PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

10°

Colaboradores:

Camacho Zamora Richard
Chinchilla Chinchilla Michelle
Fletes Alvarado Claudia
Ulloa Araya Siony

Relaciones y Álgebra

Función cuadrática

Aprendizajes esperados

- Analizar gráfica y algebraicamente la función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$
- Relacionar la representación gráfica con la algebraica
- Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando las funciones estudiadas.

Función Cuadrática

Definiciones

- **Función cuadrática:**

  Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una función cuyo criterio puede expresarse de la forma

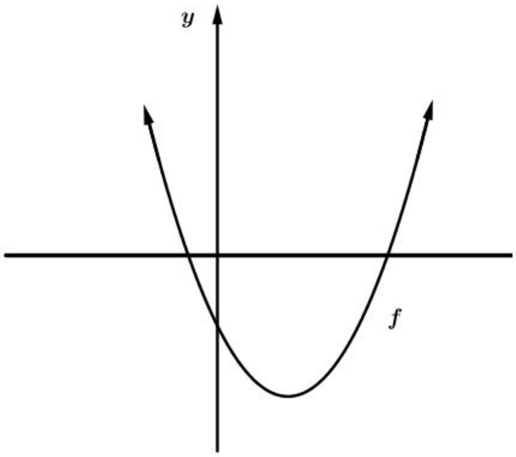
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

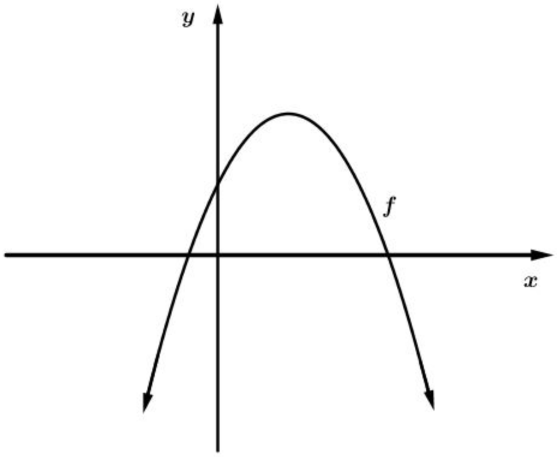
  con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$, entonces se dice que f es una función cuadrática.

Propiedades de la Función cuadrática

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuadrática con criterio $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b y c constantes reales y $a \neq 0$ entonces se tienen las siguientes propiedades

- **Concavidad de una función cuadrática:**
  - Si $a > 0$ la gráfica de f es parábola convexa.
  - Si $a < 0$ la gráfica de f es parábola cóncava.





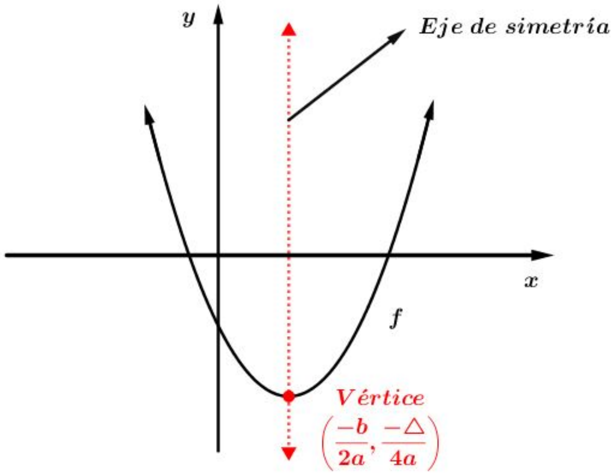
- **Vértice de una función cuadrática:**

  Dada la función f al punto máximo o mínimo se le llama vértice y se denota por $\left(\dfrac{-b}{2a}, f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$, o bien $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\triangle}{4a}\right)$.

