PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

10°

Colaboradores:

Camacho Zamora Richard
Chinchilla Chinchilla Michelle
Fletes Alvarado Claudia
Ulloa Araya Siony

Relaciones y Álgebra

Función lineal

Aprendizajes esperados

- Representar gráficamente una función lineal.
- Determinar la pendiente, la intersección con el eje de las ordenadas y de las abscisas de una recta dada, en forma gráfica o algebraica.
- Determinar la ecuación de una recta utilizando datos relacionados con ella.

Función Lineal

m: representa la pendiente

b: representa la intersección con el eje "y"

Su gráfica es una línea recta.

Forma:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = mx + b$, con $m, b \in \mathbb{R}$

Cortes con los ejes:

Eje x o eje de las abscisas:

$\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$

Eje y o eje de las ordenadas:

$(0, b)$

Relación pendiente-gráfica de la función:

$m > 0$: f será creciente

$m < 0$: f será decreciente

$m = 0$: f será constante

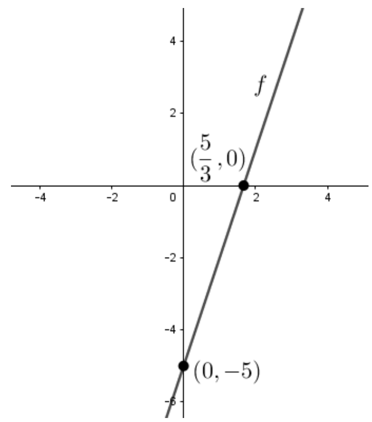
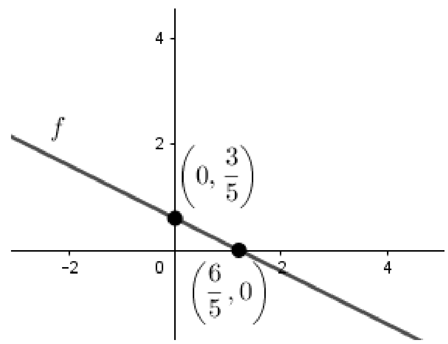
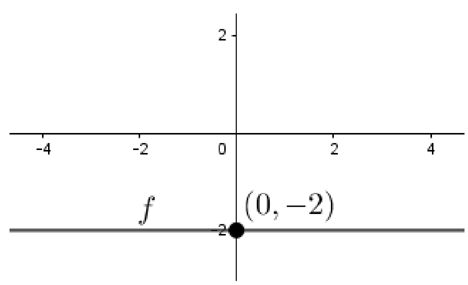
¿Cómo se calcula “m”?

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

¿Cómo se calcula “b”?

$b = y - mx$ **donde** y **y** x **son las coordenadas de un punto dado y** m **el valor de la pendiente encontrado.**

Ejemplos:

Criterio	m	Intersección con eje “y”	Intersección con eje “x”	Gráfica
$f(x) = 3x - 5$	3 f **es** **creciente**	$(0, -5)$	$\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$ $= \left(\frac{5}{3}, 0\right)$	
$f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}$	$-\frac{1}{2}$ f **es** **decreciente**	$\left(0, \frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$ $= \left(\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{1}{2}}, 0\right)$ $= \left(\frac{6}{5}, 0\right)$	
$f(x) = -2$	0 f **es** **constante**	$(0, -2)$	**No aplica**	

Ejercicios Resueltos

1. Determine si la función $f(x) = 3x$ es lineal, de ser así represente f gráficamente y analice su monotonía.

   Solución

   Una función lineal posee la forma $f(x) = mx + b$, donde el exponente de x es igual a 1, en este caso f cumple con dicha condición, por lo tanto f es una función lineal.

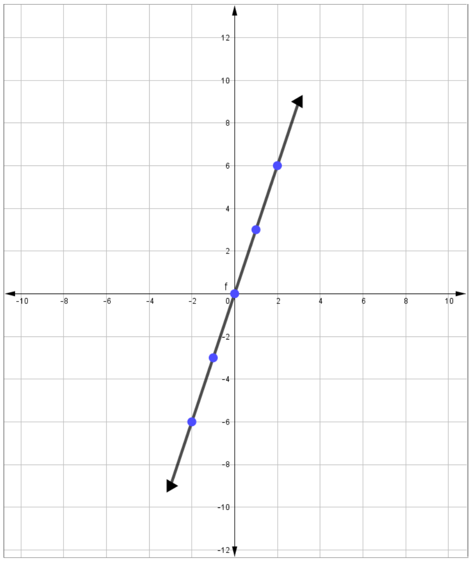
   Para graficar f construiremos una tabla para determinar algunos puntos por donde pasa nuestra recta

