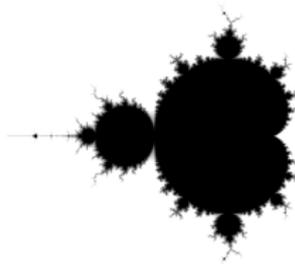


Diseño y análisis de la convergencia y estabilidad de métodos iterativos óptimos sin memoria para la resolución de ecuaciones no lineales

Armando Gabriel Solís Zúñiga

2019



Agenda

- 1 Introducción
- 2 Métodos multipasos
- 3 Método propuesto
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Conclusiones

- 1 Introducción
- 2 Métodos multipasos
- 3 Método propuesto
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Conclusiones

- Ecuaciones no lineales sin solución analítica.



- Ecuaciones no lineales sin solución analítica.



- Métodos iterativos (Newton-Rapson).



- Ecuaciones no lineales sin solución analítica.



- Métodos iterativos (Newton-Rapson).



- Convergencia y eficiencia.



- Ecuaciones no lineales sin solución analítica.
⇓
- Métodos iterativos (Newton-Rapson).
⇓
- Convergencia y eficiencia.
⇓
- Dinámica compleja.

Convergencia

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $x_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ entonces, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - \alpha| = 0.$$

Orden de convergencia

Si, además, existen: una constante $0 < c \leq 1$, un natural $n_0 \geq 0$ y un entero $p \geq 1$ tales que, para todo $n > n_0$:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c|x_n - \alpha|^p,$$

Orden de convergencia

Si, además, existen: una constante $0 < c \leq 1$, un natural $n_0 \geq 0$ y un entero $p \geq 1$ tales que, para todo $n > n_0$:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c|x_n - \alpha|^p,$$

o bien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c ;$$

entonces, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α con al menos orden p .

Orden de convergencia

Si, además, existen: una constante $0 < c \leq 1$, un natural $n_0 \geq 0$ y un entero $p \geq 1$ tales que, para todo $n > n_0$:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c|x_n - \alpha|^p,$$

o bien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = c ;$$

entonces, se dice que la sucesión $\{x_n\}$ converge a α con al menos orden p .

Orden de convergencia por medio de la ecuación del error

Si $e_n = x_n - \alpha$ denota el error en la n -ésima iteración, la relación:

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \quad c \in \mathbb{R}$$

se conoce como ecuación del error.

Orden de convergencia por medio de la ecuación del error

Si $e_n = x_n - \alpha$ denota el error en la n -ésima iteración, la relación:

$$e_{n+1} = ce_n^p + O(e_n^{p+1}), \quad c \in \mathbb{R}$$

se conoce como ecuación del error.

Al valor p obtenido se le conoce como el orden del método.

Métodos multipasos

Se le llama método multipaso a aquel que tiene la siguiente estructura:

$$y_{1n} = G_1(x_n),$$

$$y_{2n} = G_2(x_n),$$

$$y_{3n} = G_3(x_n),$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$x_{n+1} = G(x_n, y_{1n}, y_{2n}, y_{3n}, \dots)$$

Ejemplo de método multipaso:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\u_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(y_k)}, \\x_{k+1} &= u_k - \frac{f(u_k)}{f'(u_k)}\end{aligned}$$

Evaluaciones funciones

Sea d el número de evaluaciones funcionales de un método iterativo.

Evaluaciones funciones

Sea d el número de evaluaciones funcionales de un método iterativo.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}\end{aligned}$$

Evaluaciones funcionales: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f(y_k)$

$d = 3$

Eficiencia

Se define la eficiencia de un método iterativo como:

$$I = \frac{p}{d}$$

Eficiencia

Se define la eficiencia de un método iterativo como:

$$I = \frac{p}{d}$$

Índice de eficiencia

Se define el índice de eficiencia de un método iterativo de la siguiente manera:

$$EI = p^{1/d}$$

Eficiencia

Se define la eficiencia de un método iterativo como:

$$I = \frac{p}{d}$$

Índice de eficiencia

Se define el índice de eficiencia de un método iterativo de la siguiente manera:

$$EI = p^{1/d}$$

En ambos casos p es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones funcionales.

Orden de convergencia computacional

$$p \approx COC = \frac{\ln|(x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha)|}{\ln|(x_k - \alpha)/(x_{k-1} - \alpha)|}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Orden de convergencia computacional

$$p \approx COC = \frac{\ln|(x_{k+1} - \alpha)/(x_k - \alpha)|}{\ln|(x_k - \alpha)/(x_{k-1} - \alpha)|}, \quad k = 1, 2, \dots$$

α solución de $f(x) = 0$.

Orden de convergencia computacional aproximado

$$p \approx ACOC = \rho = \frac{\ln|(x_{k+1} - x_k)/(x_k - x_{k-1})|}{\ln|(x_k - x_{k-1})/(x_{k-1} - x_{k-2})|}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Conjetura de Kung y Traub

La conjetura de Kung y Traub definen que un método es óptimo si cumple la siguiente igualdad:

$$p = 2^{d-1}$$

p es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones funcionales.

Métodos sin memoria

Sea G un operador. Se le llama método sin memoria a aquel que tiene la siguiente estructura:

$$x_{n+1} = G(x_n)$$

Métodos con memoria

Sea G un operador. Se le llama método con memoria a aquel que tiene la siguiente estructura:

$$x_{n+1} = G(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots)$$

- Métodos multipasos.

- Métodos multipasos.
- Métodos sin memoria.

- Métodos multipasos.
- Métodos sin memoria.
- Métodos óptimos, según la conjetura de Kung y Traub.

- Métodos multipasos.
- Métodos sin memoria.
- Métodos óptimos, según la conjetura de Kung y Traub.
- Métodos que funcionan en \mathbb{C} .

Definición: Punto fijo

Dado un operador $G : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definido sobre la esfera de Riemann, un punto fijo \hat{z} es aquel que se mantiene invariante al operador G , o sea:

$$G(\hat{z}) = \hat{z}$$

Definición: Punto fijo

Dado un operador $G : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definido sobre la esfera de Riemann, un punto fijo \hat{z} es aquel que se mantiene invariante al operador G , o sea:

$$G(\hat{z}) = \hat{z}$$

Puntos fijos extraños: puntos fijos que no son soluciones de la ecuación $f(z) = 0$.

Definición: Punto fijo

Dado un operador $G : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definido sobre la esfera de Riemann, un punto fijo \hat{z} es aquel que se mantiene invariante al operador G , o sea:

$$G(\hat{z}) = \hat{z}$$

Puntos fijos extraños: puntos fijos que no son soluciones de la ecuación $f(z) = 0$.

Nota: $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Definición: Órbita de un punto

Dada una función racional $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida sobre la esfera de Riemann, la órbita de un punto z_0 es la sucesión de puntos:

$$\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}$$

del plano complejo generada por el método iterativo.

