PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

10°

Colaboradores:

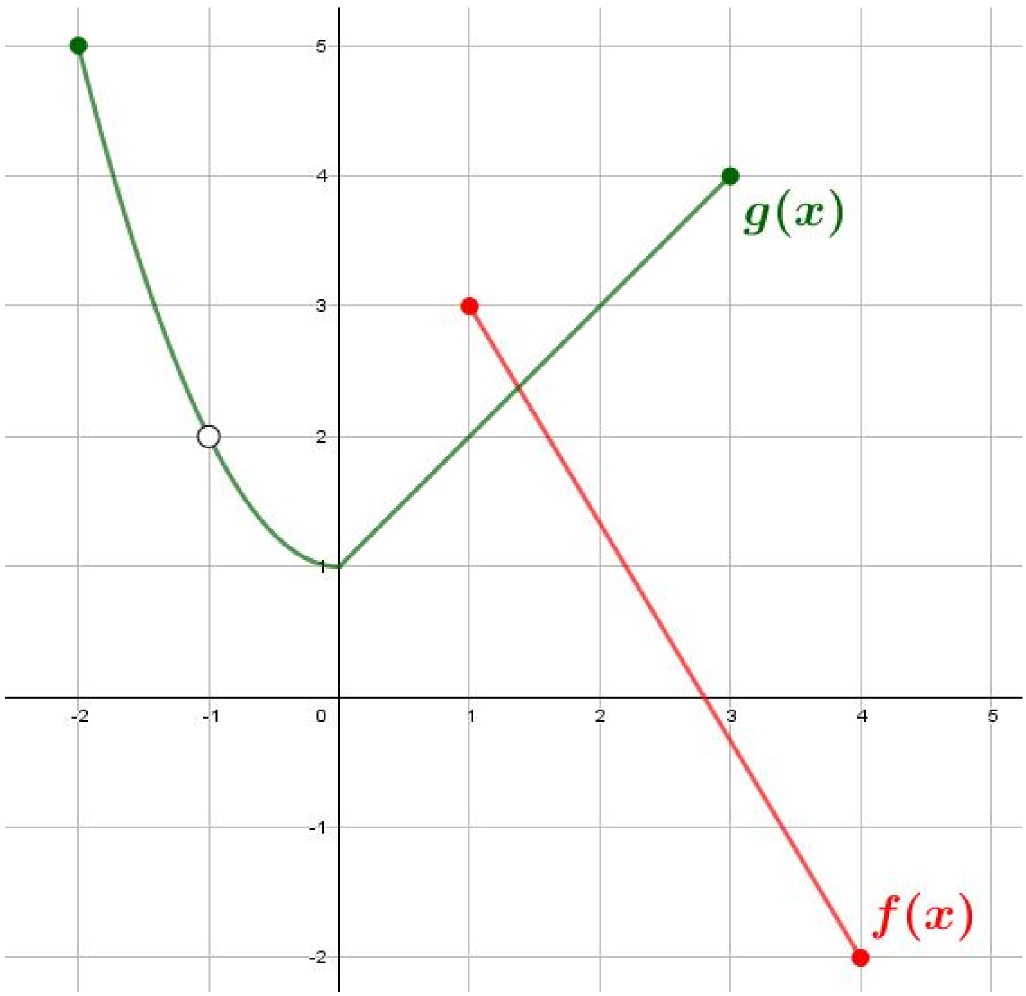
Camacho Zamora Richard
Chinchilla Chinchilla Michelle
Fletes Alvarado Claudia
Ulloa Araya Siony