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-6	-3	0	3	6

   Recuerde que para obtener los valores de $f(x)$ lo que debemos hacer es sustituir cada valor de x dado, es decir, para determinar $f(-2)$ tenemos que:

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) = -6$$

   Una vez que graficamos los puntos de nuestra tabla obtenemos



   En la gráfica podemos ver como la función efectivamente es creciente, pues $m = 3 > 0$

2. Determine el valor de la pendiente y intersección con el eje de las ordenadas para cada una de las funciones dadas.

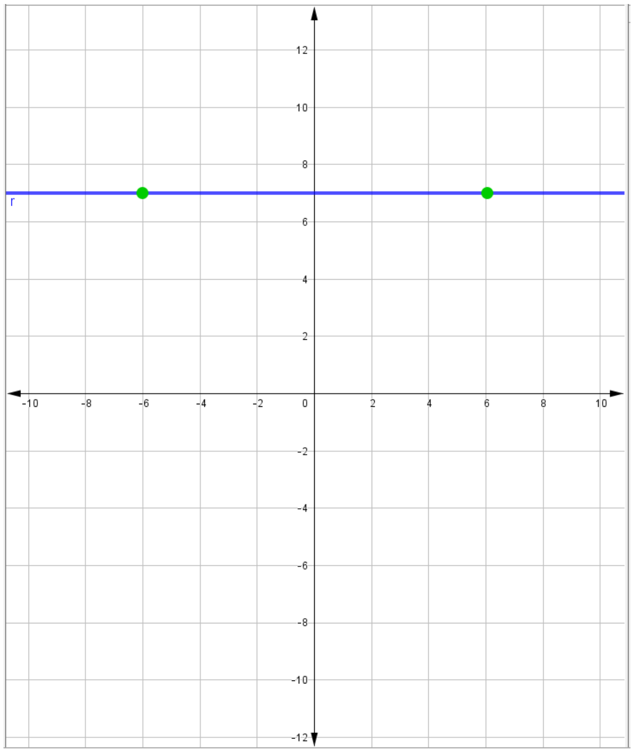
   a) $f(x) = 15x - 15$

   Solución
   Recordemos que:

   - el eje de las ordenadas es el eje y.
   - Una función lineal tiene la forma $f(x) = mx + b$ donde m es la pendiente y b nos indica la intersección con el eje y , que se denota $(0, b)$

   Considerando lo anterior la pendiente es $m = 15$ y como $b = 15$, la intersección con el eje de las ordenadas es $(0, 15)$

   b) r está dada por la siguiente gráfica



   Solución
   Observe que r es una función constante por lo que su pendiente es $m = 0$, por definición, y la intersección con el eje y es en el punto (0,7)

c) $g(x) = 9 - (3x + 7)$

Solución

Observe que la función g no esta en la forma $g(x) = mx+b$, primero realizaremos las operaciones necesarias para escribirla de la forma $g(x) = mx + b$:

