PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

9°

Colaboladores:

Jordy Alfaro Brenes

Christian Duarte Mayorga

Edgar Solano Solano

María José Gómez Ramírez.

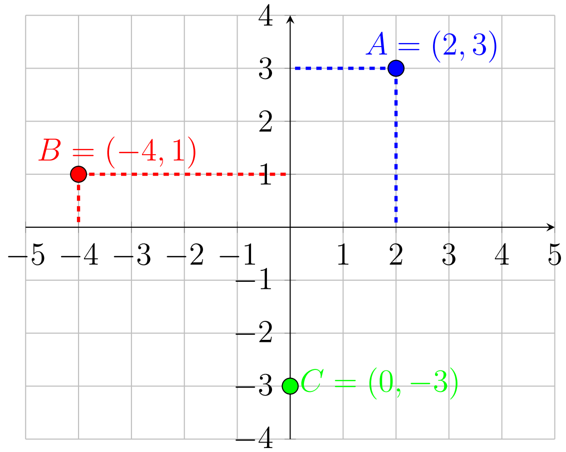
Definición 1 (Ubicación de puntos en el plano cartesiano)

Los puntos en el plano cartesiano tienen dos coordenadas, la coordenada x y la coordenada y y estos puntos se denotan como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplos

- $A(2,3)$ su coordenada $x = 2$ y coordenada $y = 3$
- $B(-4,1)$ su coordenada $x = -4$ y coordenada $y = 1$
- $C(0,-3)$ su coordenada $x = 0$ y coordenada $y = -3$

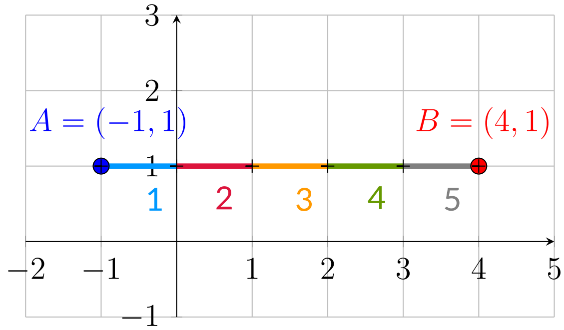
En el plano cartesiano esos puntos se ubican de la siguiente manera:



Definición 2 (Caso 1: Distancia entre puntos.)

Este caso corresponde a distancia entre dos puntos que el segmento que se traza entre ellos es paralelo al eje X, es decir es un segmento horizontales. En este caso basta con contar espacios que hay entre dos puntos con la ayuda de la numeración de los ejes, como se muestra en es siguiente ejemplo:

Ejemplo. Para calcular la distancia $d(A, B)$ entre los puntos $A(-1, 1)$ y $B(4, 1)$ basta contar, como se muestra en la figura, los espacios entre esos puntos



Así, con la ayuda de la gráfica se puede ver que entre $A(-1, 1)$ y $B(4, 1)$ hay 5 ul es decir, la distancia $d(A, B) = 5\ ul$.Pero, si no se cuenta con la gráfica, esa la distancia debe poder calcularse utilizando las coordenadas de los puntos, y, para esto se debe notar que las coordenadas y de los puntos $A(-1, 1)$ y $B(4, 1)$ son iguales, esto quiere decir que el segmento entre ellos es paralelo al eje X y basta calcular su distancia como:

$$d(A, B) = |-1 - 4| = |-5| = 5\ ul$$

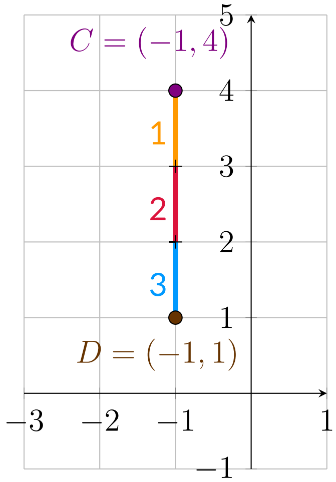
Definición 3 (Caso 2: Distancia entre puntos.)

Este caso corresponde a distancia entre dos puntos que el segmento que se traza entre ellos es paralelo al eje Y, es decir es un segmento veritical.