Relaciones y Álgebra

Funciones

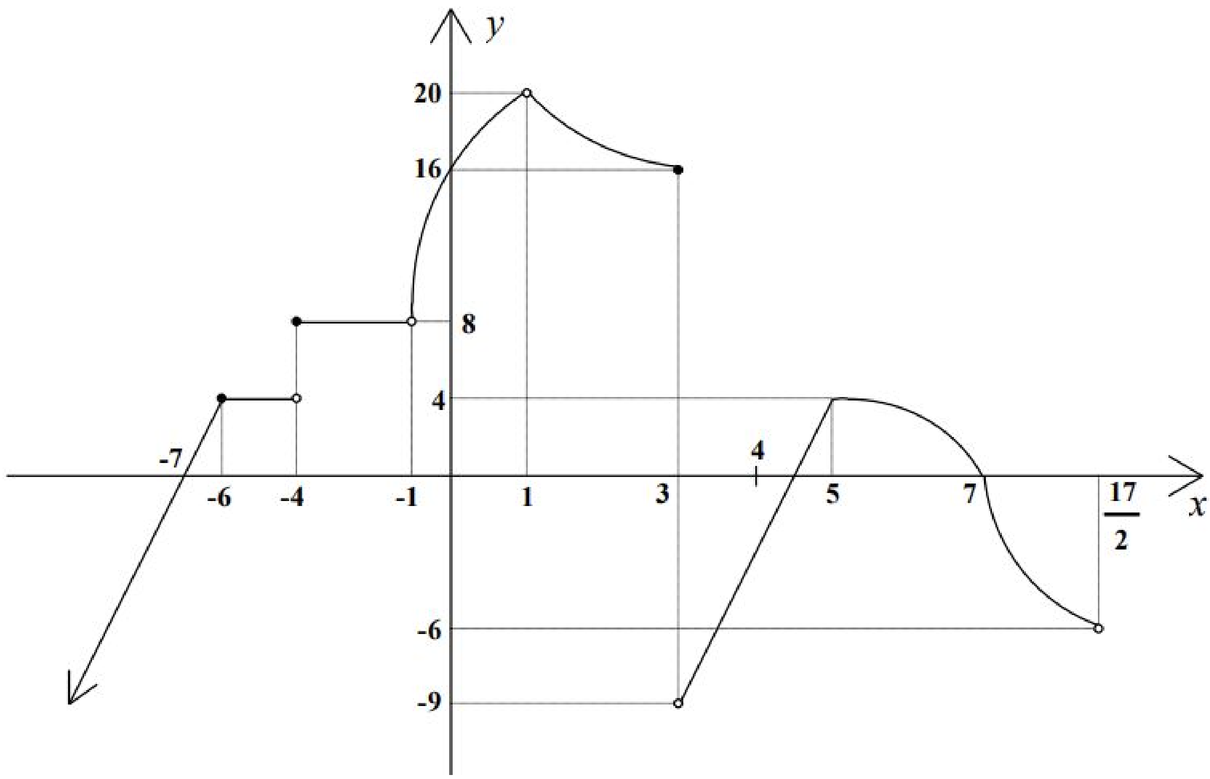
Ejercicios de Funciones

1. Observe las siguientes gráficas de funciones y determine para cada una de ellas lo que se le solicita.



   a) Dominio y ámbito de g
   b) Dominio y ámbito de f
   c) Calcule $g(1), g(-2)$ y $g(0)$
   d) Calcule $f(1)$ y $f(4)$

2. Dada la siguiente gráfica de una función f:



Determine:

a) El dominio de f.
b) El ámbito de f.
c) Imagen de 3.
d) Una preimagen de 4.
e) Un intervalo donde f crece.
f) Un intervalo donde f decrece.
g) Dos ceros de la función f.
h) Indique si la función es inyectiva.

3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{5x-1}{2}$, y determine la imagen de 8 y la preimagen de -1.

4. Para cada una de las siguientes funciones determine dominio, codominio, ámbito y criterio.

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x + 1$

   b) $f : \left]0, \dfrac{21}{3}\right[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = x + 3$

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 6$

5. Considere la función $f : \{2, 4, 6, 10\} \to B$ con $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Determine el ámbito de la función.

6. Considere la función $f : A \to \mathbb{R}$ con $f(x) = -x + 13$ y $A_f = [5, 21[$. Determine el dominio de la función.