- **Eje de simetría de una función cuadrática:**

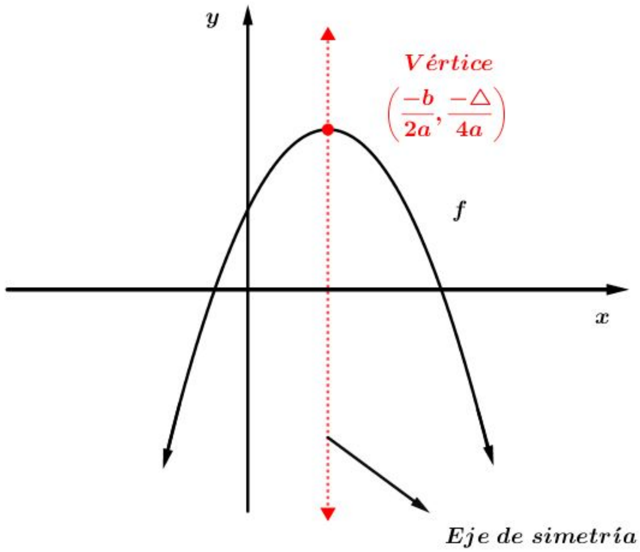
  La gráfica de f es simétrica con respecto a la recta vertical de ecuación $x = \dfrac{-b}{2a}$, a está recta se le llama eje de simetría de la parábola.

  - Eje de simetría y vértice cuando $a > 0$



Nota:
Note que en este caso el vértice alcanza el punto mínimo de la parábola.

  - Eje de simetría y vértice cuando $a < 0$

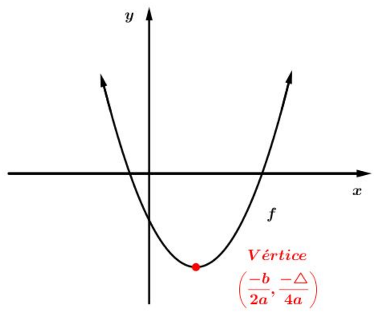


Nota:
Note que en este caso el vértice alcanza el punto máximo de la parábola.

- **Ámbito y monotonía de una función cuadrática:**

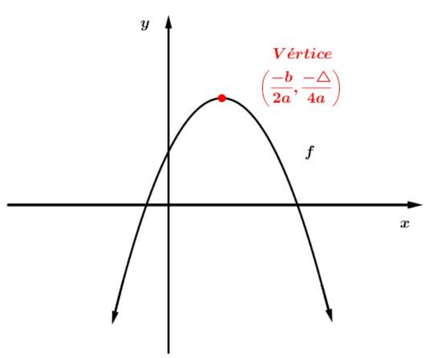
  Caso donde $a > 0$, f es convexa

  - Ámbito de f, $A_f = \left[\dfrac{-\triangle}{4a}, +\infty\right[$
  - f es estrictamente decreciente en $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2a}\right[$
  - f es estrictamente creciente en $\left]\dfrac{-b}{2a}, +\infty\right[$



  Caso donde $a < 0$, f es cóncava

  - Ámbito de f, $A_f = \left]-\infty, \dfrac{-\triangle}{4a}\right]$
  - f es estrictamente creciente en $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2a}\right[$
  - f es estrictamente decreciente en $\left]\dfrac{-b}{2a}, +\infty\right[$



- **Cortes con los ejes de una función cuadrática:**
  - **Corte con el eje y:** Dada la función f, la misma corta al eje y en el punto $(0, c)$, dado que $f(0) = c$.
  - **Cortes con el eje x:**
    Recuerde que en un polinomio cuadrático se definió el discriminante por
    $\triangle = b^2 - 4ac$.
    Este concepto es aplicable a las funciones cuadráticas y tiene su utilidad en la determinación de los ceros de la función, los mismos que representan los valores sobre el eje x donde la gráfica de la función corta dicho eje.

