PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC | Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

10°

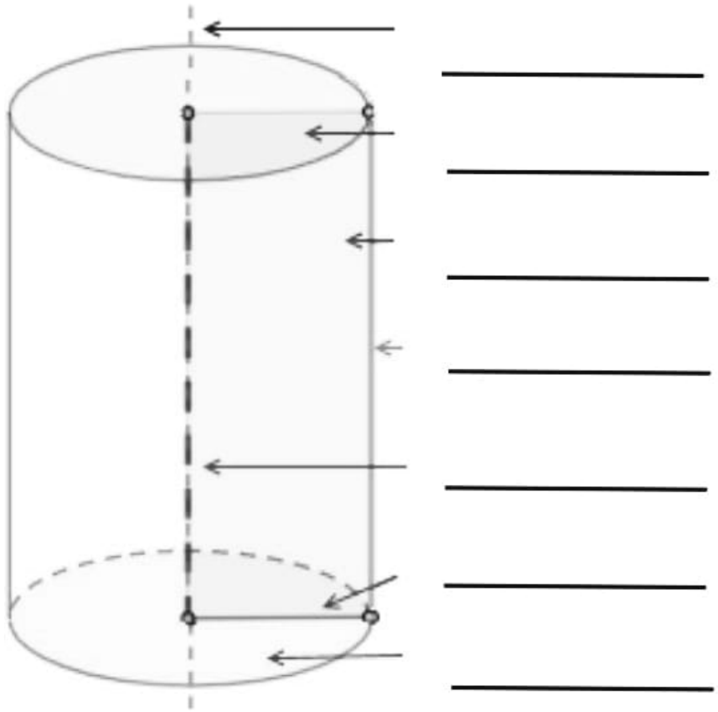
Colaboradores:

Camacho Zamora Richard
Chinchilla Chinchilla Michelle
Fletes Alvarado Claudia
Ulloa Araya Siony

Geometría

Visualización espacial

1. Escriba el nombre de las partes del siguiente cilindro.



2. Determine las secciones planas que se forman al intersecar un plano cilindro circular recto con un plano:

   a) paralelo a las bases

   b) perpendicular a las bases

   c) oblicuo a la altura

3. Calcule el volumen de un cilindro circular recto si se sabe que su radio mide 3 cm y altura 5 cm

4. Pablo quiere pintar un barril de color verde para recolectar la basura de su casa, la pintura que desea usar tiene un valor de 750 colones el centímetro cuadrado si el barril tiene forma de un cilindro circular recto de diámetro 40 centímetros y $1{,}5$ metros de altura, sí Pablo solo quiere pintar la parte lateral del barril. ¿Cuánto dinero le costará a Pablo pintar el barril?

5. Determine el área total de un cilindro circular recto si se sabe que el diámetro del mismo mide 8cm y su altura es de 2 metros.

6. Si se sabe que un cilindro circular recto tiene un área lateral de $54\,cm^2$, además si la altura y el radio tienen una proporción de 3 a 5 , determine la altura y el radio del cilindro.

7. Considere las siguientes afirmaciones sobre una esfera y un plano que la interseca.
   I. La sección que resulta de la intersección de un plano con la esfera corresponde a una circunferencia.
   II. Entre más alejado se interseque el plano respecto al centro de la esfera, de mayor longitud será la sección obtenida.

   De estas proposiciones son verdaderas:

   (a) Ambas
   (b) Solo la I
   (c) Solo la II
   (d) Ninguna

8. Analice cada una de las siguientes proposiciones e indique si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.
   (a) Al cortarse una esfera con un plano paralelo a la circunferencia máxima, se obtienen dos semiesferas idénticas.
   (b) Es posible realizar un corte a una esfera con un plano, de modo que la sección obtenida sea una elipse.
   (c) Dos planos paralelos entre sí cortan una esfera. Si el plano A dista $5\ cm$ del centro de la esfera, y el B a $7\ cm$; entonces la circunferencia que forma el plano A es mayor que la de B.

9. Pablo necesita cortar una esfera de estereofón para realizar un trabajo del colegio. El diámetro de la esfera es de $10\ cm$. Él necesita realizar un corte de modo tal que el radio de la circunferencia obtenida corresponda a $4\ cm$. ¿A qué distancia debe realizar el corte, respecto al centro de la esfera?