7. Para la función dada por $f(x) = 2 - \dfrac{2-x}{2}$ determine la preimagen de -1 y la imagen de 2.

8. Si $g : \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-1}{14}\right\} \to \mathbb{R}$ cuyo criterio viene dado por $g(x) = \dfrac{3-5x^2}{14x+1}$. Realice lo que se le solicita:

   I. Determine el corte de g con el eje x y el eje y.

9. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dos funciones cuyos criterios vienen dados por $g(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = \sqrt{x+1}$. Resuelva lo que se le solicita a continuación

   a) Determine $(g \circ f)(x)$

   b) Halle el dominio de $(g \circ f)(x)$

10. Determine el criterio de la función inversa de las siguientes funciones

    a) $\dfrac{3x^2-4}{6y} = 1$ con dominio $\mathbb{R}^+$

    b) $3x + 7 = 8y$ con dominio $\mathbb{R}$

    c) $1 - x^3 = y$ con dominio $]-\infty, -1]$

11. Determine cual de las siguientes representación tabulares corresponde a una función.

a)

x	-5	1	0	5
$f(x)$	1	2	3	7

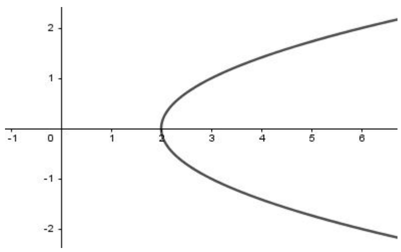
b)

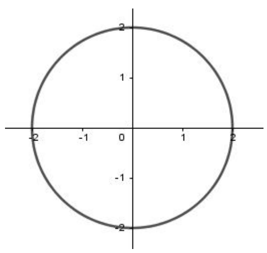
x	4	6	7	8
$f(x)$	1	1	1	1

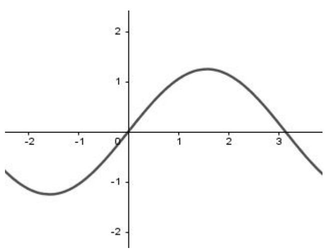
c)

x	0	2	4	2
$f(x)$	3	2	1	0

12. Justifique si las siguientes representaciones gráficas son funciones.

a) 

b) 

c) 

13. Para la función $f : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{Z}$, dada por $f(x) = x^2 + 1$, considere las siguientes proposiciones y determine cuál(es) de ella(s) es/son verdadera(s):

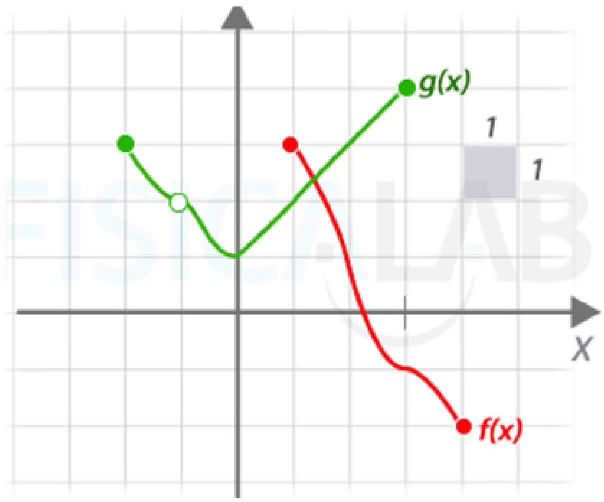
    I) El ámbito de f es $\mathbb{Z}^+$.

    II) 10 es un elemento del ámbito de f.

14. Si para la función $f : A \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3 - 1$, el ámbito es $[-3, 3[$, entonces A equivale a:

Solución de los Ejercicios

1. Observe las siguientes gráficas de funciones y determine para cada una de ellas lo que se le solicita.



a) Dominio y ámbito de g

Solución
Observe que la imagen nos indica que cada cuadro equivale a 1 unidad tanto en el eje x como en el eje y