    De esta manera para hallar los cortes de f con el eje x se tienen 3 casos:

    1. Caso 1: $\triangle \geq 0$

       La gráfica de la función corta al eje x en dos ocasiones en los puntos

       - $\left(\dfrac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}, 0\right)$
       - $\left(\dfrac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}, 0\right)$

    2. Caso 2: $\triangle = 0$

       La gráfica de la función corta al eje $x$en una ocasión en el punto

       - $\left(\dfrac{-b}{2a}, 0\right)$

       Note que el punto de intersección ocurre en el vértice.

    3. Caso 3:$\triangle < 0$

       Para este caso se tiene que la gráfica de f no corta al eje x en ningún punto.

Ejercicios Resueltos

1. Sea la función $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, determine los puntos de intersección de la función f con los ejes.

   Solución:

   Primero se tiene que reconocer que $a = 2$; $b = 3$; $c = -5$

Recuerde que el corte con el eje y esta dado por el punto $(0, c)$, de esta manera se tiene que la función f corta al eje y en el punto $(0, -5)$.

Los cortes con el eje x, depende del valor que tenga $\triangle$, primero se calculará su valor.

Recuerde que $\triangle = b^2 - 4ac$

$$\Rightarrow \triangle = 3^2 - 4(2)(-5)$$

$$\Rightarrow \triangle = 9 + 40 = 49$$

Como $\triangle > 0$ la función f corta al eje x en dos puntos los cuales vienen dados por

- $\left(\dfrac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a}, 0\right)$
- $\left(\dfrac{-b-\sqrt{\triangle}}{2a}, 0\right)$

De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} \\ &= \frac{-3+\sqrt{49}}{2(2)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2a} \\ &= \frac{-3-\sqrt{49}}{2(2)} \\ &= \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

Así los puntos de intersección con el eje x corresponden a

$$(1, 0) \qquad \wedge \qquad \left(\frac{-5}{2}, 0\right)$$

2. Pedro tiene un terreno en forma rectangular de lados x y y si su perímetro es a, una fórmula para calcular su área en función de x corresponde a

   A) $f(x) = -x^2 + \dfrac{a^2}{2}$
   B) $f(x) = -x^2 - \dfrac{a}{2}x$
   C) $f(x) = -x^2 + \dfrac{a}{2}x$
   D) $f(x) = -x^2 - \dfrac{a^2}{2}$

   Solución:

   Si los lados del terreno son x y y y su perímetro es a se tiene la ecuación

   $$2x + 2y = a \tag{1}$$

   Recuerde que la fórmula para hallar el área es largo por ancho, siendo x el largo y y el ancho el área $A = x * y$

   De (1) se tiene que

   $$y = \frac{a}{2} - x$$

   Así el área del rectángulo en función de x corresponde a

   $$f(x) = \left(\frac{a}{2} - x\right) \cdot x$$

   $$f(x) = \frac{ax}{2} - x^2$$

   Por lo que la respuesta correcta es la opción (c)

3. En una armería desean saber la altura máxima que alcanza un proyectil, ya lograron ver que el proyectil tiene un movimiento parabólico descrito por la fórmula $g(x) = -5x^2 + 42x + 1$, donde $g(x)$ representa a la altura en metros del proyectil en función del tiempo x.¿Cuál es la altura máxima en kilómetros que alcanza el proyectil?

   A) $89{,}2\,km$
   B) $4{,}2\,km$
   C) $0{,}0892\,km$
   D) $0{,}042\,km$

Solución:

$g(x) = -5x^2 + 42x + 1$ Para calcular el punto máximo que alcanza el proyectil basta con calcular el vértice, como nos piden la altura esta misma se encuentra calculando la coordenada y del vértice así

Recuerde que el vértice corresponde a las coordenadas

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\triangle}{4a}\right)$$

Así la altura máxima en metros del proyectil viene dada por

$$\frac{-\triangle}{4a} = \frac{-(42^2 - 4(-5)(1))}{4 * -5} = 89{,}2\,m$$

Al hacer la conversión de metros a kilómetros se tiene que

$89{,}2\,m \rightarrow 0{,}0892\,km$

Por lo que la respuesta correcta es la opción (c)

Ejercicios

1. Analice cada una de las siguientes funciones. Marque con (x) las que corresponden a funciones cuadráticas y anote los coeficientes correspondientes.