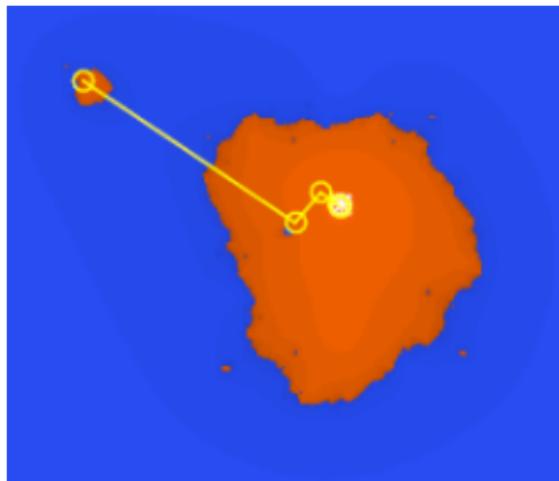


Figura: Órbita de un punto.

Definición: punto k -periódico

Dada una función racional $R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ definida sobre la esfera de Riemann, Un punto \hat{z} es k -periódico si se cumple que:

$$R^k(\hat{z}) = \hat{z} \text{ y } R^p(\hat{z}) \neq \hat{z} \text{ para } p = 1, 2, \dots, k - 1.$$

Definiciones sobre dinámica compleja

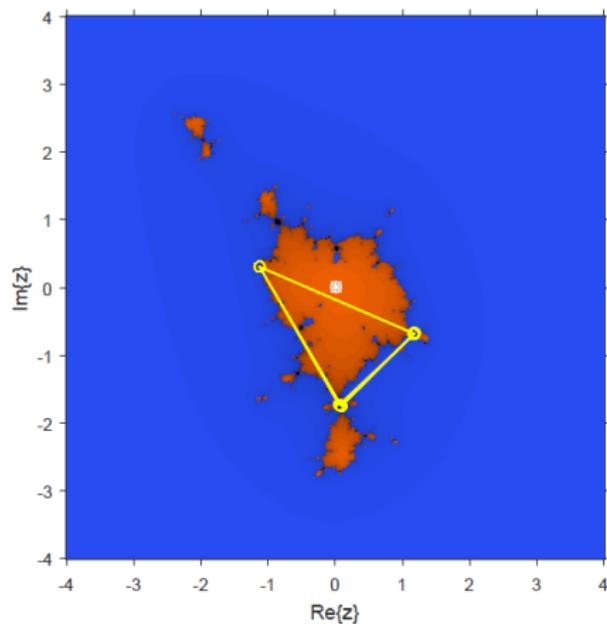


Figura: Órbita de período tres.

Estabilidad de puntos fijos

Los puntos fijos se pueden clasificar según el comportamiento del operador derivada sobre ellos, así, un punto fijo \hat{z} puede ser:

Estabilidad de puntos fijos

Los puntos fijos se pueden clasificar según el comportamiento del operador derivada sobre ellos, así, un punto fijo \hat{z} puede ser:

- Atractor, si $|R'(\hat{z})| < 1$

Estabilidad de puntos fijos

Los puntos fijos se pueden clasificar según el comportamiento del operador derivada sobre ellos, así, un punto fijo \hat{z} puede ser:

- Atractor, si $|R'(\hat{z})| < 1$
- Superatractor, si $|R'(\hat{z})| = 0$

Estabilidad de puntos fijos

Los puntos fijos se pueden clasificar según el comportamiento del operador derivada sobre ellos, así, un punto fijo \hat{z} puede ser:

- Atractor, si $|R'(\hat{z})| < 1$
- Superatractor, si $|R'(\hat{z})| = 0$
- Repulsor, si $|R'(\hat{z})| > 1$

Estabilidad de puntos fijos

Los puntos fijos se pueden clasificar según el comportamiento del operador derivada sobre ellos, así, un punto fijo \hat{z} puede ser:

- Atractor, si $|R'(\hat{z})| < 1$
- Superatractor, si $|R'(\hat{z})| = 0$
- Repulsor, si $|R'(\hat{z})| > 1$
- Parabólico o indiferente, si $|R'(\hat{z})| = 1$

Definiciones sobre dinámica compleja

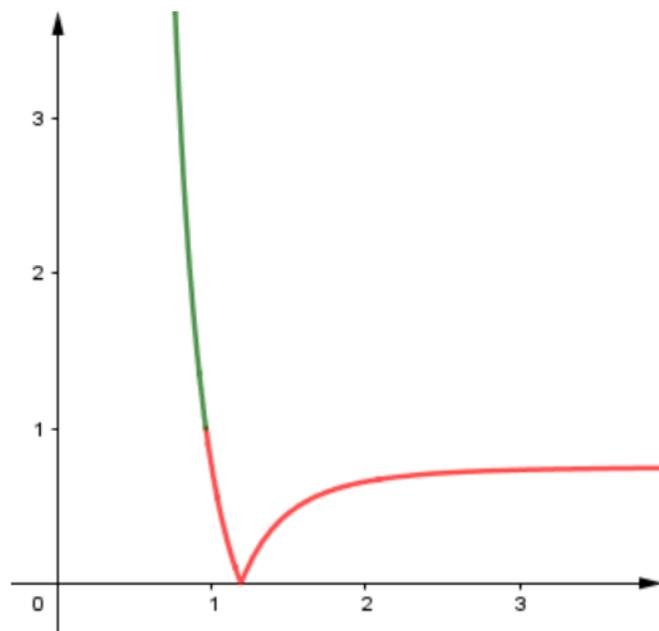


Figura: Operador $|R'|$

Estabilidad de puntos periódicos

La estabilidad de los puntos k -periódicos se puede calcular evaluando $|R'(\hat{z})|$ en todos los puntos de la órbita, luego, se dice que la órbita periódica de periodo k es **atractora** si:

$$|R'(\hat{z}_0)R'(\hat{z}_1) \cdots R'(\hat{z}_k)| < 1$$

Cuencas de atracción

La cuenca de atracción de un atractor z es el conjunto de preimágenes de cualquier orden:

$$A(z) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z, n \rightarrow \infty\}$$

Cuencas de atracción

La cuenca de atracción de un atractor z es el conjunto de preimágenes de cualquier orden:

$$A(z) = \{z_0 \in \hat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow z, n \rightarrow \infty\}$$

Las cuencas de atracción son el conjunto de todas las órbitas posibles de un atractor, por tanto indican las regiones de convergencia de un método iterativo.

