PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

11°

Contenidos	Habilidades
Función logarítmica	H9: Identificar la función logarítmica como la inversa de la función exponencial. H10: Analizar gráfica y algebraicamente las funciones logarítmicas.

Colaboradores:

Céspedes Gómez Lency Francini
Guillén Méndez Jean Carlo
Nuñez Morales Gustavo
Segura Siles Verónica

Resumen de la función logarítmica

Función inversa de la función exponencial

Definición

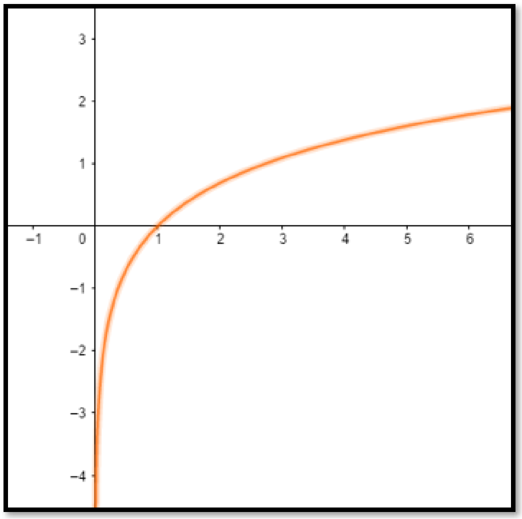
La función exponencial $f(x) = a^x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ en donde $a > 0$, $a \neq 0$ y $a \neq 1$ es una función inyectiva y su codominio es igual al ámbito, por lo tanto posee su correspondiente inversa, la cual es la función logarítmica, se denota mediante la expresión: $f(x) = \log_a x$, $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ en donde $a > 0$, $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

Función logarítmo natural

Definición

Los logarítmos de base e ($\log_e x$) se conocen formalmente como logarítmos naturales, de forma informal se conocen como logarítmos neperianos, esto en honor a Jhon Napier. Para representar a los logarítmos naturales la notación que se utiliza corresponde a: $\ln(x)$.

Nota: La representación gráfica de la función del logarítmo neperiano corresponde a:

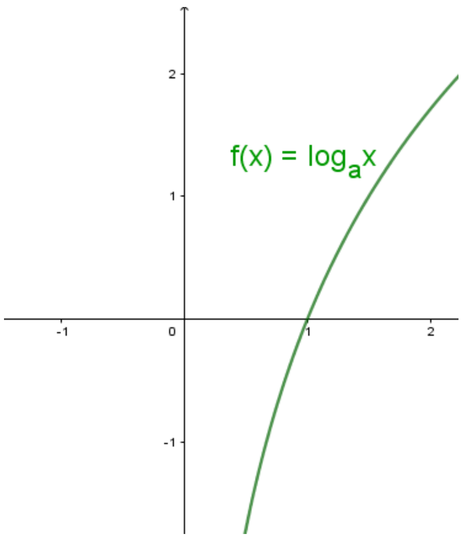


Nota: La función logarítmica se puede clasificar en dos casos

Caso 1: estrictamente creciente

Si $a > 1$

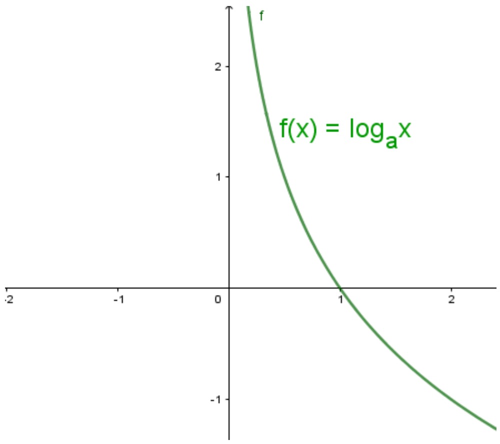
1. No interseca el eje y
2. Interseca el eje x en $(1, 0)$
3. Es estrictamente creciente.
4. Es asintótica al eje y.
5. Dominio: $\mathbb{R}^+$
6. Ámbito: $\mathbb{R}$
7. Es inyectiva.