   (a) $f(x) = -8 + 9x^2 - 8x, \rightarrow a =$________, $b =$________, $c =$________.

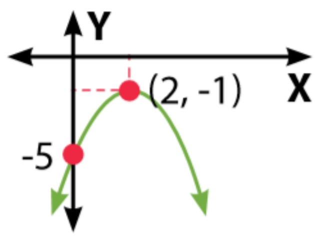
   (b) $g(x) = -7x(5x - 1) + 2, \rightarrow a =$________, $b =$________, $c =$________.

   (c) $h(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + x^2}{8}, \rightarrow a =$________, $b =$________, $c =$________.

   (d) $k(x) = 2x(7x^2 - 6), \rightarrow a =$________, $b =$________, $c =$________.

   (e) $p(x) = \dfrac{5x^2}{6}, \rightarrow a =$________, $b =$________, $c =$________.

2. Analice la siguiente gráfica y con base en ella conteste lo que se le solicita en cada actividad.



   a) Si el criterio de la función es $f(x) = -x^2 + bx - 5$, ¿cuál es el valor de b?

   ____

   b) ¿El par ordenado $(4, -5)$ pertenece al gráfico de la función?¿Por qué?

   ____

3. Analice cada afirmación y conteste lo se le solicita.

   a) Si el punto mínimo de la gráfica de una función cuadrática es $(5, 1)$, ¿cuál es su ámbito?

   ____

   b) Si el criterio de una función cudrática es $f(x) = -x^2 + 5x - 6$, ¿cuál es su ámbito?

   ____

   c) Si el vértice de la función $\left(\dfrac{-9}{5}, 5\right)$, ¿cuál es su eje de simetría?

   ____

   d) Si el punto máximo de la gráfica de una función cuadrática es (-1,4), ¿en qué intervalo es creciente y en cuál es decreciente?

   ____

4. Realice un análisis completo dela función $f(x) = x^2 - 16$ y luego construya la gráfica de f

5. Determine el criterio de la función cuadrática que representa cada situación.

    a) Las ganancias g mensuales aproximadas de una empresa se calculan restando 150000 del cuadrado de la inversión I realizada.

    ____

    b) El área A de una piscina en forma rectangular en la que el largo es el doble que el ancho x aumentado en 1.

    ____

    c) La altura h de un balón que es pateado hacia adelante y arriba se puede calcular obteniendo 5 veces el cuadrado de la distancia d recorrida en forma horizontal.

    ____

    d) El resultado r de aumentar en 2 el producto de un número entero n y su consecutivo.

    ____

Otras Actividades

- Actividad Quizizz

Videos para reforzar

- Graficar funciones cuadráticas
- Función cuadrática

Solución de los Ejercicios

1. Analice cada una de las siguientes funciones. Marque con (x) las que corresponden a funciones cuadráticas y anote los coeficientes correspondientes.

   (a) $f(x) = -8 + 9x^2 - 8x, \to a =$_______, $b =$_______, $c =$_______.

   Solución:
   Recordemos que la función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, para determinar si f es cuadrática el termino a debe ser diferente de 0. En este caso tenemos que $a = 9$, por lo tanto si es una función cuadrática y los otros valores son $b = -8$ y $c = -8$.

   (b) $g(x) = -7x(5x - 1) + 2, \to a =$_______, $b =$_______, $c =$_______.

   Solución:
   A simple vista no podemos asegurar que g, es una función cuadrática, primero debemos realizar algunas operaciones para tratar de reescribir g de la forma $g(x) = ax^2 + bx + c$. Así bien después de multiplicar obtenemos $g(x) = -35x^2 + 7x + 2$, la cuál es una función cuadrática pues $a = -35$, además $b = 7$ y $c = 2$

   (c) $h(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + x^2}{8}, \to a =$_______, $b =$_______, $c =$_______.

