Material de Apoyo

10°

Colaboradores:

Camacho Zamora Richard
Chinchilla Chinchilla Michelle
Fletes Alvarado Claudia
Ulloa Araya Siony

Geometría

Polígonos Regulares

Aprendizajes esperados

- Determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos.
- Determinar las medidas de los ángulos internos y externos de polígonos en diversos contextos.
- Determinar la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes contextos.
- Calcular perímetros y áreas de polígonos no regulares utilizando un sistema de coordenadas rectangulares.
- Resolver problemas que involucren polígonos y sus diversos elementos.

Polígonos Regulares

Recuerda

Un **polígono** es una figura geométrica cerrada formada por varios segmentos de líneas rectas, consecutivas no alineadas, llamados lados.

Los polígonos se clasifican en **regulares** (lados con igual medida) e **irregulares** (lados no iguales). El nombre de un polígono regular corresponde al número de lados que posea el polígono, por ejemplo:

Elementos de un polígono regular

Lado (L): es cada uno de los segmentos que forman el polígono

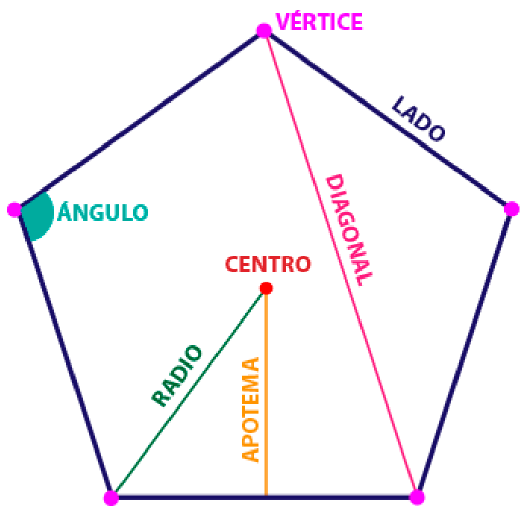
Vértice: el punto de unión de dos lados consecutivos

Centro: el punto central equidistante de todos los vértices.

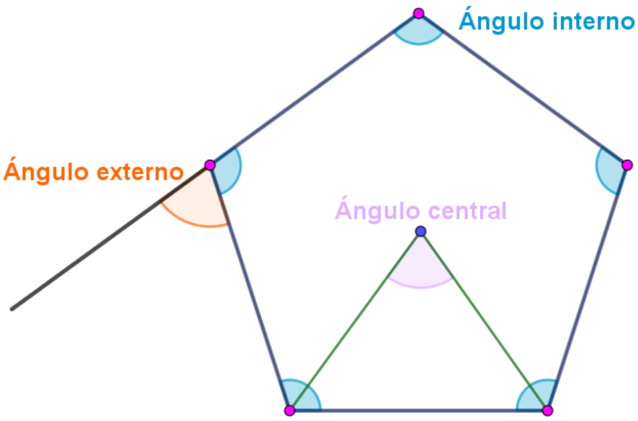
Radio (r): el segmento que une el centro del polígono con uno de sus vértices.

Apotema (a): segmento perpendicular a un lado, que une el centro y el punto medio de un lado del polígono.

Diagonal (d): segmento que une dos vértices no contiguos.



Ángulos de un polígono regular



Ángulo central: formado por dos radios consecutivos que comparten el centro del polígono. Todo polígono regular tiene n ángulos centrales, con n igual al número de lados.

Ángulo interno: formado por dos lados del polígono que comparten un vértice común, está contenido dentro del polígono.

Ángulo externo: formado por un lado del polígono y la prolongación del lado adyacente. En cada vértice del polígono es posible formar 2 ángulos externos con la misma amplitud.

Fórmulas asociadas

Para encontrar la medida de los elementos podemos utilizar distintas fórmulas específicas.