$D_f = [-2, -1[\cup] -1, 3]$
$A_f = [1, 4]$

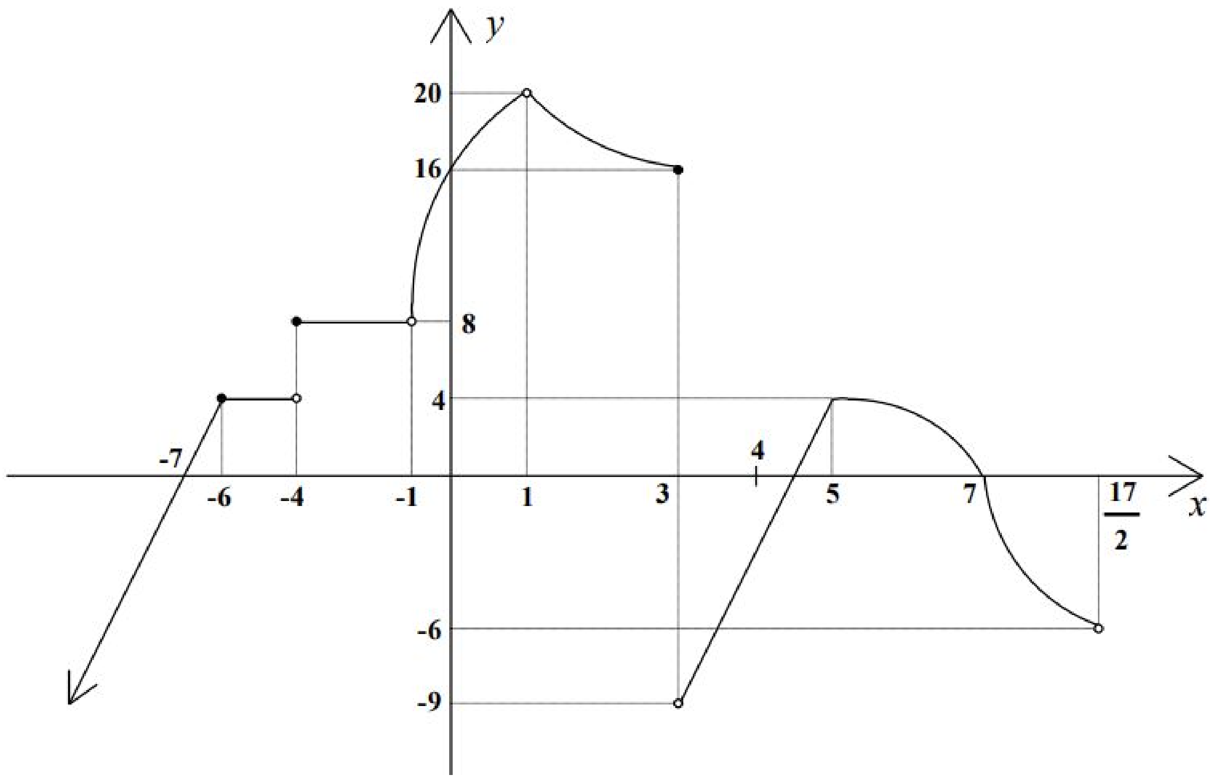
b) Dominio y ámbito de f

Solución
$D_f = [1, 4]$
$A_f = [-2, 3]$

c) Calcule $g(1), g(-2)$ y $g(0)$
Solución
Note que nos están pidiendo determinar las imágenes de -2, 0 y 1.
Observando la gráfica encontramos que $g(1) = 2, g(-2) = 3$ y $g(0) = 1$

d) Calcule $f(1)$ y $f(4)$
Solución
Observando la gráfica encontramos que $f(1) = 3$ y $f(4) = -2$

2. Dada la siguiente gráfica de una función f:



Determine:

a) El dominio de f
Solución
Observando la gráfica, encontramos que $D_f = \left]-\infty, \dfrac{17}{2}\right[- \{-1, 1\}$

b) El ámbito de f.
Solución
Observando la gráfica, encontramos que el ámbito está dado por $A_f =]-\infty, 20[-]4, 8[$

c) Imagen de 3.
Solución
Observando la gráfica, encontramos que $f(3) = 16$

d) Una preimagen de 4.
Solución
Observando la gráfica, encontramos que una de las posibles preimágenes corresponde a -6.

e) Un intervalo donde f crece.

Solución

Observando la gráfica, encontramos que uno de los intervalos donde f es creciente corresponde a $]-\infty, -6]$.

f) Un intervalo donde f decrece.

Solución

Observando la gráfica, encontramos que uno de los intervalos donde f es decreciente corresponde a $]1, 3]$.

g) Dos ceros de la función f.

Solución

Dos ceros de la función están dados por $(-7, 0)$ y $(7, 0)$

h) Indique si la función es inyectiva.

Solución

Observando la gráfica que nos proporciona el ítem, se puede deducir que la función f no es una función inyectiva, pues la relación no es uno a uno.

3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \dfrac{5x-1}{2}$, y determine la imagen de 8 y la preimagen de -1.