   Solución:
   Antes de responder vamos a resolver las sumas o restas entre términos semejantes, al hacer esto se obtiene que $h(x) = \dfrac{-3x + 0x^2}{8}$ donde $a = 0$, quiere decir que h no es función cuadrática.

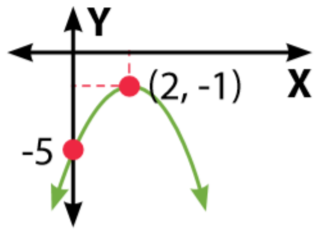
   (d) $k(x) = 2x(7x^2 - 6), \to a =$_______, $b =$_______, $c =$_______.

   Solución:
   Primero multipliquemos el término $2x$ por lo que se encuentra dentro del paréntesis, al hacer esto se obtiene que $k(x) = 14x^3 - 12x^2$, note que aparece un termino x^3 esto significa que k no es una función cuadrática.

   (e) $p(x) = \dfrac{5x^2}{6}, \to a =$_______, $b =$_______, $c =$_______.

   Solución:
   Observe que el valor de $a = \dfrac{5}{6}$ por lo tanto p es una función cuadrática y los valores de b y c son cero, pues no aparecen en la función.

2. Analice la siguiente gráfica y con base en ella conteste lo que se le solicita en cada actividad.



a) Si el criterio de la función es $f(x) = -x^2 + bx - 5$, ¿cuál es el valor de b?

Solución:
Dado el punto $(2, -1)$ que pertenece a la función f podemos sustituirlo en la función y obtendremos b, es decir

$$-1 = -(2)^2 + d(2) - 5$$

$$-1 = -4 + b\,\text{cot} -5$$

$$-1 + 4 + 5 = b \cdot 2$$

$$\frac{8}{2} = b$$

$$4 = b$$

Por lo tanto $b = 4$

b) ¿El par ordenado $(4, -5)$ pertenece al gráfico de la función?¿Por qué?

Solución:
Una forma de saber si el par ordenado $(4, -5)$ pertenece a f es sustituir $x = 4$ y esperar que el resultado sea -5, de lo contrario concluimos que no pertenece al gráfico. Entonces $f(4) = -(4)^2 + 4 \cdot (4) - 5 = -16 + 16 - 5 = -5$, esto quiere decir que el par ordenado $(4, -5)$ si pertenece a f.

3. Analice cada afirmación y conteste lo se le solicita.

   a) Si el punto mínimo de la gráfica de una función cuadrática es $(5,1)$, ¿cuál es su ámbito?

   Solución:
   Si tenemos un punto mínimo quiere decir que la gráfica de la función es cóncava hacia arriba, recordemos que el ámbito se lee en el eje y de abajo hacia arriba, así bien el ámbito es $[1,+\infty[$

   b) Si el criterio de una función cuadrática es $f(x)=-x^2+5x-6$, ¿cuál es su ámbito?

   Solución:
   Es importante conocer la parte y vértice de la función $\dfrac{-\Delta}{4a}$ para determinar desde donde inicia o termina nuestro ámbito.

   Recuerde que $\Delta=b^2-4ac \rightarrow \Delta=5^2-4\cdot -1\cdot -6=1$

   Entonces $\left(\dfrac{-\Delta}{4a}\right)=\frac{-1}{4\cdot -1}=\frac{1}{4}$

   Como f es cóncava hacia abajo, el ámbito es $]-\infty,\frac{1}{4}]$

   c) Si el vértice de la función $\left(\dfrac{-9}{5},5\right)$, ¿cuál es su eje de simetría?

   Solución: El eje de simetría es $x=\frac{-9}{5}$, pues coincide con la parte x del vértice.

   d) Si el punto máximo de la gráfica de una función cuadrática es (-1,4), ¿en qué intervalo es creciente y en cuál es decreciente?