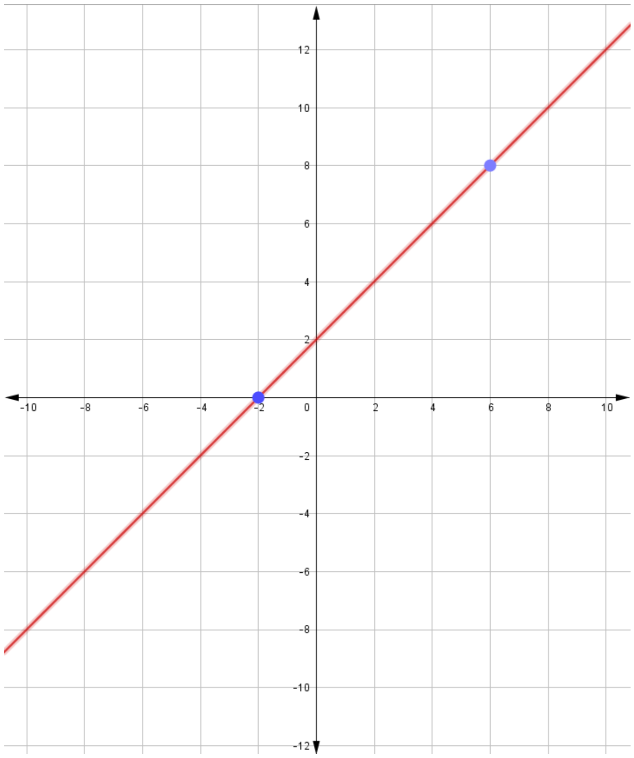
$$g(x) = 9 - 3x - 7$$

Restando términos semejantes tenemos que

$$g(x) = -3x + 2$$

Ahora podemos ver que la pendiente es $m = -3$ y $b = 2$, así la intersección con el eje de las ordenadas es $(0, 2)$

d) f está dada por la siguiente gráfica



Solución

Dada una gráfica necesito conocer dos puntos para determinar la pendiente, los cuales en este caso son $(-2, 0)$ y $(6, 8)$. Así tenemos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo

$$m = \frac{8 - 0}{6 - -2}$$
$$m = 1$$

Note que la gráfica interseca al eje y en el punto $(0, 2)$

e) $p(x) = \dfrac{18x - 3x}{4}$

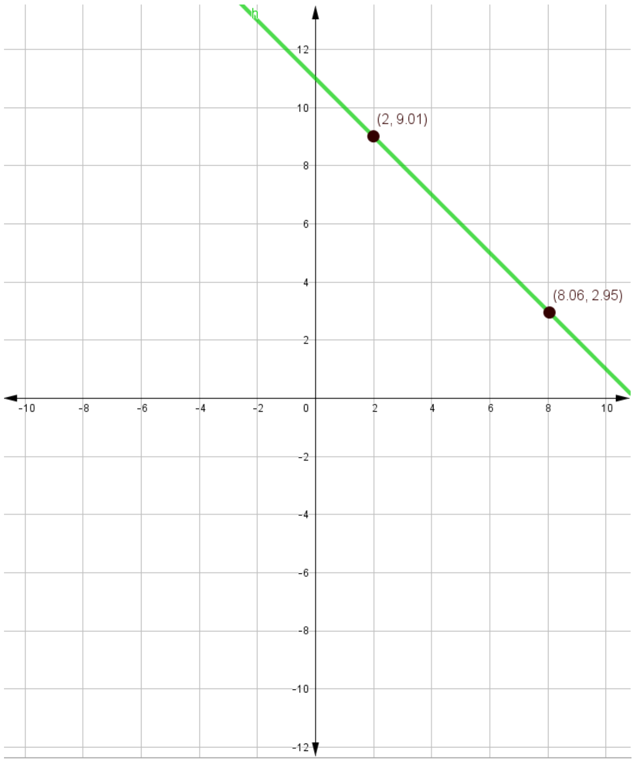
Solución

Primero realizaremos las operaciones necesarias para escribir $p(x) = mx + b$ Sumando términos semejantes

$$p(x) = \frac{15x}{4}$$

Ahora podemos ver que la pendiente es $m = \frac{15}{4}$ y $b = 0$, así la intersección con el eje de las ordenadas es $(0, 0)$

f) h está dada por la siguiente gráfica



Solución

Dada una gráfica necesito conocer dos puntos para determinar la pendiente, los cuales en este caso son $(2, 9{,}01)$ y $(8{,}06, 2{,}95)$. Así tenemos que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituyendo

$$m = \frac{2{,}95 - 9{,}01}{8{,}06 - 2}$$

$$m = -1$$

Para determinar b usaremos la fórmula

$$b = y - mx$$

Sustituyendo con uno de los puntos dados tenemos que

$$b = 2{,}95 - -1 \cdot 8{,}06$$

$$b = 11{,}01$$

Así h interseca al eje y en el punto $(0, 11{,}01)$

3. Determine el criterio de cada función lineal según las características dadas

a) $m = 6$ y $b = 7$

Solución
Una función lineal es de la forma $f(x) = mx + b$
Así bien podemos decir que el criterio sería $f(x) = 6x + 7$

b) $m = -5$ y pasa por $(0, 9)$

Solución
Para determinar el criterio necesito conocer el valor de b Dado el punto $(0, 9)$ tenemos que

$$b = y - mx \rightarrow b = 9 - -5 \cdot 0 \rightarrow b = 9$$

Por lo tanto el criterio es $f(x) = -5x + 9$

c) $b = 0$ y $m = \dfrac{7}{5}$

Solución
Dados b y m el criterio de la función es $g(x) = \dfrac{7}{5}x$

d) Pasa por $(-3, 0)$ y $(0, -2)$

Solución
Calculamos los valores de m y b con las fórmulas correspondientes

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow m = \frac{-2 - 0}{0 - -3} \rightarrow \frac{2}{3}$$

