



# Material de Apoyo

# 11<sup>o</sup>

| Contenidos          | Habilidades  |
|---------------------|--|
| Función logarítmica | H11: Aplicar propiedades de los logaritmos para simplificar expresiones algebraicas. |

## Colaboradores:

Céspedes Gómez Lency Francini  
Guillén Méndez Jean Carlo  
Nuñez Morales Gustavo  
Segura Siles Verónica

# Resumen sobre ecuaciones logarítmicas

## Ecuación logarítmica

### Definición

Una ecuación logarítmica es una ecuación en donde la incógnita se ubica se encuentra multiplicando o dividiendo a los logaritmos, en sus bases o en el argumento de los logaritmos (dentro de los logaritmos).

## Propiedades de los logaritmos

Sean las constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  y las variables  $x, y \in \mathbb{R}^+$ . Los logaritmos cumplen las siguientes propiedades:

|   |  |
|---|--|
| $\log_a(a) = 1$                             | $\log_a(1) = 0$  |
| $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ | $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ |
| $\log_a(x^n) = n \log_a(x)$                 | $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \log_a(x)$            |
| $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$   | $\log_a(a^x) = a^{\log_a(x)} = x$                        |

**Nota:** Debido a que no se admiten argumentos negativos o nulos, es necesario comprobar las soluciones de la ecuación, es decir, verificar que las soluciones sí cumplan la ecuación inicial.

Ejemplo

1

La ecuación del precio de la oferta de cierto artículo está dada por  $p(x) = 1000 \cdot \log(10 + \frac{x}{2})$ , donde  $x$  es el número de unidades ofrecidas a un precio  $p(x)$  por unidad.

- a) ¿A qué precio se ofrecen 1980 unidades?
- b) ¿Cuántas unidades se venden a un precio de 4000?

- a) ¿A qué precio se ofrecen 1980 unidades?

La pregunta nos da la siguiente información

$$x = 1980$$

$$P(x) = ?$$

$$p(x) = 1000 \cdot \log(10 + \frac{1980}{2})$$

$$p(x) = 1000 \cdot \log(1000)$$

$$p(x) = 1000 \cdot \log(10^3)$$

$$p(x) = 1000 \cdot 3$$

$$p(x) = 3000$$

R/ El precio por 1980 unidades es 3000.

- b) ¿Cuántas unidades se venden a un precio de 4000?

la pregunta nos da la siguiente información

$$x = ?$$

$$P(x) = 4000$$

$$4000 = 1000 \cdot \log(10 + \frac{x}{2})$$

$$\frac{4000}{1000} = \log(10 + \frac{x}{2})$$

$$10^4 = 10^{\log(10 + \frac{x}{2})}$$

$$10^4 = (10 + \frac{x}{2})$$

$$x = 1980$$

R/ por 4000 se venderían 1980 unidades.

Ejemplo

2

Considere el modelo para interés compuesto continuamente  $A = Pe^{r \cdot t}$ , donde  $P$  es la cantidad inicial de dinero y  $A$  es la cantidad de dinero después de  $t$  años, a una tasa de interés de  $r\%$  anual.

- a) Reescriba  $t$  como función de  $A$ .
- b) ¿Cuántos años deben de pasar para que a una tasa del 8% anual al invertir 100000 colones obtengamos 200000 colones en este modelo?

- a) Reescriba  $t$  como función de  $A$ .

$$A = P \cdot e^{r \cdot t}$$

$$\frac{A}{P} = e^{r \cdot t}$$

$$\ln\left(\frac{A}{P}\right) = \ln(e^{r \cdot t})$$

$$\ln\left(\frac{A}{P}\right) = r \cdot t$$

$$\frac{\ln\left(\frac{A}{P}\right)}{r} = t$$

- b) ¿Cuántos años deben de pasar para que a una tasa del 8% anual al invertir 100000 colones obtengamos 200000 colones en este modelo?

$$A = 200000$$

$$P = 100000$$

$$r = 8\% \rightarrow 0,08$$

$$t = ?$$

Para esta pregunta se puede utilizar la función obtenida en la pregunta a)

$$\frac{\ln\left(\frac{A}{P}\right)}{r} = t$$

$$\frac{\ln\left(\frac{200000}{100000}\right)}{0,08} = t$$

$$t = 8,66$$

R/ Se necesitan alrededor de 8,66 años para alcanzar el monto de 200000 con este modelo

**Ejemplo**

**3**

Resuelva la siguiente ecuación:  $3^{x+2} = 2^{4x} \cdot 3^4$

$$3^{x+2} = 2^{4x} \cdot 3^4$$

$$\log_3 (3^{x+2}) = \log_3 (2^{4x} \cdot 3^4)$$

$$x + 2 = \log_3 (2^{4x}) + \log_3 (3^4)$$

$$x + 2 = 4x \cdot \log_3 (2) + 4$$

$$x - 4x \cdot \log_3 (2) = 4 - 2$$

$$x \cdot (1 - 4 \cdot \log_3 (2)) = 2$$

$$x = \frac{2}{1 - 4 \cdot \log_3 (2)}$$

**Nota:**

1. Para la resolución de este ejemplo se utilizó  $\log_3$ , sin embargo, se puede resolver utilizando cualquier logaritmo, inténtelo utilizando  $\ln$  y  $\log_2$ .

