



Material de Apoyo

10^o

Colaboradores:

Camacho Zamora Richard
Chinchilla Chinchilla Michelle
Fletes Alvarado Claudia
Ulloa Araya Siony

Geometría

Circunferencia

1. Dadas las siguientes ecuaciones de la circunferencia determine el radio, centro y el diámetro de cada una de las circunferencias.

a) $x^2 + (y - 3)^2 = 36$

b) $x^2 + 2x + (y - 1)^2 = 24$

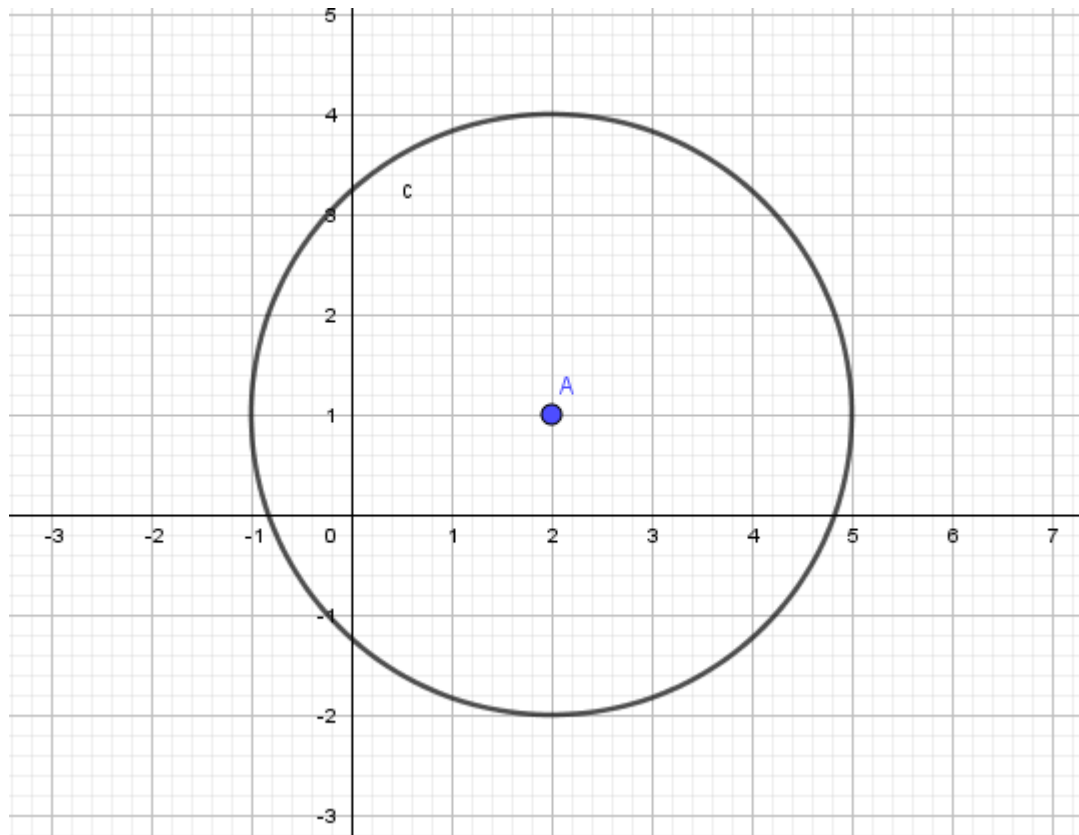
2. Si se sabe que una circunferencia tiene como centro al punto $(-2, 3)$ y tiene como diámetro una medida de 14.

a) Determine la ecuación de la circunferencia.

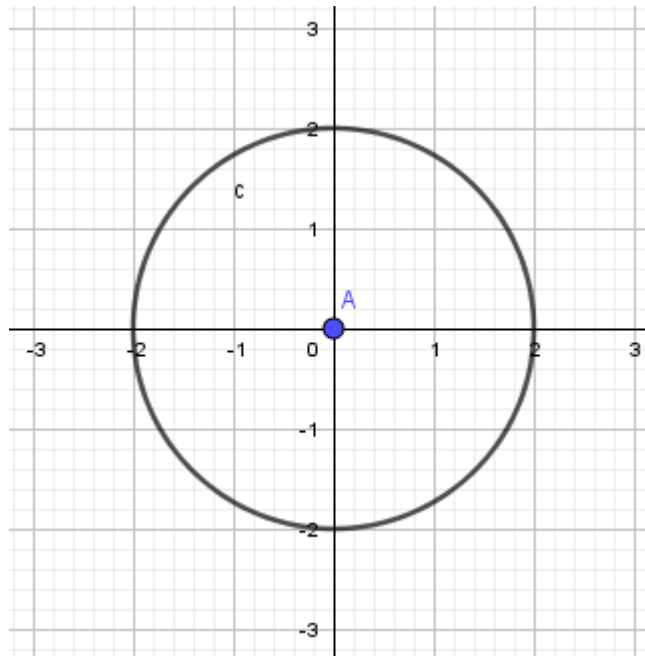
b) Si se desplaza el centro de la circunferencia 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo, cuales son las nuevas coordenadas del centro de la circunferencia.

3. Dadas las siguientes circunferencias, representadas gráficamente, realice las traslaciones indicadas, además anote la ecuación de cada una de ellas, luego de la traslación.