10. Determine el radio de la sección plana obtenida al cortar una esfera de $14\ cm$ de diámetro con un plano que dista $3\ cm$ de dicha esfera.

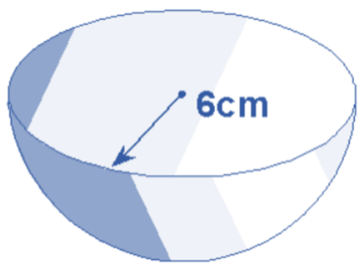
11. Una esfera es cortada por un plano que dista $5\ cm$ de su centro. Si el radio de la circunferencia obtenida corresponde a $8\ cm$, entonces el radio de la esfera corresponde a:

12. Dos esferas de metal de radio $2a$ y $4a$ se funden juntas para hacer una esfera mayor. ¿Cuál es el radio de la nueva esfera?

13. Sean E_1 y E_2 dos esferas, si el volumen de E_2 es el doble del volumen de E_1 y el radio de $E_1 = \sqrt[3]{16}cm$. Calcule el volumen de E_2

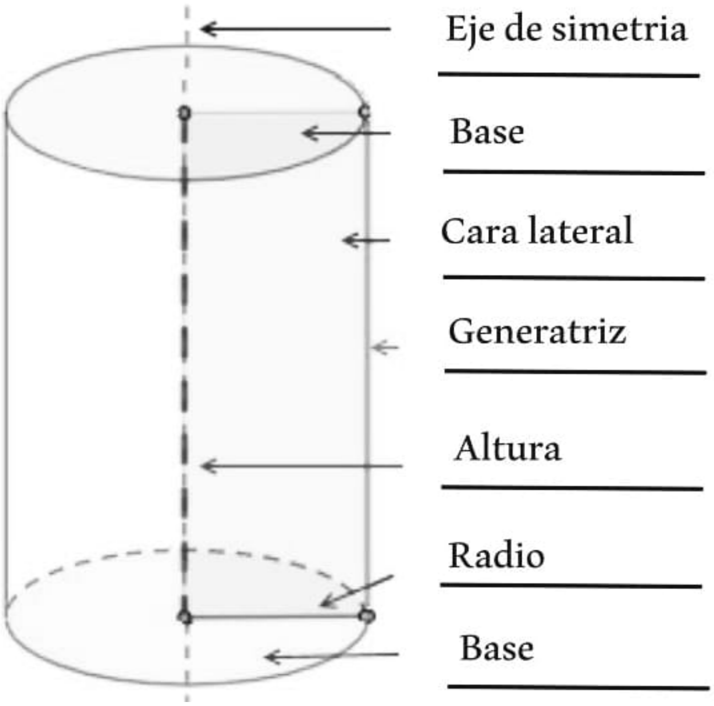
14. Una cúpula semiesférica tiene 10 m de radio interior. ¿Cuánto costará pintar su interior si nos cobran 2500 por cada metro cuadrado?

15. Encontrar la superficie total del sólido mostrado en la figura



Soluciones

1. Escriba el nombre de las partes del siguiente cilindro.
   Solución



2. Determine las secciones planas que se forman al intersecar un plano cilindro circular recto con un plano:

   a) paralelo a las bases
   Solución
   Al intersecar un cilindro circular recto con un plano paralelo a sus bases la sección plana que se forma es un circunferencia.

   b) perpendicular a las bases
   Solución
   Al intersecar un cilindro circular recto con un plano perpendicular a sus bases la sección plana que se forma es un rectángulo.

   c) oblicuo a la altura
   Solución
   Al intersecar un cilindro circular recto con un plano oblicuo a la altura la sección plana que se forma es una elipse.

3. Calcule el volumen de un cilindro circular recto si se sabe que su radio mide 3 cm y altura 5 cm

   Solución

   Recordemos que la formula del volumen de un cilindro circular recto está dado por $V = \pi r^2 h$

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 h \\ &= \pi (3)^2 (5) \\ &= \pi (9)(5) \\ &= 45\pi \\ &\approx 141{,}3716 \end{aligned}$$

   Por lo tanto el volumen del cilindro es de $141{,}3716\ cm^3$

4. Pablo quiere pintar un barril de color verde para recolectar la basura de su casa, la pintura que desea usar tiene un valor de 75 colones el centímetro cuadrado si el barril tiene forma de un cilindro circular recto de diámetro 40 centímetros y $1{,}5$ metros de altura, sí Pablo solo quiere pintar la parte lateral del barril. ¿Cuánto dinero le costará a Pablo pintar el barril?

