PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

7°

Operaciones Fundamentales en $\mathbb{Z}$

Colaboladores:

Prof. Didier Alberto Castro Méndez
Prof. Julissa Bosque Chaves
Prof. Bryan Vargas Mora

Sumas y Restas de Números Enteros

Suma en $\mathbb{Z}$

Para resolver sumas entre dos o más números enteros de **igual signo** se suman sus valores absolutos y al resultado se le coloca el signo de los sumandos.

Ejemplo 1

1. $4 + 5 = 9$
2. $-6 + (-8) =$ **Primer Paso** Valor Absoluto de cada número
   $|-6| = 6$ y $|-8| = 8$
   Segundo Paso Sumar sus valores absolutos
   $6 + 8 = 14$
   Tercer Paso Resultado
   $-6 + (-8) = -14$

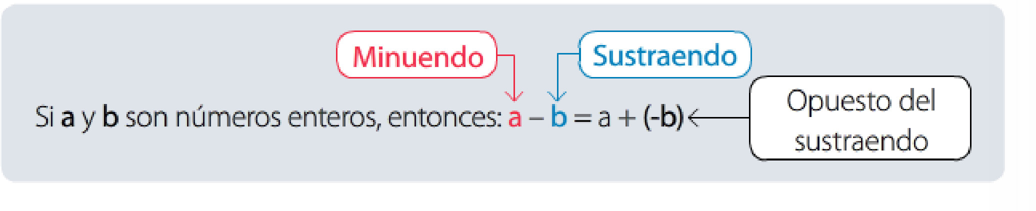
Para resolver sumas entre dos o más números enteros de **diferente signo** se resta, del mayor valor absoluto, el menor y al resultado se le antepone el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplo 2

1. $-6 + 9 =$
   Primer Paso Valor Absoluto de cada número
   $|-6| = 6$ y $|9| = 9$
   Segundo Paso Restar sus valores absolutos
   $9 - 6 = 3$
   Tercer Paso Dar el resultado con el signo del valor absoluto del número mayor
   $-6 + 9 = 3$
2. $-10 + 4 =$
   Primer Paso Valor Absoluto de cada número
   $|-10| = 10$ y $|4| = 4$
   Segundo Paso Restar sus valores absolutos
   $10 - 4 = 6$
   Tercer Paso Dar el resultado con el signo del valor absoluto del número mayor
   $-10 + 4 = -6$

Resta en $\mathbb{Z}$

Para resolver restas entre dos o más números enteros se puede resolver como la suma entre el minuendo con el **opuesto del sustraendo**, es decir:



Ejemplo 3

1. $5 - 8 =$
   Planteando la nueva operación con el opuesto del sustraendo, se tiene $5 + (-8) =$
   Primer Paso Valor Absoluto de cada número
   $|5| = 5$ y $|-8| = 8$
   Segundo Paso Restar sus valores absolutos
   $8 - 5 = 3$
   Tercer Paso Dar el resultado con el signo del valor absoluto del número mayor
   $5 - 8 = -3$
2. $(-1) - 6 =$
   Planteando la nueva operación con el opuesto del sustraendo, se tiene $(-1) + (-6) =$
   Primer Paso Valor Absoluto de cada número
   $|-1| = 1$ y $|-6| = 6$
   Segundo Paso Como son signos iguales se suman sus valores absolutos
   $6 + 1 = 7$
   Tercer Paso Dar el resultado con el signo del valor absoluto del número mayor
   $(-1) + (-6) = -7$

Ejercicio 1

1. Complete la siguiente tabla, resolviendo las respectivas sumas de números enteros.

+	-5	-6	-7	2	-18
-2					
3					
-10					
14					

2. Resuelva cada suma, luego anote el resultado en el recuadro.

-6 + 0 = ☐　　-10 + 12 = ☐
-3 + 1 = ☐　　-15 + (-13) = ☐
-10 + (-6) = ☐

3. Resuelva cada resta, luego anote el resultado en el recuadro.

-3 – (-7) = ☐　　-5 – 2 = ☐　　-4 – (-1) = ☐

Mutiplicación y División en $\mathbb{Z}$

Recordemos la noción de multiplicación al escribir, por ejemplo,

$$5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

Siguiendo esta noción, al multiplicar números enteros como por ejemplo:

$$5 \cdot -4 = -4 + -4 + -4 + -4 + -4 = -20$$

Si por otra parte, multiplicamos dos números negativos, como por ejemplo, $-5 \cdot -4$, podemos utilizar la noción del inverso de la siguiente manera:

$$-5 \cdot -4 = -(5) \cdot -4 = -(-4 + -4 + -4 + -4 + -4) = -(-20) = 20$$

De los ejemplos anteriores, y para simplificar los cálculos podemos hablar de la ley de signos, esta establece que:

Definición 1 (Ley de Signos)

- Al multiplicar o dividir dos números enteros **del mismo signo** el resultado es **positivo**.
  a) $4 \cdot 8 = 32$ b) $-2 \cdot -5 = 10$ c) $10 \div 2 = 5$ d) $-8 \div -4 = 2$
- Al multiplicar o dividir dos números enteros **de signos distintos** el resultado es **negativo**:
  a) $-4 \cdot 6 = -24$ b) $5 \cdot -15 = -75$ c) $-16 \div 8 = -2$ d) $25 \div -5 = -5$

Ejercicio 2

Resuelva las siguientes multiplicaciones y divisiones con números enteros.