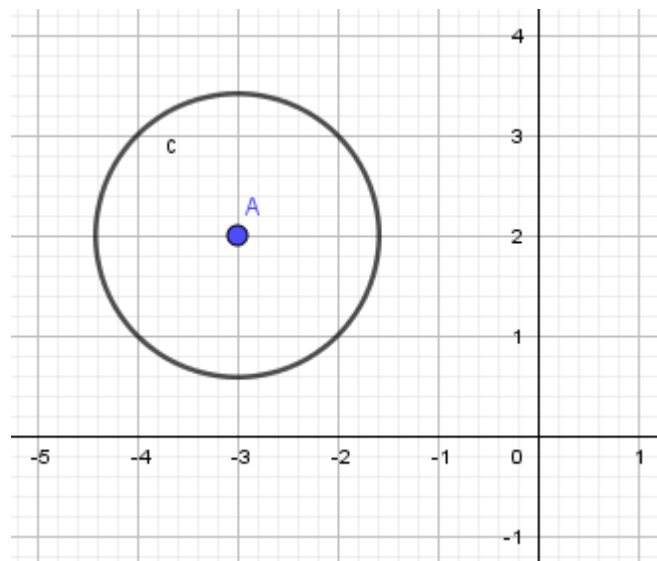
- El centro de la siguiente circunferencia se traslada al punto $(-1, -1)$



- El centro de la siguiente circunferencia se traslada al punto $(3, -2)$

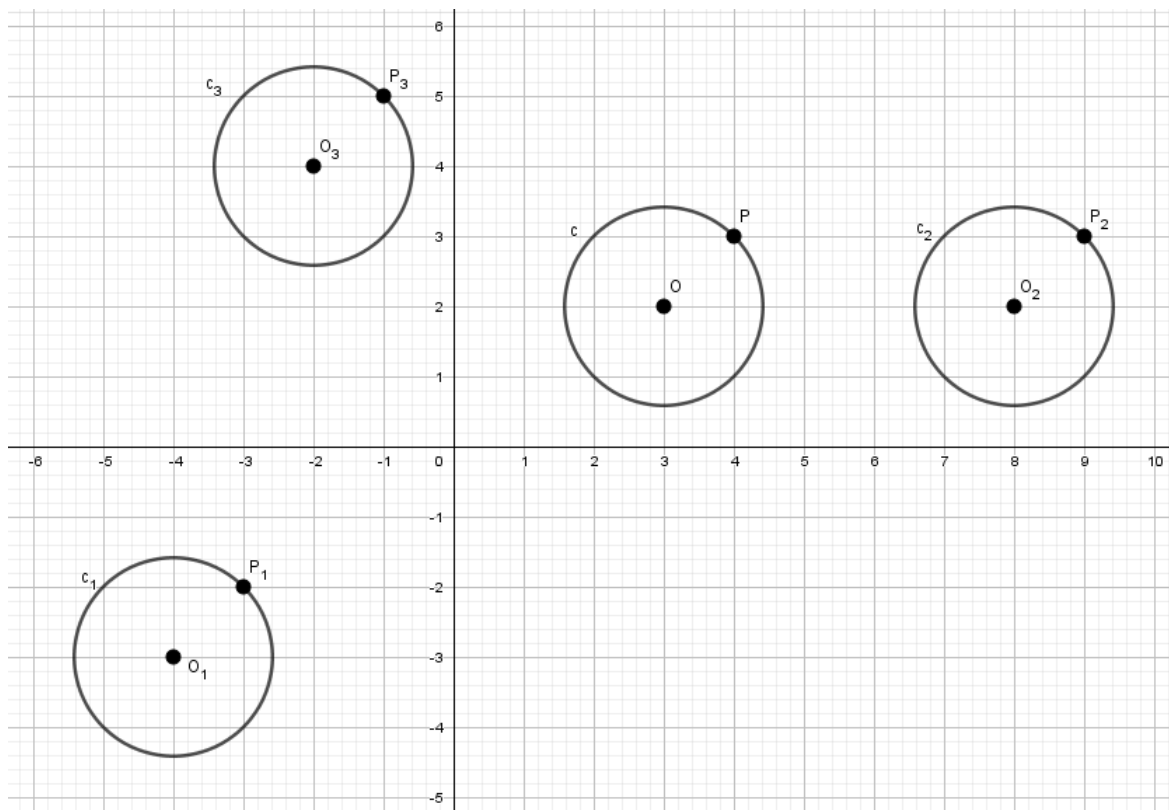


- El centro de la siguiente circunferencia se traslada al punto $(0, 0)$



4. Si la circunferencia con ecuación $(x-2)^2 + y^2 = 5$ se traslada 3 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo, la ecuación resultante corresponde a:

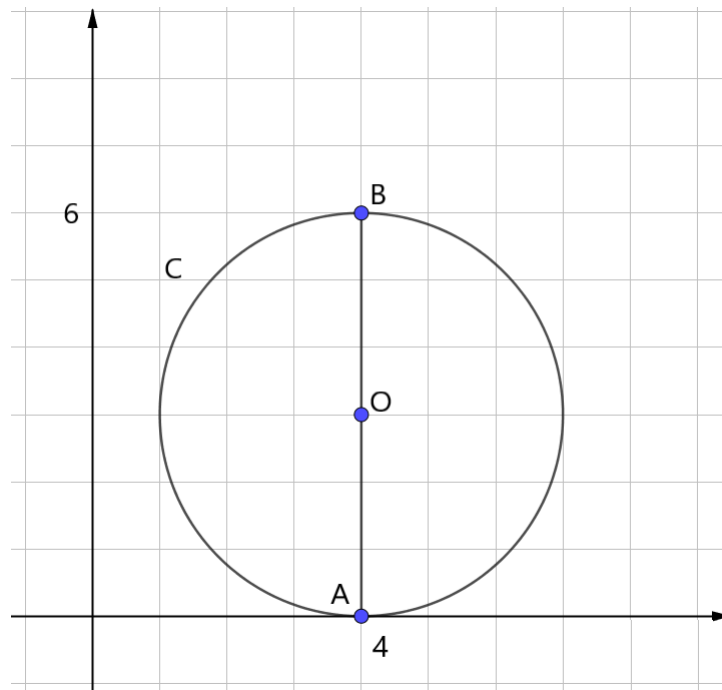
5. Dada la siguiente figura donde se representa la circunferencia "c" y tres distintas traslaciones de la misma:



