PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

10°

Colaboradores:

Camacho Zamora Richard
Chinchilla Chinchilla Michelle
Fletes Alvarado Claudia
Ulloa Araya Siony

Relaciones y Álgebra

Funciones

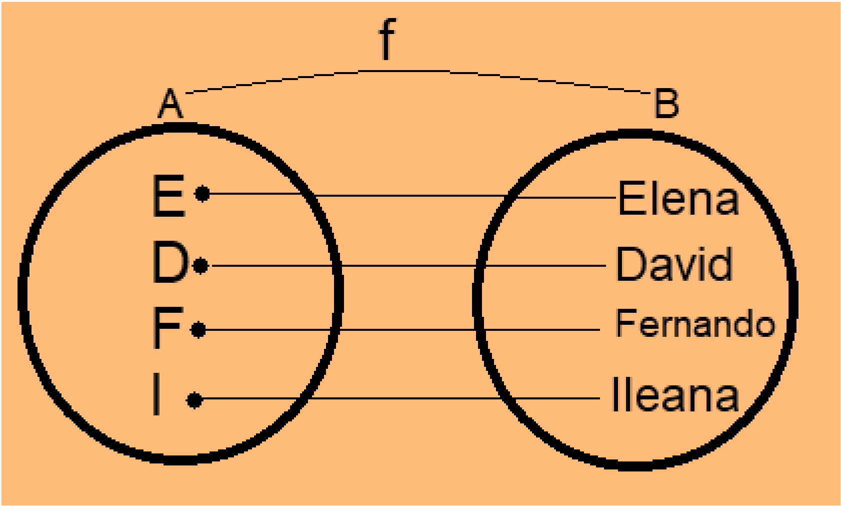
Aprendizajes esperados

- Identificar si una relación dada en forma tabular, simbólica o gráfica corresponde a una función.
- Evaluar el valor de una función dada en forma gráfica o algebraica, en distintos puntos de su dominio.
- Analizar una función a partir de sus representaciones.
- Calcular la composición de dos funciones.

¿QUÉ ES UNA RELACIÓN?

Es una correspondencia entre los elementos de dos conjuntos A y B, mediante una regla o criterio **que permite asociar a algunos o a todos los elementos del conjunto A** llamado **conjunto de partida con algunos o todos los elementos del conjunto B** llamado **conjunto de llegada.** También se puede decir que una relación es un conjunto de parejas ordenadas.

Ejemplo 1:



La relación "f" posee como criterio de asociación las letras iniciales mayúsculas con un nombre que inicia con dicha letra.

Ejemplo 2:

Suponiendo que $A = \{1,3,5\}$ y $B = \{2,4,6,8\}$, se pueden establecer las siguientes relaciones donde $x \in A$ y $y \in B$.

$$R_1 = \{(3,2), (1,8), (5,4)\}$$

$$R_2 = \{(3,8)\}$$

$$R_3 = \{(x,y)/x \in A, y \in B, x > y\} = \{(3,2), (5,2), (5,4)\}$$

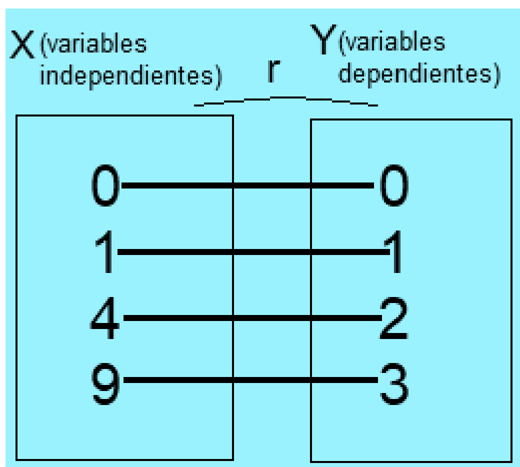
Variable Independiente:

Son los elementos del conjunto de partida, corresponde a los valores que pueden tomar dicha variable.

Variable Dependiente:

Son los elementos del conjunto de llegada, el valor que toma dicha variable, depende del valor que toma la variable independiente y del criterio de asociación que se utilice.

Ejemplo:



En la relación "r", el criterio de dependencia entre los elementos de X y Y es «asignar a cada elemento de X el resultado de extraer su raíz cuadrada».