1. $-63 \div \_\_ = -7$
2. $-4 \cdot 9 = \_\_$
3. $3 \cdot \_\_ = -21$
4. $\_\_ \div 2 = -60$
5. $-121 \cdot 2 = \_\_$
6. $-144 \div -36 = \_\_$
7. $35 \div \_\_ = 7$
8. $-7 \cdot -3 = \_\_$
9. $-13 \cdot \_\_ = 39$
10. $\_\_ \div -5 = -3$
11. $33 \div 11 = \_\_$
12. $1755 \div -15 = \_\_$
13. $-35 \cdot \_\_ = 595$
14. $595 \div -17 = \_\_$
15. $13 \cdot 25 = \_\_$

Potenciación en $\mathbb{Z}$

Una potencia cuya base es un número entero y su exponente es un número natural, representa una multiplicación de un número por sí mismo una determinada cantidad de veces.

Definición 2

Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la potencia de un número se representa como $a^n = b$ donde a es la base, n el exponente y b el resultado. Por lo tanto $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces a}}$ ie, a^n es una potencia de base a y exponente n.

Ejemplo 4

Complete la siguiente tabla

Potencia	Base	Exponente	Desarrollo	Resultado
$(-5)^4$				
$(-2)^9$				

Nota

- Si a es positivo y existe un menos multiplicando a la potencia, el resultado de la potencia es negativa. Es decir $-a^n$ siempre es negativa con $a \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{Z}$.

$$-15^3 = -3375 \qquad -10^4 = -10000 \qquad -1^{100} = -1$$

- Si la base es un número negativo y el exponente es un número par el resultado de la potencia siempre es positiva.

$$(-30)^2 = 900 \qquad (-5)^4 = 625 \qquad (-2)^8 = 256$$

- Si la base es un número negativo y el exponente es un número impar el resultado de la potencia siempre es negativa.

$$(-3)^3 = -27 \qquad (-6)^5 = -16807 \qquad (-12)^3 = -1728$$

Propiedades de Potencias en $\mathbb{Z}$

Definición 3

- **Multiplicación de potencias de igual base:** Para multiplicar potencias de igual base se conserva la base y se suman los exponentes.

$$\forall a, b, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

- **División de potencias de igual base:** Para dividir potencias de igual base se conserva la base y se restan los exponentes.

$$\forall a, x, y \in \mathbb{Z} \mid a \neq 0 \Rightarrow a^x \div a^y = a^{x-y}$$

- **Potencia de una potencia:** La potencia de una potencia equivale a una potencia simple cuya base es la misma y cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$\forall a, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

- **Potencia de un producto:** En una potencia cuya base es una multiplicación, se eleva cada factor al exponente obteniendo un producto de potencias de igual exponente cuyas bases corresponden a los factores de dicha multiplicación.

$$\forall a, b, x, y, z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x \quad \vee \quad (a^x \cdot b^y)^z = a^{x \cdot z} \cdot b^{y \cdot z}$$

- **Potencia de una división:** En una potencia cuya base es un división, se eleva cada factor al exponente obteniendo una división de potencias de igual exponente cuyas bases corresponden a los factores de dicha división.

$$\forall a, b, x, y, z \in \mathbb{Z} \mid b \neq 0 \Rightarrow (a : b)^x = a^x : b^x \quad \vee \quad (a^x : b^y)^z = a^{x \cdot z} : b^{y \cdot z}$$

- Todo número entero elevado a la uno, siempre es el mismo número.
- Uno elevado a cualquier número entero es igual a uno.
- Todo número entero, distinto de cero, elevado a la cero es uno.