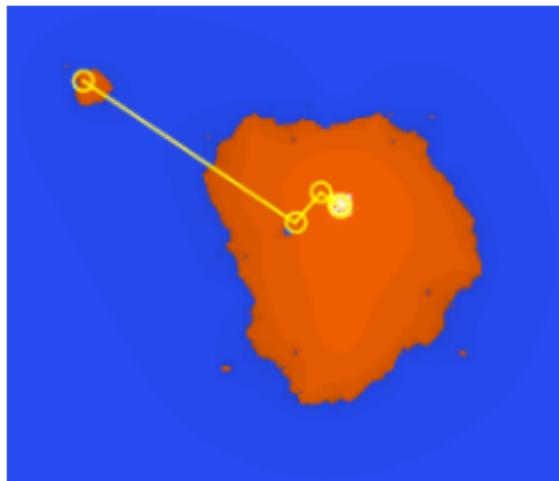


Figura: Cuenca de atracción de $z = 0$

El conjunto de todas las cuencas de atracción se llama conjunto de Fatou, F , y la frontera entre las componentes conexas de las cuencas de atracción se llama conjunto de Julia, J .

El conjunto de todas las cuencas de atracción se llama conjunto de Fatou, F , y la frontera entre las componentes conexas de las cuencas de atracción se llama conjunto de Julia, J .

Cuencas de atracción inmediata

La cuenca de atracción inmediata de un punto fijo \hat{z} es la componente conexa de $A(\hat{z})$ que contiene a \hat{z} .

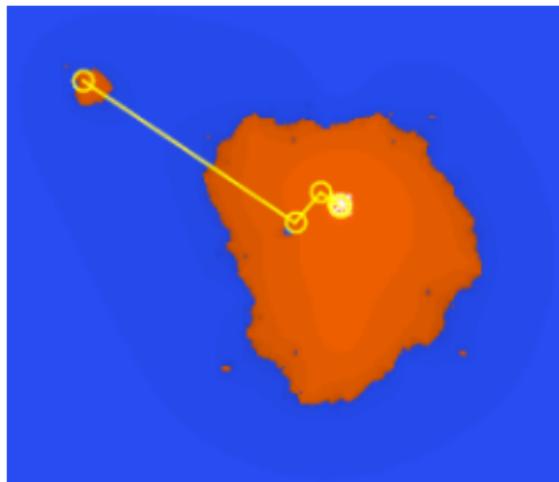


Figura: Cuenca de atracción inmediata de $z = 0$

Puntos críticos

Un punto crítico de un operador R es un punto z^* para el que la derivada de la función de punto fijo se anula, es decir:

$$R'(z^*) = 0$$

Puntos críticos

Un punto crítico de un operador R es un punto z^* para el que la derivada de la función de punto fijo se anula, es decir:

$$R'(z^*) = 0$$

Puntos críticos libres: puntos críticos que no son puntos fijos superatractores.

Puntos críticos

Un punto crítico de un operador R es un punto z^* para el que la derivada de la función de punto fijo se anula, es decir:

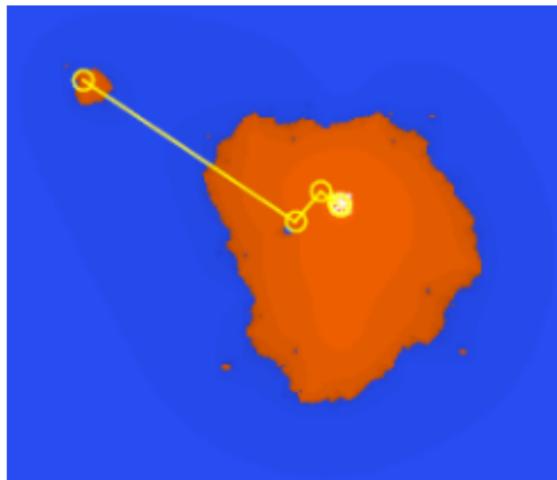
$$R'(z^*) = 0$$

Puntos críticos libres: puntos críticos que no son puntos fijos superatractores.

Teorema de Fatou y Julia

La cuenca de atracción inmediata de un punto k -periódico contiene, al menos, un crítico.

Definiciones sobre dinámica compleja



- 1 Introducción
- 2 Métodos multipasos**
- 3 Método propuesto
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Conclusiones

Método de Traub de orden 3

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}\end{aligned}$$

Evaluaciones funcionales: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f(y_k)$.

Método de Traub de orden 3

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}\end{aligned}$$

Evaluaciones funcionales: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f(y_k)$.

No es óptimo.

Método de Jarratt de orden 4

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2} \left(\frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{3f'(y_k) - f'(x_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Evaluaciones funcionales: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f'(y_k)$.

Método de Jarratt de orden 4

$$y_k = x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{2} \left(\frac{3f'(y_k) + f'(x_k)}{3f'(y_k) - f'(x_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Evaluaciones funcionales: $f(x_k)$, $f'(x_k)$ y $f'(y_k)$.

Es óptimo.

Método familia de Chun

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = y_k - H(t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}; \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$$

Método familia de Chun

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = y_k - H(t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}; \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$$

Particularmente si la función H cumple ciertas condiciones entonces el método es de orden 4, haciendo el método óptimo.

Familia de métodos de Chun:

Familia de métodos de Chun:
Chun:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - (1 + 2t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Familia de métodos de Chun:
Chun:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - (1 + 2t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Ostrowski, caso particular de la familia King
para $\beta = -2$:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + (2 + \beta)t_k}{1 + \beta t_k} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Familia de métodos de Chun:
Chun:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - (1 + 2t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Ostrowski, caso particular de la familia King
para $\beta = -2$:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + (2 + \beta)t_k}{1 + \beta t_k} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Kung y Traub:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{1}{(1 - t_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Familia de métodos de Chun:
Chun:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - (1 + 2t_k) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Ostrowski, caso particular de la familia King
para $\beta = -2$:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + (2 + \beta)t_k}{1 + \beta t_k} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Kung y Traub:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{1}{(1 - t_k)^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Zhao et al.:

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{1 + 2t_k + t_k^2}{1 - 4t_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}.\end{aligned}$$

Teorema

Sea $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en cada punto del intervalo abierto I tal que $\alpha \in I$, es una raíz simple de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Sea $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cualquier función suficientemente diferenciable tal que $H(0) = 1$, $H'(0) = 2$ y $|H''(0)| < \infty$. Entonces, si la estimación inicial x_0 está suficientemente cerca de la solución α , la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ obtenida, usando el método con función peso de Chun, converge a α , el orden de convergencia local es al menos 4 y su ecuación del error es:

$$e_{k+1} = \left[\left(5 - \frac{H''(0)}{2} \right) C_2^3 - C_2 C_3 \right] e_k^4 + O(e_k^5),$$

donde $C_j = \frac{1}{j!} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$, $j = 2, 3, \dots$ y $e_k = x_k - \alpha$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

- 1 Introducción
- 2 Métodos multipasos
- 3 Método propuesto**
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Conclusiones