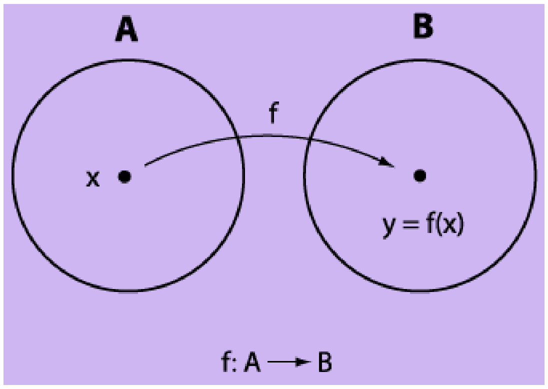
¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Una función de un conjunto $A \neq \emptyset$, a un conjunto $B \neq \emptyset$ es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento "x" en el conjunto A **algún** elemento "y" de B.

Para indicar que se ha establecido una función f de A en B se usa la notación:

$$f: A \to B$$

Si "x" es un elemento cualquiera del conjunto A, se designa con $f(x)$ el elemento del conjunto B que le corresponde por la función f. Al elemento $f(x)$ del conjunto B, también se puede escribir como $y = f(x)$.



Diremos que "y" es la imagen de "x" por la función f.

CONCEPTOS BÁSICOS RELACIONADOS CON LAS FUNCIONES

Considerando que f es una función, entonces:

DOMINIO

Conjunto de partida y se denota D_f.

CODOMINIO

Conjunto de llegada y se denota C_f.

IMAGEN

La imagen de un elemento en A es aquel elemento en B que se le asigna o corresponde.

PREIMAGEN

La preimagen de un elemento en B es aquel elemento en A cuya imagen es dicho elemento en B.

DOMINIO

Conjunto de preimágenes

CODOMINIO

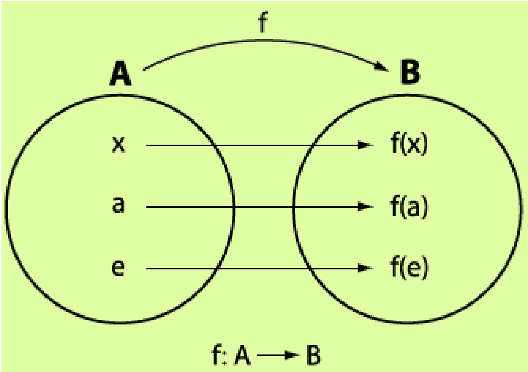
Conjunto al cual pertenecen las imágenes de la función dada.

ÁMBITO

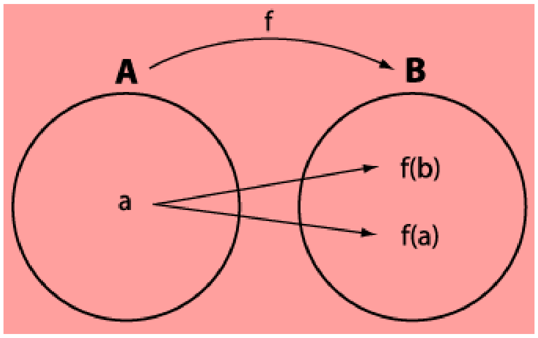
Conjunto de imágenes de la función. También es conocido como rango de la función. El ámbito es un subconjunto del codominio. Se representa por $f(A)$ el ámbito de la función $f: A \to B$. También se representa A_f.

Las funciones se denotarán con letras minúsculas del abecedario.

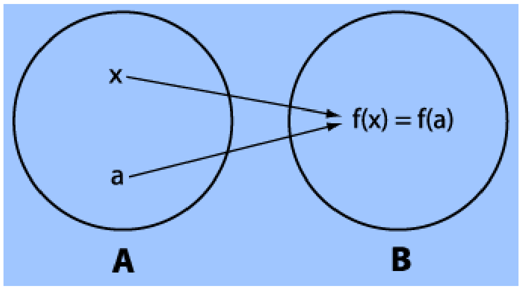
Ejemplo 1: esta relación es una función.



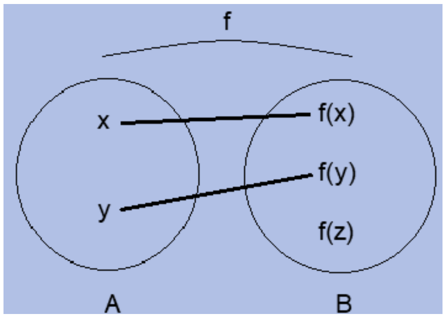
Ejemplo 2: esta relación no es una función.