Ejemplo. Para calcular la distancia $d(C, D)$ entre los puntos $C(-1, 4)$ y $D(-1, 1))$ se puede utilizar el razonamiento del ejemplo del caso anterior, pero ahora es la coordenada x las que son iguales en los puntos $C(-1, 4)$ y $D(-1, 1)$, entonces el segmento entre ellos es paralelo al eje Y y basta calcular su distancia como:

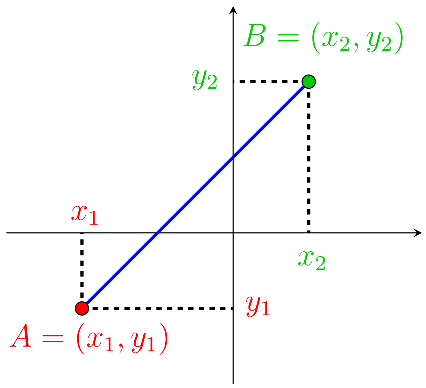
$$d(A, B) = |4 - 1| = |3| = 3\ ul$$

Se puede verificar esto en la siguiente gráfica:



Definición 4 (Caso 3: Distancia entre puntos.)

En este caso los segmentos que se trazan entre los puntos no son ni verticales ni horizontales, es decir, no son paralelos a nunguno de los ejes de coordenadas. Así que, ya no basta con contar espacios. Entonces dados los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ como se muestra en la siguiente figura:



La distancia $d(A, B)$ se calcula de la siguiente manera:

$$d(A, B) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

En el siguiente enlace te explicamos más a fondo esta formula

https://youtu.be/ZrX-7Aci3C0

También, en el siguiente enlace puedes explorar este tema mediante una aplicación de GeoGebra

https://www.geogebra.org/m/k9hyx8by

Ejercicios

Teorema de Pitágoras

1. Se necesita anclar un cable al suelo desde un poste de luz. Se conoce que la altura en la que el cable saldrá del poste es de $4{,}1m$ del suelo, y se ocupa anclarlo a una distancia de $1{,}5m$ del poste. ¿Cuánto cable se necesitará utilizar para cumplir las condiciones dadas?

2. Paco va a construir una mesa de campo, la cual desea que tenga 70cm de alto. Dispone de 110cm de madera para cada una de las patas. Un ejemplo del costado de la mesa se muestra en la Figura 1. Paco necesita saber cuál es la medida de la base que se forma con las patas de la mesa y el suelo, para que la mesa sea estable. Ayude a Paco a encontrar dicha medida.

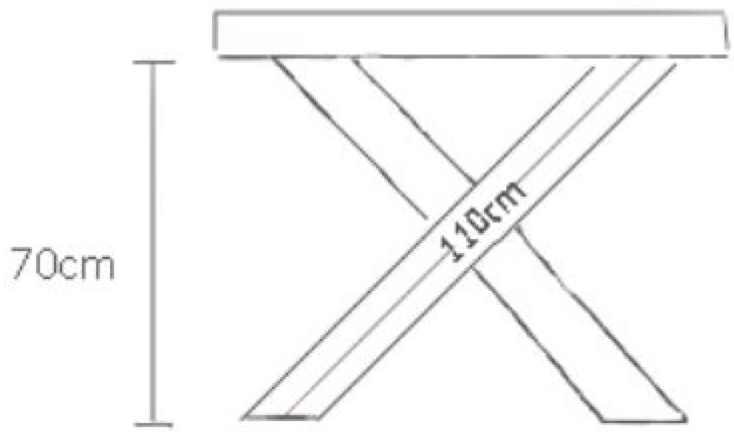
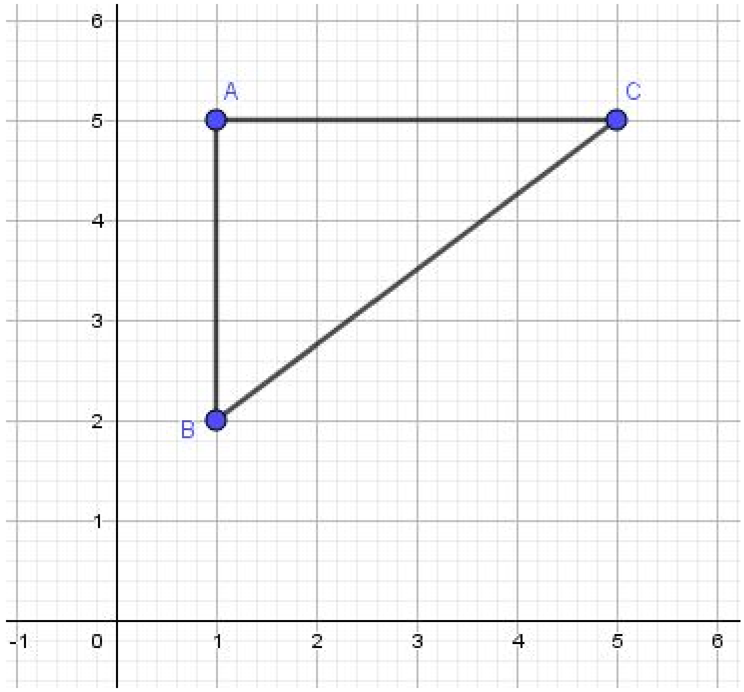


