Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cálculo I
Primer examen parcial

Tiempo máximo disponible: 3 horas

Sábado 22 de abril de 2023

Valor: 50 puntos

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta prueba consta de dos partes: Respuesta Corta (8 puntos) y Desarrollo (42 puntos).
3. En la parte de desarrollo deben aparecer, de manera clara y ordenada, todos los procedimientos que justifiquen correctamente la solución y la respuesta de cada uno de los ítems.
4. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
5. El trabajo durante la prueba debe ser individual. No se permite el uso de apuntes, teléfono celular ni otros dispositivos electrónicos. Ante un intento de fraude la persona aplicadora de la prueba le llamará la atención una única vez y de persistir la conducta le retirará la prueba y se asignará 0 como calificación.
6. El examen debe ser resuelto en los documentos que se brindan para tal efecto. No se permite el uso de hojas adicionales.
7. Puede utilizar calculadora científica no programable.

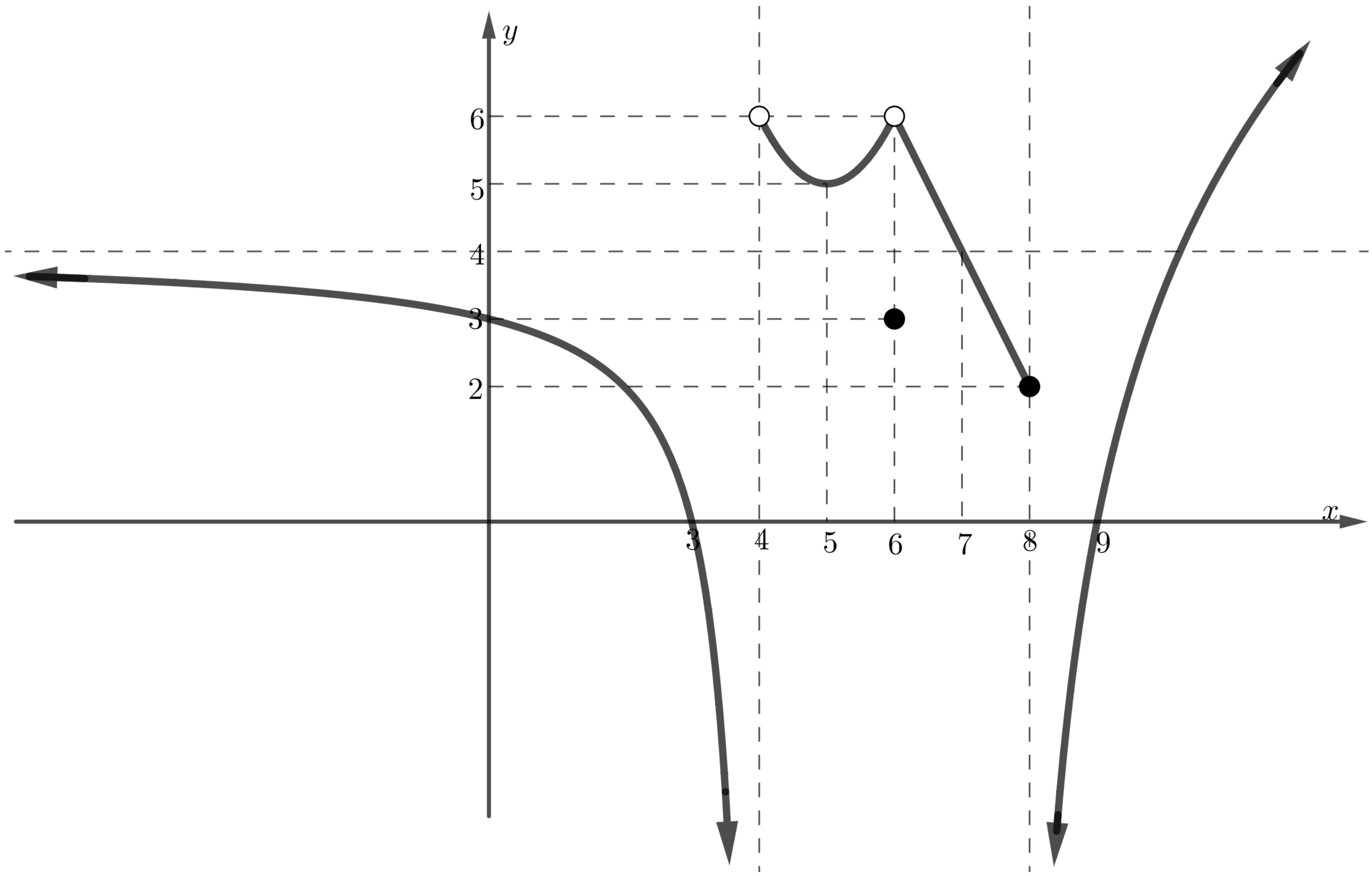
Nombre completo: ____________________

Código de MATEM: ____________________

Nombre del colegio: ____________________

I PARTE: RESPUESTA CORTA. **Valor: 8 puntos.**

Considere la representación gráfica de la función $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R}$



Consteste en el espacio correspondiente lo que se le solicita:

1. [**2 puntos**] Determine si hay un número real k para el cual $\lim\limits_{x \to k^+} f(x)$ existe pero $\lim\limits_{x \to k^-} f(x)$ no existe. Justifique su respuesta.

