    b. Grafique la función trasladada.

11. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, Dominio: $D_f = [0, +\infty[$. Aplique a $f(x)$ una reflexión con respecto al eje x y una traslación de 3 unidades hacia la derecha.
    a. ¿Cuál es el criterio de la función trasladada?
    b. Grafique la función trasladada.

12. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, Dominio: $D_f = [0, +\infty[$. Aplique a $f(x)$ una traslación de 2 unidades hacia arriba y 7 unidades hacia la derecha.
    a. ¿Cuál es el criterio de la función trasladada?
    b. Grafique la función trasladada.

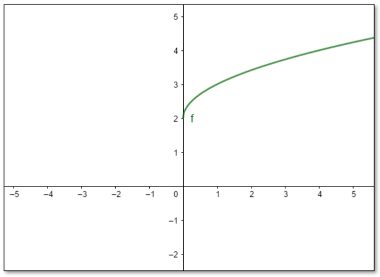
13. Sea $f(x) = \sqrt{x}$, Dominio: $D_f = [0, +\infty[$. Aplique a $f(x)$ una traslación de 3 unidades hacia abajo y 5 unidades hacia la derecha, además aplique una reflexión con respecto al eje y.
    a. ¿Cuál es el criterio de la función trasladada?
    b. Grafique la función trasladada.

14. Sea $f(x) = \sqrt{-x+7} - 7$, Dominio: $D_f =]-\infty, 7]$.
    a. Grafique $f(x)$
    b. A partir de la gráfica de la función $f(x)$ determine las intersecciones con los ejes.
    c. Determine el ámbito de $f(x)$.

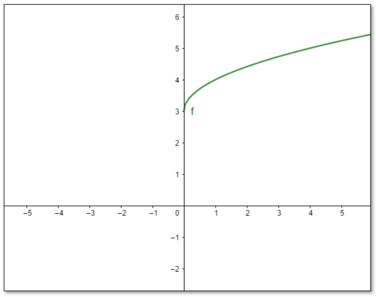
15. Sea $f(x) = -\sqrt{x-5} + 3$, Dominio: $D_f = [5, +\infty[$.
    a. Grafique $f(x)$
    b. A partir de la gráfica de la función $f(x)$ determine las intersecciones con los ejes.
    c. Determine el ámbito de $f(x)$.

Soluciones

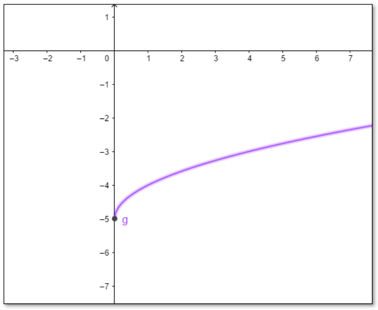
1. a. Tipo: Traslación vertical (2 unidades hacia arriba).
   b. Gráfica:



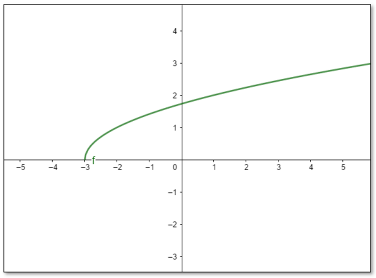
2. a. $f(x) = \sqrt{x} + 3$.
   b. Gráfica:



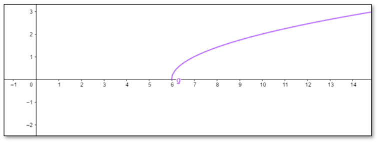
3. a. $f(x) = \sqrt{x} - 5$.
   b. Gráfica:



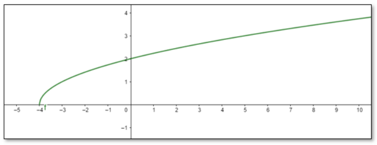
4. a. Tipo: Traslación horizontal (2 unidades hacia la izquierda).
   b. Gráfica:



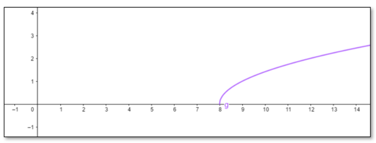
5. a. Tipo: Traslación horizontal (6 unidades hacia la derecha).
   b. Gráfica:



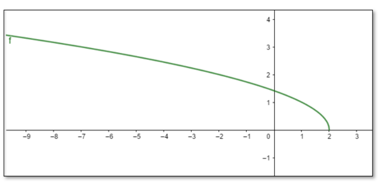
6. a. $f(x) = \sqrt{x+4}$.
   b. Gráfica:



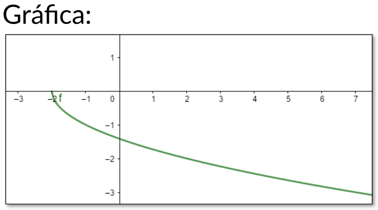
7. a. $f(x) = \sqrt{x-8}$.
   b. Gráfica:



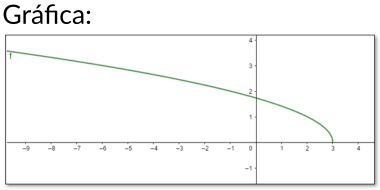
8. a. Tipo: Traslación horizontal (2 unidades hacia la derecha) y reflexión con respecto al eje y.
   b. Gráfica:



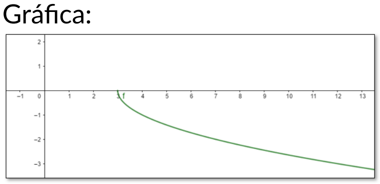
9. a. Tipo: Traslación horizontal (2 unidades hacia la izquierda) y reflexión con respecto al eje x.
   b. Gráfica:



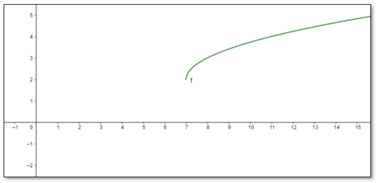
10. a. $f(x) = \sqrt{-x+3}$.
    b. Gráfica:



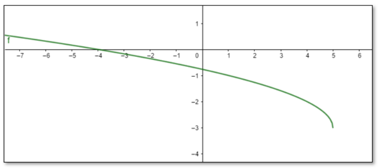
11. a. $f(x) = -\sqrt{x-3}$.
    b. Gráfica:



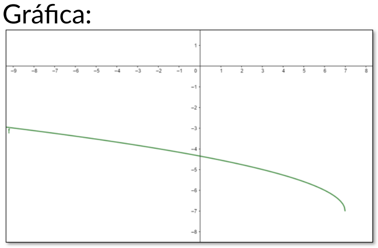
12. a. $f(x) = \sqrt{x-7}+2$.
    b. Gráfica:



13. a. $f(x) = \sqrt{-x+5}-3$.
    b. Gráfica:

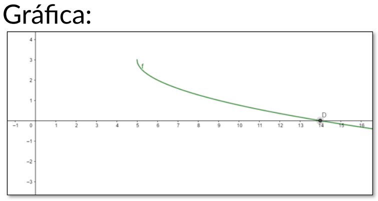


14. a. Gráfica:



    b. Intersecciones con los ejes:
       - $I_x : (-42, 0)$
       - $I_y : (0, -4{,}35)$
    c. Ámbito: $[-7, +\infty[$

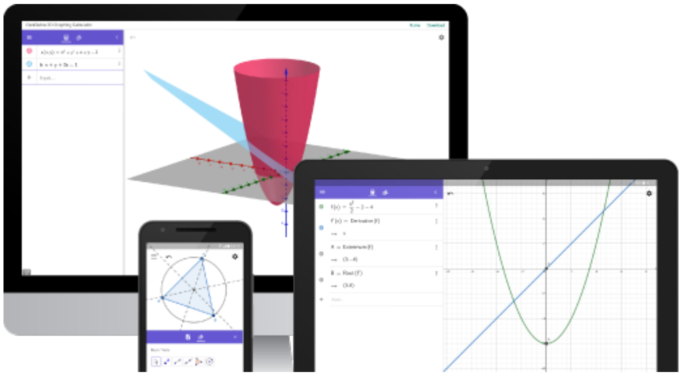
15. a. Gráfica:



    b. Intersecciones con los ejes:
       - $I_x : (14, 0)$
       - I_y : No interseca al eje y.
    c. Ámbito: $]-\infty, 3]$

Anexos

¿Desea ver material interactivo?



Ingrese al enlace para conocer más acerca de la inversa de la función lineal y su comportamiento gráficamente.

Referencias bibliográficas

- F Prima. (2015). *Matemática 11: hacia la resolución de problemas*. (2015) F prima Grupo Editorial.
- Gómez, L. (2016). *Matemática 11°: Desarrollando Habilidades*. San José, Costa Rica. Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS).
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programa de estudios. Matemáticas. Costa Rica. Obtenido de ENLACE.
- Porras, V., Durán, E. (2015). Matemática 11°. San José, Costa Rica. Publicaciones Porras.
- Santillana. (2016). *Trabajar en: Matemática 11*. Costa Rica. Editorial Santillana.