Nota

En la potenciación no es es posible aplicar la propiedades distributiva con respecto a la suma y a la resta

$$\forall a, b, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$$

Ejemplo 5

Resuelva la siguiente potencia $(5 \cdot 10^{11})(7 \cdot 10^{-9})$

Ejercicio 3

Determine el resultado de las siguientes potencias, en una sola potencia e indique su signo

- $(-2)^{216} \cdot (-2)^{101}$
- $(-5)^{68} \div (-5)^{34}$

Ejercicio 4

Resuelva las siguientes operaciones, exprese su resultado en notación potencial

- $(2^4)^2$ =______
- $(15^3)^2$ =______
- $(-2^4)^6$ =______
- $y^2 \cdot y^7$ =______
- $\left(\frac{x}{y}\right)^4$ =______
- $x^2 \cdot x^4$ =______
- $y^3 \cdot y^8 \cdot y^{12}$ =______
- $n^9 \div n^4$ =______
- $(ax)^4$ =______
- $(ay^2)^3$ =______
- $-(2b)^5$ =______
- $(3x)^0$ =______
- $-2(3x-2)^0$ =______
- $(x^2y^3)^2 \cdot (xy)^5$ =______
- $x^{11} \div x^4$ =______
- $(2^2+4)^2$ =______
- $4xy^3 \cdot 3y \cdot y^6$ =______
- $\dfrac{(2xy^3)^2}{(4xy)^3}$ =______

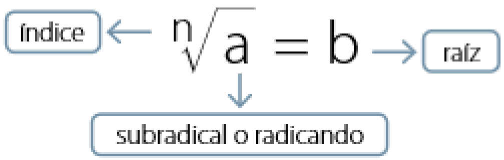
Ejercicio 5

Aplique las propiedades de potenciación para resolver cada ejercicio expresando cada resultado en base 2 o 3.

- $4^{12} + 4^{12} + 8^{12}$ =__________
- $3 \cdot 4^6 + 4 \cdot 3^9$ =__________
- $3^7 \cdot 7 + 5 \cdot 3^7$ =__________
- $6 \cdot 2^9 + 9 \cdot 3^5$ =__________

Radicación en $\mathbb{Z}$

La radicación es la operación inversa de la potenciación. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ entonces



Donde la raíz enésima de un número entero a es igual a b se escribe $\sqrt[n]{a} = b$ donde $n \in \mathbb{N}$ es el índice de la raíz y a es la cantidad subradial o radicando. El índice indica la raíz que se desea calcular, en este caso si es 2 sería la raíz cuadrada, 3 sería la raíz cúbica así sucesivamente. Es importante tener en cuenta la siguiente notación:

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}}$$

Ejemplo 6

Analice cada expresión radical, luego complete los espacios en blanco

Expresión	índice	Subradical
$\sqrt{64}$		
$\sqrt{23}$		
$\sqrt[3]{27}$		
$\sqrt[4]{175}$		
$\sqrt[7]{t-135}$		

Definición 4 (Notación Exponencial)

Sean $x, y, n \in \mathbb{Z}$ con $n \geq 2$, entonces la raíz de un número se denota por $\sqrt[n]{y}$, donde n es el índice, y el subradical y se cumple que la raíz enésima de y es un número x tal que $x^n = y$. Por lo que

$$\boxed{\sqrt[n]{y} = x \Leftrightarrow x^n = y}$$

Ejemplo 7

Examine cada expresión radical y aplique la notación exponencial según corresponda

- $\sqrt{25}$ =_______
- $\sqrt[3]{36}$ =_______
- $\sqrt[5]{-450}$ =_______
- $\sqrt[4]{175}$ =_______

En la radicación de números enteros se presentan los siguientes casos:

1. Las raíces con indice par o impar y el subradical positivo su resultado siempre es positivo.

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt[3]{125} = 5$$

2. Las raíces con indice impar y el subradical negativo, su resultado siempre es negativo.

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \sqrt[101]{-1} = -1$$

3. Las raíces con indice par y el subradical negativo, no estan definidas en el conjunto de los números enteros, pues este tipo de expresiones pertenecen al conjunto de los números complejos.

$$\sqrt{-25} \text{ no esta definida}$$

Cálculo y propiedades de radicales en $\mathbb{Z}$

Ahora bien para calcular raices en el conjunto de los números enteros se deben seguir los siguientes pasos:

1. Realizar la factorización prima del subradical.
2. Forme potencias con los divisores primos encontrados.
3. Exprese el subradical como el producto de los divisores primos encontrados como potencias de los divisores primos encontrados.
4. Obtenga la raíz de cada uno de los divisores.
5. Realice la multiplicación de los términos.