Método familia MA1

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$
$$x_{k+1} = y_k - \frac{1}{1 - 2t_k + \gamma t_k^2} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}; \quad t_k = \frac{f(y_k)}{f(x_k)}$$

Se analizará el método MA1 sobre un polinomio genérico de grado dos

$$f(z) = (z - a)(z - b).$$

$$y = x - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

Se analizará el método MA1 sobre un polinomio genérico de grado dos

$$f(z) = (z - a)(z - b).$$

$$y = x - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

$$t = \frac{f(y)}{f(z)}$$

Se analizará el método MA1 sobre un polinomio genérico de grado dos

$$f(z) = (z - a)(z - b).$$

$$y = x - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

$$t = \frac{f(y)}{f(z)}$$

$$Of(z) = y - \frac{1}{1 - 2t + \gamma t} \frac{f(y)}{f'(z)}$$

Se analizará el método MA1 sobre un polinomio genérico de grado dos

$$f(z) = (z - a)(z - b).$$

$$y = x - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

$$t = \frac{f(y)}{f(z)}$$

$$Of(z) = y - \frac{1}{1 - 2t + \gamma t} \frac{f(y)}{f'(z)}$$

$$Of(z) = \frac{ab - z^2}{a + b - 2z} + \frac{(a - z)^2(b - z)^2}{(a + b - 2z)^3 \left(1 + \frac{(a - z)(-b + z)(2(a + b - 2z)^2 + (a - z)(-b + z)\gamma)}{(a + b - 2z)^4} \right)}$$

Uso de la Transformación de Möbius:

$$M(z) = \frac{z - a}{z - b}$$

Uso de la Transformación de Möbius:

$$M(z) = \frac{z - a}{z - b}$$

Por teorema del Escalado:

$$Op(z) = M(Of(M^{-1}(z))) = \frac{z^4 ((1 + z)^2 + \gamma)}{1 + z(2 + z + z\gamma)}$$

Uso de la Transformación de Möbius:

$$M(z) = \frac{z - a}{z - b}$$

Por teorema del Escalado:

$$Op(z) = M(Of(M^{-1}(z))) = \frac{z^4 ((1 + z)^2 + \gamma)}{1 + z(2 + z + z\gamma)}$$

Valores que simplifican el operador Op :

$$\gamma = 0, \gamma = \pm 2i, \gamma = -1 \text{ y } \gamma = -2.$$

$$Op(z) = z$$

$$Op(z) = z$$

Puntos fijos:

- $z = 0$
- $z = \infty$

$$Op(z) = z$$

Puntos fijos:

- $z = 0$
- $z = \infty$

Puntos fijos extraños:

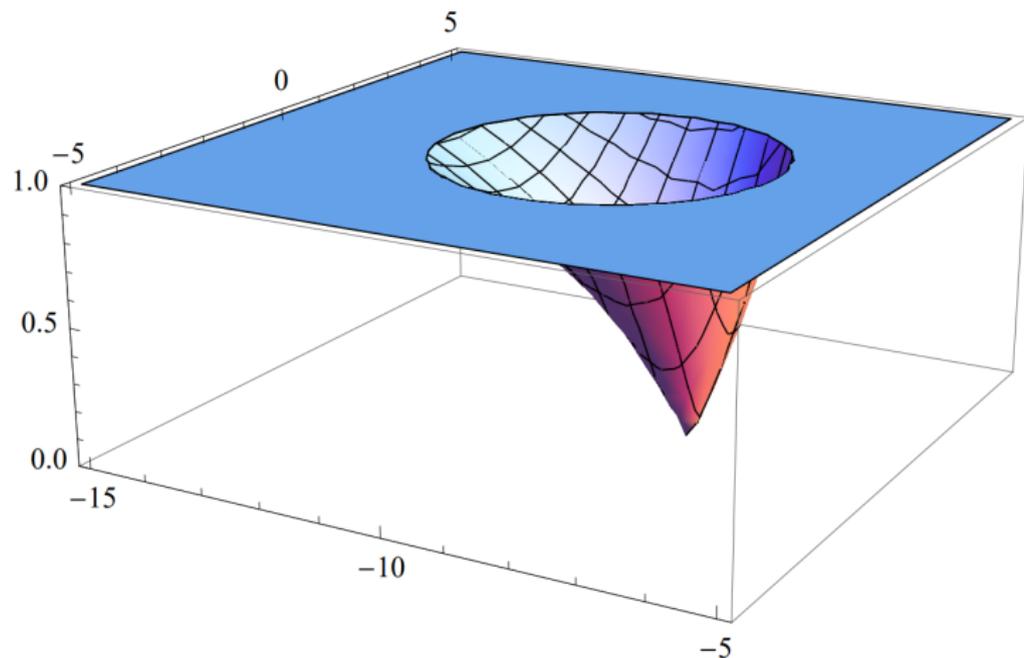
- $pf_0(\gamma) = 1$
- $pf_1(\gamma) = \frac{1}{4} \left(-3 - \sqrt{1 - 4\gamma} - \sqrt{-6 - 4\gamma + 6\sqrt{1 - 4\gamma}} \right)$
- $pf_2(\gamma) = \frac{1}{4} \left(-3 - \sqrt{1 - 4\gamma} + \sqrt{-6 - 4\gamma + 6\sqrt{1 - 4\gamma}} \right)$
- $pf_3(\gamma) = \frac{1}{4} \left(-3 + \sqrt{1 - 4\gamma} - \sqrt{-6 - 4\gamma - 6\sqrt{1 - 4\gamma}} \right)$
- $pf_4(\gamma) = \frac{1}{4} \left(-3 + \sqrt{1 - 4\gamma} + \sqrt{-6 - 4\gamma - 6\sqrt{1 - 4\gamma}} \right)$

Teorema

Los puntos fijos $z = 0$ y $z = \infty$ son superatractores independientemente del valor de γ , y para $z = 1$ se obtienen los siguientes resultados:

- 1 Atractor si $\left| \gamma + \frac{28}{3} \right| < 8$ en particular superatractor si $\gamma = -8$.
- 2 Parabólico si $\left| \gamma + \frac{28}{3} \right| = 8$
- 3 Repulsor si $\left| \gamma + \frac{28}{3} \right| > 8$

Análisis de MA1: estabilidad de los puntos fijos



Estabilidad del punto fijo extraño pf_0

Proposición

Los puntos fijos extraños $pf_1(\gamma)$ y $pf_2(\gamma)$ son:

- 1 Atractores si $0.23822873 < \gamma < 0.25$; en particular superatractor si $\gamma \approx 0.24621119$
- 2 Indiferentes si $\gamma \approx 0.23822873, \gamma \approx 0.25$
- 3 Repulsores para valores de γ diferentes de los anteriores.