**Nota:**

2. Si utiliza otros logaritmos para resolver este tipo de ecuaciones en principio parecerá que las respuestas son distintas, sin embargo, su valor es el mismo.

**Ejemplo**

**4**

Visualice el siguiente video sobre ecuaciones logarítmicas <https://youtu.be/bWyuSDj7ktU>

**Ejemplo**

**5**

Visualice el siguiente video sobre ecuaciones logarítmicas <https://youtu.be/n11AycEqu2c>

# Práctica: Ecuaciones logarítmicas

1. Resuelva las siguientes ecuaciones

a.  $5^{2x} = 3^{x+1} \cdot 2$

b.  $\ln(x + 4) - \ln(3^2) = \ln(x)$

c.  $\frac{\log_3\left(\frac{1}{3}\right)}{\log_3 9x} = -1$

d.  $2 \log(x) - \log(4) = \log(2)$

e.  $3^{4x+1} = 10^{6x+4}$

2. Existe una función que los científicos utilizan para calcular el diámetro  $d$  en  $Km$  de asteroides. Esta función está dada por  $\log(d) = 3,7 - 0,2 \cdot g$ , donde  $g$  representa la magnitud del asteroide. ¿Cuál es el diámetro aproximado del asteroide, en  $Km$ , de un cuerpo que presenta magnitud 11?

3. La relación que se presenta entre la magnitud y la potencia de un sismo está dada por  $M = \log(P)$ , donde  $P$  representa la potencia y  $M$  la magnitud. El 24 de agosto del 2020, ocurrió un temblor con epicentro en Garabito de Puntarenas, con una magnitud de 5,97 grados en la escala de Richter. ¿Cuál fue la potencia de este sismo?

4. La presión sanguínea  $P$  de un niño es de aproximadamente 105,7 mm de mercurio. Si este dato fue calculado con la fórmula  $P = \frac{97 \cdot \ln(x)}{5} + 18$ , donde  $x$  representa el peso del niño en libras.

a. ¿Cuánto pesa ese niño?

b. Si un niño pesa 70,53 libras. ¿Cuál es la presión sanguínea del niño aproximadamente?

5. El crecimiento  $N$  de una población se expresa mediante  $N(t) = \log_3(1+t)$ , donde  $t$  representa al tiempo en horas.

a. ¿Cuántas horas deben transcurrir para que  $N$  sea igual a 4?

b. ¿Cuál es el crecimiento de la población cuando han transcurrido 242 horas?

6. El tiempo  $t$ , en días que transcurre para que una cantidad  $c$  en gramos de una sustancia radioactiva se desintegre, está dado por  $T(c) = \log_4\left(\frac{12800}{c}\right)$ .

a. ¿Cuánto tiempo en días transcurren para que 3,125 gramos de dicha sustancia radioactiva se desintegren?

b. ¿Cuál es la cantidad de sustancia que se tendrá al transcurrir 15 días?

7. La unidad de medida que se utiliza con frecuencia para medir el sonido es el decibel (dB). La cantidad  $N$ , de decibeles de un sonido con intensidad  $I$  está dada por  $N(I) = 160 + 10 \cdot \log(I)$ .

a. Si un sonido tiene una intensidad de  $10^{-16}$ , ¿cuál es la cantidad de decibeles de este sonido?

b. Si un sonido tiene 360 dB. ¿Cuál es la intensidad de este?

8. La cantidad de células  $n$  presentes en un organismo se determinan mediante la función  $n(x) = \log_2 x$  donde  $x$  corresponde al número de gametos de dicho organismo.

a. Si el organismo posee 65536 gametos, ¿cuántas células posee?

b. Si el organismo tiene 12 células, ¿cuántos gametos posee?

## Soluciones

1.
  - a. 0,8450
  - b.  $\frac{1}{2}$
  - c.  $\frac{1}{3}$
  - d.  $2\sqrt{2}$
  - e.  $\frac{4 - \log 3}{4 \log 3 - 6}$
2. El diámetro aproximado del asteroide es de 31,62 *Km* aproximadamente.
3. Presentó 933254,3008 de potencia, aproximadamente.
4.
  - a. Pesa 91,90 libras, aproximadamente.
  - b. La presión sanguínea del niño es de 100,57 mm aproximadamente.
5.
  - a. Deben transcurrir 80 horas.
  - b. El crecimiento de la población es de 5.
6.
  - a. Transcurren 6 días..
  - b. Quedarán  $1,192092896 \times 10^{-5}$  gramos..
7.
  - a. 0 dB.
  - b. Tiene  $10^{20}$  de intensidad.
8.
  - a. Posee 16 células.
  - b. Posee 4096 gametos.

## Anexos

¿Desea ver material interactivo?

<https://www.geogebra.org/m/xpyx2tqm>



Ingrese al enlace para conocer más acerca de la inversa de la función lineal y su comportamiento gráficamente.

## Referencias bibliográficas

- F Prima. (2015). *Matemática 11: hacia la resolución de problemas*. (2015) F prima Grupo Editorial.
- Gómez, L. (2016). *Matemática 11º: Desarrollando Habilidades*. San José, Costa Rica. Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS).
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programa de estudios. Matemáticas. Costa Rica. Obtenido de [ENLACE](#).
- Porras, V., Durán, E. (2015). *Matemática 11º*. San José, Costa Rica. Publicaciones Porras.
- Santillana. (2016). *Trabajar en: Matemática 11*. Costa Rica. Editorial Santillana.