Instituto Tecnológico de Costa Rica

# *Cálculo*
# *Cuarto examen parcial*

Tiempo máximo disponible: 3 horas

Sábado 11 de noviembre de 2023 | Valor: 45 puntos

**Instrucciones Generales:**

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de desarrollo por lo que deben aparecer, de manera clara y ordenada, todos los procedimientos que justifiquen correctamente la solución y la respuesta de cada uno de los ítems.
3. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración. Si algún procedimiento está desordenado o no es legible, no se calificará.
4. El trabajo durante la prueba debe ser individual. No se permite el uso de apuntes, teléfono celular ni otros dispositivos electrónicos. Ante un intento de fraude la persona aplicadora de la prueba le llamará la atención una única vez y de persistir la conducta le retirará la prueba y se asignará 0 como calificación.
5. El examen debe ser resuelto en los documentos que se brindan para tal efecto. No se permite el uso de hojas adicionales ni el intercambio de materiales (lápiz, borrador, lapiceros, etc).
6. Puede utilizar calculadora científica no programable.

**Nombre completo:** ______________________________

**Código de MATEM:** ______________

**Nombre del Colegio:** ______________________________

**DESARROLLO.** **Valor: 45 puntos.**

INSTRUCCIONES: Resuelva cada uno de los ítems planteados de forma clara, completa y ordenada. Debe indicar todo el procedimiento que justifique la respuesta.

1. Calcule las siguientes integrales:

   *a*) **[5 puntos]** $\displaystyle\int \frac{y}{\sqrt[3]{-3y+2}}dy$

   **Solución:**

$$\int \frac{y}{\sqrt[3]{-3y+2}}dy \qquad u=\sqrt[3]{-3y+2} \Rightarrow u^3=-3y+2 \Rightarrow \frac{u^3-2}{-3}=y \Rightarrow -u^2du=dy$$

$$= \int \frac{\frac{u^3-2}{-3}}{u}\cdot -u^2du$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(u^4-2u\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5}-u^2\right)+C$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\left(\sqrt[3]{-3y+2}\right)^5}{5}-\left(\sqrt[3]{-3y+2}\right)^2\right)+C$$

*b*) **[6 puntos]** $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arcsen}^3 v + 4\operatorname{arcsen} v}{(1+\operatorname{arcsen}^2 v)\sqrt{1-v^2}}\,dv$

**Solución:**

Tomando la sustitución $x = \operatorname{arcsen} v \Rightarrow dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}dv$, se obtiene

$$\int \frac{\operatorname{arcsen}^3 v + 4\operatorname{arcsen} v}{(1+\operatorname{arcsen}^2 v)\sqrt{1-v^2}}\,dv = \int \frac{x^3+4x}{1+x^2}\,dx$$

Se realiza la división de polinomios:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x & x^2+1 \\ \underline{-x^3 \quad - x} & x \\ 3x & \end{array}$$

Entonces retomando la integral se tiene:

$$\int \frac{\operatorname{arcsen}^3 v + 4\operatorname{arcsen} v}{(1+\operatorname{arcsen}^2 v)\sqrt{1-v^2}}\,dv$$

$$= \int \left(x + \frac{3x}{x^2+1}\right) dx \ (*)$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}^2 v + \frac{3}{2}\ln\left(\operatorname{arcsen}^2 v + 1\right) + C$$

Note que en (*) se debe calcular la integral:

$$\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx \qquad \text{Tome } u = x^2+1 \Rightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx$$

$$= \int \frac{3}{2u}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\ln u + C_1$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C_1$$

c) **[5 puntos]** $\int \ln^2 z\,dz$

**Solución:**

Usando el método **por partes** se tiene

$$u = \ln^2 z \quad \Rightarrow \quad du = 2\ln z \cdot \frac{1}{z}dz$$
$$dv = dz \quad \Rightarrow \quad v = z$$

Retomando la integral se obtiene

$$\int \ln^2 z\,dz$$
$$= z\ln^2 z - \int 2\ln z dz$$
$$= z\ln^2 z - 2\int \ln z dz$$

Aplicando nuevamente el método **por partes** se tiene

$$u = \ln z \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{z}dz$$
$$dv = dz \quad \Rightarrow \quad v = z$$

Por lo que la integral se convierte en

$$\int \ln^2 z\,dz$$
$$= z\ln^2 z - 2\int \ln z dz$$
$$= z\ln^2 z - 2\left(z\ln z - \int z \cdot \frac{1}{z}dz\right)$$
$$= z\ln^2 z - 2z\ln z + 2\int dz$$
$$= z\ln^2 z - 2z\ln z + 2z + C$$

*d*) **[4 puntos]** $\int \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\beta}{4}\right)\cos^2\left(\frac{3\beta}{4}\right)d\beta$

**Solución:**

$$\int \operatorname{sen}^2\left(\frac{3\beta}{4}\right)\cos^2\left(\frac{3\beta}{4}\right)d\beta$$

$$= \int \frac{1-\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)}{2}\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{3\beta}{2}\right)}{2}d\beta$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-\cos^2\left(\frac{3\beta}{2}\right)\right)d\beta$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1+\cos(3\beta)}{2}\right)d\beta$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos(3\beta)}{2}\right)d\beta = \frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\operatorname{sen}(3\beta)}{6}\right)+C$$

*e*) **[4 puntos]** $\int \sec^3(3\theta)\tan^3(3\theta)\,d\theta$

**Solución:**

$$\int \sec^3(3\theta)\tan^3(3\theta)\,d\theta$$

$$= \int \sec^2(3\theta)\tan^2(3\theta)\cdot\sec(3\theta)\tan(3\theta)\,d\theta$$

$$= \int \sec^2(3\theta)\left[\sec^2(3\theta)-1\right]\cdot\sec(3\theta)\tan(3\theta)\,d\theta$$