Anote a un lado de cada proposición, si es verdadera o falsa:

- I) La circunferencia c_1 es el resultado de trasladar c , 5 unidades hacia abajo y 7 unidades hacia la izquierda:
 - II) La circunferencia c_2 es el resultado de trasladar c , 5 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba:
 - III) La circunferencia c_3 es el resultado de trasladar c , 5 unidades hacia la izquierda y 2 hacia arriba:
6. Tomando como referencia la imagen anterior, ¿cuál es la traslación que se le debe aplicar a c_1 para obtener como resultado la circunferencia c_2 ? Anote además la ecuación de c_2 .
7. Grafique la circunferencia que se obtiene de la traslación de c , según cada caso.
- I) $c : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Trasladar 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.
 - I) $c : x^2 + y^2 = 36$. Trasladar 3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia arriba.
 - III) $c : x^2 + (y + 5)^2 = 1$. Trasladar 5 unidades hacia arriba.

8. Considere la siguiente representación gráfica de la circunferencia C , con centro O



De acuerdo con la información anterior, determine si las siguientes rectas son tangentes, secantes o exteriores a la circunferencia.

- I) $x = 0$
- II) $y = x - 2$
- III) $y = 3x + 4$

9. Considere la siguiente información:
El centro de la circunferencia C dada por

$$x^2 + y^2 = 9$$

es el punto M . La recta t es tangente a C en $P(0, 3)$ y $A(4, n)$ es un punto que pertenece a t .

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es la medida de \overline{AM} ?

10. Determine el valor de k de modo que la recta

$$3x - 4y + k = 0$$

sea tangente a la circunferencia $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

11. La ecuación de una circunferencia

$$c : (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

Determinar si la recta que pasa por el punto $P(5, 2)$ y $Q(7, 11)$ es tangente, secante o exterior a la circunferencia.

12. Marcos tiene un reloj inteligente conectado a su celular por medio de bluetooth, el cual tiene un alcance de 3 metros en forma circular. La casa de Marcos es de forma cuadrada de lado 4 metros, ¿Determine si cuando Marcos deja su celular en el centro de la casa y sale a un árbol que se encuentra a un metro este de la esquina superior derecha de la casa, el reloj seguirá conectado a la red bluetooth del celular?
13. Las llantas del carro de Carlos tienen un radio de 30 *cm*. ¿Cuál es la distancia en centímetros que ha recorrido el carro si las llantas han dado 500 vueltas?
14. A 5 kilómetros este del muelle se encuentra un faro el cual se sabe que su luz tiene un alcance de 15 kilómetros, el vigilante del barco quiere saber si el barco que se encuentra a 2 kilómetros al norte y 8 kilómetros al oeste del muelle está en el alcance de la luz del faro.

Soluciones

1. Dadas las siguientes ecuaciones de la circunferencia determine el radio, centro y el diámetro de cada una de las circunferencias.

a) $x^2 + (y - 3)^2 = 36$

Solución

Recuerde que la ecuación canónica de la circunferencia de radio r y centro (h, k) esta dada por $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

De esta manera se tiene que *radio* = 6

centro = (0, 3)

dimetro = 12

b) $x^2 + 2x + (y - 1)^2 = 24$

radio = 5

centro = (-1, 1)

dimetro = 10

Solución

2. Si se sabe que una circunferencia tiene como centro al punto $(-2, 3)$ y tiene como diámetro una medida de 14.

- a) Determine la ecuación de la circunferencia.

Solución

La ecuación de la circunferencia viene dada por $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$

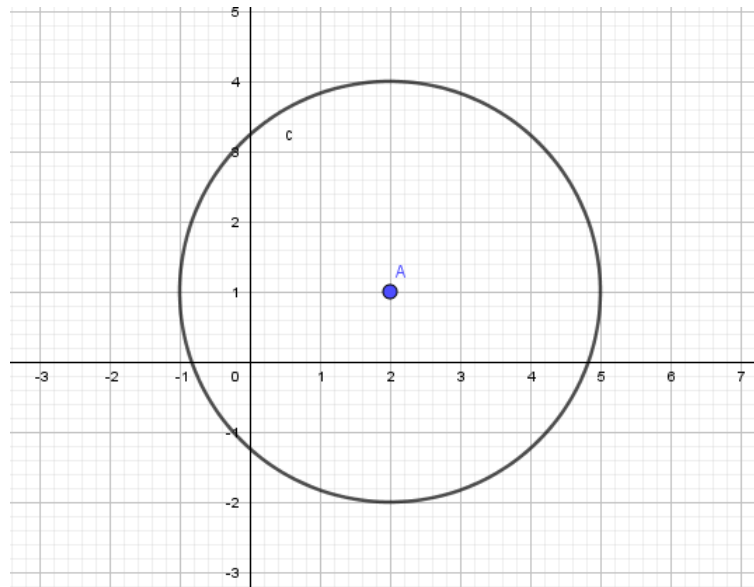
- b) Si se desplaza el centro de la circunferencia 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia abajo, cuales son las nuevas coordenadas del centro de la circunferencia.