Solución

Recordemos que para determinar el valor de una imagen sustituimos en el criterio el valor de x dado, así tenemos que:

$$\begin{aligned} f(8) &= \frac{5 \cdot (8) - 1}{2} \\ f(8) &= \frac{39}{2} \end{aligned}$$

Y para determinar el valor de una preimagen debemos despejar el valor de x en el criterio dado, así tenemos que:

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{5 \cdot x - 1}{2} \\ -1 \cdot 2 &= 5 \cdot x - 1 \\ -2 + 1 &= 5 \cdot x \\ \frac{-1}{5} &= x \end{aligned}$$

Por lo tanto la imagen de 8 es $\frac{39}{2}$ y la preimagen de -1 es $\frac{-1}{5}$

4. Para cada una de las siguientes funciones dominio, codominio, ámbito y criterio.

   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 3x + 1$

   Solución

   Cuando tenemos la información anterior solo debemos identificar cada uno de los elementos solicitados.
   $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = \mathbb{R} A_f = \mathbb{R}$ criterio $f(x) = 3x + 1$

   b) $f : \left]0, \frac{21}{3}\right[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = x + 3$

   Solución

   Como tenemos un dominio acotado entonces debemos calcular cuales son los valores del codominio que se encuentran en el ámbito, para ello tomamos los valores extremos del intervalo del dominio y lo sustituimos en el criterio.
   Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + 3 &= 3 \\ f\left(\frac{21}{3}\right) &= \frac{21}{3} + 3 &= 10 \end{aligned}$$

   Por lo tanto tenemos que $D_f = \left]0, \frac{21}{3}\right[$, $C_f = \mathbb{R}$, $A_f =]3, 10[$ criterio $f(x) = x + 3$

   c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 6$

   Solución

   Observe que tenemos una función con un criterio constante por lo tanto el ámbito con un solo elemento
   $D_f = \mathbb{R}$, $C_f = \mathbb{R}$, $A_f = \{6\}$ criterio $f(x) = 6$

5. Considere la función $f : \{2, 4, 6, 10\} \to B$ con $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$. Determine el ámbito de la función.

Solución

Para determinar el ámbito sustituimos en el criterio los valores del dominio dado, así tenemos que:

$$f(2) = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$
$$f(4) = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$$
$$f(6) = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$
$$f(10) = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

Por lo tanto $A_f = \{8, 64, 216, 1000\}$

6. Considere la función $f : A \to \mathbb{R}$ con $f(x) = -x + 13$ y $A_f = [5, 21[$. Determine el Dominio de la función.

Solución

Para determinar el dominio tomamos los valores extremos del ámbito y despejamos x del criterio.
Primero con $f(x) = 5$

$$5 = -x + 13$$
$$5 - 13 = -x$$
$$-8 = -x$$
$$8 = x$$

Ahora con $f(x) = 21$

$$21 = -x + 13$$
$$21 - 13 = -x$$
$$8 = -x$$
$$-8 = x$$

Por lo tanto el $D_f = [-8, 8]$

7. Para la función dada por $f(x) = 2 - \dfrac{2-x}{2}$ determine la preimagen de -1 y la imagen de 2.

Solución

Como se viene mencionando en el desarrollo del documento, para averiguar el valor de una preimagen, se debe igualar el criterio dado al valor que nos indica el ejercicio y de este modo despejar x, así tenemos que:

$$2 - \frac{2-x}{2} = -1$$
$$2 + 1 = \frac{2-x}{2}$$
$$3 = \frac{2-x}{2}$$
$$6 = 2 - x$$
$$x = 2 - 6$$
$$x = -4$$

Ahora, para el cálculo de la imagen, se procede a realizar la sustitución de x por el valor dado, por ende, tenemos que:

$$f(2) = 2 - \frac{2-2}{2}$$
$$f(2) = 2$$

Por lo tanto, la preimagen de -1 corresponde -4 y la imagen de 2 corresponde a 2.