Por otra parte para el cálculo de radicales en $\mathbb{Z}$ se pueden emplear las siguiente propiedades:
Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $n, m \geq 2$, se cumple que:

- **Raíz de un producto:**

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

- **Raíz de un cociente:**

$$\sqrt[n]{a \div b} = \sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b}$$

- **Raíz de una potencia:**

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m \div n}$$

- **Raíz de una raíz:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

- **Valor absoluto:**

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & \text{si } n \text{ es par} \\ a & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 8

Calcule los siguientes radicales

- $\sqrt{900}$

  1. Se realiza la factorización prima de 900

  $$900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

  2. Se agrupa en potencias

  $$900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

  3. Expresar el subradical en la igualdad de potencias del paso anterior

  $$\sqrt{900} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$$

  4. Aplicando propiedades de potencias se procede a realizar dicho cálculo:

  $$\begin{aligned} \sqrt{900} &= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} \\ &= |2| \cdot |3| \cdot |5| \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 30 \end{aligned}$$

- $\sqrt[3]{8x^3y^{12}w^9}$
  Aplicando el mismo procedimiento tenemos que:

  $$\begin{aligned} \sqrt[3]{8x^3y^{12}w^9} &= \sqrt{2^3 \cdot x^3 \cdot y^{12} \cdot w^9} \\ &= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{x^3} \cdot \sqrt[3]{y^{12}} \cdot \sqrt[3]{w^9} \\ &= 2 \cdot x \cdot y^4 \cdot w^3 \\ &= 2xy^4w^3 \end{aligned}$$

- $\sqrt[12]{a^{36}b^{84}c^{60}}$
  Aplicando el mismo procedimiento tenemos que:

  $$\begin{aligned} \sqrt[12]{a^{36}b^{84}c^{60}} &= \sqrt[12]{a^{36}} \cdot \sqrt[12]{b^{84}} \cdot \sqrt[12]{c^{60}} \\ &= |a^3| \cdot |b^7| \cdot |c^5| \\ &= \pm a^3b^7c^5 \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Exprese los siguiente radicales en su forma más simple

- $\sqrt[3]{-27x^6y^3}$
- $-2ab^3\sqrt[6]{\dfrac{4096b^{36}}{729a^{12}}}$

Cuadrados perfectos

Definición 5

Un número cuadrado perfecto, es un número entero que se puede expresar como el producto de un número por sí mismo, dicho de otro modo, al multiplicar un número entero por sí mismo obtenemos un cuadrado perfecto, este número se puede encontrar por medio de una raíz cuadrada encontrando un número entero positivo.

Cuadrados Perfectos hasta el 20

- $\sqrt{1}=1$
- $\sqrt{4}=2$
- $\sqrt{9}=3$
- $\sqrt{16}=4$
- $\sqrt{25}=5$
- $\sqrt{36}=6$
- $\sqrt{49}=7$
- $\sqrt{64}=8$
- $\sqrt{81}=9$
- $\sqrt{100}=10$
- $\sqrt{121}=11$
- $\sqrt{144}=12$
- $\sqrt{169}=13$
- $\sqrt{196}=14$
- $\sqrt{225}=15$
- $\sqrt{256}=16$
- $\sqrt{289}=17$
- $\sqrt{324}=18$
- $\sqrt{361}=19$
- $\sqrt{400}=20$

Práctica Global

1. Simplifique al máximo los siguientes radicales

   a) $3b^3c^5\sqrt[3]{-27b^9c^{12}}$

   b) $3xy^2\sqrt{32x^{10}}$

   c) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^{24}}}}$

   d) $\dfrac{\sqrt[7]{a^{14}}}{\sqrt[7]{128b^{21}}}$

   e) $\sqrt{\dfrac{36a^4b^2}{49a^2}}$

   f) $-\sqrt{\dfrac{a^{18}}{b^6}}$

2. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Un tablero de ajedrez es un cuadrado formado por 64 casillas cuadradas del mismo tamaño ¿Cuántas casillas tiene cada lado del tablero?

   b) Al multiplicar el cuadro de un número por otro el resultado es 1764. Si el cuadrado de uno de los números es 36, ¿Cuál es el otro número?

c) Un cuadrado y un rectángulo poseen la misma área. La medida del largo del rectángulo es 25cm y la del ancho es 9cm ¿Cuál es la medida del lado del cuadrado?

3. Dadas las siguientes igualdades que involucran radicales, verifique cada una de ellas según su valor de verdad (falso o verdadero).

   a) $\sqrt[4]{10000 \cdot 625} = 50$

   b) $\sqrt[5]{-243 \cdot 32} = -6$

4. Exprese los siguientes radicales de la forma más simple

   a) $\sqrt{5\sqrt{10+2\sqrt{x}}}$ si $x = 9$

   b) $\left(\sqrt{x+2\sqrt{2x}}\right)$ si $x = 8$

Referencias

[1] Alvarado, M.(2018). *Matemática 7, serie Puentes del Saber* Editorial Santillana. San José, Costa Rica.

[2] Castro , D. & González, L (2020). Sétimo año: Reforma Educativa Hacía FARO. Imprenta Nacional, Cartago Costa Rica

[3] Ministerio de Educación Publica . (2017). Reforma Curricular en ética, Estética y Ciudadanía: Programas de Estudio de Matemáticas.Recuperado el 16 de noviembre del 2017 de: enlace

Algunas Soluciones