Solución

Recuerde que el centro estaba en las coordenadas $(-2, 3)$ si se desplazan 2 unidades hacia la derecha sería 2 unidades en el eje x hacia la derecha y en el caso de trasladarse 3 unidades hacia abajo es descender 3 unidades en el eje es decir $(-2 + 2, 3 - 3) = (0, 0)$, Por lo que las nuevas coordenadas son $(0, 0)$

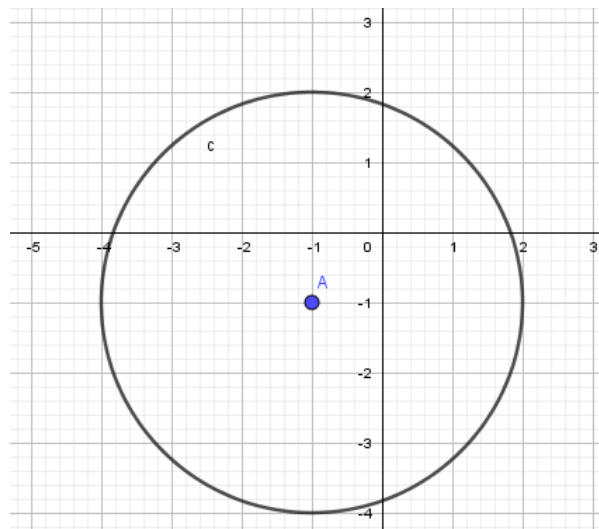
3. Dadas las siguientes circunferencias, representadas gráficamente, realice las traslaciones indicadas, además anote la ecuación de cada una de ellas, luego de la traslación.

- El centro de la siguiente circunferencia se traslada al punto $(-1, -1)$



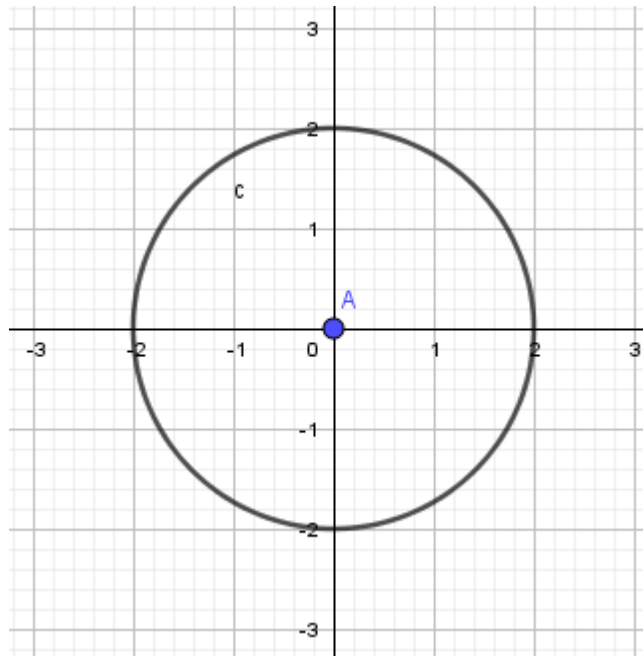
Solución

Lo que se debe realizar en este caso es tomar el centro de la circunferencia y colocarlo en el punto indicado, además es importante recordar que la medida del radio se mantiene, así se obtiene:



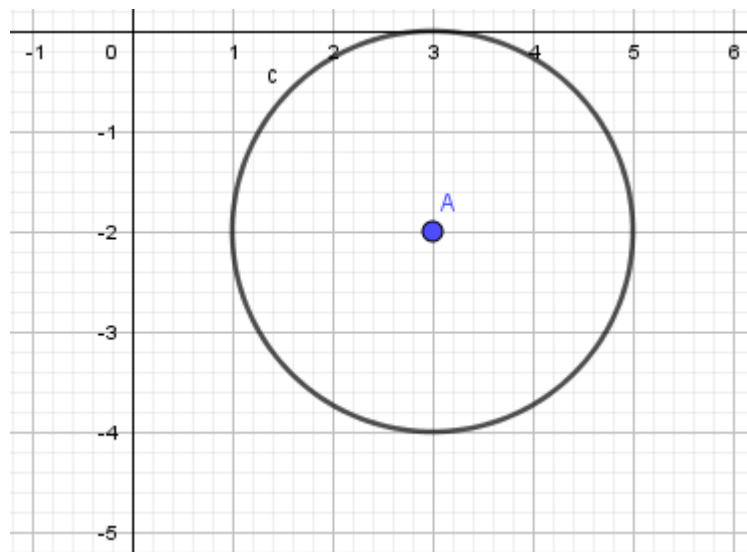
La ecuación de la misma corresponde a: $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

- El centro de la siguiente circunferencia se traslada al punto $(3, -2)$



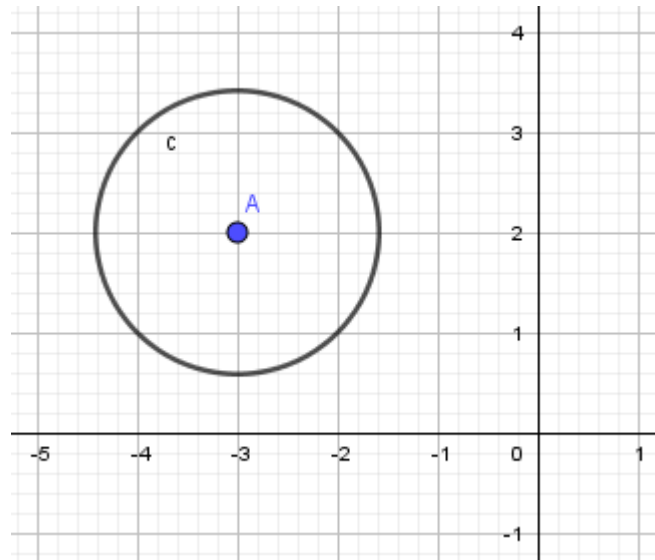
Solución

Igualmente, se procede a realizar la traslación del centro de la circunferencia al punto indicado, manteniendo el radio, se obtiene:



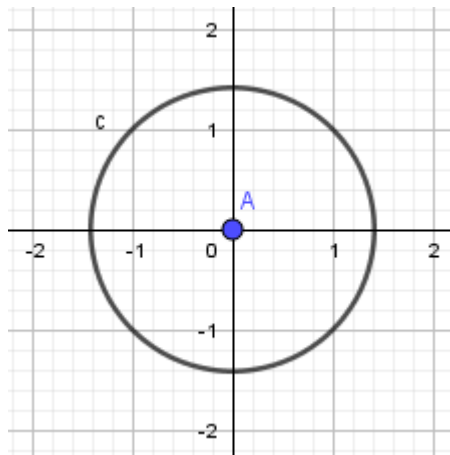
La ecuación de la misma corresponde a: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$.