Ejemplo 3: esta relación es una función.



Ejemplo 4: esta relación es una función.



Ejercicios Resueltos

1. Considere la función $x+1=y$. Si se sabe que el dominio es $]5,21]$. ¿Cuál es el ámbito de la función?

   Solución:

   Para saber cuál es el ámbito de f se debe evaluar el los valores de los extremos del dominio en la función, esto se puede hacer porque la función es lineal, como el criterio de la función es $f(x)=x+1$ y lo valores extremos de la función son 5 y 21 se tiene que

   $f(5)=5+1=6$

   $f(21)=21+1=22$

   Por lo tanto el ámbito es $A_f=]6,22]$

2. Si $f(x)=3x-8$ y sea $g(x)=x^2+2x+1$. Determine $(gof)(x)$ y $(fog)(x)$

   Solución:

   $(gof)(x)=g(f(x))$

   $=(3x-8)^2+2(3x-8)+1$

   $=9x^2-48x+64+6x-16+1$

   $=9x^2-42x+49$

   $(fog)(x)=f(g(x))$

   $=3(x^2+2x+1)-8$

   $=3x^2+6x+3-8$

   $=3x^2+6x-5$

   Nota:

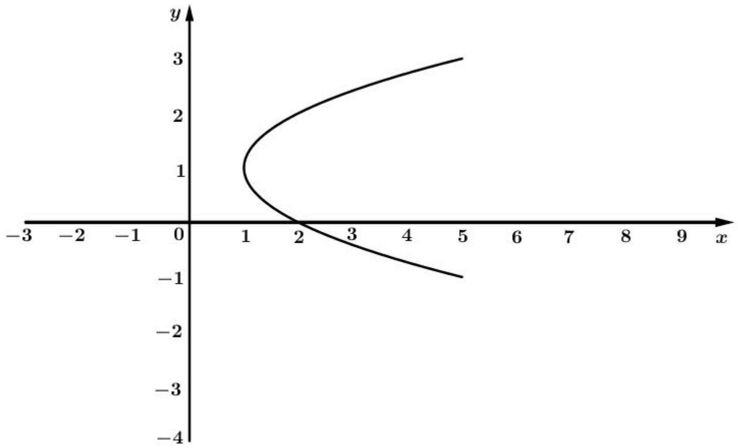
   Note que $(gof)(x)\neq(fog)(x)$

Ejercicios

1. Sea f definida de $[-3,3] \to A_f$ una función, cuyo criterio viene dado por $f(x) = 3x+1$, con base en los datos brindados determine quién es A_f.

2. Sea g una función definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuyo criterio es $g(x) = 3x + 12$, hallar la imagen de 5 y halle $g(x) = 16$.

3. Observe la siguiente figura



¿Verifique si la gráfica presentada en la imagen anterior corresponde o no a una función? Justifique su respuesta.

4. Sean las funciones f y g, cuyos criterios están dados por $f(x) = x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \dfrac{3x}{2-x} + 7$, determine la composición $(gof)(x)$, luego determine $(gof)(3)$.

5. Observe la siguiente tabla de una relación y conteste lo que se le solicita.

x	2	3	4	4	5
$f(x)$	1	5	6	8	11

Con base en los datos de la tabla se puede afirmar que

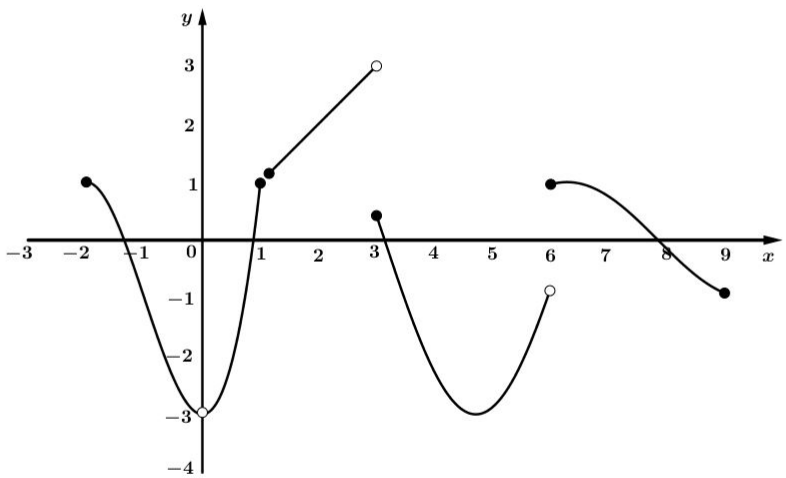
(a) la relación es una función.