   Solución

   Recordemos que el área lateral de un cilindro circular recto esta dada por $A_L = 2hr\pi$

   Además observe que las unidades de medida de la altura y el radio son diferentes, por lo que se deben pasar a una medida en común, para este caso se hará la conversión de $1{,}5$ metros a centímetros lo cual da como resultado $150\, cm$ Así el área que Pablo desea pintar viene dada por

$$\begin{aligned} A_L &= 2hr\pi \\ &= 2 \cdot 150 \cdot 20\pi \\ &= 6000\ cm^2 \end{aligned}$$

   Como se desea hallar el costo que tendrá pintar toda esa área como cada centímetro cuadrado cuesta 75 colones, basta con multiplicar el resultado del área obtenido por el precio de la pintura para hallar dicho costo

   Así se tiene que

$$\text{Costo} = 6000 \cdot 75$$

$$\text{Costo} = 450000$$

   Por lo que a Pablo le costará 450000 colones pintar el barril.

5. Determine el área total de un cilindro circular recto si se sabe que el diámetro del mismo mide 8 centímetros y su altura es de 2 metros.

   Solución

   Recuerde que el área total de un cilindro circular recto viene dada por $A_T = 2A_b + A_L$ Además observe que las unidades de medida de la altura y el radio son diferentes, por lo que se deben pasar a una medida en común, para este caso se hará la conversión de 2 metros a centímetros lo cual da como resultado $200\,cm$ De esta manera se tiene que

$$\begin{aligned} A_T &= 2\pi r^2 + 2\pi hr \\ &= 2\cdot 4^2\pi + 2\cdot 200\cdot 4\pi \\ &= 32\pi + 1600\pi \\ &= 1632\pi \\ &= 5127{,}079\ cm^2 \end{aligned}$$

6. Si se sabe que un cilindro circular recto tiene un área lateral de $54\,cm^2$, además si la altura y el radio tienen una proporción de 3 a 5 , determine la altura y el radio del cilindro.

   Solución

   Como nos mencionan que la altura y el radio cumplen una proporción 3 a 5 se tiene que dada la altura h y el radio r se cumple que
   $\dfrac{h}{r} = \dfrac{3}{5}$
   $\Rightarrow h = \dfrac{3r}{5}$
   Además nos dicen que el área lateral es de $54\,cm^2$ por lo que si la formula del área lateral es $A_L = 2hr\pi$ se tiene que

$$\begin{aligned} 54 &= 2hr\pi \\ 54 &= \frac{2\cdot 3r\cdot r\pi}{5} \\ 54\cdot 5 &= 2\cdot 3r\cdot r\pi \\ 270 &= 6r^2\pi \\ \frac{270}{6\pi} &= r^2 \\ \sqrt{\frac{270}{6\pi}} &= r \\ 3{,}78 &= r \end{aligned}$$

   Sustituyendo a r en la ecuación $h = \dfrac{3r}{5}$ se tiene que $h = 2{,}26$
   Por lo que la altura del cilindro es $2{,}26\,cm$ y el radio es de $3{,}78\,cm$.

7. Considere las siguientes afirmaciones sobre una esfera y un plano que la interseca.

   I. La sección que resulta de la intersección de un plano con la esfera corresponde a una circunferencia.

   II. Entre más alejado se interseque el plano respecto al centro de la esfera, de mayor longitud será la sección obtenida.

   De estas proposiciones son verdaderas:

   (a) Ambas
   (b) Solo la **I**
   (c) Solo la **II**
   (d) Ninguna

   Solución

   La opción correcta es la **(b) Solo la I**

8. Analice cada una de las siguientes proposiciones e indique si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

   (a) Al cortarse una esfera con un plano paralelo a la circunferencia máxima, se obtienen dos semiesferas idénticas.

   Solución

   Falsa, pues al ser paralelo a la circunferencia máxima, no se está cortando la esfera por la mitad, por lo que las semiesferas no serán idénticas.

   (b) Es posible realizar un corte a una esfera con un plano, de modo que la sección obtenida sea una elipse.

