TEC | Tecnológico de Costa Rica

Fundamentos teóricos de la descomposición en valores singulares de una matriz y sus aplicaciones

Coloquios de Matemática Aplicada

Juan José Fallas-Monge
jfallas@itcr.ac.cr

Viernes 30 de noviembre, 2018
8:00 a.m. - C1-07

Resumen: Dados $m, n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, m, n)$, una descomposición en valores singulares (SVD, por sus siglas en inglés) de A es una factorización de la forma

$$A_{m\times n} = U_{mm} \cdot \Sigma_{m\times n} \cdot V^*_{n\times n},$$

donde U y V son unitarias, V^* denota la matriz conjugada transpuesta de V y Σ es una matriz diagonal generalizada ($\sigma ij = 0$, para $i \neq j$).

La descomposición SVD tiene algunas ventajas sobre la diagonalización estándar de una matriz, la cual se define exclusivamente para matrices cuadradas de rango completo ($B \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n, n)$ es diagonalizable si y solo si existe $P \in \mathrm{Mat}(\mathbb{C}, n, n)$ no singular tal que $P^{-1}BP$ es una matriz diagonal). En particular, la SVD existe para cualquier matriz, independientemente de si es de rango completo o no.

Esta descomposición en sí puede ser conceptualizada como una estrategia para reducir la dimensionalidad de un problema (codificado mediante una matriz de datos numéricos), dado que permite identificar y ordenar las dimensiones en las que los datos presentan la mayor variación. En particular, se mostrará cómo utilizar la SVD para reducir el número de dimensiones en el problema de procesamiento de imágenes.

Palabras claves: Valores singulares, álgebra lineal, procesamiento de imágenes, valores y vectores propios.

Referencias:

[1] C. Ogden and T. Huff., "The singular value decomposition and its application in image processing.". *Lin. Algebra-Maths-45, College of the Redwoods.*, 1997.

[2] G. Strang, "Algebra and its applications". *Thomson*, 4th edition, 2006.

[3] L. Trefethen and D. Bay., "Numerical Lineal Algebra". *SIAM*, 1997.