- El centro de la siguiente circunferencia se traslada al punto $(0, 0)$



Solución

En este caso, el centro de la circunferencia debe ser trasladado al punto de origen, se obtiene entonces la siguiente representación gráfica:



Cuya ecuación algebraica corresponde a: $x^2 + y^2 = 2$.

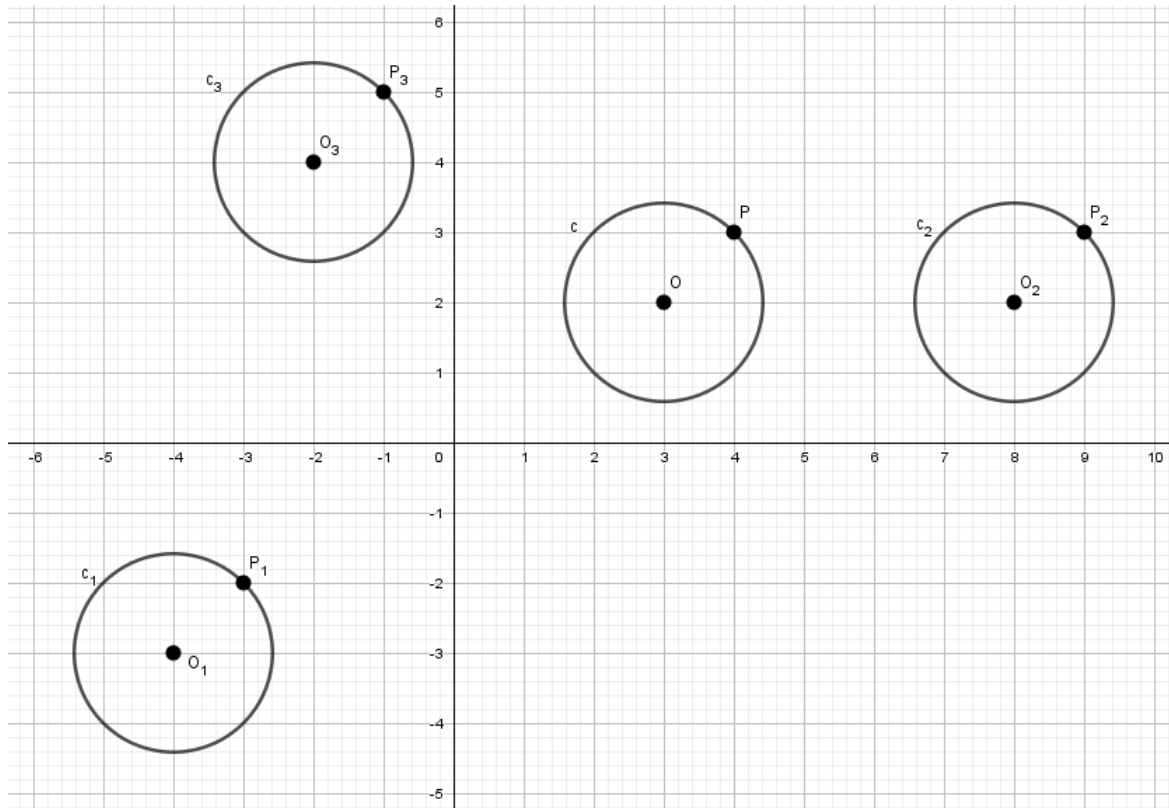
- Si la circunferencia con ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ se traslada 3 unidades hacia la derecha y 1 unidad hacia abajo, la ecuación resultante corresponde a:

Solución

Dada la ecuación, se puede deducir el centro de la circunferencia, el cual corresponde a: $(2, 0)$. Luego, al realizarse una traslación hacia la derecha, se procede a sumar la cantidad de unidades indicadas en la coordenada x del centro (3 unidades) y se resta una unidad a la coordenada y del centro, pues se traslada 1 unidad hacia abajo, por lo que se obtiene el nuevo centro de la circunferencia: $(5, -1)$, así, la ecuación corresponde a:

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 5$$

5. Dada la siguiente figura donde se representa la circunferencia "c" y tres distintas traslaciones de la misma:



Anote a un lado de cada proposición, si es verdadera o falsa:

- I) La circunferencia c_1 es el resultado de trasladar c , 5 unidades hacia abajo y 7 unidades hacia la izquierda: **Verdadera**.
 - II) La circunferencia c_2 es el resultado de trasladar c , 5 unidades hacia la izquierda y 1 unidad hacia arriba: **Falsa**.
 - III) La circunferencia c_3 es el resultado de trasladar c , 5 unidades hacia la izquierda y 2 hacia arriba: **Verdadera**.
6. Tomando como referencia la imagen anterior, ¿cuál es la traslación que se le debe aplicar a c_1 para obtener como resultado la circunferencia c_2 ? Anote además la ecuación de c_2 .

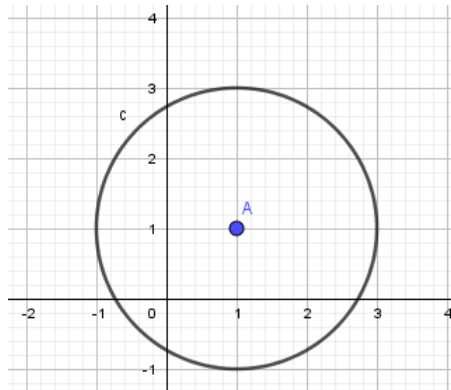
Solución

Tomando como apoyo la imagen brindada, c_1 se debe trasladar 12 unidades hacia la izquierda y 5 unidades hacia arriba. La ecuación de c_2 corresponde a: $(x-8)^2+(y-2)^2 = 2$.