8. Si $g : \mathbb{R} - \left\{\frac{-1}{14}\right\} \to \mathbb{R}$ cuyo criterio viene dado por $g(x) = \dfrac{3-5x^2}{14x+1}$. Realice lo que se le solicita

   I. Determine el corte de g con el eje x y el eje y.
   Solución

   Recuerde que un punto en la coordenada x es de la forma $(x, 0)$, por lo que para hallar el corte con el eje x, basta cambiar la variable y o bien cambiar $g(x)$ por 0.
   Así se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{3-5x^2}{14x+1} \\ 0 &= 3-5x^2 \end{aligned}$$

   Note que el resultado esta dado por una ecuación cuadrática por lo que al sacar el discriminante nos damos cuenta que tiene dos soluciones

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{15}}{5} \\ x_2 = \dfrac{-\sqrt{15}}{5} \end{cases}$$

   Por lo que la función g corta al eje x en los puntos $\left(\frac{\sqrt{15}}{5}, 0\right)$ y $\left(\frac{-\sqrt{15}}{5}, 0\right)$

   Por otro lado recuerde que cualquier punto en el eje de las ordenadas o eje y es de la forma $(0, y)$, por lo que basta cambiar el valor de x por 0 en el criterio de la función.
   Así se tiene que

$$\begin{aligned} g(0) &= \frac{3-5\cdot(0)^2}{14\cdot(0)+1} \\ &= \frac{3}{1} = 3 \end{aligned}$$

   Por lo que la función g corta al eje y en el punto $(0, 3)$

9. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dos funciones cuyos criterios vienen dados por $g(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = \sqrt{x+1}$
Resuelva lo que se lo solicita a continuación

   a) Determine $(g \circ f)(x)$
   Solución

   Recuerde que la composición $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
   Por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (\sqrt{x+1})^2 + 1 \\ &= x + 2 \end{aligned}$$

   b) Halle el dominio de $(g \circ f)(x)$
   Solución

   Para hallar el dominio de la función se tiene que tomar en cuenta que son todos los valores tales que

$$x \in D_f \wedge f(x) \in D_g$$

$$\Rightarrow x \in [0, +\infty] \wedge f(x) \in \mathbb{R}$$

   Por lo que el dominio serían todas las x que cumplen estas condiciones, dicho de otra manera son todas las x que pertenecen a la intersección de ambos conjuntos. Así

$$D_{(g \circ f)(x)} = [0, \infty]$$

10. Determine el criterio de la función inversa de las siguientes funciones

   a) $\dfrac{3x^2 - 4}{6y} = 1$ con dominio $\mathbb{R}^+$
   Solución

$$\begin{aligned} \frac{3x^2-4}{6y} &= 1 \\ \Rightarrow \quad 3x^2 - 4 &= 6y \\ \Rightarrow \quad 3x^2 &= 6y + 4 \\ \Rightarrow \quad x^2 &= \frac{6y-4}{3} \\ \Rightarrow \quad x &= \sqrt{\frac{6y-4}{3}} \end{aligned}$$

   $\therefore$ El criterio de la función inversa es $\sqrt{\dfrac{6x-4}{3}} = y$

b) $3x+7=8y$ con dominio $\mathbb{R}$

Solución

$$\begin{array}{rrcl} & 3x+7 & = & 8y \\ \Rightarrow & 3x & = & 8y-7 \\ \Rightarrow & x & = & \dfrac{8y-7}{3} \end{array}$$

$\therefore$ El criterio de la función inversa es $\dfrac{8y-3}{3}=y$

c) $1-x^3=y$ con domino $]-\infty,-1]$

Solución

$$\begin{array}{rrcl} & 1-x^3 & = & y \\ \Rightarrow & -x^3 & = & y-1 \\ \Rightarrow & x^3 & = & 1-y \\ \Rightarrow & x & = & \sqrt[3]{1-y} \end{array}$$

$\therefore$ El criterio de la función inversa es $\sqrt[3]{1-x}=y$

11. Determine cual de las siguientes representación tabulares corresponde a una función.

a)

x	-5	1	0	5
$f(x)$	1	2	3	7

Solución

Es función puesto que para cada preimagen existe una única imagen asociada.

b)

x	4	6	7	8
$f(x)$	1	1	1	1

Solución

La tabla hace referencia de una función constante, donde cada preimagen tiene una única imagen asociada.