Una vez encontrado m determinamos b

$$b = y - mx \rightarrow b = 0 - \frac{2}{3} \cdot -3 \rightarrow b = 2$$

Por lo que el criterio sería $g(x) = \dfrac{2}{3}x + 2$

Nota: Puedes escoger cualquiera de los dos puntos dados para determinar b

4. Determine la intersección con el eje de las abscisas para cada función dada.

a) $f(x) = -8x - 7$

Solución
Recordemos que el eje de las abscisas es el eje x
Para determinar la intersección con el eje x debemos resolver

$$\frac{-b}{m}$$

Dado que $m = -8$ y $b = -7$ entonces

$$\frac{-b}{m} = \frac{--7}{-8} = \frac{-7}{8}$$

Así f interseca al eje x en el punto

$$\left(\frac{-7}{8}, 0\right)$$

b) $h(x) = \dfrac{x - 19}{3}$

Solución
Note que h no esta de la forma $h(x) = mx + b$ para ello vamos a reescribirla de la siguiente forma

$$h(x) = \frac{x}{3} - \frac{19}{3}$$

Ahora sí, podemos ver que $m = \dfrac{1}{3}$ y $b = \dfrac{-19}{3}$
Entonces

$$\frac{-b}{m} = \frac{-\frac{-19}{3}}{\frac{1}{3}} = 19$$

Así f interseca al eje x en el punto

$$(19, 0)$$

5. Analice y responda

- Si $f(x) = mx+b$, con $m < 0$ y $b > 0$ que características posee una posible función f.

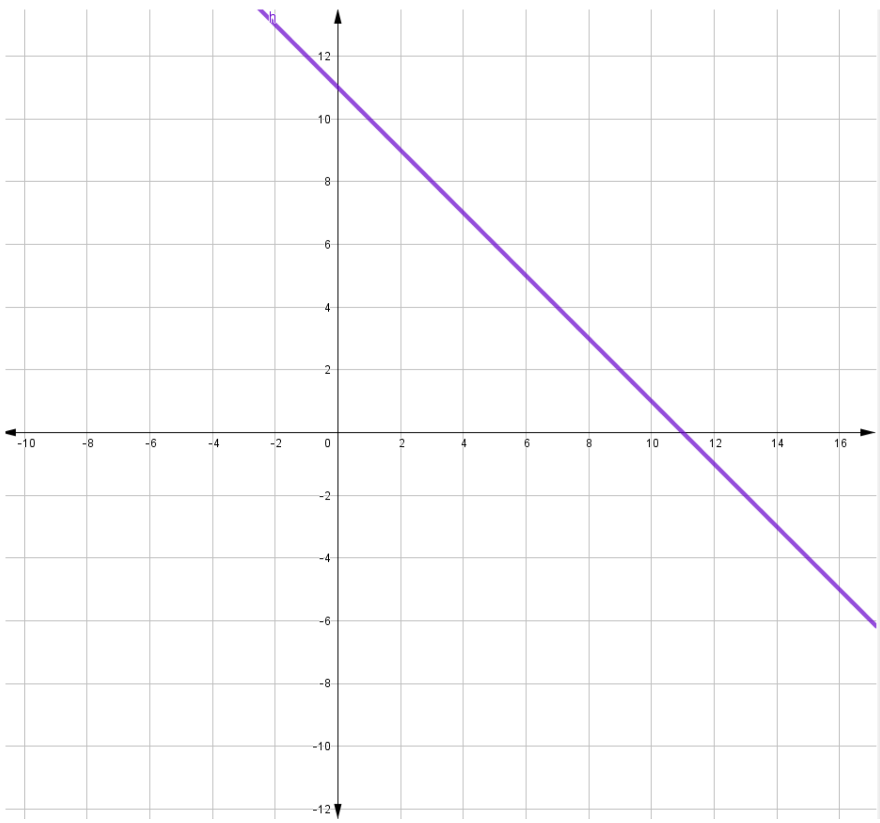
  Solución

  Tenemos que $m < 0$, esto nos indica que f es una función decreciente y saber que $b > 0$ quiere decir que f interseca al eje y en la parte positiva del eje (arriba del eje x).