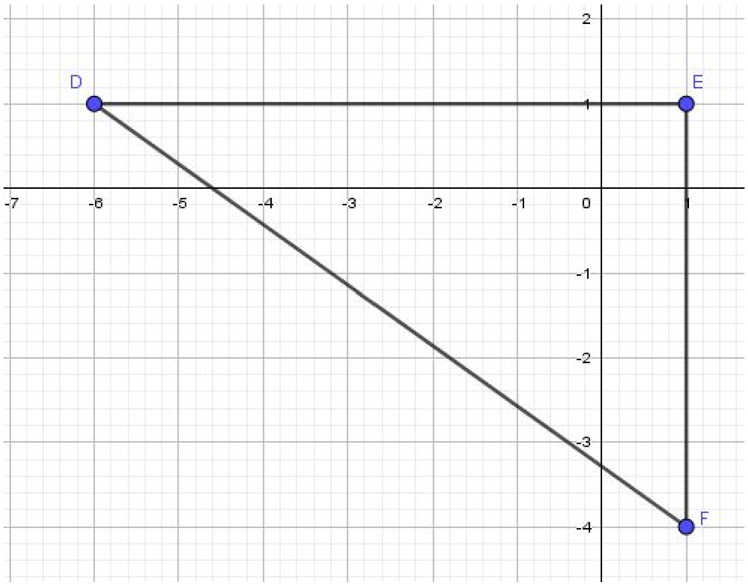
Figura 1: Mesa

3. Encuentre las medidas de cada lado de los triángulos mostrados:

a)

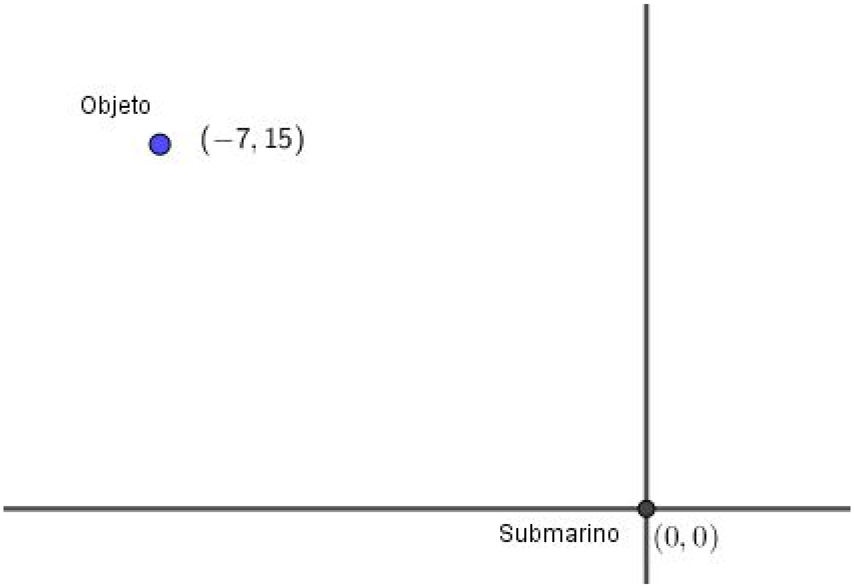


b)



Distancia entre puntos

1. Un submarino utiliza un sonar para detectar objetos a cierta distancia en kilómetros. Los datos que arroja son las coordenadas del objeto, como se muestra en la siguiente figura:



¿Cuál es la distancia entre el objeto y el submarino?