   Solución

   Falsa, pues no importa el corte que se le realice a la esfera, la sección plana obtenida siempre será una circunferencia.

   (c) Dos planos paralelos entre sí cortan una esfera. Si el plano A dista $5\ cm$ del centro de la esfera, y el B a $7\ cm$; entonces la circunferencia que forma el plano A es mayor que la de B.

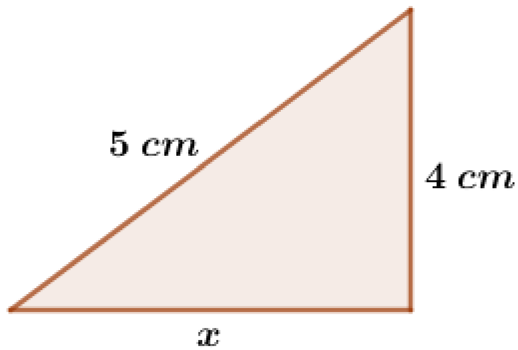
   Solución

   Verdadera, pues mientras más cerca se realice el corte con el plano, mayor será la circunferencia obtenida.

9. Pablo necesita cortar una esfera de estereofón para realizar un trabajo del colegio. El diámetro de la esfera es de $10\ cm$. Él necesita realizar un corte de modo tal que el radio de la circunferencia obtenida corresponda a $4\ cm$. ¿A qué distancia debe realizar el corte, respecto al centro de la esfera?

Solución

Dados los datos anteriores, se puede proceder a realizar el acomodo siguiente:



Utilizando Teorema de Pitágoras, se obtiene la siguiente relación:

$$x = \sqrt{5^2 - 4^2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{9}$$

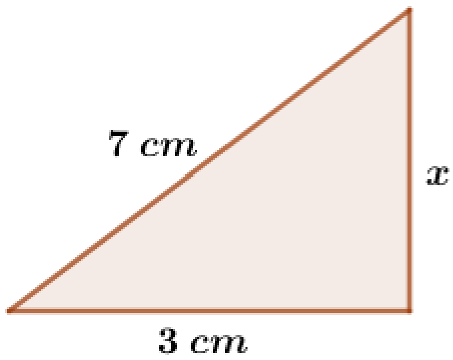
$$\Rightarrow x = 3$$

Así, la distancia a la que debe realizar el corte respecto al centro es de $3\ cm$.

10. Determine el radio de la sección plana obtenida al cortar una esfera de $14\ cm$ de diámetro con un plano que dista $3\ cm$ de dicha esfera.

Solución

Dados los datos anteriores, se puede proceder a realizar el acomodo siguiente:



Utilizando Teorema de Pitágoras, se obtiene la siguiente relación:

$$x = \sqrt{7^2 - 3^2}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{40}$$

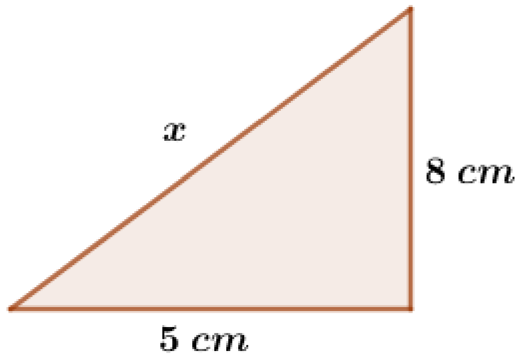
$$\Rightarrow x \approx 6,32$$

Así, el radio de la sección plana, corresponde a $6,32\ cm$ aproximadamente.

11. Una esfera es cortada por un plano que dista $5\ cm$ de su centro. Si el radio de la circunferencia obtenida corresponde a $8\ cm$, entonces el radio de la esfera corresponde a:

    Solución

    Dados los datos anteriores, se puede proceder a realizar el acomodo siguiente:

    Utilizando Teorema de Pitágoras, se obtiene la siguiente relación:

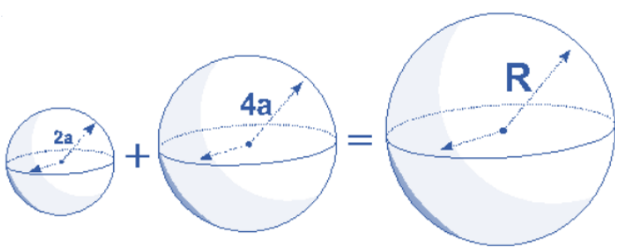
    $$x = \sqrt{5^2 + 8^2}$$
    $$\Rightarrow x = \sqrt{89}$$
    $$\Rightarrow x \approx 9,43$$

    Así, el radio de la esfera, corresponde a $9,43\ cm$ aproximadamente.