Proposición

Los puntos fijos extraños $pf_1(\gamma)$ y $pf_2(\gamma)$ son:

- 1 Atractores si $0.23822873 < \gamma < 0.25$; en particular superatractor si $\gamma \approx 0.24621119$
- 2 Indiferentes si $\gamma \approx 0.23822873, \gamma \approx 0.25$
- 3 Repulsores para valores de γ diferentes de los anteriores.

Mientras que los puntos fijos extraños $pf_3(\gamma)$ y $pf_4(\gamma)$ son:

- 1 Atractores si $-21 < \gamma < -12$; en particular superatractor si $\gamma \approx -16.2465$
- 2 Indiferentes si $\gamma \approx -21, \gamma \approx -12$
- 3 Repulsores para valores de γ diferentes de los anteriores.

Proposición

Los puntos fijos extraños $pf_1(\gamma)$ y $pf_2(\gamma)$ son:

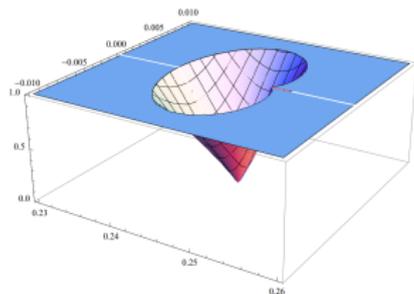
- 1 Atractores si $0.23822873 < \gamma < 0.25$; en particular superatractor si $\gamma \approx 0.24621119$
- 2 Indiferentes si $\gamma \approx 0.23822873, \gamma \approx 0.25$
- 3 Repulsores para valores de γ diferentes de los anteriores.

Mientras que los puntos fijos extraños $pf_3(\gamma)$ y $pf_4(\gamma)$ son:

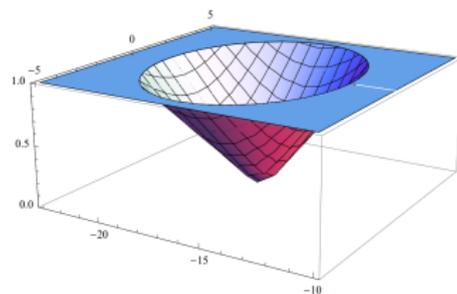
- 1 Atractores si $-21 < \gamma < -12$; en particular superatractor si $\gamma \approx -16.2465$
- 2 Indiferentes si $\gamma \approx -21, \gamma \approx -12$
- 3 Repulsores para valores de γ diferentes de los anteriores.

Nota: $Op'(pf_2) - Op'(pf_1) = 0$ y $Op'(pf_4) - Op'(pf_3) = 0$.

Análisis de MA1: estabilidad de los puntos fijos



Estabilidad de los puntos fijos
extraños $pf_1(\gamma)$ y $pf_2(\gamma)$



Estabilidad de los puntos fijos
extraños $pf_3(\gamma)$ y $pf_4(\gamma)$

$$Op'(z) = 0$$

$$Op'(z) = 0$$

Puntos críticos: 0 , ∞ y puntos fijos extraños superatractores.

$$Op'(z) = 0$$

Puntos críticos: 0 , ∞ y puntos fijos extraños superatractores.

Puntos críticos libres:

$$\bullet cr_1(\gamma) = -\frac{8+3\gamma}{8(1+\gamma)} - \frac{\sqrt{17\gamma^2-8\gamma^3}}{8\sqrt{1+2\gamma+\gamma^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(8+3\gamma)^2}{8(1+\gamma)^2} - \frac{4+4\gamma}{2(1+\gamma)} - \frac{12+2\gamma+\gamma^2}{2(1+\gamma)}} - \lambda$$

$$\bullet cr_2(\gamma) = -\frac{8+3\gamma}{8(1+\gamma)} - \frac{\sqrt{17\gamma^2-8\gamma^3}}{8\sqrt{1+2\gamma+\gamma^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(8+3\gamma)^2}{8(1+\gamma)^2} - \frac{4+4\gamma}{2(1+\gamma)} - \frac{12+2\gamma+\gamma^2}{2(1+\gamma)}} - \lambda$$

$$\bullet cr_3(\gamma) = -\frac{8+3\gamma}{8(1+\gamma)} + \frac{\sqrt{17\gamma^2-8\gamma^3}}{8\sqrt{1+2\gamma+\gamma^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(8+3\gamma)^2}{8(1+\gamma)^2} - \frac{4+4\gamma}{2(1+\gamma)} - \frac{12+2\gamma+\gamma^2}{2(1+\gamma)}} + \lambda$$

$$\bullet cr_4(\gamma) = -\frac{8+3\gamma}{8(1+\gamma)} + \frac{\sqrt{17\gamma^2-8\gamma^3}}{8\sqrt{1+2\gamma+\gamma^2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(8+3\gamma)^2}{8(1+\gamma)^2} - \frac{4+4\gamma}{2(1+\gamma)} - \frac{12+2\gamma+\gamma^2}{2(1+\gamma)}} + \lambda$$

$$\text{Con } \lambda = \frac{\sqrt{1+2\gamma+\gamma^2} \left(-\frac{4(8+3\gamma)}{1+\gamma} - \frac{(8+3\gamma)^3}{8(1+\gamma)^3} + \frac{(8+3\gamma)(12+2\gamma+\gamma^2)}{(1+\gamma)^2} \right)}{\sqrt{17\gamma^2-8\gamma^3}}$$

Proposición

El número de puntos críticos extraños del operador $Op(z)$ es 4, excepto en los casos siguientes:

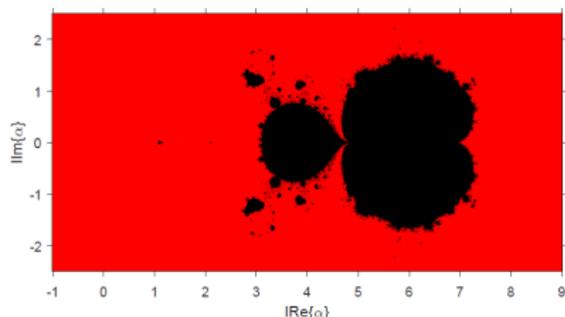
- Si $\gamma = 0$ entonces no hay puntos críticos libres.
- Si $\gamma = \frac{17}{8}$ entonces hay 2 puntos críticos libres, ambos de multiplicidad dos.
- Si $\gamma = -8$ entonces hay 3 puntos críticos libres, uno de ellos de multiplicidad dos.
- Si $\gamma = -4$ entonces hay 2 puntos críticos libres.

Análisis de MA1: planos paramétricos

Los planos de parámetros son gráficos de los valores críticos independientes del método que permiten determinar de manera visual qué valores de γ harán que el método sea estable o inestable.