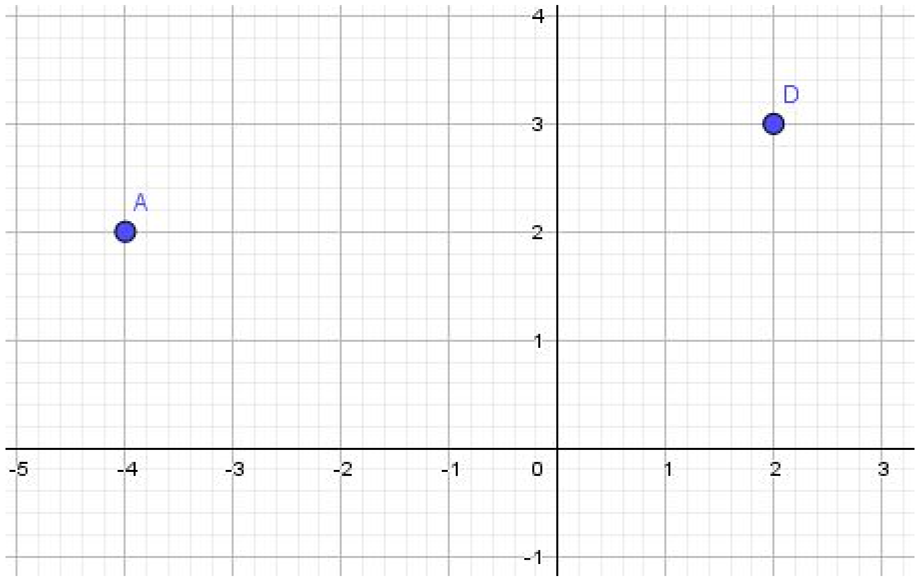
2. Alex realizó una llamada a una operadora telefónica para saber si el servicio que tienen ofrece cobertura de internet en su zona de residencia. Ricardo, quien lo atendió, sabe que existe una sucursal cerca de la zona en la que Alex vive. Dicha sucursal se ubica $70km$ al este y $60km$ norte del edificio principal de la operadora, y la vivienda de Alex se encuentra $40km$ este y $100km$ norte del edificio principal de la operadora. Además, Ricardo tiene acceso a la siguiente información:

Distancia a la sucursal en km	Calidad de cobertura
Menos de 30km	Excelente
Entre 30km y 55 km	Buena
Entre 55 km y 70km	Mala
Más de 70km	No hay

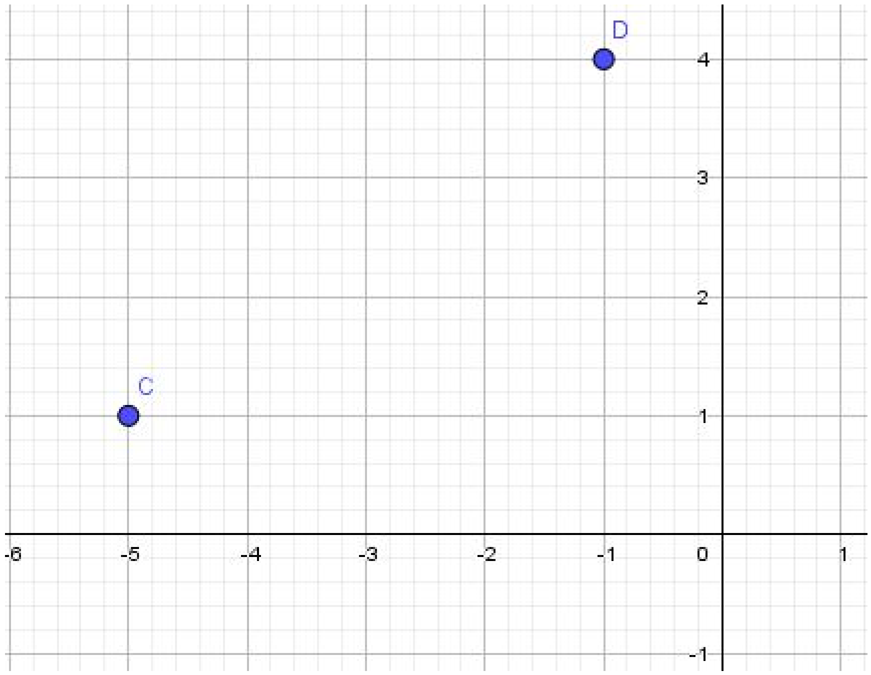
Indique si la zona de residencia de Alex tiene cobertura, y, si tiene, cuál calidad tendrá.