Tomando $u=\sec(3\theta) \Rightarrow \frac{1}{3}du = \sec(3\theta)\tan(3\theta)\,d\theta$

La integral anterior se convierte en

$$\int \sec^3(3\theta)\tan^3(3\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int u^2\left(u^2-1\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(u^4-u^2\right)du$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right)+C$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\sec^5(3\theta)}{5}-\frac{\sec^3(3\theta)}{3}\right)+C$$

*f*) **[6 puntos]** $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x}}dx$

**Solución:**

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x}}dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x\textcolor{red}{+4-4}}}dx$$

$$= \int \frac{x}{\sqrt{(x+2)^2-4}}dx$$

Tome $x+2 = 2\sec\theta \Rightarrow dx = 2\sec\theta\tan\theta d\theta$

$$= \int \frac{(2\sec\theta-2)\cdot 2\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta-4}}d\theta$$

$$= \int \frac{4(\sec\theta-1)\sec\theta\tan\theta}{2\sqrt{\sec^2\theta-1}}d\theta$$

$$= 2\int \frac{(\sec\theta-1)\sec\theta\tan\theta}{\tan\theta}d\theta$$

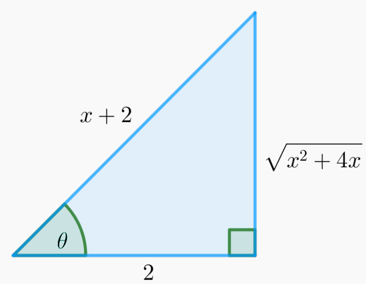
$$= 2\int (\sec\theta-1)\sec\theta d\theta$$

$$= 2\int \left(\sec^2\theta-\sec\theta\right)d\theta$$

$$= 2(\tan\theta - \ln|\sec\theta+\tan\theta|) + C$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{x^2+4x}}{2} - \ln\left|\frac{x+2}{2}+\frac{\sqrt{x^2+4x}}{2}\right|\right) + C$$

Note que $x+2 = 2\sec\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2}{x+2}$



2. Considere la integral $\int \frac{2y^2-1}{y^4+3y^2}dy$

   *a*) [**2 puntos**] Represente, por medio del proceso de descomposición en fracciones parciales, la expresión $\frac{2y^2-1}{y^4+3y^2}$ como sumas o restas de fracciones más simples. (**No es necesario que determine el valor de las constantes**)

   **Solución:**

   Al descomponer la expresión mediante fracciones parciales se obtiene:

$$\frac{2y^2-1}{y^4+3y^2} = \frac{2y^2-1}{y^2\left(y^2+3\right)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y^2} + \frac{Cy+D}{y^2+3}$$

   *b*) [**3 puntos**] Sabiendo que

$$\int \frac{2y^2-1}{y^4+3y^2}dy = \int \left(\frac{7}{3\left(y^2+3\right)} - \frac{1}{3y^2}\right)dy$$

   Calcule dicha integral.

   **Solución:**

$$\begin{aligned}
\int \frac{2y^2-1}{y^4+3y^2}dy &= \int \left(\frac{7}{3\left(y^2+3\right)} - \frac{1}{3y^2}\right)dy \\
&= \frac{7}{3}\int \frac{1}{y^2+3}dy - \frac{1}{3}\int y^{-2}dy \\
&= \frac{7}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}y^{-1} + C
\end{aligned}$$

3. Determine si las siguientes integrales impropias convergen o divergen. En caso de ser convergente indique su valor.

   *a*) **[6 puntos]** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

   **Solución:**

   Primero se calculará la integral indefinida:

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \qquad\qquad \text{Tome } u = e^x \Rightarrow du = e^x dx$$
$$= \int \frac{1}{1+u^2}du$$
$$= \arctan(u) + C$$
$$= \arctan(e^x) + C$$

   Ahora retomando la integral impropia se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$
$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$
$$= \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \lim_{c\to+\infty} \int_{0}^{c} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$
$$= \lim_{b\to-\infty} \arctan(e^x)\Big|_b^0 + \lim_{c\to+\infty} \arctan(e^x)\Big|_0^c$$
$$= \lim_{b\to-\infty} \left[\arctan(1) - \arctan\left(e^b\right)\right] + \lim_{c\to+\infty} \left[\arctan(c) - \arctan(1)\right]$$
$$= \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\pi}{2}$$

   $\therefore$ La integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$ es convergente y converge a $\dfrac{\pi}{2}$.

*b*) **[4 puntos]** $\displaystyle\int_1^2 \frac{y}{y^2-1}dy$

**Solución:**

Primero se calculará la integral indefinida:

$$\int_1^2 \frac{y}{y^2-1}dy \qquad \text{Tome } u = y^2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{2}du = ydy$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln |u| + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left|y^2 - 1\right| + C$$

Ahora retomando la integral impropia se tiene:

$$\int_1^2 \frac{y}{y^2-1}dy$$

$$= \lim_{b \to 1^+} \int_b^2 \frac{y}{y^2-1}dy$$

$$= \lim_{b \to 1^+} \frac{1}{2} \ln \left|y^2 - 1\right| \Big|_b^2$$

$$= \lim_{b \to 1^+} \left[\frac{1}{2} \ln (3) - \frac{1}{2} \ln \left|b^2 - 1\right|\right]$$

$$= +\infty$$

$\therefore$ La integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{y}{y^2-1}dy$ diverge.