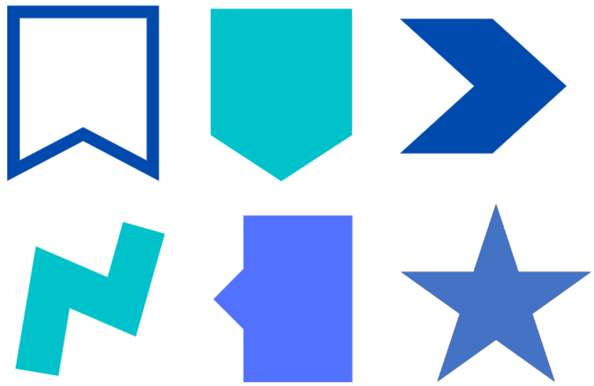
Ángulo central:	$\boldsymbol{m\measuredangle c = \frac{360°}{n}}$
Ángulo externo:	$m\measuredangle e = \frac{360°}{n}$
Ángulo interno:	$m\measuredangle i = \frac{180°(n-2)}{n}$
Suma de ángulos internos	$\sum m\measuredangle i = 180°(n-2)$
Número de diagonales **desde un vértice**	$d = n - 3$
Número de diagonales **totales**	$D = \frac{n(n-3)}{2}$
Área de un **polígono regular**	$A = \frac{P \cdot a}{2}$

n representa el número de lados del polígono

P representa el perímetro del polígono

Polígonos Irregulares

Los polígonos irregulares pueden ser tan diversos como te los puedas imaginar, por ejemplo, los que se muestran en la figura adjunta.

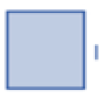


Al igual que en los polígonos regulares podemos determinar su perímetro y su área, pero en este caso no tenemos una sola fórmula que se pueda utilizar en forma general.

Uno de los métodos a utilizar para determinar su área es dividir el polígono original en otras figuras conocidas como triángulos y rectángulos, pues son los polígonos cuyas fórmulas recordamos siempre. También podrías encontrar algún otro polígono regular dentro, como es el caso de la estrella, esta se conforma de 5 triángulos y un pentágono.

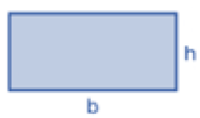
Fórmulas asociadas

- CUADRADO



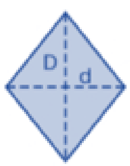
$A = l \times l = l^2$

- RECTÁNGULO



$A = b \times h$

- ROMBO

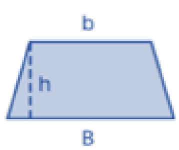


$A = \frac{D \times d}{2}$

- ROMBOIDE

$A = b \times h$

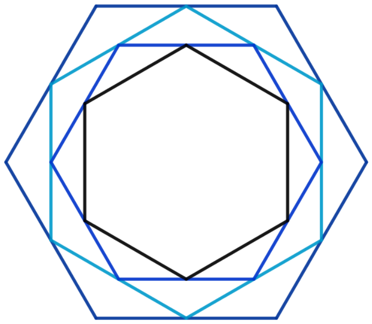
- TRAPECIO



$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$

Ejercicios Resueltos

1.Observe el siguiente diseño



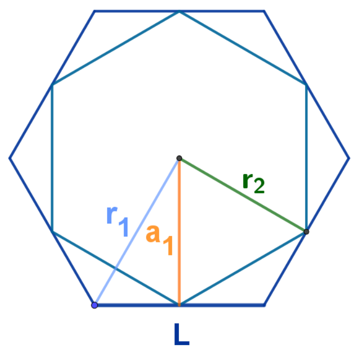
El diseño se elaboró de la siguiente manera: primero se trazó un hexágono regular de lado 4cm, luego se marcaron los puntos medios de sus lados y se trazo otro hexágono cuyos vértices son esos puntos medios y así sucesivamente hasta el hexágono más pequeño.

Determine ¿cuánto mide el perímetro y cuánto mide el área del cuarto hexágono (contados de mayor a menor)?

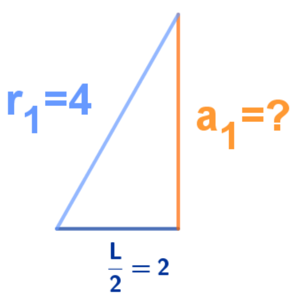
Solución

Para determinar el perímetro debemos multiplicar la medida del lado por la cantidad de lados del polígono ya que es regular.

$$P = 4 \cdot 6 = 24cm$$



Observe que la apotema del hexágono mayor (a_1) coincide con el radio del segundo hexágono (r_2). Esto sucede de igual forma con los hexágonos siguientes.