7. Grafique la circunferencia que se obtiene de la traslación de c , según cada caso.

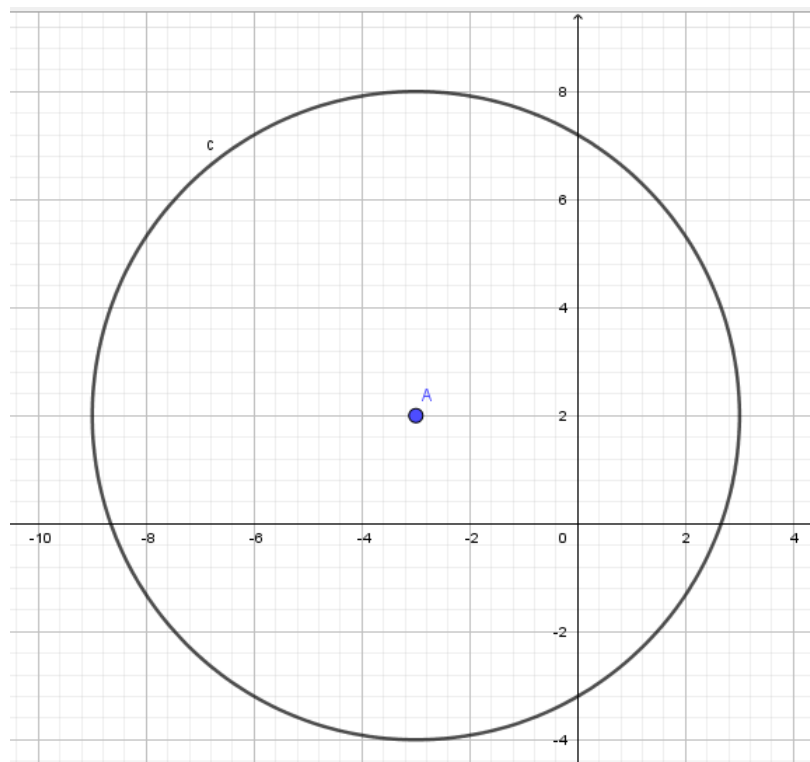
I) $c : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. Trasladar 2 unidades a la derecha y 1 unidad hacia abajo.

Solución



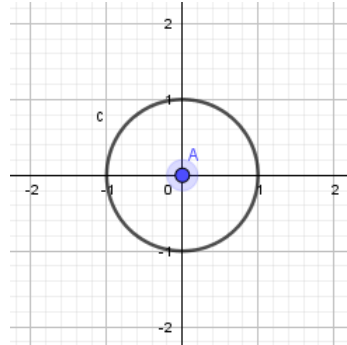
II) $c : x^2 + y^2 = 36$. Trasladar 3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia arriba.

Solución

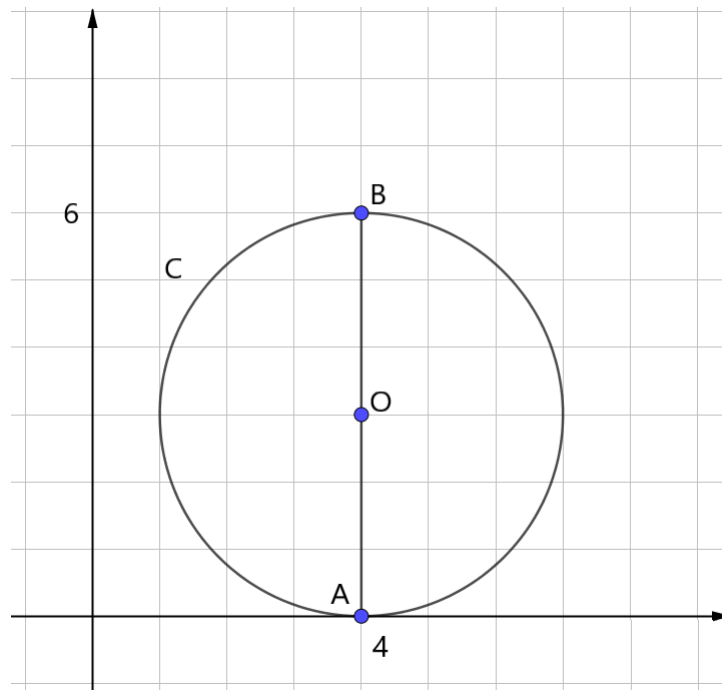


III) $c : x^2 + (y + 5)^2 = 1$. Trasladar 5 unidades hacia arriba.

Solución



8. Considere la siguiente representación gráfica de la circunferencia C , con centro O



De acuerdo con la información anterior, determine si las siguientes rectas son tangentes, secantes o exteriores a la circunferencia.

I) $x = 0$

Solución

Observe que la recta $x = 0$ corresponde al eje y por lo tanto es una recta exterior a la circunferencia C

II) $y = x - 2$

Solución

Para determinar si una recta es secante o tangente podemos sustituir el valor de y en la ecuación de la circunferencia realizar las operaciones necesarias hasta obtener una ecuación cuadrática y determinar si el discriminante de dicha ecuación es mayor o igual a cero.

Entonces la ecuación de la circunferencia es

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

al realizar las fórmulas notables tenemos que

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 0$$

al sustituir $y = x - 2$ en la ecuación anterior obtenemos

$$x^2 - 8x + 16 + (x - 2)^2 - 6(x - 2) = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 + x^2 - 4x + 4 - 6x + 12 = 0$$

$$2x^2 - 18x + 32 = 0$$

Al calcular el discriminante se tiene

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 32 = 68 > 0$$

Por lo tanto la recta $y = x - 2$ es secante a la circunferencia C

III) $y = 3x + 4$

Solución

Podemos resolver de la misma manera que en el punto II) o bien podemos determinar dos puntos que pertenezcan a la recta $y = 3x + 4$ y graficar sobre la imagen dada la recta.

