Ejercicios

Función inversa, exponencial y logaritmica

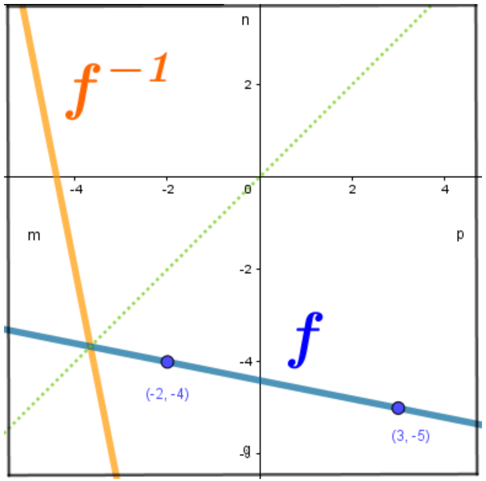
PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Profesor: Gustavo Núñez Morales

Ejercicio de función inversa

Si los puntos $(-4,-2)$ y $(3,-5)$ son puntos de la gráfica de la función lineal f, entonces el criterio de la función f y el criterio de su función inversa f es :



Ejercicio extraído del libro Pimas 11°

Solución

Paso a paso

Primero vamos a conseguir el criterio de f de la forma $f(x) = m \cdot x + b$

Teniendo los puntos $(-4, -2)$ y $(3, -5)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5 + 2}{3 + 4} = \frac{-3}{7}$$

Para obtener b se obtendrá al despejarlo de la ecuación de la recta $b = y - m \cdot x$ utilizando el punto $(-4, -2)$

$$b = -2 - \frac{-3}{7} \cdot (-4)$$

$$b = \frac{26}{7}$$

$$y = \frac{-3}{7}x - \frac{-26}{7}$$

Por lo tanto el criterio de f es $f(x) = -\frac{3}{7}x - \frac{26}{7}$

Finalmente obtendremos el criterio de $f^{-1}(x)$

$$f(x) = -\frac{3}{7}x - \frac{26}{7}$$

$$y = -\frac{3}{7}x - \frac{26}{7}$$

$$y + \frac{26}{7} = -\frac{3}{7}x$$

$$7 \cdot (y + \frac{26}{7}) = -3x$$

$$\frac{7y + 26}{-3} = x$$

$\frac{-7y - 26}{3} = x$;recuerde el cambio de signo en el numerador

Por lo tanto el criterio de f^{-1} es $f^{-1}(x) = \frac{-7x - 26}{3}$

Repaso del ejercicio
Función f y f^{-1}

01

Ecuación de la recta

Encontrar los valores de m y b para poder encontrar la ecuación de la recta

02

Criterio $f(x)$

Establecer el criterio $f(x)$ con la ecuación de la recta encontrada

03

Criterio f^{-1}

Encontrar $f^{-1}(x)$ por medio del criterio de $f(x)$

Ejercicio de función exponencial

La formula $A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$ permite calcula, en función del tiempo en años t, el dinero A que hay en una cuenta, generada por un capital principal P al ser invertido en un plan de ahorro con una tasa de interés anual de r, compuesto en n periodos al año.

Para un plan compuesto trimestralmente con una tasa de interés del $16\,\%$ anual:

a) Simplifique la fórmula con los datos del enunciado.

b) Si se invierte 50000 colones ¿Cuánto dinero hay en 3 años?

c) Si después de 4 años hay 200000 colones, ¿Cuánto dinero se invirtió originalmente?

c) ¿Cuánto tiempo dura el dinero invertido en duplicarse?

Ejercicio extraído del libro Pimas 11°

Solución

Paso a paso

a) $A = P \cdot \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n \cdot t}$

- $r = 16\,\% \to 0,16$
- $n = 4$;Hay 4 trimestres en un año.

Al sustituir estos valores en la fórmula obtenemos:

$$A = P \cdot \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{4 \cdot t}$$

b) La idea es utilizar la fórmula simplificada obtenida el la pregunta a)

$t = 3$
$P = 50000$
$A = ?$

Sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos :

$$A = 50000 \cdot \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{4 \cdot 3}$$

$A = 80051{,}61$

R/ Se obtiene el monto de $80051{,}61$

c) Nos preguntan ¿cuánto se tubo que haber depositado al inicio para que al pasar 4 años obtengamos 200 000 colones?