3. Determine la distancia entre los siguientes puntos:

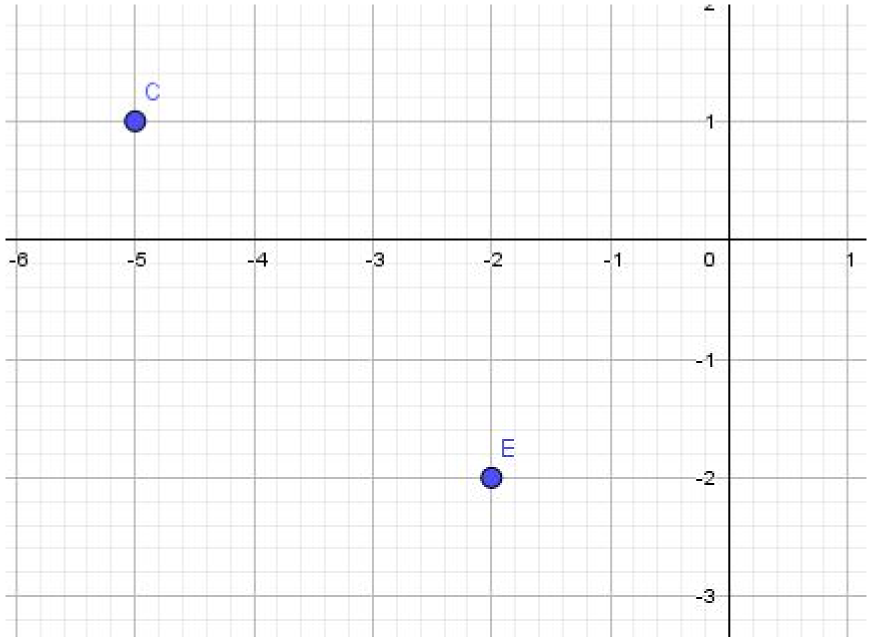
a)



b)



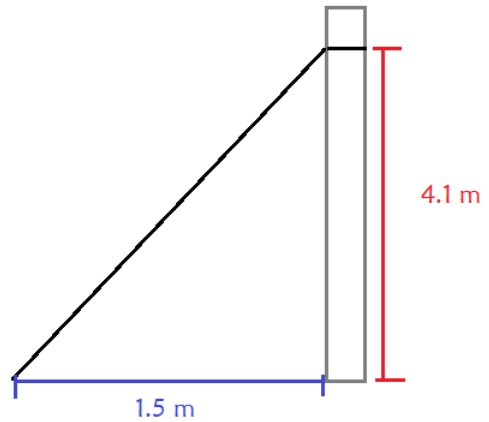
c)



Soluciones

Pitágoras

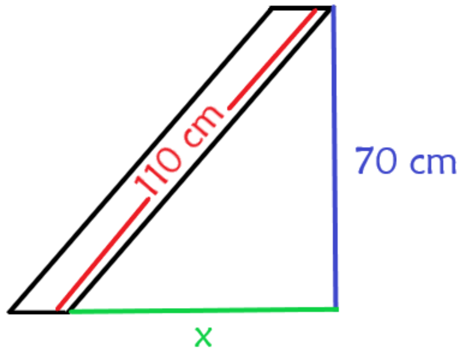
1. Una figura que represente el ejercicio se muestra a continuación:



Utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(4{,}1)^2 + (1{,}5)^2} &= \sqrt{\left(\frac{41}{10}\right)^2 + \left(\frac{15}{10}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1681}{100} + \frac{225}{100}} \\
&= \sqrt{\frac{1906}{100}} \\
&= \frac{\sqrt{1906}}{10} \\
&\approx 4{,}3658m
\end{aligned}
$$

2. Se puede ver gráficamente el problema de la siguiente manera:



Utilizando el Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned}
(110)^2 &= (70)^2 + (x)^2 \\
(110)^2 - (70)^2 &= (x)^2 \\
\sqrt{(110)^2 - (70)^2} &= x \\
\sqrt{(110)^2 - (70)^2} &= x \\
\sqrt{7200} &= x \\
\sqrt{60^2 \cdot 2} &= x \\
60\sqrt{2} &= x \\
84{,}8528 &\approx x
\end{aligned}$$

3. *a*) Las coordenadas de los vértices son: $A(1,5), B(1,2), C(5,5)$.

   - Para encontrar la medida del lado AC:

$$\begin{aligned}
|x_A - x_C| &= |1-5| \\
&= |-4| \\
&= 4
\end{aligned}$$

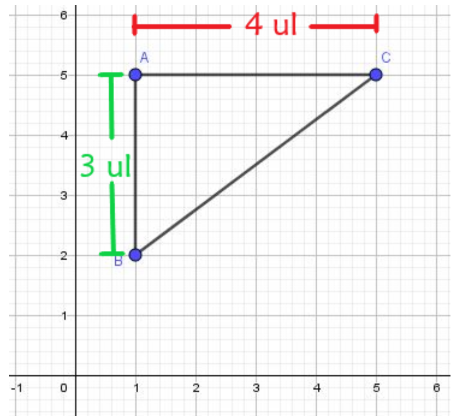
     Por tanto, la medida del lado $AC = 4ul$

   - Para encontrar la medida del lado AB:

$$\begin{aligned}
|y_A - y_B| &= |5-2| \\
&= |3| \\
&= 3
\end{aligned}$$

     Por tanto, la medida del lado $AB = 3ul$

   Así tenemos:



Ahora por Teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

Con esto, el lado restante BC mide $5ul$

b) Las coordenadas de los vértices son: $D(-8,1), E(1,1), F(1,-4)$.

- Para encontrar la medida del lado DE:

$$\begin{aligned} |x_E - x_D| &= |1-(-6)| \\ &= |7| \\ &= 7 \end{aligned}$$

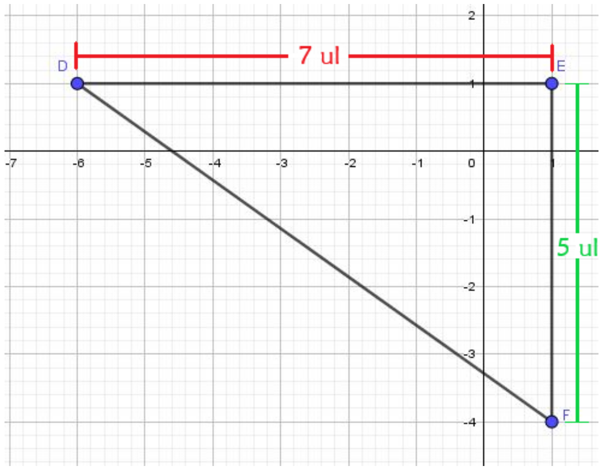
Por tanto, la medida del lado $DE = 7ul$

- Para encontrar la medida del lado EF:

$$\begin{aligned} |y_E - y_F| &= |1-(-4)| \\ &= |5| \\ &= 5 \end{aligned}$$

Por tanto, la medida del lado $EF = 5ul$

Así tenemos:



Ahora por Teorema de Pitágoras:

$$
\begin{aligned}
h &= \sqrt{(7)^2 + (5)^2} \\
&= \sqrt{49 + 25} \\
&= \sqrt{74} \\
&\approx 8{,}60
\end{aligned}
$$