Análisis de MA1: planos paramétricos

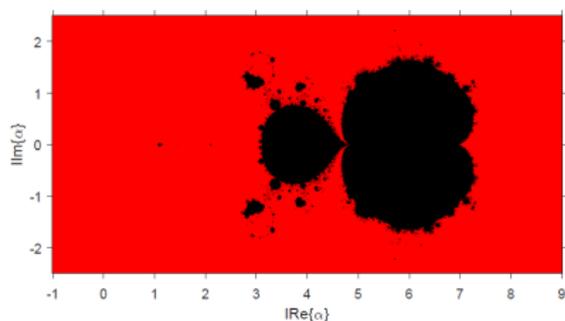
Los planos de parámetros son gráficos de los valores críticos independientes del método que permiten determinar de manera visual qué valores de γ harán que el método sea estable o inestable.



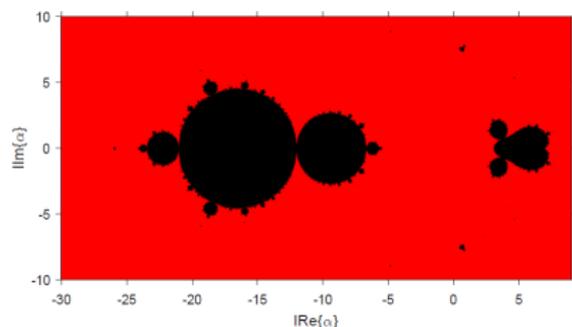
Plano de parámetros P_1 del método MA1 para $z = cr_{1,2}(\gamma)$

Análisis de MA1: planos paramétricos

Los planos de parámetros son gráficos de los valores críticos independientes del método que permiten determinar de manera visual qué valores de γ harán que el método sea estable o inestable.



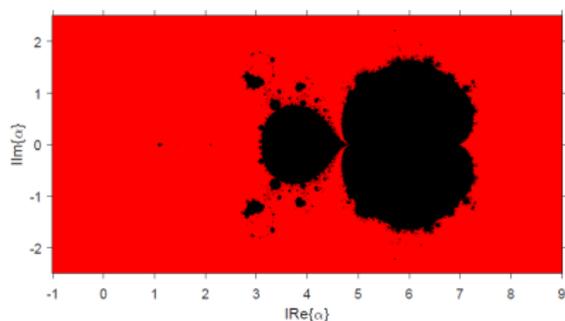
Plano de parámetros P_1 del método MA1 para $z = cr_{1,2}(\gamma)$



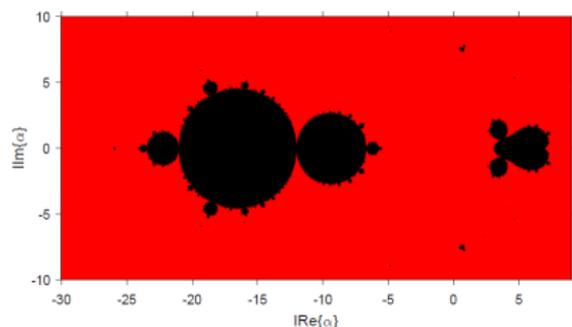
Plano de parámetros P_2 del método MA1 para $z = cr_{3,4}(\gamma)$

Análisis de MA1: planos paramétricos

Los planos de parámetros son gráficos de los valores críticos independientes del método que permiten determinar de manera visual qué valores de γ harán que el método sea estable o inestable.



Plano de parámetros P_1 del método MA1 para $z = cr_{1,2}(\gamma)$



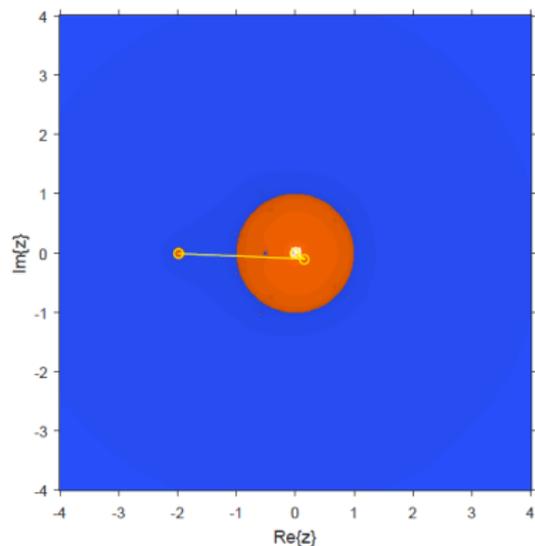
Plano de parámetros P_2 del método MA1 para $z = cr_{3,4}(\gamma)$

Particularmente $cr_1 = \frac{1}{cr_2}$ y $cr_3 = \frac{1}{cr_4}$ por lo que hay solo dos críticos independientes.

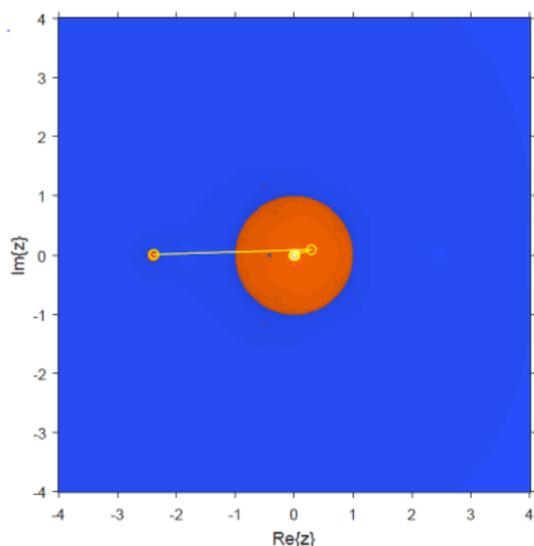
- Los planos dinámicos son otra forma de ampliar la información obtenida con los planos paramétricos.

- Los planos dinámicos son otra forma de ampliar la información obtenida con los planos paramétricos.
- Con los planos dinámicos se pueden visualizar las cuencas de atracción de puntos fijos o periódicos del método en estudio con algún valor del parámetro γ en particular.