   Solución:

   Note que para $k = 4$ se cumple que

   - $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 6$, es decir, $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$ existe
   - $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$, es decir, $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x)$ no existe

   Por lo que, existe $k = 4$.

2. [**1 punto**] Hallar el valor de $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{f(x)}$.

   Solución:

   $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{3}$

3. **[2 puntos]** Justifique si la función f es continua en $x = 6$. En caso de no ser continua clasifique la discontinuidad como evitable o inevitable.

Solución:

Note que la función en $x = 6$ no es continua, ya que se presenta una discontinuidad evitable porque $\lim\limits_{x \to 6} f(x) = 6$, pero $f(6) = 3$ por lo que $\lim\limits_{x \to 6} f(x) \neq f(6)$

4. **[3 puntos]** Indique cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la función f. Justifique, usando límites, la respuesta.

Solución:

Ecuación de una asíntota vertical es $x = 4$, ya que $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$

Ecuación de la otra asíntota vertical es $x = 8$, ya que $\lim\limits_{x \to 8^+} f(x) = -\infty$

Ecuación de la asíntota horizontal es $y = 4$, ya que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$

II PARTE. DESARROLLO. **Valor: 42 puntos.**

INSTRUCCIONES: Resuelva cada uno de los ítems planteados de forma clara y ordenada. Debe indicar todo el procedimiento que justifique la respuesta.

1. Calcule, si existen, los siguientes límites. No puede utilizar la regla de L'Hôpital.

   a) **[4 puntos]** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{x}+1}{x-\sqrt[5]{x^3}}$

   Solución:

   $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{x}+1}{x-\sqrt[5]{x^3}} \qquad \rightsquigarrow \text{F.I: } \tfrac{0}{0}$$

   Tome la sustitución $u=\sqrt[5]{x}$ entonces $u^5=x$ y $u\to 1$, así se tiene que

   $$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{x}+1}{x-\sqrt[5]{x^3}}$$

   $$=\lim_{u\to 1} \frac{u^2-2u+1}{u^5-u^3}$$

   $$=\lim_{u\to 1} \frac{(u-1)^2}{u^3\left(u^2-1\right)}$$

   $$=\lim_{u\to 1} \frac{(u-1)^2}{u^3\left(u-1\right)\left(u+1\right)}$$

   $$=\lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^3\left(u+1\right)}$$

   $$=0$$

   Finalmente, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[5]{x^2}-2\sqrt[5]{x}+1}{x-\sqrt[5]{x^3}}=0$

b) **[3 puntos]** $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+cz}-2}{z}$, con $c \neq 0$ una constante real.

Solución:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sqrt[3]{8+cz}-2}{z} \qquad \rightsquigarrow \text{F.I: } \tfrac{0}{0}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{8+cz}-2\right)\left(\sqrt[3]{(8+cz)^2}+2\sqrt[3]{8+cz}+4\right)}{z\left(\sqrt[3]{(8+cz)^2}+2\sqrt[3]{8+cz}+4\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{8+cz-8}{z\left(\sqrt[3]{(8+cz)^2}+2\sqrt[3]{8+cz}+4\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{cz}{z\left(\sqrt[3]{(8+cz)^2}+2\sqrt[3]{8+cz}+4\right)}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{c}{\sqrt[3]{(8+cz)^2}+2\sqrt[3]{8+cz}+4}$$

$$= \frac{c}{12}$$

Finalmente, $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+cz}-2}{z} = \dfrac{c}{12}$

c) **[3 puntos]** $\lim\limits_{y\to 5} \dfrac{-y^2+7y-10}{|2-3y|-13}$

Solución:

Primero note que como $y \to 5$ entonces $|2-3y| = 3y-2$
Luego, se tiene que

$$\lim_{y\to 5} \frac{-y^2+7y-10}{|2-3y|-13} \qquad \rightsquigarrow \text{F.I: } \tfrac{0}{0}$$

$$= \lim_{y\to 5} \frac{-y^2+7y-10}{3y-2-13}$$

$$= \lim_{y\to 5} \frac{(-y+5)(y-2)}{3y-15}$$

$$= \lim_{y\to 5} \frac{-(y-5)(y-2)}{3(y-5)}$$

$$= \lim_{y\to 5} \frac{-(y-2)}{3}$$

$$= -1$$

Finalmente, $\lim\limits_{y\to 5} \dfrac{-y^2+7y-10}{|2-3y|-13} = -1$

d) **[5 puntos]** $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$

Solución:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}} \qquad \rightsquigarrow \text{F.I: } \tfrac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{\pi^2-x^2}{\pi^2}}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\pi^2 \operatorname{sen} x}{\pi^2 - x^2}$$

