TEC | Tecnológico de Costa Rica

PAEM

Proyecto de apoyo a la educación matemática

PyR

Planteo y resolución de problemas en contextos reales

Profesor José Paulo Jiménez Segura

GUÍA INTRODUCTORIA

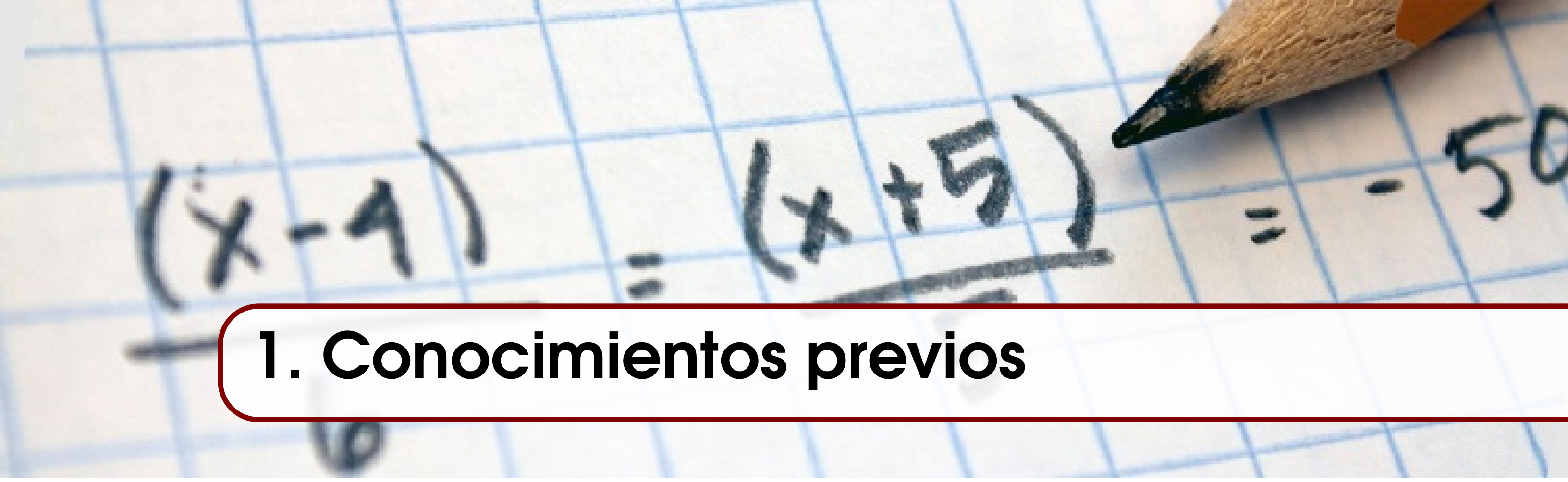
Aspectos generales y ejemplos

En la vida cotidiana se presentan diversas situaciones en las cuales se precisa de una pronta solución. Así, hay problemas en los cuales es sencillo ubicar una respuesta y otros que son más complejos de resolver.

Es así que, ya sea por necesidad o por diversión, muchas de las situaciones mencionadas anteriormente pueden describirse mediante el uso de contenido que abarca el álgebra, propiamente ecuaciones, las cuales pueden ser utilizadas en situaciones donde tenemos una problemática definida y necesitamos hallar valores hasta ese punto desconocidos. Así, mediante un juego algebraico podemos dar con una o varias soluciones a la misma.

Cabe destacar que en este caso por tratarse de octavo año, se utilizarán ecuaciones de primer grado y una incógnita. Además, se requieren tener presente las propiedades vistas de números, relaciones y álgebra que abarcan números naturales, enteros y racionales, por lo cual se invita al lector a realizar un repaso del mismo.

Por último, entonces se tiene que, esta guía pretende abarcar por un lado el planteo de ecuaciones y por otro la resolución de las mismas. Eso sí, para alcanzar la meta, se realizará un repaso de conceptos importantes y tips para un mejor trabajo con la temática en cuestión.



1. Conocimientos previos

1.1 Ecuación, concepto y aspectos generales

Es muy importante conocer el concepto de ecuación en aras de comprender lo que se trabajará y obtener claridad para efectuar correctamente los ejercicios que la involucran. Por lo cual, se brinda la siguiente definición matemática:

Definición 1.1.1 — Ecuación. En matemática se llama ecuación a la equivalencia entre dos expresiones algebraicas, las cuales serán denominadas miembros de la ecuación.

En las ecuaciones, los miembros aparecerán relacionados a través de operaciones aritméticas básicas (suma, resta, división, multiplicación) con constantes (números) o incógnitas, es decir, variables (representadas por letras).

El complemento anterior a la definición brindada se refiere en otras palabras a que los términos que conforman las ecuación están compuestos por monomios, binomios, trinomios o polinomios de más de 4 términos.

Ahora bien por tratarse de octavo año, las ecuaciones que utilizan para plantear y resolver problemas son de primer grado con una incógnita. Además, los coeficientes que se utilizan pueden ser números naturales, enteros o racionales, así como su uso puede ser empleado también para las soluciones.

1.2 Lenguaje algebraico como herramienta auxiliar

Es de suma importancia reconocer que los problemas que involucran ecuaciones normalmente **se brindan por medio de lenguaje verbal por lo cual es necesario traducirlo a un lenguaje matemático** para poder encontrar el conjunto solución de la ecuación, y por ende, del problema. Es por lo cual que, para poder realizar una traducción correcta del enunciado que nos presentan, se debe dominar el lenguaje algebraico para establecer la conexión directa entre significado verbal y matemático. Así, algunos ejemplos de lenguaje algebraico son los siguientes:

Lenguaje Algebraico	
Expresión	**Representación**
Un número	x
Dos números consecutivos	x y $x+1$
Un número par o el doble de un número	$2x$
Un número impar	$2x+1$
Un número aumentado en tres	$x+3$
La suma de dos números	$x+y$
Un número disminuido en siete	$x-7$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
La sexta parte de un número	$\frac{x}{6}$
Cuatro novenas partes de un número	$\frac{4x}{9}$
Dos números en razón 4:7	$4x = 7y \Rightarrow x = \frac{7y}{4}$
Un número excede en cuatro tercios a otro	$x = y + \frac{4}{3}$
El cociente de dos números	$\frac{x}{y}$
El doble de la resta de dos números	$2(x+y)$
Dos números que se diferencian en trece unidades	$x-y=13$
Un hijo tiene 22 años menos que su padre	$x = y-22$

Como se aprecia en la tabla anterior, se tienen ejemplos de lenguaje algebraico con dos dos números, es decir, x y y, sin embargo, esto es solo para fines ilustrativos, pues esos casos se abarcarán posteriormente en niveles superiores.

2. Planteo y solución de ecuaciones

2.1 Aspectos importantes

Ahora bien, al tener claros los conocimientos previos, es importante mencionar la siguiente notación:

Notación 2.1. *Con base en la naturaleza del ejercicio* ***se tendrá una, dos o más ecuaciones*** *que permitan dar solución a cada ejercicio.*

Lo anterior se da siempre considerando que se trata de ecuaciones que relacionan la misma variable con la cual se está trabajando y además de primer grado, es decir, ecuaciones lineales.

Por otro lado, para abarcar correctamente el conocimiento de ecuaciones se debe tener presente lo siguiente:

1. Dominio del lenguaje algebraico básico (visto en el apartado 1.2).
2. Se debe saber despejar incógnitas correctamente.
3. Conocer y aplicar la prioridad de operaciones aritméticas.
4. Resolver correctamente operaciones combinadas.

Así, la siguiente sección pone en práctica lo anterior para dar solución a problemas que involucran el uso de ecuaciones, sin embargo es muy importante la siguiente observación:

El planteamiento de las ecuaciones depende de cada ejercicio en particular así que no existe una base en concreto como tal. Por eso la práctica constante desarrolla la habilidad.

2.2 Resolución de problemas

Cada uno puede plantearse problemas distintos nacidos justamente de la realidad que vive. No es bueno creer que los problemas matemáticos son solamente los que plantean en los libros y demás documentos escritos, ya sean físicos o digitales.

En esta sección se abarcarán 4 problemas que podrían presentase en la vida cotidiana y además de situaciones que no son ajenas a las personas, es decir, problemas que pueden darse con el contexto social del día a día.

2.2.1 Problema 1, relacionado a porcentajes

Podemos plantear un problema relacionado a porcentajes, el cual podría ubicarse con cantidades de dinero como el siguiente:

> **Problema 2.2.1** A Julio le llega una notificación a su celular avisándole que ha gastado \$$25,5$ de su cuenta de ahorros en el presente mes y que ese monto representa el $15\,\%$ de la cantidad total que hay en dicha cuenta. Entonces Julio decide gastar máximo otro $5\,\%$. Si es así, cuánto dinero representa el resto del porcentaje que decide ahorrar? ■

Solución

Para este caso, es necesario ver que Julio tiene una cantidad desconocida de dinero, por lo cual a dicha cantidad le podemos llamar **x**, variable con la cual vamos a trabajar.

Como hablamos de un porcentaje se entiende entonces que

$$15\,\%x = \frac{x \cdot 15}{100}$$

Así, sabemos que el $15\,\%$ de x es $25,5$ entonces podemos plantear la siguiente ecuación

$$\frac{x \cdot 15}{100} = 25,5$$

Ahora la resolvemos para averiguar el valor de x, es decir la cantidad total de dinero que dispone Julio.

$$\begin{aligned}
&\frac{x \cdot 15}{100} = 25,5 \\
&\Rightarrow x \cdot 15 = 25,5 \cdot 100 \\
&\Rightarrow x = \frac{25,5 \cdot 100}{15} \\
&\Rightarrow x = \frac{25,5 \cdot 20}{3} \\
&\Rightarrow x = \frac{510}{3} \\
&\Rightarrow x = 170
\end{aligned}$$

Por último, se tiene que Julio ha gastado $15\,\%$ de la cantidad total y además, decide gastar máximo otro $5\,\%$ más, es decir, en total habrá gastado el $20\,\%$. Entonces, se calcula el resto respecto al $100\,\%$, en otras palabras, el $80\,\%$ de 170 de manera similar a como obtuvimos el $15\,\%$ de x, así,

$$80\,\% \cdot 170 = \frac{170 \cdot 80}{100} = 136$$

Por lo tanto, al final se tiene que Julio decide ahorrar \$136.

2.2.2 Problema 2, relacionado a edades

Podemos plantear un problema relacionado a edades, lo cual es algo muy común ahora en juegos de celular, es decir preguntas para practicar cálculos mentales, como el siguiente:

Problema 2.2.2 Juan, el hermano mayor de Edgar tiene 20 años más que él y su hermana tiene 5 años menos que Juan. Averigua la edad de actual de Edgar si se sabe que la suma de las edades de sus hermanos es el séptuplo de la edad de Edgar. ■

Solución

Para este problema la clave es la edad de Edgar, es decir, esa es la meta, obtener dicho valor desconocido, el cual podemos representar con **w**.

Ahora bien, si el hermano tiene 20 años más que Edgar, entonces tiene $w+20$. En el caso de la hermana entonces esta tiene $w+20-5 = w+15$.

Por otro lado, la suma de las edades de los hermanos **es igual** al séptuplo (7 veces) de la edad de Edgar es justamente la ecuación que debemos plantear, es decir,

$$(w+20)+(w+15) = 7w$$

Resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned}
&(w+20)+(w+15) = 7w \\
\Rightarrow & w+20+w+15 = 7x \\
\Rightarrow & w+w+20+15 = 7x \\
\Rightarrow & 2w+35 = 7w \\
\Rightarrow & 2w-7w = -35 \\
\Rightarrow & -5w = -35 \\
\Rightarrow & w = \frac{-35}{-5} \\
\Rightarrow & w = 7
\end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que la edad de Edgar es de 7 años. Adicionalmente se podría obtener que la edad del hermano es 27 años y de la hermana es 22 años.

2.2.3 Problema 3, relacionado a repartición de objetos

Podemos plantear un problema que involucre confites por ejemplo, ya que es algo que la mayoría domina y en lo cual todos son expertos, las golosinas. Así podría establecerse el siguiente ejercicio:

Problema 2.2.3 A Mariana le han regalado una bolsa 210 dulces y quiere repartirlos entre sus 3 primos de tal manera que dos de ellos se queden con la mitad de los dulces pero que uno de estos dos tenga la mitad de dulces que el otro. ¿Cuántos dulces tendrá cada primo? ■

Solución

Se sabe entonces que, dos de los primos tendrán juntos la mitad del total de dulces, es decir

$$\frac{210}{2} = 105$$

Por otro lado, el tercer primo tendrá la otra mitad del total, es decir, 105 dulces.

Lo siguiente ahora es repartir los primeros 105 dulces entre los 2 primeros primos. Por lo cual se puede establecer d como la cantidad de dulces de uno de los primos, el que tendrá la mayor cantidad. Así, el otro primo tendrá la mitad de d, es decir, $\frac{d}{2}$.

Recordemos que la suma de los dulces de ambos niños es 105, o sea, nuestra ecuación es

$$d + \frac{d}{2} = 105$$

Entonces al sumar las las cantidades y resolver la ecuación, se tiene que

$$\begin{aligned}
& d + \frac{d}{2} = 105 \\
\Rightarrow & \frac{2d + d}{2} = 105 \\
\Rightarrow & \frac{3d}{2} = 105 \\
\Rightarrow & 3d = 2 \cdot 105 \\
\Rightarrow & 3d = 210 \\
\Rightarrow & d = \frac{210}{3} \\
\Rightarrow & d = 70
\end{aligned}$$

Es por lo anterior que uno de los primos tiene entonces 70 dulces y el otro $\frac{70}{2} = 35$.

Por lo tanto, la cantidad de dulces que tiene cada primo es: 105, 70 y 35.