  También podemos saber que interseca al eje x en la parte positiva del eje (lado derecho respeto al eje y), pues $-b < 0$ y $m < 0$ al dividir dos negativos obtengo un número positivo.

- Realice una posible gráfica

  Solución



Ejercicios

1. ¿Cuál es la pendiente de cada una de las siguientes funciones lineales que tienen por ecuación?

   - $2y = 4x + 19$
   - $y = \dfrac{3x+5}{8}$
   - $6y - 3x = 2$

2. ¿Cuáles son las intersecciones con el eje de ordenadas y abscisas de cada una de las siguientes funciones?

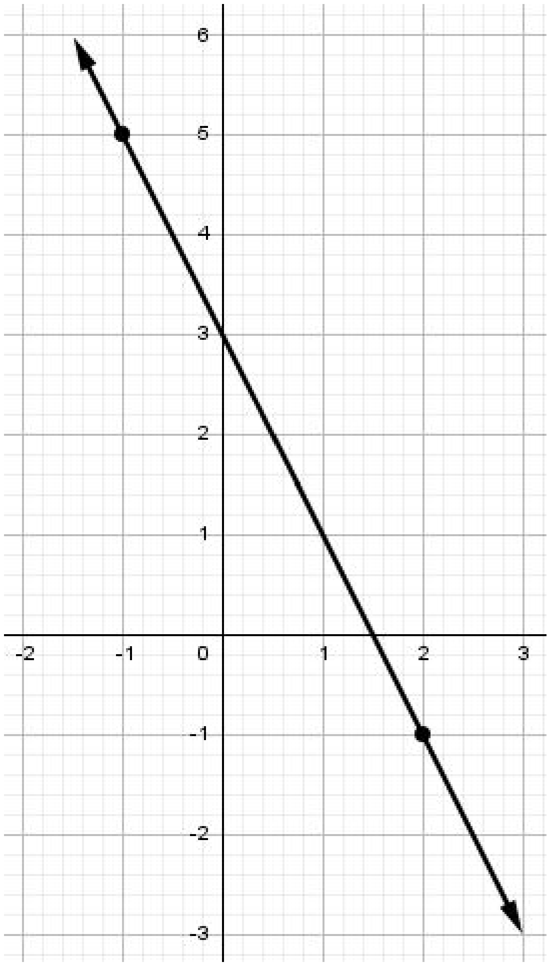
   - $f(x) = 4x + 5$
   - $g(x) = x + 1$
   - $h(x) = x$

3. ¿Cuál es la pendiente de la función lineal que pasa por los puntos $(1,0)$ y$(0,-1)$?

4. ¿Cuál es la ecuación de la función lineal que pasa por el punto $(2,4)$ y tiene pendiente 2?

5. ¿Cuál es la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $(1,5)$ y $(2,1)$?

6. Determine la pendiente, las intersecciones con los ejes y el criterio de la función representada en la siguiente gráfica.



Otras Actividades

- Actividad Quizizz

Videos para reforzar

- Función lineal
- Función lineal

Solución de los Ejercicios

1. ¿Cuál es la pendiente de cada una de las siguientes funciones lineales que tienen por ecuación?

   - $2y = 4x + 19$
     Solución:

     $$2y = 4x + 19$$

     $$y = \frac{4x + 19}{2}$$

     $$y = \frac{4x}{2} + \frac{19}{2}$$

     $$y = 2x + \frac{19}{2}$$

     La pendiente es 2

   - $y = \dfrac{3x + 5}{8}$
     Solución:

     $$y = \frac{3x + 5}{8}$$

     $$y = \frac{3x}{8} + \frac{5}{8}$$

     La pendiente es $\dfrac{3}{8}$

   - $6y - 3x = 2$
     Solución:

     $$6y - 3x = 2$$

     $$6y = 3x + 2$$

     $$y = \frac{3x + 2}{6}$$

     $$y = \frac{3x}{6} + \frac{2}{6}$$

     $$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$$

     La pendiente es $\dfrac{1}{2}$

2. ¿Cuáles son las intersecciones con el eje de ordenadas y abscisas de cada una de las siguientes funciones?