   Solución:
   Recuerde que la monotonía de una función se lee en el eje x, dado el vértice, y sabiendo que es un punto máximo tenemos que la función es creciente en $]-\infty,-1[$ y decreciente de $]-1,+\infty[$

4. Realice un análisis completo dela función $f(x)=x^2-16$ y luego construya la gráfica de f

   Solución:
   Identificamos los valores de a,b y c los cuales son $a=1,b=0,c=-16$

   1. La intersección con el eje y es $(0,c)$, es decir, $(0,-16)$

   2. Como $a>0$ es cóncava hacia arriba y tendremos un punto mínimo en el vértice.

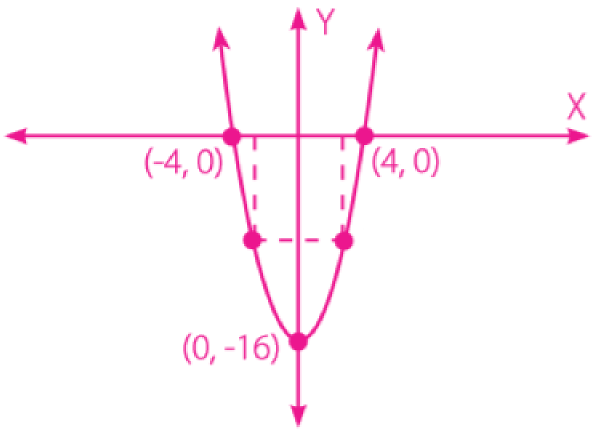
3. Eje de simetría es $x = \frac{-b}{2 \cdot a}$, es decir, $x = \frac{-0}{2} = 0$

4. El discriminante está dado por $\Delta = b^2 - 4ac$, es decir, $\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot -16 = 64$, como $\Delta > 0$ tendremos dos intersecciones en el eje x

5. Intersecciones con el eje x

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 + \sqrt{64}}{2} = 4$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 - \sqrt{64}}{2} = -4$$

6. La gráfica de la función es



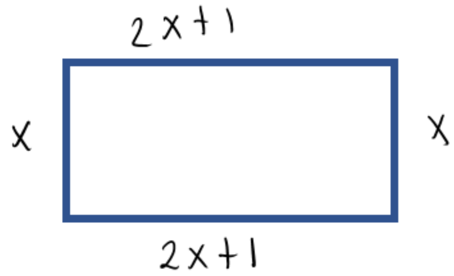
5. Determine el criterio de la función cuadrática que representa cada situación.

   a) Las ganancias g mensuales aproximadas de una empresa se calculan restando 150000 del cuadrado de la inversión I realizada.

   Solución:
   Observe que las ganancias dependen de la inversión al cuadrado y que además tenemos un costo fijo que rebajar de 150 000, por lo tanto el criterio está dado por:
   $$g(I) = I^2 - 150000$$

b) El área A de una piscina en forma rectangular en la que el largo es el doble que el ancho x aumentado en 1.

Solución:
Recuerde que las fórmula de el área de un rectángulo es $b \cdot h$.
Según los datos el largo depende del valor del ancho y las dimensiones del rectángulo serían las siguientes:



Entonces tendríamos que el criterio es $A(x) = (2x + 1)(x)$ o bien puede expresarse como $A(x) = 2x^2 + x$

c) La altura h de un balón que es pateado hacia adelante y arriba se puede calcular obteniendo 5 veces el cuadrado de la distancia d recorrida en forma horizontal.

Solución:
Observe que la altura del balón depende de la distancia recorrida en forma horizontal, por lo cuál tenemos que el criterio es $h(d) = 5d^2$

d) El resultado r de aumentar en 2 el producto de un número entero n y su consecutivo.

Solución: Note que el resultado depende de n, por cual el criterio esta dado por $r(n) = n(n + 1) + 2$

Referencias

[1] Santillana. *Matemática 10. Edición para docentes* (2019). Proyecto Puentes del Saber. Santillana. –1 ed. – San José, C.R. : Editorial Santillana.