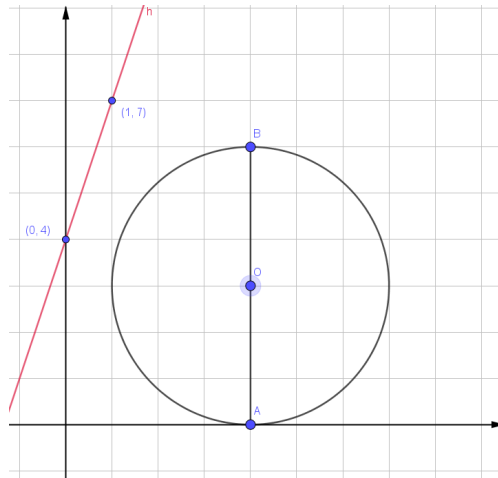
Para determinar los puntos nos damos un valor en x y lo sustituimos en la ecuación $y = 3x + 4$, por ejemplo si $x = 0$ entonces

$$y = 3 \cdot 0 + 4 = 4$$

y si $x = 1$ entonces

$$y = 3 \cdot 1 + 4 = 7$$

Así tenemos los puntos $(0, 4)$ y $(1, 7)$ y gráficamente es



Por lo tanto la recta $y = 3x + 4$ es exterior a la circunferencia C .

9. Considere la siguiente información:
El centro de la circunferencia C dada por

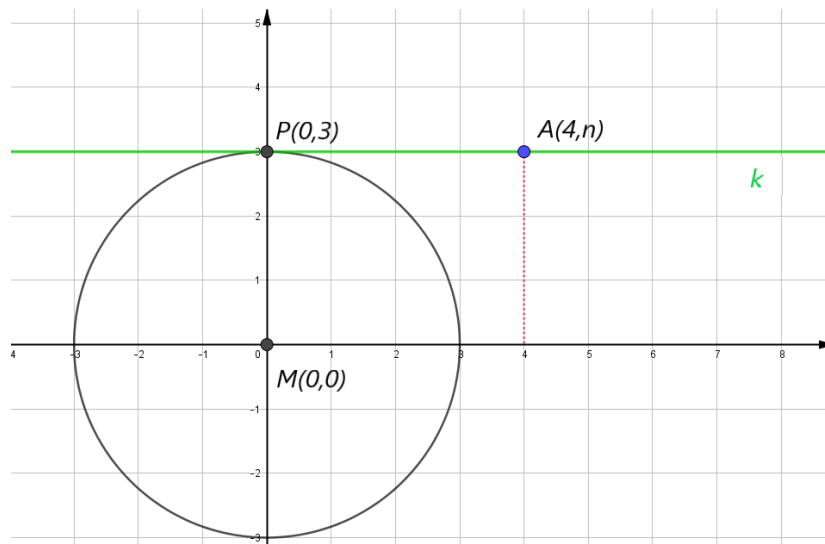
$$x^2 + y^2 = 9$$

es el punto M . La recta t es tangente a C en $P(0, 3)$ y $A(4, n)$ es un punto que pertenece a t .

De acuerdo con la información anterior, ¿cuál es la medida de \overline{AM} ?

Solución

Graficamente la información brindada es la siguiente



Donde se puede observar que el valor de n es 3 pues k es constante y es paralelo al eje x .

Ahora solo falta determinar la distancia de \overline{AM} por medio de la fórmula de la distancia entre dos puntos.

$$d_{AM} = \sqrt{(0 - 4)^2 + (0 - 3)^2} = 5$$

Por lo tanto el segmento $\overline{AM} = 5$

10. Determine el valor de k de modo que la recta

$$3x - 4y + k = 0$$

sea tangente a la circunferencia $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

Solución

Para saber si la recta $3x - 4y + k = 0$ es tangente a la circunferencia dada vamos a sustituir el valor de y y veremos para que valor de k el discriminante de la ecuación cuadrática resultante es igual a cero.

Primero despejamos y

$$3x - 4y + k = 0 \Rightarrow y = \frac{3x}{4} + \frac{k}{4}$$

Ahora vamos a resolver las fórmulas notables

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 25 = 0$$

Sustituyendo y en la ecuación anterior

$$x^2 - 6x + \left(\frac{3x}{4} + \frac{k}{4}\right)^2 - 8\left(\frac{3x}{4} + \frac{k}{4}\right) = 0$$

Resolviendo las fórmulas notables y agrupando términos semejantes

$$\frac{25}{16}x^2 + \left(-12 + \frac{3k}{8}\right)x - \left(\frac{k^2}{16} - 2k\right) = 0$$

Al calcular el discriminante

$$\Delta = \left(-12 + \frac{3k}{8}\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{16} \cdot \left(\frac{k^2}{16} - 2k\right) = 0$$