Caso 2: estrictamente decreciente

Si $0 < a < 1$

1. No interseca el eje y
2. Interseca el x en $(1, 0)$
3. Es estrictamente decreciente.
4. Es asintótica al eje y.
5. Dominio: $\mathbb{R}^+$
6. Ámbito: $\mathbb{R}$
7. Es inyectiva.



Ejemplos

Ejemplo 1

Ver video en el siguiente enlace : https://www.youtube.com/watch?v=BYCE2iGUq64

Nota: Los siguientes criterios de funciones no corresponden a funciones logarítmicas:

Ejemplo 2

$f(x) = \log_{\frac{x}{2}}(x)$

Note que la base corresponde a $\dfrac{x}{2}$, para que sea una función logarítmica la base no puede poseer variables.

Ejemplo 3

$f(x) = \log_{\frac{-1}{2}}(x)$ y $g(x) = \log_0(x)$

Note que las bases corresponde a $\dfrac{-1}{2}$ y 0, respectivamente, para que sea una función logarítmica la base no puede ser cero ni negativa.

Ejemplo 4

Analice la monotonía de la siguiente función:

$f(x) = \log_{\frac{7}{2}}(x)$

Note que la base corresponde a $\frac{7}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{7}{2} > 1$

$\therefore$ La función $f(x)$ es creciente.

Ejemplo 5

Analice la monotonía de la siguiente función:

$f(x) = \log_{\frac{\sqrt{5}}{3}}(x)$

Note que la base corresponde a $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$

$\therefore$ La función $f(x)$ es decreciente.

Nota: La monotonía también se puede analizar desde su representación gráfica, esta se abarcará en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6

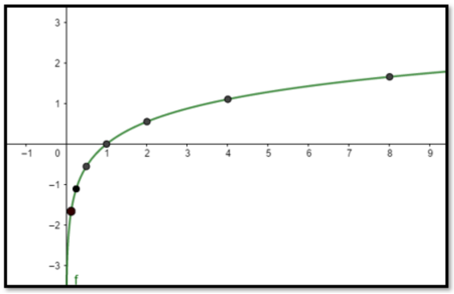
Realice el análisis completo de la función que se presenta:

- Criterio: $f(x) = \log_{\frac{7}{2}}(x)$

- Tabulación:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	-1.66	-1.11	-0.55	0	0.56	1.11	1.66

- Gráfica:



- No interseca el eje y:

  Desde la representación gráfica se puede observar que la función no interseca el eje y. Es asintótica al eje y. De forma algebraica esto se puede deducir pues para $x \leq 0$, $f(x)$ no existe.

- Interseca el eje x en $(1, 0)$:

  Desde la representación gráfica se puede observar que la función interseca al eje x en el punto $(1, 0)$. De forma algebraica esto se puede deducir pues $f(1) = 0$. (Puede observar la representación tabular).

- Es estrictamente creciente.

  Se puede observar tanto de la representación gráfica como del análisis realizado en el **ejemplo 1**. Además, desde la representación tabular se puede observar que conforme los valores de las preimágenes (x) crecen, los valores de sus respectivas imágenes y crecen.

- Dominio: $\mathbb{R}^+$

  Desde la representación gráfica se puede observar que el dominio de la función corresponde a $\mathbb{R}^+$

- Ámbito: $\mathbb{R}$

  Desde la representación gráfica se puede observar que el ámbito de la función corresponde a $\mathbb{R}$

- Es inyectiva:

  Desde la representación gráfica se puede verificar con la prueba de las líneas verticales.