12. Dos esferas de metal de radio $2a$ y $4a$ se funden juntas para hacer una esfera mayor. ¿Cuál es el radio de la nueva esfera?

    Solución

    La situación dada en el enunciado se puede gráficamente de la siguiente manera

    De donde tenemos que la relación es que la suma del volumen de ambas esferas nos dará la esfera mayor, es decir:

    $$\frac{4}{3}\pi \cdot (2a)^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot (4a)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (R)^3$$

    despejando R obtenemos lo siguiente

    $$\frac{4}{3}\pi \cdot 8a^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 64a^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (R)^3$$

$$\frac{4}{3}\pi \cdot 72a^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (R)^3$$
$$72a^3 = (R)^3$$
$$\sqrt[3]{72a^3} = R$$
$$2a\sqrt[3]{9} = R$$

Así tenemos que el valor de
$$R = \sqrt[3]{72a^3}$$

13. Sean E_1 y E_2 dos esferas, si el volumen de E_2 es el doble del volumen de E_1 y el radio de $E_1 = \sqrt[3]{16}cm$. Calcule el volumen de E_2

    Solución

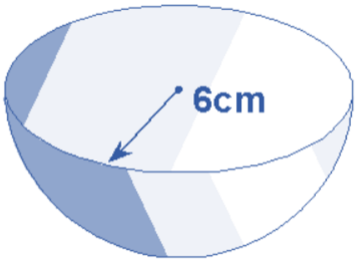
    Calculamos primero el volumen de la esfera E_1
    $$\frac{4}{3}\pi \cdot (\sqrt[3]{16})^3 = \frac{64}{3}cm^3$$
    Como el volumen de E_2 es el doble de E_1 entonces
    $$2 \cdot \frac{64}{3}cm^3 = \frac{128}{3}cm^3$$
    Así tenemos que el volumen de E_2 es $\dfrac{128}{3}cm^3$

14. Una cúpula semiesférica tiene 10 m de radio interior. ¿Cuánto costará pintar su interior si nos cobran 2500 colones por cada metro cuadrado?

    Solución

    Se debe determinar primero la superficie total a pintar, al ser una semiesfera se calcula de la siguiente manera
    $$A_T = \frac{4}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$
    sustitumos por el valor del radio dado
    $$A_T = 2 \cdot \pi \cdot 10^2$$
    $$A_T = 200 \cdot \pi m^2$$
    Ahora debemos multiplicar la superficie total por el costo del metro cuadrado
    $$200\pi \cdot 2500 = 1570796,327$$
    Así obtenemos que el costo de pintar la cúpula semiesférica es de $1570796,327$ colones

15. Encontrar la superficie total del sólido mostrado en la figura



Solución

Para calcular la superficie total debemos calcular la superficie de una semiesfera y el área del círculo

$$S = \frac{4}{2} \cdot \pi \cdot r^2 \wedge A_c = \pi r^2$$

Sustituyendo por el radio dado

$$S = 2 \cdot \pi \cdot 6^2 \wedge A_c = \pi \cdot 6^2$$

$$S = 72\pi cm^2 \wedge A_c = 36\pi cm^2$$

La superficie total es la suma de S y A_c

$$72\pi cm^2 + 36\pi cm^2 = 108cm^2$$

Así la superficie total de la figura mostrada es de $108cm^2$

Referencias

Rubiños (s.f.). *ESFERA - GEOMETRIA DEL ESPACIO EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA Y PREUNIVERSITARIA*. Recuperado de https://geometriapdf.blogspot.com/2018/07/esfera-geometria-del-espacio-ejercicios.html

MatemáticaPe (s.f.). *ESFERA PROBLEMAS RESUELTOS DE GEOMETRÍA DEL ESPACIO PDF*. Recuperado de https://matematicasn.blogspot.com/2016/01/la-esfera-ejercicios-resueltos-de.html