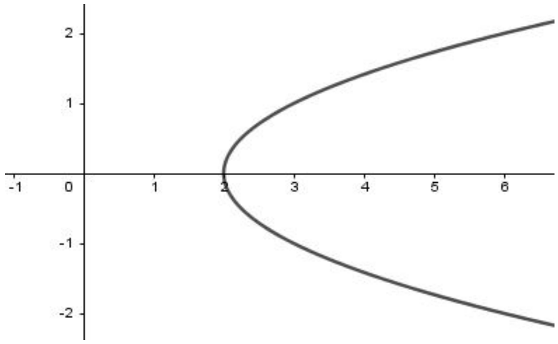
c)

x	0	2	4	2
$f(x)$	3	2	1	0

Solución

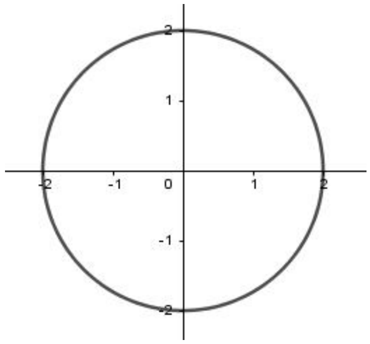
No es función puesto que para una preimagen tiene dos imágenes asociadas lo que se tiene es que para $x=2$ existen dos posibles soluciones en este caso son 0 y 2

12. Justifique si las siguientes representaciones gráficas son funciones.

a) 

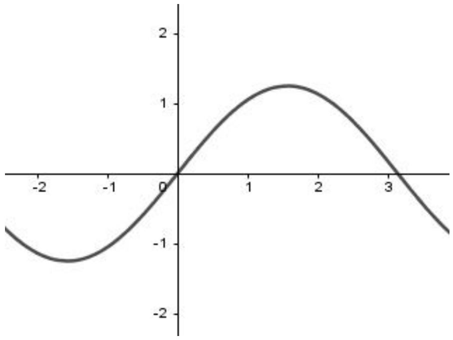
Solución

No es función puesto que si trazamos lineas perpendiculares al eje de las abscisas podemos notar como corta a la figura en dos puntos distintos, lo cual muestra que para una preimagen existen dos imágenes distintas.

b) 

Solución

No es función puesto que si trazamos lineas perpendiculares al eje de las abscisas podemos notar como corta a la figura en dos puntos distintos, lo cual muestra que para una preimagen existen dos imágenes distintas.

c) 

Solución

Si es función ya que para toda preimagen tiene una única imagen asociada

13. Para la función $f : \mathbb{Z}^- \to \mathbb{Z}$, dada por $f(x) = x^2 + 1$, considere las siguientes proposiciones y determine cuál(es) de ella(s) es/son verdadera(s):

   I) El ámbito de f es $\mathbb{Z}^+$.
   Solución
   Se puede notar que el dominio de f corresponde a $\mathbb{Z}^-$ y el criterio de la misma incluye un x^2, lo que implica que los valores que resulten al hacer dicha operación sean positivos (pertenezcan a $\mathbb{Z}^+$, en resumen se deduce que dicha proposición es **Verdadera**.

   II) 10 es un elemento del ámbito de f.
   Solución
   En este caso, veremos si hay algún valor que pertenezca al Dominio cuya imagen equivale a 10, para ello, se procede a igualar el criterio de f a 10:

$$x^2 + 1 = 10$$
$$x^2 = 9$$
$$x = -3 \lor x = 3$$

   De ahí tenemos que efectivamente hay un elemento que pertenece al dominio, por lo que esta proposición también resulta ser **Verdadera**

14. Si para la función $f : A \to \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3 - 1$, el ámbito es $[-3, 3[$, entonces A equivale a:
Solución

En este caso, tenemos que el ámbito es un intervalo acotado, por lo que para averiguar el dominio, basta con encontrar las preimágenes de cada uno de los extremos del ámbito.
Empezaremos con -3

$$x^3 - 1 = -3$$
$$x^3 = -2$$
$$x = \sqrt[3]{-2}$$

Siendo este el primer elemento del dominio.
Continuamos ahora con el otro extremo, corresponde a 3

$$x^3 - 1 = 3$$
$$x^3 = 4$$
$$x = \sqrt[3]{4}$$

Obteniendo así el otro extremo del dominio.
Así, finalmente, se obtiene que $D_f = [\sqrt[3]{-2}, \sqrt[3]{4}[$