Análisis de MA1: planos dinámicos

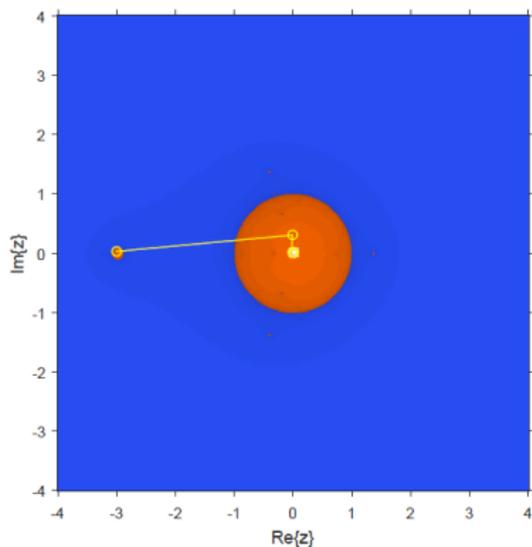


Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = -1$

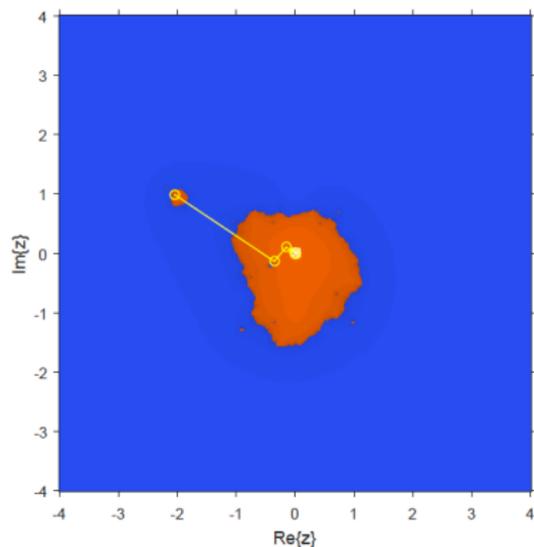


Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = -2$

Análisis de MA1: planos dinámicos

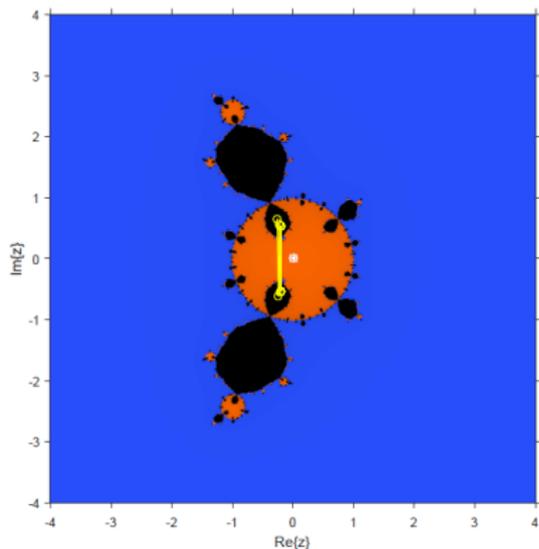


Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = -4$

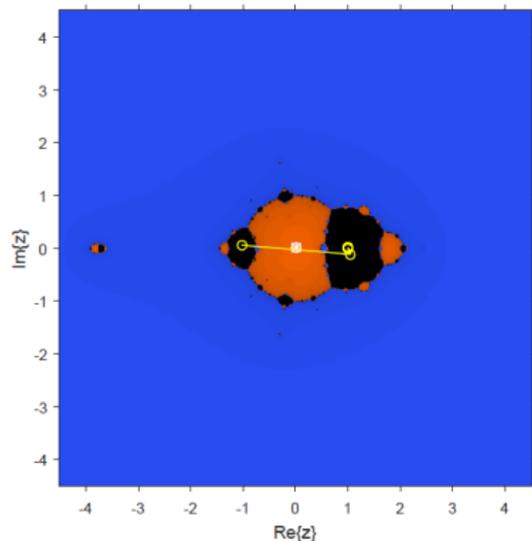


Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = 2i$

Análisis de MA1: planos dinámicos

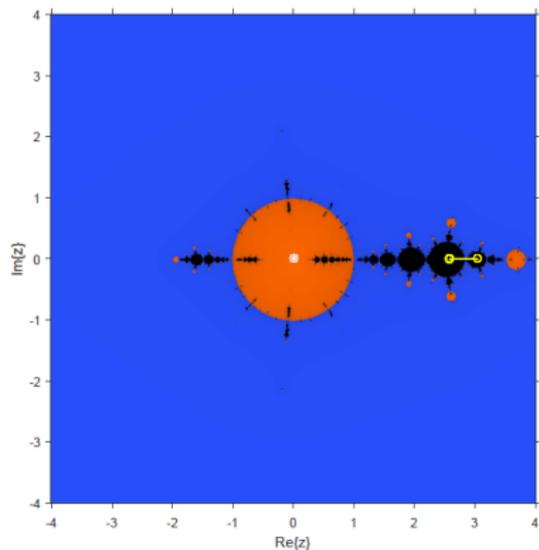


Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = 6$

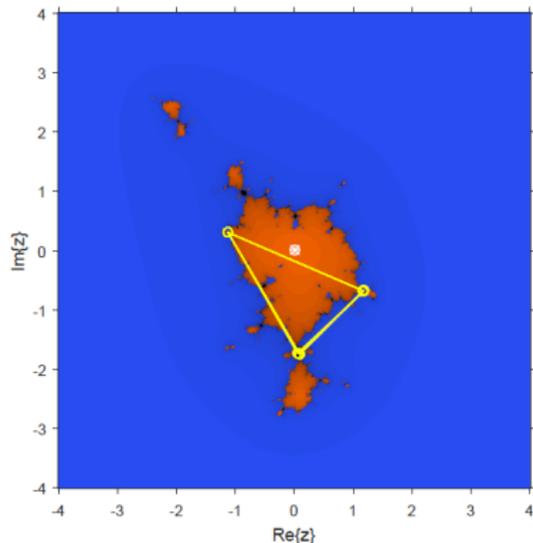


Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = -8$

Análisis de MA1: planos dinámicos

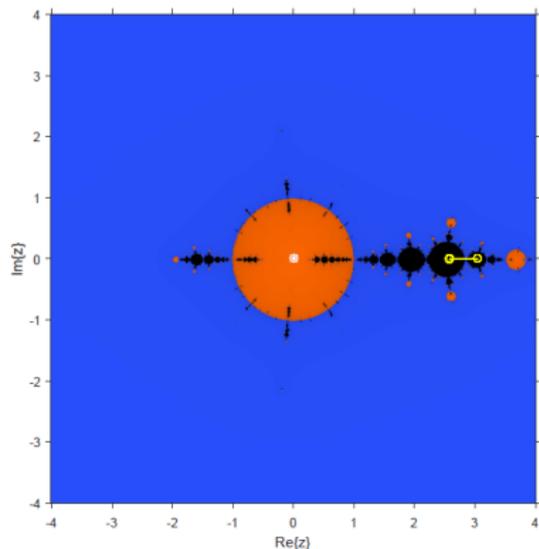


Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = -22$

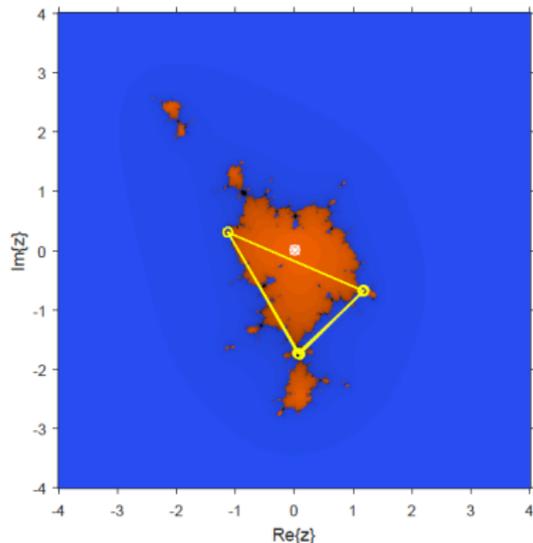


Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = 4.7 + 5.4i$

Análisis de MA1: planos dinámicos



Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = -22$



Plano dinámico del método MA1
para $\gamma = 4.7 + 5.4i$
Teorema de Sarkovskii

- 1 Introducción
- 2 Métodos multipasos
- 3 Método propuesto
- 4 Pruebas numéricas**
- 5 Conclusiones