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{\pi^2 \operatorname{sen} x}{(\pi - x)(\pi + x)}$$

Tomando la sustitución $w = \pi - x$ se tiene que $w \to 0$ y $x = \pi - w$, por lo que

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\pi^2 \operatorname{sen} x}{(\pi - x)(\pi + x)}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\pi^2 \operatorname{sen}\,(\pi - w)}{(\pi - \pi + w)(\pi + \pi - w)}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\pi^2 (\operatorname{sen} \pi \cdot \cos w - \cos \pi \cdot \operatorname{sen} w)}{w(2\pi - w)}$$

$$= \lim_{w\to 0} \frac{\pi^2 \operatorname{sen} w}{w(2\pi - w)}$$

$$= \lim_{w\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} w}{w} \cdot \frac{\pi^2}{2\pi - w} \right)$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Finalmente, $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}} = \frac{\pi}{2}$

e) **[2 puntos]** $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{\pi 3^y + 1}{4 - 3^{y+1}}$

Solución:

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{\pi 3^y + 1}{4 - 3^{y+1}} \qquad \rightsquigarrow \text{F.I: } \tfrac{+\infty}{-\infty}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{3^y\left(\pi + \dfrac{1}{3^y}\right)}{3^y\left(\dfrac{4}{3^y} - 3\right)}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \frac{\pi + \dfrac{1}{3^y}}{\dfrac{4}{3^y} - 3}$$

$$= -\frac{\pi}{3}$$

Finalmente, $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{\pi 3^y + 1}{4 - 3^{y+1}} = -\frac{\pi}{3}$

f) **[4 puntos]** $\lim\limits_{y\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{y^3+y}-\sqrt{y^2-3y-1}}{|y|}$

Solución:

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{y^3+y}-\sqrt{y^2-3y-1}}{|y|} \qquad \rightsquigarrow \text{F.I: } \tfrac{-\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{y\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{y^3\left(1+\frac{1}{y^2}\right)}-\sqrt{y^2\left(1-\frac{3}{y}-\frac{1}{y^2}\right)}}{-y}$$

$$= \lim_{y\to-\infty} \frac{y\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^2}}-|y|\sqrt{1-\frac{3}{y}-\frac{1}{y^2}}}{-y}$$

$$= \lim_{y\to-\infty} \frac{y\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^2}}+y\sqrt{1-\frac{3}{y}-\frac{1}{y^2}}}{-y}$$

$$= \lim_{y\to-\infty} \frac{y\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{y}-\frac{1}{y^2}}\right)}{-y}$$

$$= \lim_{y\to-\infty} -\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{y}-\frac{1}{y^2}}\right)$$

$$= -2$$

Finalmente, $\lim\limits_{y\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{y^3+y}-\sqrt{y^2-3y-1}}{|y|} = -2$

2. **[7 puntos]** Considere la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{-x^2+5x-4}$ definida en su dominio máximo.

Analice la continuidad de f, indicando los intervalos donde es continua y los puntos de discontinuidad. Además, clasifique las discontinuidades como evitables o inevitables.

Solución:

Note que la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{-x^2+5x-4}$ está formada por el cociente de funciones continuas en sus respectivos dominios, por lo que f es una función continua en su dominio D_f, es decir, en $D_f = [0, +\infty[- \{1, 4\}$.

Ahora analicemos las discontinuidades en $x = 1$ y $x = 4$:

- **Para** $x = 1$

  $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-2}{-x^2+5x-4} \qquad \rightsquigarrow \text{Forma: } \tfrac{-1}{0}$$

  Así realizando límites laterales se tiene:

  $$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x}-2}{-x^2+5x-4} = +\infty \qquad \rightsquigarrow \text{Forma: } \tfrac{-1}{0^-}$$

  $$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}-2}{-x^2+5x-4} = -\infty \qquad \rightsquigarrow \text{Forma: } \tfrac{-1}{0^+}$$

  Por lo que en $x = 1$ se presenta una discontinuidad inevitable.

- **Para** $x = 4$

  $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{-x^2+5x-4} \qquad \rightsquigarrow \text{F.I: } \tfrac{0}{0}$$

  $$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(-x^2+5x-4\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

  $$= \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(-x+4)(x-1)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

  $$= \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(-x+1)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

  $$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{(-x+1)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

  $$= -\frac{1}{12}$$

  Por lo que en $x = 1$ se presenta una discontinuidad evitable.