Ejemplo 7

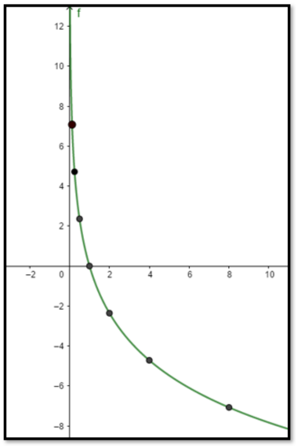
Realice el análisis completo de la función que se presenta:

- Criterio: $f(x) = \log_{\frac{\sqrt{5}}{3}}(x)$

- Tabulación:

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y	7.08	4.72	2.36	0	-2.36	-4.72	-7.08

- Gráfica:



- No interseca el eje y:

  Desde la representación gráfica se puede observar que la función no interseca el eje y. Es asintótica al eje y. De forma algebraica esto se puede deducir pues para $x \leq 0$, $f(x)$ no existe.

- Interseca el eje x en $(1,0)$:

  Desde la representación gráfica se puede observar que la función interseca al eje x en el punto $(1,0)$. De forma algebraica esto se puede deducir pues $f(1) = 0$. (Puede observar la representación tabular).

- Es estrictamente decreciente.

  Se puede observar tanto de la representación gráfica como del análisis realizado en el **ejemplo 2**. Además, desde la representación tabular se puede observar que conforme los valores de las preimágenes (x) crecen, los valores de sus respectivas imágenes y decrecen.

- Dominio: $\mathbb{R}^+$

  Desde la representación gráfica se puede observar que el dominio de la función corresponde a $\mathbb{R}^+$

- Ámbito: $\mathbb{R}$

  Desde la representación gráfica se puede observar que el ámbito de la función corresponde a $\mathbb{R}$

- Es inyectiva:

  Desde la representación gráfica se puede verificar con la prueba de las líneas verticales.

Práctica: Transformaciones de la función inversa

Indicaciones generales

1. Analice y complete la siguiente tabla. Si la función es logarítmica, indique con un "SI", en caso contrario, con un "NO".

Criterio	Solución	Criterio	Solución	Criterio	Solución	Criterio	Solución
$\log_x(3)$		$\log_e\left(\frac{x}{2}\right)$		$\log_2(4x)$		$\log_1(x)$	
$\log_2(4^x)$		$\log_3(9)$		$\log_{\frac{3}{2}}(9x)$		$\ln(2x)$	

2. Clasifique las siguientes funciones logarítmicas según su monotonía (creciente o decreciente). Justifique su respuesta.

Función	Respuesta	Función	Respuesta
$f(x) = 5\log_4(2x)$		$p(x) = \log_{\frac{1}{9}}(9x)$	
$r(x) = \log_{\frac{7}{3}}(x)$		$g(x) = \log_{0,25}\left(\frac{x}{3}\right)$	
$f(x) = \log_{\frac{1}{e}}(x)$		$m(x) = \log_{\sqrt{3}}(3x)$	

3. Complete la tabla que se le presenta a continuación.

Función	Dominio	Ámbito	Intersección en y	Intersección en x
$f(x) = \log_2 x$	$[1, 32[$			
$h(x) = \log_{0,5}(x)$		$\mathbb{R}$		
$m(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$	$]9. + \infty[$			
$g(x) = \log_{\sqrt{2}}(x)$		$\mathbb{R} - \{6\}$		

4. Determine la gráfica, la asíntota vertical y las intersecciones con los ejes de las funciones f y g tales que:

   a. $f(x) = 3\ln(x-2)+1$

   b. $g(x) = -\log_2(1+x)-3$

Soluciones

1. Solución

Criterio	Solución	Criterio	Solución	Criterio	Solución	Criterio	Solución
$\log_x(3)$	NO	$\log_e\left(\frac{x}{2}\right)$	SI	$\log_2(4x)$	SI	$\log_1(x)$	NO
$\log_2(4^x)$	NO	$\log_3(9)$	NO	$\log_{\frac{3}{2}}(9x)$	SI	$\ln(2x)$	SI