Para calcular la medida de la apotema podemos utilizar pitágoras, ya que se forma un triángulo rectángulo como se muestra en la figura de la izquierda. Así tenemos que $a_1 = \sqrt{(r_1)^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$ al sustituir $a_1 = \sqrt{(4)^2 - (2)^2} = 2\sqrt{3}$. Repetimos el procedimiento hasta encontrar a_4

Los valores obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

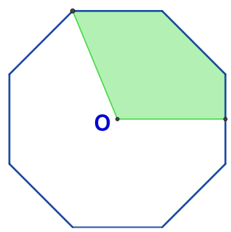
Cálculo de apotemas		
a_2	$\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2}$	3
a_3	$\sqrt{(3)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$
a_4	$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}$	$\frac{9}{4}$

Ahora podemos calcular el área utilizando la fórmula $A = \dfrac{P \cdot a}{2}$

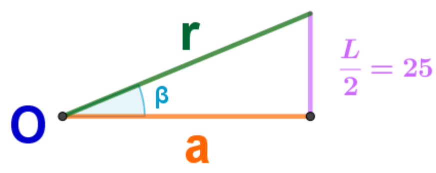
$P = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 9\sqrt{3}$ y $A = \dfrac{9\sqrt{3} \cdot \frac{9}{4}}{2} = \dfrac{81\sqrt{3}}{8} cm^2 \approx 17,53cm^2$

Así concluimos que el perímetro es de $24cm$ y el área del hexágono menor es de $\dfrac{81\sqrt{3}}{8} cm^2 \approx 17,53cm^2$

2. Un parque tiene forma octogonal, de $50m$ de lado. Diana fue a correr y le dio 18 vueltas a la zona que se marca con verde en la figura. Si en cada vuelta Diana partió del centro del parque, punto O, ¿Cuántos metros recorrido en total?



Solución



Para calcular la distancia necesitamos conocer la medida del radio y la apotema del octágono, dado que solo se conoce la medida del lado vamos a utilizar razones trigonométricas y además vamos a calcular la medida del ángulo central. Ángulo central = $\dfrac{360}{n} = 45°$

β es la mitad del ángulo central, por lo tanto $\beta = 22{,}5°$

Utilizando las razones trigonométricas tenemos que $r = \dfrac{25}{\operatorname{sen}\beta} = 65{,}32m$ y $a = \dfrac{25}{\tan\beta} = 60{,}35m$

El recorrido de una vuelta es $a + \dfrac{L}{2} + 2L + r$ es decir $60{,}35m + 25m + 2 \cdot 50m + 65{,}32m = 247{,}67m$.

Por lo tanto, en 18 vueltas Diana a recorrido $18 \cdot 247{,}67m = 4458{,}06m$

3. Determinar el polígono regular cuyo ángulo interno mide $135°$

Solución

Dado que solo conocemos cuando mide uno de sus ángulos internos vamos a utilizar la siguiente fórmula:

$$\frac{180°(n-2)}{n} = 135°$$

De aquí vamos a despejar la letra n, pues es lo que andamos buscando

$$180°n - 360° = 135°n$$

$$180°n - 135°n = 360°$$

$$45°n = 360°$$

$$n = \frac{360°}{45°}$$

$$n = 8$$

Así, el polígono es un octágono.

4. ¿Cuál es polígono en el cual se pueden trazar 35 diagonales en total?

Solución

Utilizamos la fórmula de número de diagonales totales

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Sustituimos el valor dado y luego despejamos n

$$35 = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$35 \cdot 2 = n^2 - 3n$$

$$0 = n^2 - 3n - 70$$

Los resultados obtenidos al resolver la ecuación son $n = 10$ o $n = -7$

Así el polígono es un decágono.

5. Calcular el número de diagonales que se pueden trazar desde el vértice de un dodecágono.

Solución

Utilizamos la fórmula

$$d = n - 3$$

Y sustituimos el valor de n por 12

$$d = 12 - 3 = 9$$

Entonces se pueden trazar 9 diagonales desde un vértice.

6. Hallar la suma de los ángulos internos de un heptágono.

Solución

Utilizamos la fórmula

$$\sum m\angle i = 180^\circ(n-2)$$

Y sustituimos el valor de n por 7

$$\sum m\angle i = 180^\circ(7-2) = 900^\circ$$

Entonces la suma de los ángulos internos de un heptágono es 900°

Ejercicios

1. Si el área de un hexágono regular es $900\sqrt{3}cm^2$ entonces su radio mide

(a) $60cm$

(b) $40cm$

(c) $10\sqrt{6}cm$

(d) $15\sqrt{2}cm$

2. Si un ángulo interno de un polígono regular mide $90°$ y su apotema mide 3, entonces el área de ese polígono corresponde a