- $f(x) = 4x + 5$

Solución:

Intersección abscisas

Note que en la ecuación $m = 4$ $b = 5$ por lo que se tiene que:

La intersección es el punto $\left(\frac{-5}{4}, 0\right)$

Intersección ordenadas

Note que en la ecuación $b = 5$ por lo que se tiene que:

La intersección es el punto $(0, 5)$

- $g(x) = x + 1$

Solución:

Intersección abscisas

Note que en la ecuación $m = 1$ $b = 1$ por lo que se tiene que:

La intersección es el punto $(-1, 0)$

Intersección ordenadas

Note que en la ecuación $b = 1$ por lo que se tiene que:

La intersección es el punto $(0, 1)$

- $h(x) = x$

Solución:

Intersección abscisas

Note que en la ecuación $m = 1$ $b = 0$ por lo que se tiene que:

La intersección es el punto $(0, 0)$

Intersección ordenadas

Note que en la ecuación $b = 0$ por lo que se tiene que:

La intersección es el punto $(0, 0)$

3. ¿Cuál es la pendiente de la función lineal que pasa por los puntos $(1, 0)$ y$(0, -1)$?

Solución:

Recordemos que la pendiente se calcula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{0 - -1}{1 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Por lo tanto la pendiente es 1

4. ¿Cuál es la ecuación de la función lineal que pasa por el punto $(2,4)$ y tiene pendiente 2?

   Solución:

   Recordemos que la función lineal tiene por ecuación $y = mx + b$ como ya tenmos el valor de m solo falta el valor de b y b tiene la forma $b = y - mx$

$$b = 4 - (2)(2)$$

$$b = 4 - 4$$

$$b = 0$$

   Por lo tanto la ecuación $y = 2x$

5. ¿Cuál es la ecuación de la función lineal que pasa por los puntos $(1,5)$ y $(2,1)$?

   Solución:

   Recordemos que la pendiente se calcula $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{5-1}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$$

   Recordemos que $b = y - mx$

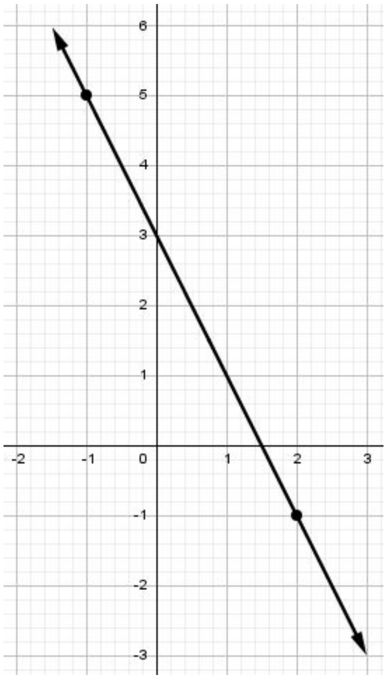
$$b = 5 - (-4)(1)$$

$$b = 5 + 4$$

$$b = 9$$

   Por lo tanto la ecuación de la función es $y = -4x + 9$

6. Determine la pendiente, las intersecciones con los ejes y el criterio de la función representada en la siguiente gráfica



Solución:

Recuerde que dados 2 puntos que pasan por una recta se puede hallar su criterio, así como $(-1,5)$ y $(2,-1)$ pasan por la recta entonces se tiene que

$$m = \frac{5 - -1}{-1 - 2}$$

$$m = \frac{6}{-3} = -2$$

Por lo que la pendiente corresponde a -2. Para hallar la constante b, se puede utilizar un punto que pertenezca a la recta. Se utilizará el punto $(2,-1)$.

$$b = -1 - (2 \cdot -2)$$

$$b = -1 + 4 = 3$$

Así el criterio de la función viene dado por $y = -2x + 3$

Para hallar los cortes con los ejes se tiene que la función corta la eje y, en el punto $(0,b)$, así la función corta al eje y en el punto $(0,3)$.

De la misma manera recuerde que la función lineal corta al eje x en el punto $\left(\frac{-b}{m}, 0\right)$, así la función corta al eje x en el punto $\left(\frac{-3}{-2}, 0\right) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Bibliografía

Chavarría Arroyo, G. (2017). *Matemática 10* (2da. ed.). Heredia, Costa Rica: Ediciones Lebombo.

Convenio MEP-ICER. (2018). *Matemática a tu medida. Material de apoyo para prueba No.1*. San José, Costa Rica.