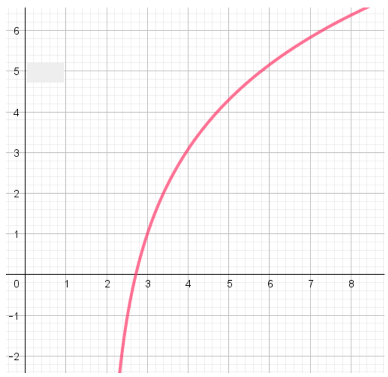
2. Solución

Función	Respuesta	Función	Respuesta
$f(x) = 5\log_4(2x)$	Creciente	$p(x) = \log_{\frac{1}{9}}(9x)$	Decreciente
$r(x) = \log_{\frac{7}{3}}(x)$	Creciente	$g(x) = \log_{0,25}\left(\frac{x}{3}\right)$	Decreciente
$f(x) = \log_{\frac{1}{e}}(x)$	Decreciente	$m(x) = \log_{\sqrt{3}}(3x)$	Creciente

3. Solución

Función	Dominio	Ámbito	Intersección en y	Intersección en x
$f(x) = \log_2 x$	$[1, 32[$	$[0, 5[$	No interseca	$(1, 0)$
$h(x) = \log_{0,5}(x)$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$	No interseca	$(1, 0)$
$m(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x)$	$]9. + \infty[$	$]-\infty, -2[$	No interseca	No interseca
$g(x) = \log_{\sqrt{2}}(x)$	$\mathbb{R}^+ - \{8\}$	$\mathbb{R} - \{6\}$	No interseca	$(1, 0)$

4. Solución

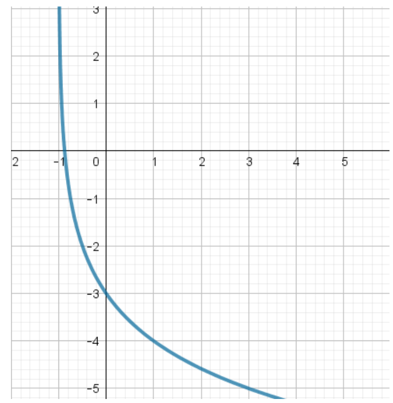


Función f

Intersección con eje y: No tiene

Intersección con eje x: $\left(e^{-\frac{1}{3}}+2\ ,\ 0\right)$

Asíntota vertical: $x=2$



Función g

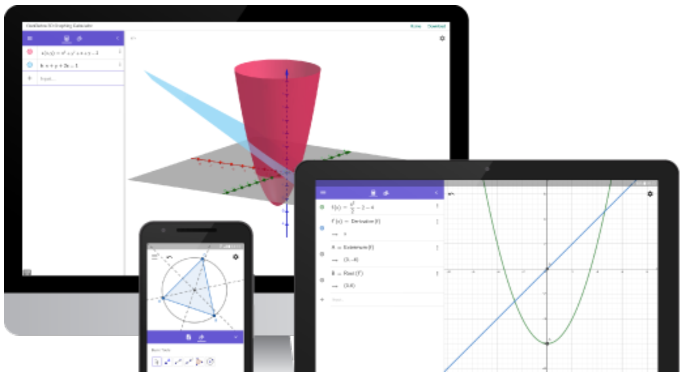
Intersección con eje y: $(0,-3)$

Intersección con eje y: $(2^{-3}-1,0)$

Asíntota vertical: $x=-1$

Anexos

¿Desea ver material interactivo?
https://www.geogebra.org/m/xpyx2tqm



Ingrese al enlace para conocer más acerca de la inversa de la función lineal y su comportamiento gráficamente.

Referencias bibliográficas

- F Prima. (2015). *Matemática 11: hacia la resolución de problemas*. (2015) F prima Grupo Editorial.
- Gómez, L. (2016). *Matemática 11°: Desarrollando Habilidades*. San José, Costa Rica. Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS).
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programa de estudios. Matemáticas. Costa Rica. Obtenido de ENLACE.
- Porras, V., Durán, E. (2015). Matemática 11°. San José, Costa Rica. Publicaciones Porras.
- Santillana. (2016). *Trabajar en: Matemática 11*. Costa Rica. Editorial Santillana.