3. Determine la derivada de la función cuyo criterio se indica en cada caso. No es necesario que simplifique.

   a) **[4 puntos]** $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{1 - e^{x^2+3x}}$

   Solución:

$$f'(x) = \frac{(\cos(\pi x))' \cdot \left(1 - e^{x^2+3x}\right) - \cos(\pi x) \cdot \left(1 - e^{x^2+3x}\right)'}{\left(1 - e^{x^2+3x}\right)^2}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}(\pi x) \cdot (\pi x)' \cdot \left(1 - e^{x^2+3x}\right) - \cos(\pi x) \cdot -e^{x^2+3x} \cdot (x^2+3x)'}{\left(1 - e^{x^2+3x}\right)^2}$$

$$= \frac{-\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x) \cdot \left(1 - e^{x^2+3x}\right) + (2x+3) \cdot \cos(\pi x) \cdot e^{x^2+3x}}{\left(1 - e^{x^2+3x}\right)^2}$$

b) **[3 puntos]** $g(x) = \sqrt{\tan(-2x+1)} - 2^{3x}$

Solución:

$$g'(x) = \left(\sqrt{\tan(-2x+1)}\right)' - \left(2^{3x}\right)'$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan(-2x+1)\right)^{-1/2}\left(\tan(-2x+1)\right)' - 2^{3x}\cdot\ln 2\cdot(3x)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\tan(-2x+1)}}\cdot\sec^2(-2x+1)\cdot(-2x+1)' - 2^{3x}\cdot\ln 2\cdot 3$$

$$= -\frac{\sec^2(-2x+1)}{\sqrt{\tan(-2x+1)}} - 3\ln 2\cdot 2^{3x}$$

4. **[3 puntos]** Considere la función f, definida por $f(x) = x - \text{sen} x - \cos x$ en $[0, \pi]$. Pruebe, usando el teorema de los valores intermedios, que existe al menos un número real c tal que $f(c) = 0$.

Solución:

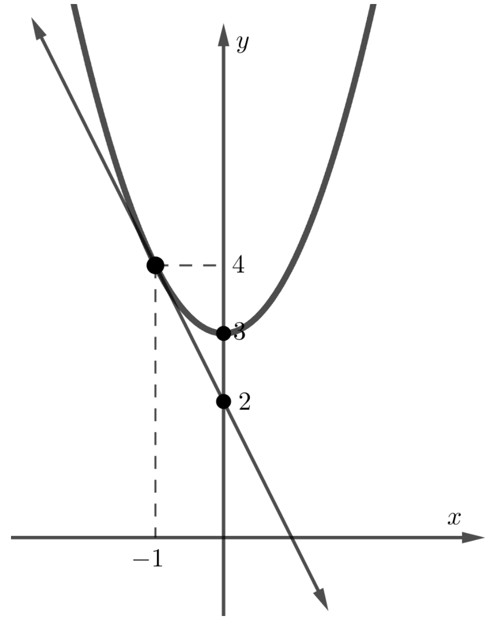
Note que la función $f(x) = x - \operatorname{sen} x - \cos x$ es una función continua en $[0, \pi]$ ya que es la suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Particulamente, al determinar

$$\begin{array}{l} f(\pi) = \pi + 1 \\ f(0) = -1 \end{array}$$

Se tiene que $f(\pi) \neq f(0)$ y además, $0 \in \,]-1, \pi + 1[$ entonces por el teorema de los valores intermedios, existe al menos un c real, $c \in \,]0, \pi[$ tal que $f(c) = 0$.

5. **[4 puntos]** Considere la gráfica de la función f y la recta tangente a esta en el punto $(-1, 4)$.



Determine $h'(-1)$, si $h(x) = x \cdot f(x) + x^2$.

Solución:

Al calcular $h'(x)$ se obtiene

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(x \cdot f(x) + x^2\right)' \\ &= (x \cdot f(x))' + 2x \\ &= f(x) + x \cdot f'(x) + 2x \end{aligned} \tag{1}$$

Luego, $h'(-1)$ es

$$h'(-1) = f(-1) + -1 \cdot f'(-1) - 2 \tag{2}$$

De acuerdo con la gráfica se tiene que $f(-1) = 4$

Además, $f'(-1)$ corresponde a la pendiente de la recta tangente de la función f en el punto $(-1, 4)$, en este caso la recta tangente pasa también por el punto $(0, 2)$, entonces la pendiente de la recta corresponde a

$$f'(-1) = \frac{4-2}{-1-0} = -2$$

Así, se tiene que

$$h'(-1) = 4 + -1 \cdot -2 - 2 = 4 \tag{3}$$