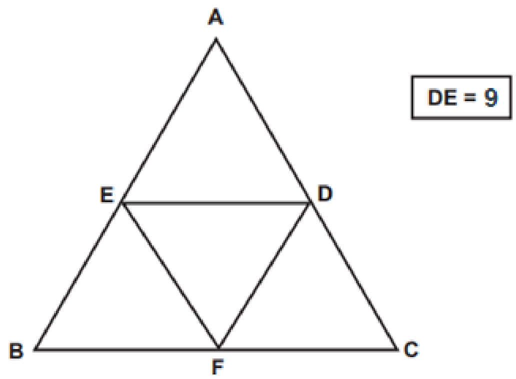
(a) 8

(b) 12

(c) 24

(d) 36

3. Considere la siguiente figura, en la que se representa el triángulo ABC (formado por cuatro triángulos equiláteros) y la medida de uno de los lados de uno de los triángulos, ¿Cuál es el perímetro del triángulo ABC?



(a) 27

(b) 36

(c) 54

(d) 81

4. Si un polígono regular tiene en total 27 diagonales, entonces la medida en grados de un ángulo externo de este polígono es

(a) $4°$

(b) $40°$

(c) $60°$

(d) $140°$

5. Si el área de un octágono regular de $120m$ de lado es de $69529,4m^2$. ¿Cuál es la longitud aproximada de su apotema?

(a) $29,9m$

(b) $423,0m$

(c) $144,9m$

(d) $156,8m$

6. La medida de un ángulo externo de un polígono regular es de $24°$, entonces la medida de un ángulo central del polígono es

(a) $24°$

(b) $48°$

(c) $66°$

(d) $156°$

7. En un polígono regular, la medida de cada ángulo interno es de 135°. Si el perímetro es 48, entonces ¿cuál es la medida de cada lado del polígono?

(a) 3

(b) 4

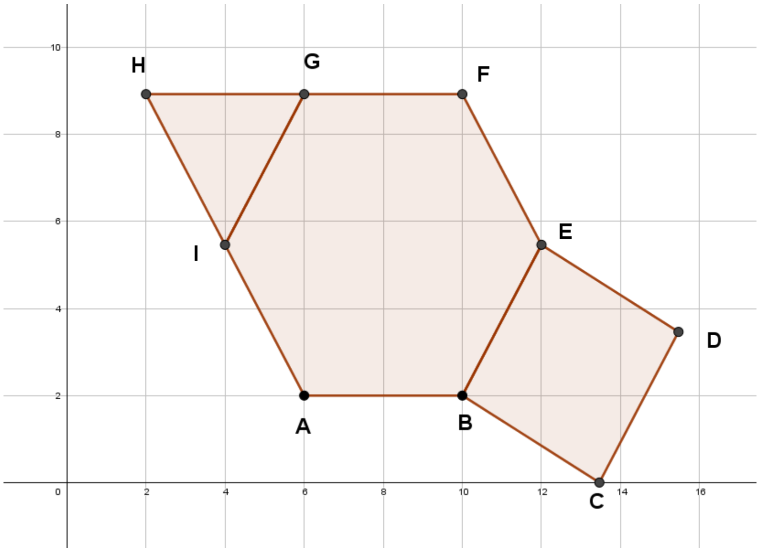
(c) 6

(d) 8

8. En una ciudad hay 100 señales de alto y 250 de ceda, como las de la imagen. ¿Cuántos metros cuadrados de material aproximadamente tienen en conjunto las 350 señales?

9. La estrella de la ilustración esta formada por un octágono regular y 8 triángulos regulares. Si el lado del octágono mide 10cm y su apotema 12cm. ¿cuáles el perímetro y el área de la estrella.

10. La figura corresponde a un croquis del piso de un salón de fiestas en metros, el cual está compuesto por tres polígonos regulares. Calcule el área de la región total. La cuadrícula va de 2 en 2.