Con esto, el lado restante BC mide aproximadamente $8{,}60ul$

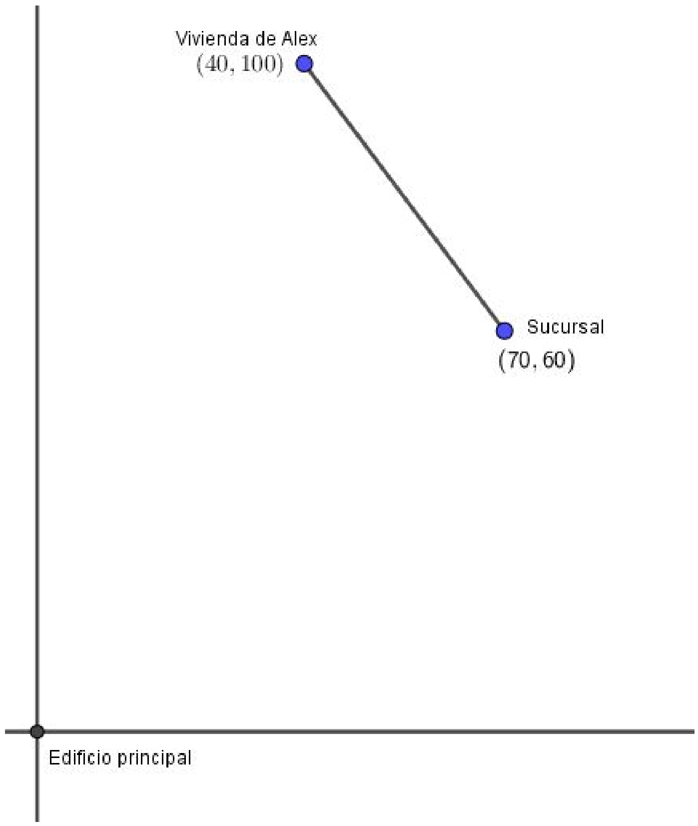
Distancia entre puntos

1. Tomando la posición del submarino como S y la del objeto como O, y, utilizando la fórmula de distancia entre puntos:

$$
\begin{aligned}
d(S,O) &= \sqrt{(0-(-7))^2 + (0-15)^2} \\
&= \sqrt{(7)^2 + (-15)^2} \\
&= \sqrt{49 + 225} \\
&= \sqrt{274} \\
&\approx 16,55
\end{aligned}
$$

El objeto está a $16,55$ km del submarino, aproximadamente.

2. Una figura que represente el ejercicio, se muestra a continuación:



Tomando como $A(40,100)$ y $S(70,60)$, la distancia de la sucursal a la vivienda de Alex es:

$$\begin{aligned} d(A,S) &= \sqrt{(70-40))^2+(60-100)^2} \\ &= \sqrt{(30)^2+(-40)^2} \\ &= \sqrt{900+1600} \\ &= \sqrt{2500} \\ &= 50 \end{aligned}$$

La distancia entre la vivienda de Alex y la sucursal es de 50km, por lo que tendrá servicio de internet con una buena cobertura.

3. *a*) La distancia está dada por

$$
\begin{aligned}
d(A,D) &= \sqrt{(2-(-4)))^2+(3-2)^2} \\
&= \sqrt{(6)^2+(1)^2} \\
&= \sqrt{36+1} \\
&= \sqrt{37} \\
&\approx 6{,}08
\end{aligned}
$$

b) La distancia está dada por

$$
\begin{aligned}
d(C,D) &= \sqrt{(-1-(-5)))^2+(4-1)^2} \\
&= \sqrt{(4)^2+(3)^2} \\
&= \sqrt{16+9} \\
&= \sqrt{25} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

c) La distancia está dada por

$$
\begin{aligned}
d(C,E) &= \sqrt{(-2-(-5)))^2+(-2-(1))^2} \\
&= \sqrt{(3)^2+(-3)^2} \\
&= \sqrt{9+9} \\
&= \sqrt{18} \\
&= 3\sqrt{2} \\
&\approx 4{,}24
\end{aligned}
$$