# OCAA 2021

# Solución Examen Nivel 2

**Problema 1**

Se tiene que para este nuevo planeta

$$L_a = 0{,}4L_e$$

$$\frac{R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \pi R^2}{r^2}(1 - A) = 2\pi R^2 \sigma T^4$$

Ahora usamos los datos $T = 0{,}009T_{\odot}$ y $r = 4200R_{\odot}$

$$\frac{R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \pi R^2}{(4200)^2 R_{\odot}^2}(1 - A) = 2\pi R^2 \sigma (0{,}009)^4 T_{\odot}^4$$

Simplificando ambos lados

$$\frac{1}{(4200)^2}(1 - A) = 2(0{,}009)^4$$

$$1 - A = 2(0{,}009)^4 (4200)^2$$

$$A = 1 - (0{,}231)$$

El albedo es entonces

$$A = 0{,}768$$

**Problema 2**

Si añadimos el símbolo $\oplus$ a todos los parámetros correspondientes a la Tierra podemos encontrar una expresión de la gravedad terrestre usando la ley de gravitación universal y que quede en términos de su densidad y radio:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

$$mg_{\oplus} = \frac{GM_{\oplus}m}{R_{\oplus}^2}$$

Usando el hecho de que $M = \rho V$ y que a la vez el volumen de una esfera está dado por $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$ y simplificando $m$ se obtiene que

$$g_{\oplus} = \frac{4\pi G\rho_{\oplus}R_{\oplus}^3}{3R_{\oplus}^2}$$

Simplificando se obtiene que

$$g_{\oplus} = \frac{4\pi G\rho_{\oplus}R_{\oplus}}{3}$$

Ahora aplicando ley de conservación de la energía podemos encontrar una expresión para la rapidez inicial cuadrada del salto en términos de todos estos parámetros y de la altura a la que llegó el astronauta:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg_{\oplus}h_{\oplus}$$

$$\frac{1}{2}v_0^2 = g_{\oplus}h_{\oplus}$$

Sustituyendo $g_{\oplus}$

$$v_0^2 = \frac{8\pi G\rho_{\oplus}R_{\oplus}h_{\oplus}}{3}$$

Ahora aplicamos la conservación de la energía al salto del astronauta en el planeta X:

$$E_i = E_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg_Xh_X$$

$$v_0^2 = 2g_Xh_X$$

Haciendo el mismo procedimiento para $g_X$ que se hizo para $g_{\oplus}$ se llegará a que

$$g_X = \frac{4\pi G\rho_XR_X}{3}$$

Sustituyendo

$$v_0^2 = \frac{8\pi G\rho_X R_X h_X}{3}$$

Ahora, esta rapidez inicial ha de ser la misma tanto en la Tierra como en el planeta X pues proviene del impulso de la misma persona por lo que podemos igualar ambas expresiones de $v_0^2$

$$\frac{8\pi G\rho_X R_X h_X}{3} = \frac{8\pi G\rho_\oplus R_\oplus h_\oplus}{3}$$

Simplificando

$$\rho_X R_X h_X = \rho_\oplus R_\oplus h_\oplus$$

Finalmente usando el hecho de que $\rho_X = {}^3/_2\,\rho_\oplus$ y que la relación de diámetros es $D_X = 2D_\oplus$ lo cuál se mantiene para los radios, es decir $R_X = 2R_\oplus$ podemos sustituir y despejar para $h_X$

$$\frac{3}{2}\rho_\oplus(2R_\oplus)h_X = \rho_\oplus R_\oplus h_\oplus$$

$$h_X = \frac{1}{3}h_\oplus = \frac{1}{3}(0{,}5)$$
$$h_X = 0{,}17 \text{ m}$$

**Problema 3**

a) Utilizando la tercera ley de Kepler podemos obtener $a$ para este cuerpo celeste:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2}$$

Ahora podemos sustituir $M = M_\odot$, $m = 0{,}001M_\odot$ y $T = 11T_\oplus$, así:

$$a = \left[\frac{\left(11T_\oplus\right)^2 G(1{,}001M_\odot)}{4\pi^2}\right]^{1/3}$$

El periodo terrestre en segundos es

$$T_\oplus = 1\ año\ \times \frac{365\ días}{1\ año} \times \frac{24\ h}{1\ día} \times \frac{3600\ s}{1h} = 3{,}15 \times 10^7\ s$$

Y usando la masa solar $M_\odot = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg y $G$ se obtiene:

$$a = \left[\frac{(11 \times 3{,}15 \times 10^{7})^{2}(6{,}67 \times 10^{-11})(1{,}001 \times 1{,}99 \times 10^{30})}{4\pi^{2}}\right]^{1/3}$$

$$a = 7{,}39 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$$

Ahora sabemos que la excentricidad se puede escribir como

$$\varepsilon = \frac{C}{a}$$

La distancia entre el centro de la orbita del cuerpo y su foco (que es donde estaría el Sol) es C, así que el resultado es un simple despeje.

$$C = a\varepsilon$$

$$C = (7{,}39 \times 10^{11})(0{,}048)$$

$$C = 3{,}55 \times 10^{10}\ \mathrm{m} = 0{,}237\ \mathrm{UA}$$

b) Ahora hacemos el proceso inverso tomando el nuevo valor de $\varepsilon$ y conservando $C$, así:

$$a = \frac{C}{\varepsilon}$$

$$a = \frac{(3{,}55 \times 10^{10})}{(0{,}017)}$$

$$a = 2{,}09 \times 10^{12}\ m$$

Luego usamos la tercera ley de Kepler para despejar el período:

$$T = \left[\frac{4\pi^{2}a^{3}}{G(1{,}001M_{\odot})}\right]^{1/2}$$

De forma que

$$T = \left[\frac{4\pi^{2}(2{,}09 \times 10^{12})^{3}}{(6{,}67 \times 10^{-11})(1{,}001 \times 1{,}99 \times 10^{30})}\right]^{1/2}$$

$$T = 1{,}65 \times 10^{9}\ s$$

Para obtener el resultado en términos del período de la Tierra lo dividimos entre este:

$$T = \frac{1,65 \times 10^9}{3,15 \times 10^7} T_{\oplus}$$

Por tanto

$$T = 52,3 T_{\oplus}$$

**Problema 4**

a) Partiendo de la ecuación de efecto Doppler

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{v}{c}$$

$$\frac{\frac{c}{f}}{\frac{c}{f_0}} = \frac{v}{c} + 1$$

$$\frac{f_0}{f} = \frac{v}{c} + 1$$

$$f = \frac{1}{\left(\frac{v}{c} + 1\right)} f_0$$

$$f = \left(\frac{50000}{(3,0 \times 10^8)} + 1\right)^{-1} (3,330 \times 10^{14})$$

$$f = 3,329 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

b) Esta frecuencia corresponde al infrarrojo del espectro.

Problema 5

a) Las estrellas que serán visibles durante el día son aquellas cuya ascensión recta esta en el rango de -6 horas y + 6 horas respecto a la ascensión recta del Sol.

En este caso sería entre las $06^h,04^m,55^s$ y las $18^h,04^m,55^s$. Por lo que las estrellas visibles serían Arcturus y Antares.

b) Conforme la tierra se desplaza alrededor del sol, algunas estrellas quedan desde nuestra perspectiva, detrás de nuestra estrella o cerca de esta región, entonces estas estrellas no serán visibles durante un lapso de tiempo pues el brillo del Sol y el efecto que esto genera en nuestra atmósfera no permitirá su visibilidad.

c) La culminación es el momento en el cual una estrella alcanza el meridiano local, o sea su punto más alto en el cielo.