Para reforzar

Para complementar puedes ver los siguientes videos:

- Ángulos internos de un polígono regular explicado por Daniel Carreon
  https://www.youtube.com/watch?v=ku_GwiCfIpk
- Diagonales de un polígono, de donde sale la fórmula, explicado por YoEstudio
  https://www.youtube.com/watch?v=t9VDM5sYo0k
- Diagonales de un polígono, Hallar lados explicado por math2me
  https://www.youtube.com/watch?v=yTLOX2V_LJs

Otras actividades

Realice las siguientes actividades tocando los siguientes enlaces

- Actividad Quizlet
- Actividad Quizizz
- Actividad Geogebra

Referencias

[1] El Maestro en casa. *Práctica Matemáticas, Bachillerato a tu Medida, Convocatoria 01-2017*. Recuperado de http://costarica.elmaestroencasa.com/e-books/elmec/bach-a-tu-medida/practica-matematicas-bachillerato-a-tu-medida-prueba-01-2017-ce.pdf

[2] Editorial Alfa y Omega (2017). *MATEMÁTICA 10°: Resolución de Problemas con Énfasis en Contextos Reales* Recuperado de https://books.google.co.cr/books?id=ZHkWDgAAQBAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

[3] MATEM (2014) *PRECÁLCULO -Décimo Año- III EXAMEN PARCIAL 2014 - TEC*. Recuperado de https://www.tec.ac.cr/sites/default/files/media/doc/iii_parcial_decimo_matem2014_version_final_con_solucionario.pdf

Solución Ejercicios

1. Si el área de un hexágono regular es de $900\sqrt{3}\ cm^2$ entonces su radio mide
(a) $60\ cm$
(b) $40\ cm$
(c) $10\sqrt{6}\ cm$
(d) $15\sqrt{2}\ cm$

Es importante recordar la fórmula del área de un hexágono y del perímetro del mismo:

$$A = \frac{p \cdot ap}{2}$$

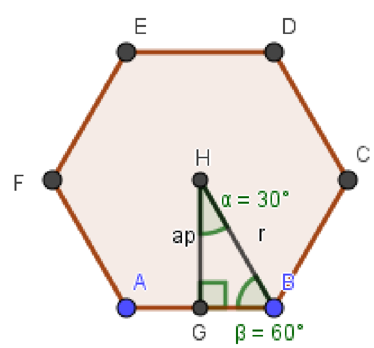
$$p = 6 \cdot l$$

Sustituyendo en la fórmula, se obtiene:

$$A = \frac{(6 \cdot l) \cdot ap}{2}$$

$$A = 3 \cdot l \cdot ap$$

Ahora, por medio de leyes trigonométricas, averiguamos la medida de la apotema



$$\tan(30°) = \frac{\frac{l}{2}}{ap}$$

$$\Rightarrow ap = \frac{l}{2\tan(30°)}$$

Sustituyendo el dato encontrado en la fórmula, obtenemos que:

$$A = 3 \cdot l \cdot \frac{l}{2\tan(30°)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3l^2}{2\tan(30°)}$$

El problema nos dio el dato que el área es de $900\sqrt{3}$, así se obtiene:

$$900\sqrt{3} = \frac{3l^2}{2\tan(30°)}$$

Despejando, obtenemos que el lado tiene una medida de:

$$l = 10\sqrt{6}$$

Es importante recordar que en el hexágono regular, existe la propiedad de que la medida del lado es igual a la medida del radio, por ende, la medida del radio es: $10\sqrt{6}$, por lo que la opción correcta es la **(c)**.

2. Si un ángulo interno de un polígono regular mide $90°$ y su apotema mide 3, entonces el área de ese polígono corresponde a

(a) 8
(b) 12
(c) 24
(d) 36

Primero, utilizamos la fórmula de la medida de un ángulo interno de un polígono regular para así saber la cantidad de lados.

$$m\measuredangle i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$\Rightarrow 90° = \frac{180°(n-2)}{n}$$

Despejando n, se obtiene que: $n = 4$

Recordando que una de las propiedades del cuadrado es que $ap = \frac{l}{2}$, entonces $2 \cdot ap = l$, sustituyendo el valor de la apotema, se obtiene que $l = 6$.

Ahora, recordando la fórmula del área del cuadrado

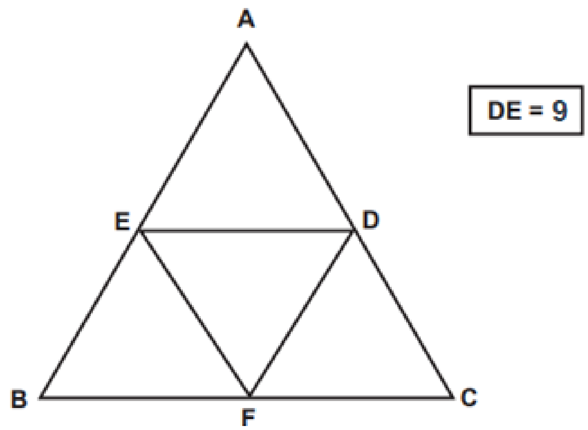
$$A = l \cdot l$$

$$\Rightarrow A = 6 \cdot 6$$

$$\Rightarrow A = 36$$

Por lo tanto, la opción correcta sería la opción **(d)**.