(b) la relación no es una función.

(c) el 3 se relaciona con el 2.

(d) el 1 se relaciona con el 5.

6. Observe la siguiente imagen



Si la gráfica anterior representa a la función f,conteste lo que se le solicita.

a) Hallar $f(1)$.

b) Hallar $f(9)$

c) Hallar $f(x) = 1$

7. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{7x-1}{3}$, la preimagen de -2 corresponde a

8. Considere la siguiente tabla

$f(x)$	-3	-5	6	8	7
x	-2	5	7	7	9

¿Determine si la relación anterior, corresponde a una función?

Otras Actividades

- Actividad Quizizz
- Actividad Educaplay

Vídeos para reforzar

- Composición de Funciones
- Identificar funciones en una gráfica
- Identificar funciones en una tabla

Solución de los Ejercicios

1. Sea f definida de $[-3,3] \to A_f$ una función, cuyo criterio viene dado por $f(x) = 3x+1$, con base en los datos brindados determine quién es A_f.

   Solución:

   Para saber cuál es el ámbito de f se debe evaluar el los valores de los extremos del dominio en la función, como el criterio de la función es $f(x) = 3x + 1$ y lo valores extremos de la función son -3 y 3 se tiene que

   $f(-3) = 3(-3) + 1$

   $= -9 + 1$

   $= -8$

   $f(3) = 3(3) + 1$

   $= 9 + 1$

   $= 10$

   Por lo tanto el ámbito de f corresponde a $[-8, 10]$

2. Sea g una función definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuyo criterio es $g(x) = 3x + 12$, hallar la imagen de 5 y halle $g(x) = 16$.

   Solución:

   Imagen de 5

   $g(5) = 3(5) + 12 =$

   $15 + 12$

   $= 27$

   Preimagen de 16

   $16 = 3x + 12$

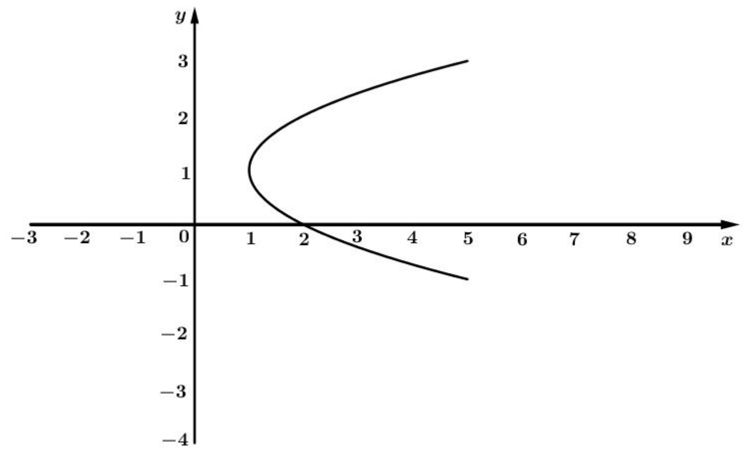
   $\Rightarrow 16 - 12 = 3x$

   $\Rightarrow 4 = 3x$

   $\Rightarrow \dfrac{4}{3} = x$

   Por lo tanto la imagen de 5 es 27 y la preimagen de 16 es $\dfrac{4}{3}$

3. Observe la siguiente figura



¿Verifique si la gráfica presentada en la imagen anterior corresponde o no a una función? Justifique su respuesta.

Solución:

No es función pues si trazamos rectas verticales va a cortar a la gráfica en dos puntos distintos y si eso pasa no es función.

4. Sean las funciones f y g, cuyos criterios están dados por $f(x) = x^2 + 5x - 3$ y $g(x) = \dfrac{3x}{2-x} + 7$, determine la composición $(gof)(x)$, luego determine $(gof)(3)$.