$$\Delta = \frac{-25k^2}{64} + \frac{7k}{2} + \frac{9225}{64} = 0$$

Por lo tanto $k = -15, 24$ o bien $k = 24, 20$

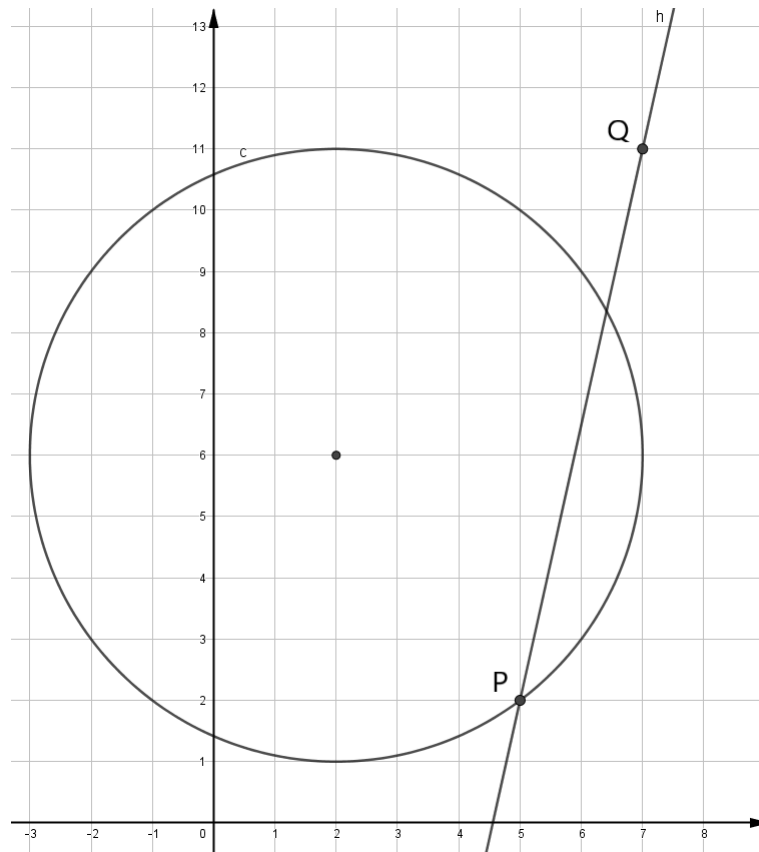
11. La ecuación de una circunferencia

$$c : (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

Determinar si la recta que pasa por el punto $P(5, 2)$ y $Q(7, 11)$ es tangente, secante o exterior a la circunferencia.

Solución

Vamos a resolver la pregunta de forma gráfica, dado que conocemos el centro $(2, 6)$ y radio 5 , primero dibujamos la circunferencia y los puntos P y Q , luego trazamos la recta que pasa por dichos puntos y obtenemos el siguiente resultado.



Por lo tanto tenemos que la recta que pasa por los puntos $P(5, 2)$ y $Q(7, 11)$ es secante a la circunferencia

$$c : (x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

12. Marcos tiene un reloj inteligente conectado a su celular por medio de bluetooth, el cual tiene un alcance de 3 metros en forma circular. La casa de Marcos es de forma cuadrada de lado 4 metros, ¿Determine si cuando Marcos deja su celular en el centro de la casa y sale a un árbol que se encuentra a un metro este de la esquina superior derecha de la casa, el reloj seguirá conectado a la red bluetooth del celular?

Solución

Para determinar si al salir al árbol el reloj sigue conectado, debemos encontrar una ecuación, para eso vamos a tomar como punto de referencia el centro de casa el cuál será nuestro origen, además recordemos que el teléfono de encuentra en el origen y que el bluetooth tiene un alcance de 2 metros por lo que la ecuación es

$$x^2 + y^2 = 9$$

Ahora debemos buscar las coordenadas del árbol para poder evaluarlo en la ecuación, si al evaluar nos da un número menor o igual a 9 significa que Marcos sigue conectado a la red bluetooth.

Para conocer las coordenadas del árbol recordemos que la casa es cuadrada y su lado mide 4 metros por lo que las coordenadas de la esquina superior derecha es 2 metros a la derecha y 2 metros hacia arriba y además, el árbol está a 1 metro a la derecha por lo que las coordenadas del árbol con respecto al centro de la casa es 3 metros a la derecha y 2 hacia arriba

$$\begin{aligned} & (x)^2 + y^2 \\ &= (3)^2 + (2)^2 \\ &= 9 + 4 \\ &= 13 \end{aligned}$$

Como $13 \geq 9$ el reloj de Marcos no sigue conectado a la red bluetooth cuando sale al árbol.

13. Las llantas del carro de Carlos tienen un radio de 30 cm . ¿Cuál es la distancia en centímetros que ha recorrido el carro si las llantas han dado 500 vueltas?

Solución

Para resolver este problema debemos conocer que distancia recorre el carro cuando sus llantas dan una vuelta completa para esto debemos hallar el perímetro de la llanta.

$$P = 2\pi r$$

$$P = 2\pi(30)$$

$$P = 60\pi$$

$$P \approx 188,4955$$

Como ya conocemos la distancia que recorre al carro cuando sus llantas dan una vuelta, ahora solo debemos multiplicar la cantidad de vueltas por la distancia que recorre al dar una vuelta

$$D = 188,4955 \cdot 500$$

$$D = 94247,75$$

Por lo tanto el carro recorre $94247,75\text{ cm}$ al dar 500 vueltas

14. A 5 kilómetros este del muelle se encuentra un faro el cual se sabe que su luz tiene un alcance de 15 kilómetros, el vigilante del barco quiere saber si el barco que se encuentra a 2 kilómetros al norte y 8 kilómetros al oeste del muelle está en el alcance de la luz del faro.

Solución

Si realizamos una ecuación para representar el faro vamos a tomar al muelle como el origen puesto es nuestro punto de referencia para los dos objetos. Recordemos que el muelle se encuentra a 5 kilómetros al este del muelle por lo que solo nos estamos moviendo de forma horizontal y hacia la derecha, además que la luz del faro alcanza hasta 15 kilómetros esto quiere decir que el radio es 15, entonces la ecuación corresponde

$$(x - 5)^2 + y^2 = 225$$

Para saber si el barco está en el alcance del faro debemos evaluar sus coordenadas del barco en la ecuación y si nos da un número menor o igual a 225 significa que el barco sí está en el alcance del faro, para esto recordemos que las coordenadas del barco son 2 kilómetros al norte y 8 kilómetros al oeste del muelle por lo que en par ordenado que

se tiene es $(-8, 2)$ y evaluando en la ecuación se tiene

$$\begin{aligned} & (x - 5)^2 + y^2 \\ &= (-8 - 5)^2 + (2)^2 \\ &= (-13)^2 + (2)^2 \\ &= 169 + 4 \\ &= 173 \end{aligned}$$

Como $173 \leq 225$ el barco está en los alcances del faro