3. Considere la siguiente figura, en la que representa el triángulo ABC (formado por cuatro triángulos equiláteros) y la medida de uno de los lados de uno de los triángulos. ¿Cuál es el perímetro del triángulo ABC?



(a) 27
(b) 36
(c) 54
(d) 81

Si cada lado de los triángulos equiláteros equivale a 9, entonces, se puede deducir que la medida de cada uno de los lados del triángulo equivale a 18, así que, se procede a aplicar la fórmula del perímetro:

$$p = n \cdot l$$

$$\Rightarrow p = 3 \cdot 18$$

$$\Rightarrow p = 54$$

En resumen, la opción correcta corresponde a la opción **(c)**.

4. Si un polígono regular tiene en total 27 diagonales, entonces la medida en grados de un ángulo externo de este polígono es

(a) $4°$
(b) $40°$
(c) $60°$
(d) $140°$

Recordando la fórmula de diagonales totales de un polígono regular:

$$D = \frac{n(n-3)}{2}$$

Sabiendo que son 27 diagonales, tenemos:

$$27 = \frac{n(n-3)}{2}$$

Despejando n, se obtiene:

$$n = 9$$

Ahora, se aplica la fórmula de la medida de un ángulo externo:

$$m\measuredangle e = \frac{360°}{n}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle e = \frac{360°}{9}$$

$$\Rightarrow m\measuredangle e = 40°$$

La opción correcta corresponde a la opción **(b)**.

5. Si el área de un octágono regular de $120m$ de lado es de $69529{,}4m^2$. ¿Cuál es la longitud aproximada de su apotema?
(a) $29{,}9m$
(b) $423{,}0m$
(c) $144{,}9m$
(d) $156{,}8m$

La fórmula del área de un octágono está dado por:

$$A = \frac{p \cdot ap}{2}$$

Sustituyendo los valores que se conocen:

$$69529{,}4 = \frac{(8 \cdot 120) \cdot ap}{2}$$

Despejando, se obtiene que:

$$ap \approx 144{,}9$$

Así, la opción correcta sería la opción **(c)**.

6. La medida de un ángulo externo de un polígono regular es de 24°, entonces la medida de un ángulo central del polígono es
(a) 24°
(b) 48°
(c) 66°
(d) 156°

Se sabe que:

$$m\measuredangle e = \frac{360}{n} = m\measuredangle c$$

$$\Rightarrow m\measuredangle c = 24°$$

La opción correcta corresponde a la opción **(a)**.

7. En un polígono regular, la medida de cada ángulo interno es de $135°$. Si el perímetro es de 48, entonces, ¿cuál es la medida de cada lado del polígono?

(a) 3
(b) 4
(c) 6
(d) 8

La medida de un ángulo interno está dado por:

$$m\measuredangle i = \frac{180(n-2)}{n}$$

Sustituyendo los valores que se conocen

$$135° = \frac{180(n-2)}{n}$$

Donde se procede a realizar el despeje de n y se obtiene:

$$n = 8$$

Ahora, recordando la fórmula del perímetro de un polígono regular:

$$p = n \cdot l$$

Sustituyendo los datos conocidos:

$$48 = 8 \cdot l$$

Despejando l:

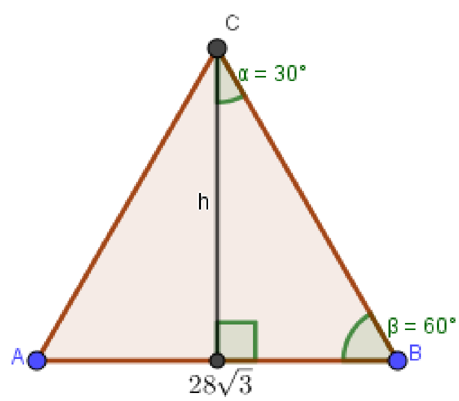
$$l = 6$$

En conclusión, la opción correcta corresponde a la opción **(c)**.