$t = 4 \qquad A = 200000 \qquad P = ?$

Al sustituir estos valores en la fórmula obtenemos:

$$200000 = P \cdot \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{4 \cdot 4}$$

$$\frac{200000}{\left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{4 \cdot 4}} = P$$

$P = 106781,6351$

R/ Se tubo que haber depositado inicialmente $106781,6351$

d) Nos preguntan cuánto tiempo debe de pasar para que el monto inicial P se duplique, por lo que será conveniente ver a A como $A = 2 \cdot P$ (ya que será el doble del inicial).

$P \qquad A = 2 \cdot P \qquad t = ?$

Sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos :

$$2P = P \cdot \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{4 \cdot t}$$

$$\frac{2P}{P} = \left(\frac{26}{25}\right)^{4 \cdot t}$$

$$2 = \left(\frac{26}{25}\right)^{4 \cdot t}$$

$$\log 2 = \log \left(\frac{26}{25}\right)^{4 \cdot t}$$

$$t = \frac{\log 2}{\log \left(\frac{26}{25}\right)^{4}} = 4,41$$

R/ deben de pasar aproximadamente 4,41 años.

Repaso del ejercicio

Función $A = P * (1 + \frac{r}{n})^{n*t}$

01

a)

Es importante identificar cada una de las variables del ejercicio

02

b)

Para el uso de operaciones muy complicadas puede apoyarse con la calculadora

03

c)

Desarrolle la fórmula planteada como ecuación para poder encontrar el valor de las variables

04

d)

Recuerde trabajar la función exponencial como la inversa de la logarítmica y viceversa

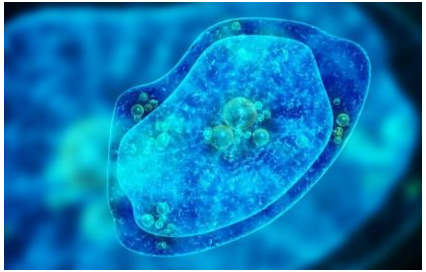
Ejercicio de función logaritmica

La relación entre el tiempo t en horas y el crecimiento de una población de P amebas, está dada por $\log_2\left(\frac{P}{k}\right) = t$, donde k es la población inicial de amebas.

a) Si se observa una población inicial de 6 amebas, entonces ¿cuántas amebas habrá después de transcurrida 8 horas?

b) Si se observa una población inicial de 16 amebas, ¿Cuánto tiempo después habrá 128 amebas?

c) Si después de 12 horas la población de amebas es de 81920, entonces ¿cuál fue la población inicial de amebas?



Ejercicio extraído del libro Pimas 11°

Solución

Paso a paso

a) Es importante identificar los valores que nos dan en la pregunta.

$k = 6 \qquad t = 8 \qquad P = ?$

Sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos :

$$\log_2 \left(\frac{P}{6} \right) = 8$$

$$\frac{P}{6} = 2^8$$

$$P = 6 \cdot 256$$

$P = 1536$ R/ en 8 horas habrá $P = 1536$ amebas

b) Es importante identificar los valores que nos dan en la pregunta.

$k = 16 \qquad P = 128 \qquad t = ?$

Sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos :

$$\log_2\left(\frac{128}{16}\right) = t$$

$t = 3$ R/ se necesitan 3 horas para obtener una población de 128 amebas

c) Es importante identificar los valores que nos dan en la pregunta.

$t = 12 \qquad P = 81920 \qquad k = ?$

Sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos :

$$\log_2\left(\frac{81920}{k}\right) = 12$$

$$\frac{81920}{k} = 2^{12}$$

$k = 20$ R/ Se necesito una población inicial de 20 amebas para obtener 81920 amebas en 12 horas.

Repaso del ejercicio función $log_2\left(\frac{P}{k}\right) = t$

01

02

03

a)

Recuerde trabajar la función exponencial como la inversa de la logarítmica y viceversa

b)

Para poder aproximar el valor de un logaritmo puede apoyarse con la calculadora

c)

Aplique propiedades de logaritmos y potencias para poder resolver este tipo de ecuaciones

Referencias bibliográficas

- F Prima. (2015). *Matemática 11: hacia la resolución de problemas*. (2015) F prima Grupo Editorial.
- Gómez, L. (2016). *Matemática 11°: Desarrollando Habilidades*. San José, Costa Rica. Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS).
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programa de estudios. Matemáticas. Costa Rica. Obtenido de ENLACE.
- Porras, V., Durán, E. (2015). Matemática 11°. San José, Costa Rica. Publicaciones Porras.
- Santillana. (2016). *Trabajar en: Matemática 11*. Costa Rica. Editorial Santillana.