Solución:

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{3(x^2+5x-3)}{2-(x^2+5x-3)} + 7$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{3x^2+15x-9}{2-x^2-5x+3} + 7$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \frac{3x^2+15x-9}{-x^2-5x+5} + 7$$

$$(gof)(3) = \frac{3(3)^2+15(3)-9}{-(3)^2-5(3)+5} + 7$$

$$= \frac{27+45-9}{-9-15+5} + 7$$

$$= \frac{-63}{19} + 7$$

$$= \frac{70}{19}$$

Por lo tanto $\Rightarrow (gof) = \dfrac{3x^2+15x-9}{-x^2-5x+5} + 7$ y la $(gof)(3) = \dfrac{70}{19}$

5. Observe la siguiente tabla de una relación y conteste lo que se le solicita.

x	2	3	4	4	5
$f(x)$	1	5	6	8	11

Con base en los datos de la tabla se puede afirmar que

(a) la relación es una función.

(b) la relación no es una función.

(c) el 3 se relaciona con el 2.

(d) el 1 se relaciona con el 5.

Solución: Recuerde que x representa a cada una las preimágenes y $f(x)$ representa a la imagen de x.

Para que esta relación sea una función, ninguna preimagen puede tener 2 imágenes distintas, se revisan cada uno de los pares ordenados, $(2, 1)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$, $(4, 8)$ y $(5, 11)$.

Al observar la tabla se puede verificar que para el valor $x = 4$ existen dos valores de $f(x)$ diferentes, por lo que no cumple el concepto de función. Por lo tanto, la respuesta correcta es la opción (b).

Opción A:

Se descarta pues no puede suceder que una preimagen tenga 2 imágenes diferentes.

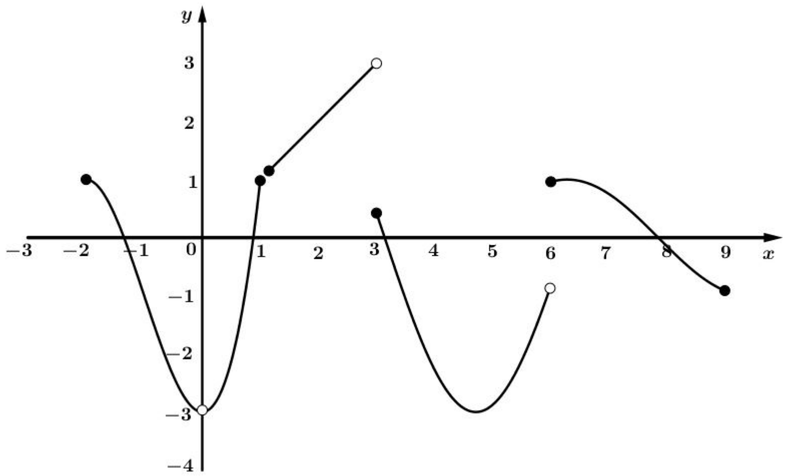
Opción C:

Note que en la relación dada, el 3 se relaciona con el 5 no con el 2.

Opción D:

Note que el 1 no está en el dominio.

6. Observe la siguiente imagen



Si la gráfica anterior representa a la función f,conteste lo que se le solicita.

a) Hallar $f(1)$.

b) Hallar $f(9)$

c) Hallar $f(x) = 1$

Solución:

Hallar $f(1)$

La imagen de 1 es 1

Hallar $f(9)$

La imagen de 9 es -1

Hallar $f(x) = 1$

La preimagen son $-2, 1, 6$

7. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{7x-1}{3}$, la preimagen de -2 corresponde a

Solución:

$-2 = \dfrac{7x-1}{3}$

$\Rightarrow -6 = 7x - 1$

$\Rightarrow -5 = 7x$

$\to \dfrac{-5}{7} = x$

Por lo tanto la preimagen de -2 es $\dfrac{-5}{7}$

8. Considere la siguiente tabla

$f(x)$	-3	-5	6	8	7
x	-2	5	7	7	9

¿Determine si la relación anterior, corresponde a una función?

Solución:

No es función, note que para un mismo x hay dos $f(x)$ distintos en este caso es $x = 7$ tiene como imágenes distintas que son 6 y al 8

Bibliografía

Convenio MEP-ICER. (2018). Matemática a tu medida. Material de apoyo para prueba No.1. San José, Costa Rica.