8. En una ciudad hay 100 señales de alto y 250 de ceda, como las de la imagen. ¿Cuántos metros cuadrados de material aproximadamente tiene en conjunto las 350 señales?

Empezando con la señal de Ceda el Paso:

Se puede averiguar el valor de la altura del mismo por medio de la Ley de Senos:



$$\frac{h}{sen(60)} = \frac{14\sqrt{3}}{sen(30)}$$

$$\Rightarrow h = 42cm$$

Haciendo la conversión a metros, se obtiene que:

$$h = 0{,}42m$$

Igualmente se realiza la conversión a metros de la medida del lado del triángulo correspondiente:

$$l = \frac{7\sqrt{3}}{25}m$$

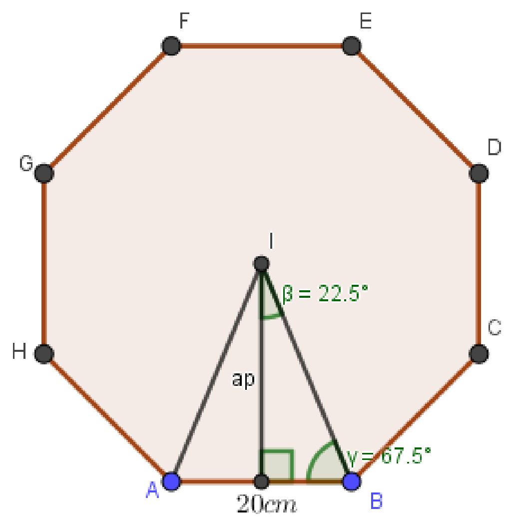
Recordando la fórmula del área de un triángulo y sustituyendo los valores conocidos:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{25} \cdot 0{,}42}{2} = 0{,}10m^2$$

Recordando que son 250 señales de este tipo: $0{,}10 \cdot 250 = 25m^2$

Se sigue con la señal de Alto:



Se realiza la conversión de centímetros a metros de la medida del lado del octágono:

$$20cm = 0{,}2m$$

En este caso, se realiza la búsqueda de la medida de la apotema del octágono por medio de la Ley de Senos:

$$\frac{ap}{sen(67{,}5)} = \frac{0{,}1}{sen(22{,}5)}$$

$$\Rightarrow ap = 0{,}24m$$

Recordando la fórmula del área del octágono:

$$A = \frac{p \cdot ap}{2}$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$A = \frac{(0{,}2 \cdot 8) \cdot 0{,}24}{2}$$

$$\Rightarrow A = 0{,}192m^2$$

Recordando que en la ciudad hay 100 señales de este tipo: $0{,}192 \cdot 100 = 19{,}2m^2$

R/ El material total que se necesite es el resultado de sumar los datos totales de cada señal: $25m^2 + 19{,}2m^2 = \mathbf{44{,}2m^2}$

9. La estrella de la ilustración está formada por un octágono regular y 8 triángulos regulares. Si el lado del octágono mide $10cm$ y su apotema $12cm$. ¿Cuál es el perímetro y el área de la estrella?

La formación de la figura dada, también puede ser interpretada como dos cuadrados, en los cuales la medida de los lados será de $30cm$, así, se tiene entonces que averiguar el área de dos cuadrados:

$$A_T = A_{C_2} + A_{c_2}$$

$$\Rightarrow A_T = l^2 + l^2$$

$$\Rightarrow A_T = 2l^2$$

$$\Rightarrow A_T = 2 \cdot 30^2$$

$$\Rightarrow A_T = 1800cm^2$$

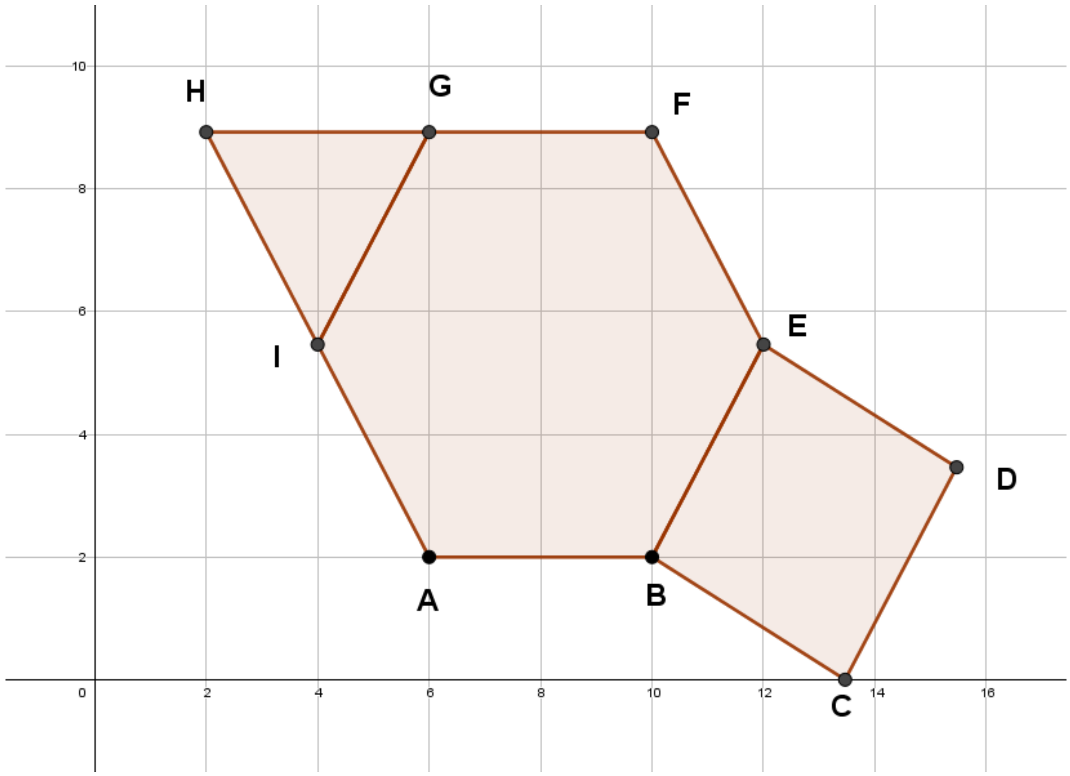
Ahora, el perímetro será el resultado de multiplicar la medida de cada una de las medidas del polígono, el cual está formado por 16 lados, y la medida de cada lado es de $10cm$

$$p = 10 \cdot 16$$

$$\Rightarrow p = 160cm$$

R/ El perímetro de la figura es de $160cm$ y su área corresponde a $1800cm^2$.

10. La figura corresponde a un croquis del piso de un salón de fiestas en metros, el cual está compuesto por tres polígonos regulares. Calcule el área de la región total. La cuadrícula va de 2 en 2.



Gracias al apoyo de la imagen, se puede deducir que la medida de $\overline{AB} = 4$

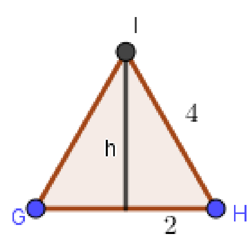
Conociendo el dato anterior, se puede averiguar el área del cuadrado $BCDE$

$$A = l \cdot l$$

$$\Rightarrow A = 4 \cdot 4$$

$$\Rightarrow A = 16$$

Además se puede proceder a la averiguación del área del triángulo GHI



Teniendo lo anterior, se procede a realizar la búsqueda de la altura, h, la cual tiene un valor de $2\sqrt{3}$

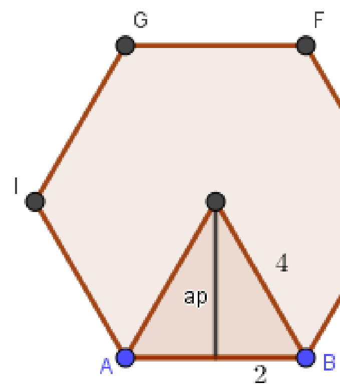
Ahora, utilizando la fórmula del área del triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A = 4\sqrt{3}$$

Por último, se procede a realizar el cálculo del área del hexágono:



Para ello, se procede a realizar el cálculo de la apotema del polígono, de donde se obtiene como resultado: $ap = 2\sqrt{3}$

Utilizando la fórmula del área del hexágono:

$$A = \frac{p \cdot ap}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{(4 \cdot 6) \cdot 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A = 24\sqrt{3}$$

Sumando cada una de las áreas obtenidas:

$$A_T = 16 + 4\sqrt{3} + 24\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow A_T = 16 + 28\sqrt{3}$$

R/ El área total de la región corresponde a $16 + 28\sqrt{3}$.