VPA Mantisa	7000 dígitos
Matlab	R2015a
Tolerancia máxima	10^{-300}
Criterio de parada	$ x_k - x_{k-1} + f(x_k) $

Pruebas numéricas

Resultados obtenidos por los métodos iterativos para:

- $f(x) = (x - 1)^3 - 1$
- $x_0 = 2.5$

Métodos	ξ	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_{k+1})$	iter	ρ
Newton	2.0	6.2 e-447	1.1 e-892	11	2.0
Jarratt	2.0	1.9 e-490	3.1 e-1959	6	4.0
Chun	2.0	7.3 e-310	4.1 e-1236	6	4.0
Ostrowski	2.0	1.9 e-490	3.1 e-1959	6	4.0
Kung y Traub	2.0	2.1 e-397	1.0 e-1586	6	4.0
Zhao	2.0	7.9 e-562	3.9 e-2245	6	4.0
MA1 $_{\gamma=-1}$	2.0	3.3 e-729	1.3 e-2914	6	4.0
MA1 $_{\gamma=-2}$	2.0	5.2 e-477	3.0 e-1905	6	4.0
MA1 $_{\gamma=-4}$	2.0	3.9 e-1112	2.4 e-4445	7	4.0
MA1 $_{\gamma=2i}$	2.0 - 1.2 e-1489 i	5.0 e-373	4.1 e-1489	6	4.0
MA1 $_{\gamma=6}$	2.0	8.0 e-1009	8.5 e-4032	7	4.0
MA1 $_{\gamma=-8}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=-22}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=4.7+5.4i}$	2.0+1.8 e-3713 i	4.3 e-929	7.8 e-3713	7	4.0

Pruebas numéricas

Resultados obtenidos por los métodos iterativos para:

- $f(x) = \arctan(x)$
- $x_0 = 1.5$

Métodos	ξ	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_{k+1})$	iter	ρ
Newton	-	-	-	> 1000	-
Jarratt	-6.4 e-6559	3.3 e-1312	6.4 e-6559	7	5.0
Chun	-	-	-	> 1000	-
Ostrowski	-1.8 e-6294	2.4 e-1259	1.8 e-6294	7	5.0
Kung y Traub	-1.4 e-3382	5.7 e-677	1.4 e-3382	7	5.0
Zhao	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=-1}$	-1.4 e-1517	5.7 e-304	1.4 e-1517	5	5.0
MA1 $_{\gamma=-2}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=-4}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=2i}$	-1.6 e-4145 - 1.6 e-4145 i	1.6 e-829	2.3 e-4145	9	5.0
MA1 $_{\gamma=6}$	6.9 e-1823	4.9 e-365	6.9 e-1823	8	5.0
MA1 $_{\gamma=-8}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=-22}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=4.7+5.4i}$	-	-	-	> 1000	-

Pruebas numéricas

Resultados obtenidos por los métodos iterativos para:

- $f(x) = \left(\operatorname{sen}(x) - \frac{x}{2}\right)^2$
- $x_0 = 0.5$

Métodos	ξ	$ x_{k+1} - x_k $	$f(x_{k+1})$	iter	ρ
Newton	5.6 e-301	5.6 e-301	8.0 e-602	996	1.0
Jarratt	1.6 e-301	4.9 e-301	6.7 e-603	499	1.0
Chun	3.3 e-301	7.4 e-301	2.8 e-602	594	1.0
Ostrowski	1.6 e-301	4.9 e-301	6.9 e-603	499	1.0
Kung y Traub	1.6 e-301	4.2 e-301	6.6 e-603	540	1.0
Zhao	2.0 e-301	6.6 e-301	1.0 e-602	484	1.0
MA1 $_{\gamma=-1}$	2.0 e-301	7.6 e-301	1.0 e-602	449	1.0
MA1 $_{\gamma=-2}$	4.5 e-302	2.2 e-301	5.0 e-604	387	1.0
MA1 $_{\gamma=-4}$	7.0 e-2115	1.7 e-705	1.2 e-4229	8	3.0
MA1 $_{\gamma=2i}$	-1.4 e-301 + 8.1 e-302 i	4.6 e-301	7.1 e-603	530	1.0
MA1 $_{\gamma=6}$	3.2 e-301	5.8 e-301	2.6 e-602	671	1.0
MA1 $_{\gamma=-8}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=-22}$	-	-	-	> 1000	-
MA1 $_{\gamma=4.7+5.4i}$	2.4 e-301 + 2.2 e-302 i	4.1 e-301	1.4 e-602	697	1.0

- 1 Introducción
- 2 Métodos multipasos
- 3 Método propuesto
- 4 Pruebas numéricas
- 5 Conclusiones**

- El orden de convergencia no es lo único que define cuán eficiente y estable es un método iterativo.

- El orden de convergencia no es lo único que define cuán eficiente y estable es un método iterativo.
- En contraste con la teoría sobre dinámica compleja, la práctica numérica dio resultados favorables sobre los métodos en estudio.

- El orden de convergencia no es lo único que define cuán eficiente y estable es un método iterativo.
- En contraste con la teoría sobre dinámica compleja, la práctica numérica dio resultados favorables sobre los métodos en estudio.
- Se logró encontrar valores de γ para los que el método MA1 son mejores que los métodos iterativos conocidos.

- El orden de convergencia no es lo único que define cuán eficiente y estable es un método iterativo.
- En contraste con la teoría sobre dinámica compleja, la práctica numérica dio resultados favorables sobre los métodos en estudio.
- Se logró encontrar valores de γ para los que el método MA1 son mejores que los métodos iterativos conocidos.
- Trabajos futuros: diseño y estudio dinámico de métodos con memoria, métodos para funciones con multiplicidad y para sistemas de ecuaciones no lineales.

TEC | Tecnológico
de Costa Rica



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA