PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

10°

Colaboradores:

Camacho Zamora Richard
Chinchilla Chinchilla Michelle
Fletes Alvarado Claudia
Ulloa Araya Siony

Relaciones y Álgebra

Sistema de Ecuaciones Lineales

Aprendizajes esperados

- Analizar sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Plantear y resolver problemas en contextos reales, utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Sistema de Ecuaciones Lineales

Definiciones

Sistema de ecuaciones lineales

Es un conjunto de ecuaciones lineales, es decir, está conformado ecuaciones de primer grado.

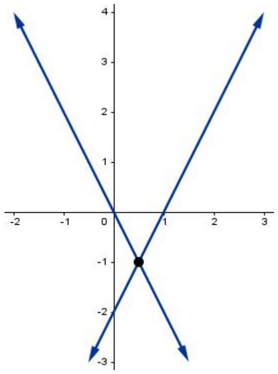
Forma general

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = d \end{cases}$$

Existen tres tipos de soluciones para un sistema de ecuaciones lineales

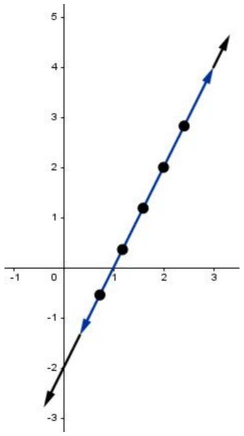
Solución única

Esto sucede cuando las ecuaciones representan rectas que se intersecan en un solo punto.



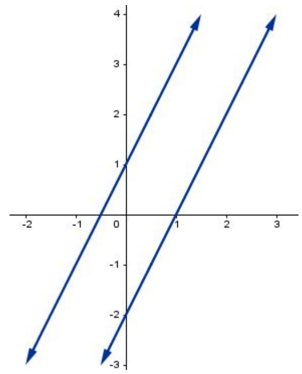
Soluciones infinitas

Esto sucede cuando las ecuaciones representan rectas que están una encima de la otra.



No tiene soluciones

Esto sucede cuando las ecuaciones representan rectas paralelas, es decir, rectas que no se intersecan en ningún punto.



Métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales

1. **Sustitución**

   Consiste en despejar alguna de las variables ya sea x o y de una de las ecuaciones para sustituirla en la otra ecuación.

2. **Igualación**

   Se puede entender como un caso particular del método de sustitución en el que se despeja la misma incógnita en dos ecuaciones y a continuación se igualan entre sí la parte derecha de ambas ecuaciones.

3. **Reducción**

   Consiste en transformar una de las ecuaciones de manera que obtengamos dos ecuaciones en la que una misma incógnita aparezca con el mismo coeficiente y distinto signo.

4. **Método Gráfico**

   Consiste en construir las gráficas que representan cada una de las ecuaciones lineales pertenecientes al sistema

Ejercicios Resultos

Método Suma y Resta:

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ y = -3 + 3x \end{cases}$$

Solución:

Paso 1. Ordenar la ecuación de forma general.

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

Paso 2. Definir la variable a eliminar.

y será la variable a eliminar.

Paso 3. Multiplicar alguna de las dos ecuaciones por un número conveniente (para eliminar la variable definida).

En este caso, la variable a eliminar, ya tiene signo distinto en cada ecuación, por lo que no es necesario multiplicar ninguna ecuación por un número conveniente.

Paso 4. Sumar/restar el resultado de esa ecuación con la otra (a la que no se le multiplicó ningún número)

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$

$4x = 8$

Paso 5. Encontrar el valor de la variable que nos queda.

$$4x = 8$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{4}$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Paso 6. Sustituir ese valor para encontrar el valor de la variable faltante.

Se realizará la sustitución en la Ecuación 1:

$$2 + y = 5$$

Despejamos y

$$\Rightarrow y = 5 - 2$$

$$\Rightarrow y = 3$$

R/ Así, la solución sería $(2,3)$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} x + 3 - 2y = -3 \\ y + 4x + 2 = 41 \end{cases}$$

Solución:

Paso 1. Ordenar la ecuación de forma general.

$$\begin{cases} x - 2y = -6 \\ 4x + y = 39 \end{cases}$$

Paso 2. Definir la variable a eliminar.

Se eliminará la variable x

Paso 3. Multiplicar alguna de las dos ecuaciones por un número conveniente (para eliminar la variable definida).

Se multiplicará la primera ecuación por -4 y se obtendrá como resultado:

$$-4x + 8y = 24$$

Paso 4. Sumar/restar el resultado de esa ecuación con la otra (a la que no se le multiplicó ningún número)

$$\begin{cases} -4x + 8y = 24 \\ \quad 4x + y = 39 \end{cases}$$

$$\overline{\qquad 9y = 63 \qquad}$$

Paso 5. Encontrar el valor de la variable que nos queda.

$$9y = 63$$

$$\Rightarrow y = \frac{63}{9}$$

$$\Rightarrow y = 7$$

Paso 6. Sustituir ese valor para encontrar el valor de la variable faltante.

Se realizará la sustitución en la Ecuación 1:

$$x - 2(7) = -6$$

$$\Rightarrow x = -6 + 14$$

$$\Rightarrow x = 8$$

R/ Así, la solución estaría dada por $(8,7)$

Método de Sustitución:

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3y - 4x = -\dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Solución:

Paso 1. Ordenar el sistema de manera general.

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \quad (1) \\ -4x + 3y = -\dfrac{5}{4} \quad (2) \end{cases}$$

Paso 2. Despejar una de las variables en alguna de las ecuaciones.

Se despejará x de la Ecuación (1)

$$x - 2y = 0$$

$$\Rightarrow x = 2y$$

Paso 3. Sustituir dicho despeje en la ecuación restante y encontrar el valor de la incógnita en la que queda dicha ecuación.

En este caso, se hace la sustitución en la Ecuación (2):

$$-4x + 3y = -\frac{5}{4}$$

Recordando que $x = 2y$

$$\Rightarrow -4(2y) + 3y = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -8y + 3y = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow -5y = -\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\frac{5}{4}}{-5}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

Paso 4. Sustituir ese valor en el despeje realizado en el **Paso 2**.

Recordando lo que se obtuvo en el **Paso 2:**

$$x = 2y$$

$$\Rightarrow x = 2\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Paso 5. Así obtenemos el punto de intersección de las rectas.

El punto de intersección de las rectas corresponde a: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -\dfrac{7}{2} \\ 6x + y = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

Solución:

Paso 1. Ordenar el sistema de manera general.

En este caso, el sistema de ecuaciones lineales ya está dado en la forma general.

$$\begin{cases} 2x - 3y = -\dfrac{7}{2} \quad (1) \\ 6x + y = \dfrac{9}{2} \quad (2) \end{cases}$$

Paso 2. Despejar una de las variables en alguna de las ecuaciones.

Se despejará y de la Ecuación (2)

$$6x + y = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{9}{2} - 6x$$

Paso 3. Sustituir dicho despeje en la ecuación restante y encontrar el valor de la incógnita en la que queda dicha ecuación.

En este caso, se hace la sustitución en la Ecuación (1):

$$2x - 3y = -\frac{7}{2}$$

Recordando que $y = \frac{9}{2} - 6x$

$$\Rightarrow 2x - 3\left(\frac{9}{2} - 6x\right) = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - \frac{27}{2} + 18x = -\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow 2x + 18x = -\frac{7}{2} + \frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow 20x = \frac{20}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{2 \cdot 20}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Paso 4. Sustituir ese valor en el despeje realizado en el **Paso 2**.

Recordando lo que se obtuvo en el **Paso 2:**

$$y = \frac{9}{2} - 6x$$

$$\Rightarrow y = \frac{9}{2} - 6\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{9}{2} - \frac{6}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Paso 5. Así obtenemos el punto de intersección de las rectas.

El punto de intersección de las rectas corresponde a: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Método Igualación:

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} 6x + y + 4 = 0 \\ -3y = 12 + 4x \end{cases}$$

Solución:

Paso 1. Ordenar el sistema de forma general.

$$\begin{cases} 6x + y = -4 \quad (1) \\ 4x + 3y = -12 \quad (2) \end{cases}$$

Paso 2. Despejar la misma variable en ambas ecuaciones.

Se despejará y:

De (1):

$$6x + y = -4$$

$$\Rightarrow y = -4 - 6x \;\; (*)$$

De (2):

$$4x + 3y = -12$$

$$\Rightarrow 3y = -12 - 4x$$

$$\Rightarrow y = -\frac{12}{3} - \frac{4x}{3}$$

$$\Rightarrow y = -4 - \frac{4x}{3} \; (**)$$

Paso 3. Igualar dichos despejes.

Igualamos $(*)$ y $(**)$

$$-4 - 6x = -4 - \frac{4x}{3}$$

Paso 4. Encontrar el valor de la variable en la que queda la nueva ecuación.

$$-4-6x=-4-\frac{4x}{3}$$

$$\Rightarrow -6x+\frac{4x}{3}=-4+4$$

$$\Rightarrow -\frac{14}{3}x=0$$

$$\Rightarrow x=0$$

Paso 5. Sustituir dicho resultado en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales.

Se sustituirá en la Ecuación (1)

$$6x+y=-4$$

Recordando que $x=0$

$$6(0)+y=-4$$

$$\Rightarrow y=-4$$

R/ El punto de intersección de las rectas corresponde a: $(0,-4)$

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{9}{2} \\ -3y+\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{29}{3} \end{cases}$$

Solución:

Paso 1. Ordenar el sistema de forma general.

$$\begin{cases} x-\dfrac{y}{3}=5 \quad (1) \\ \dfrac{x}{3}-3y=\dfrac{31}{3} \quad (2) \end{cases}$$

Paso 2. Despejar la misma variable en ambas ecuaciones.

Se despejará x:

De (1):

$$x - \frac{y}{3} = 5$$

$$\Rightarrow x = 5 + \frac{y}{3} \ (*)$$

De (2):

$$\frac{x}{3} - 3y = \frac{31}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{31}{3} + 3y$$

$$\Rightarrow x = 31 + 9y \ (**)$$

Paso 3. Igualar dichos despejes.

Igualamos $(*)$ y $(**)$

$$5 + \frac{y}{3} = 31 + 9y$$

Paso 4. Encontrar el valor de la variable en la que queda la nueva ecuación.

$$5 + \frac{y}{3} = 31 + 9y$$

$$\Rightarrow \frac{y}{3} - 9y = 31 - 5$$

$$\Rightarrow \frac{-26}{3} y = 26$$

$$\Rightarrow y = \frac{26 \cdot 3}{-26}$$

$$\Rightarrow y = -3$$

Paso 5. Sustituir dicho resultado en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales.

Se sustituirá en la Ecuación (1)

$$x-\frac{y}{3}=5$$

Recordando que $y=-3$

$$x-\frac{-3}{3}=5$$

$$\Rightarrow x+1=5$$

$$\Rightarrow x=4$$

R/ El punto de intersección de las rectas corresponde a: $(4,-3)$

Problema

Kevin y su tío Julián se llevan 25 años de edad. Calcular la edad de Kevin sabiendo que dentro de 15 años la edad de su tío será el doble que la suya.

Solución:

Si la edad de Kevin es x y la de su tío Julián es y, sabemos que

$$x + 25 = y$$

Dentro de 15 años, la edad de Kevin será $x + 15$ y la de su tío será $y + 15$. Si para entonces la edad del tío es el doble que la de Kevin

$$2 \cdot (x + 15) = y + 15$$

$$2x + 30 = y + 15$$

$$2x + 30 - 15 = y$$

$$2x + 15 = y$$

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} x + 25 = y \\ 2x + 15 = y \end{cases}$$

Usando el método de igualación tenemos que

$$x + 25 = 2x + 15$$

$$25 - 15 = 2x - x$$

$$10 = x$$

Por lo tanto, la edad de Kevin es de 10 años y el tío Julián tiene 35 años

Ejercicios

a) **Identifique para cada uno de los siguientes sistemas si tiene: solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.**

1. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x + 7y = 12 \\ -2x + 9y = -6 \end{cases}$

b) **Resolución de problemas**

1. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos es 12° mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?

2. Una persona invierte en un producto una cantidad de dinero, obteniendo un 5 % de beneficio. Por otra inversión en un segundo producto, obtiene un beneficio del 3,5 %. Sabiendo que en total invirtió 100 000 y que los beneficios de la primera inversión superan en 27000 a los de la segunda, ¿cuánto dinero invirtió en cada producto?

3. En el aula de Alberto hay un total de 27 alumnos, habiendo el doble de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay en la clase de Alberto?

4. Una granja tiene cerdos y gallinas, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y gallinas hay?

Otras Actividades

- Actividad Quizizz

Videos para reforzar

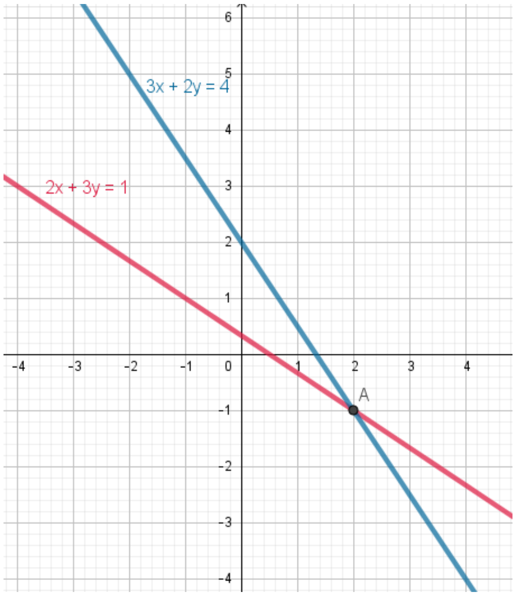
- Sistema de ecuaciones lineales método de igualación
- Sistema de ecuaciones lineales método de reducción
- Sistema de ecuaciones lineales método de sustitución

Solución de los Ejercicios

a) **Identifique para cada uno de los siguientes sistemas si tiene: solución única, infinitas soluciones o no tiene solución.**

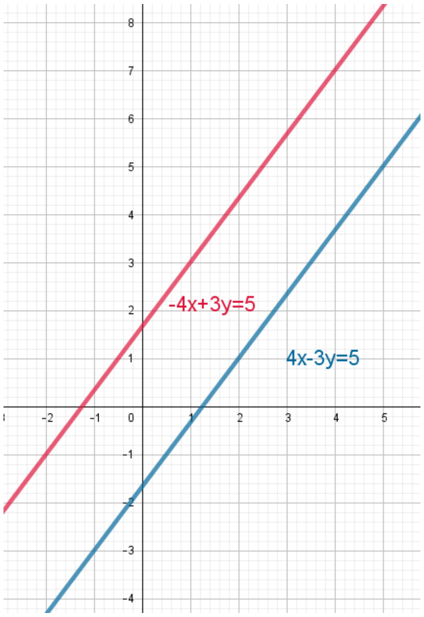
1. $$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

   Vamos a graficar las ecuaciones dadas, en un mismo sistema de coordenadas, recuerde que puede darse algunos puntos para determinar la gráfica.



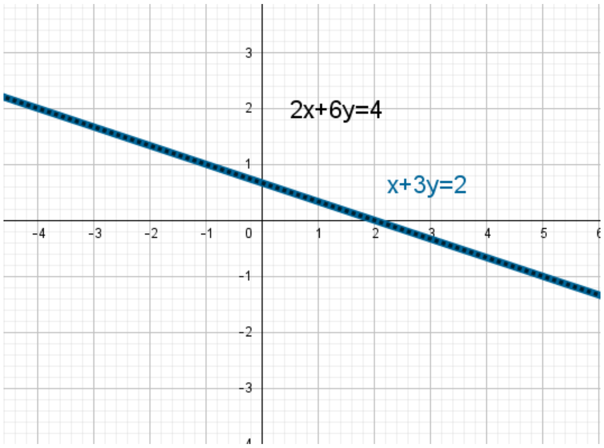
   Podemos observar que las rectas dadas se cortan en un único punto, por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución única.

2. $\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$



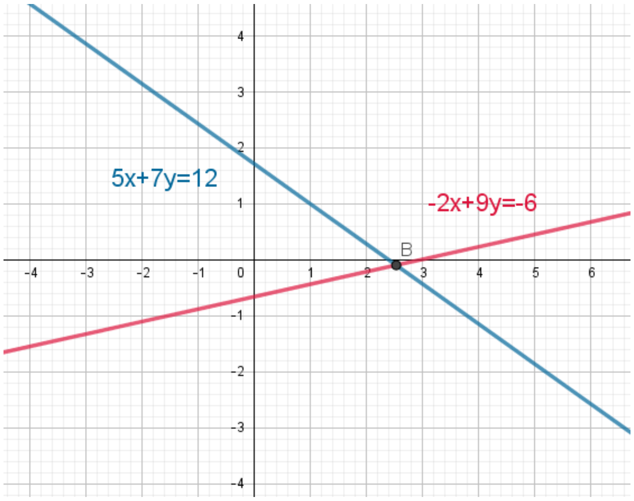
Observe que las rectas dadas son paralelas, por lo tanto, el sistema de ecuaciones no tiene solución.

3. $\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$



Note que las rectas dadas quedan una sobre otra, esto sucede porque los coeficientes numéricos de las ecuaciones son múltiplos, por lo tanto, el sistema de ecuaciones infinitas soluciones.

4. $\begin{cases} 5x + 7y = 12 \\ -2x + 9y = -6 \end{cases}$



Al graficar el sistema se observa que las rectas dadas se cortan en un único punto, por lo tanto, el sistema de ecuaciones tiene solución única.

b) **Resolución de problemas**

1. En un triángulo rectángulo, uno de sus ángulos agudos es 12° mayor que el otro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos?

Solución:

Note que es un triángulo rectángulo, por lo tanto uno de sus ángulos mide 90°. Llamaremos al ángulo menor x y al ángulo mayor y, de los ángulos restantes. Según los datos el ángulo mayor es 12° más que el menor, es decir,

$$y = x + 12°$$

y recordando que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° tenemos que

$$x + y + 90° = 180°$$

Así el sistema a resolver es

$$\begin{cases} y = x + 12 \\ x + y + 90° = 180° \end{cases}$$

Vamos a proceder a resolver el sistema por el método de igualación En este caso despejamos la variable y en ambas ecuaciones,es decir,

$$\begin{cases} y = x + 12 \\ y = 180° - 90° - x \end{cases}$$

Ahora igualamos las ecuaciones dadas para determinar x

$$x + 12° = 180° - 90 - x$$

$$x + x = 90° - 12°$$

$$2x = 78°$$

$$x = \frac{78°}{2}$$

$$x = 39°$$

Luego regresamos a una de las ecuaciones originales y sustituimos el valor encontrado de x para encontrar y, en este caso usaremos la primera ecuación

$$y = 39° + 12°$$

$$y = 51°$$

Así los valores de los tres ángulos son $90°, 39°$ y $51°$.

2. Una persona invierte en un producto una cantidad de dinero, obteniendo un 5 % de beneficio. Por otra inversión en un segundo producto, obtiene un beneficio del 3,5 %. Sabiendo que en total invirtió 100 000 y que los beneficios de la primera inversión superan en 27000 a los de la segunda, ¿cuánto dinero invirtió en cada producto?

Solución:
Tenemos dos productos a los cuales llamaremos x y y respectivamente.
Al invertir en x se obtiene un beneficio de $5\,\% \Rightarrow x * 0,5$
Al invertir en y se obtiene un beneficio de $3,5\,\% \Rightarrow y * 0,35$
En resumen tenemos que

$$\begin{cases} x + y = 100000 \\ 0,5x = 0,35y + 27000 \end{cases}$$

Vamos a resolver el sistema mediante el método de reducción. Para ello multiplicamos por -2 la segunda ecuación

$$\begin{cases} x + y = 100000 \\ -1x + 0,7y = -54000 \end{cases}$$

Al sumar las ecuaciones tenemos

$$1,7y = 46000$$

de donde obtenemos que $y = 27058,82$ Ahora sustituimos el valor de y en la primera ecuación y obtenemos que

$$x = 100000 - 27059 \Rightarrow x = 72941$$

Por lo tanto la persona invirtió 72941 en un producto y 27059 en otro producto.

3. En el aula de Alberto hay un total de 27 alumnos, habiendo el doble de chicas que de chicos. ¿Cuántos chicos y chicas hay en la clase de Alberto?

Solución:
Llamaremos x al número de chicas y y al número de chicos. El número total de alumnos es la suma de chicos y chicas, lo cual se traduce algebraicamente como

$$x + y = 27$$

Por otro lado, el número de chicas es el doble que el de chicos. Esto significa,

$$x = 2y$$

El sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x = 2y \end{cases}$$

Resolviendo mediante el método de sustitución, vamos a tomar el valor de x despejado en la segunda ecuación y lo sustituimos en la primera ecuación

$$2y + y = 27 \Rightarrow 3y = 27 \Rightarrow y = \frac{27}{3} \Rightarrow y = 9$$

Una vez encontrado y nos devolvemos a la segunda ecuación para detrminar el valor de x que sería

$$x = 2 \cdot 9 \Rightarrow x = 18$$

Por tanto, en el aula de Alberto hay 9 chicos y 18 chicas.

4. Una granja tiene cerdos y gallinas, en total hay 35 cabezas y 116 patas. ¿Cuántos cerdos y gallinas hay?

Solución:
Nombramos x a los cerdos y y gallinas
Recordemos una gallina tiene 2 patas $\Rightarrow$ $2y$ y un cerdo tiene 4 patas $\Rightarrow 4x$

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 4x + 2y = 116 \end{cases}$$

Mediante el método de sustitución, despejamos x de la primera ecuación y la sustituimos en la segunda la cual quedaría

$$\begin{gathered} 4(35 - y) + 2y = 116 \\ 140 - 4y + 2y = 116 \\ -2y = -24 \\ y = \frac{-24}{-2} \\ y = 12 \end{gathered}$$

Para encontrar el valor de x sustituimos el valor de y en la primera ecuación y teneos que $x = 35 - 12 \Rightarrow x = 23$

Por lo tanto tenemos que hay 23 cerdos y 12 gallinas en la granja.

Bibliografía

Santillana. *Matemática 10. Edición para docentes* (2019). Proyecto Puentes del Saber. Santillana. –1 ed. San José, C.R. : Editorial Santillana.