Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cálculo I
Segundo examen parcial

Tiempo máximo disponible: 3 horas

Sábado 17 de junio de 2023 — Valor: 55 puntos

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer, de manera clara y ordenada, todos los procedimientos que justifiquen correctamente la solución y la respuesta de cada uno de los enunciados.
3. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración. Si algún procedimiento está desordenado o ininteligible, no se calificará.
4. El trabajo durante la prueba debe ser individual. No se permite el uso de apuntes, teléfono celular ni otros dispositivos electrónicos. Ante un intento de fraude la persona aplicadora de la prueba le llamará la atención una única vez y de persistir la conducta le retirará la prueba y se asignará 0 como calificación.
5. El examen debe ser resuelto en los documentos que se brindan para tal efecto. No se permite el uso de hojas adicionales.
6. Puede utilizar calculadora científica no programable.

Nombre completo: ____

Código de MATEM: ____________________

Nombre del colegio: ____

DESARROLLO. **Valor: 55 puntos.**

INSTRUCCIONES: Resuelva cada uno de los ítems planteados de forma clara, completa y ordenada. Debe indicar todo el procedimiento que justifique la respuesta.

1. [**4 puntos**] Si $y = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt[3]{\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)}\right)$, determine $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución:

$$y' = \left(\operatorname{arcsen}\left(\sqrt[3]{\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)}\right)\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)}\right)^2}}\left(\sqrt[3]{\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)}\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)}\right)^2}}\cdot\frac{1}{3}\left(\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)\right)^{\frac{-2}{3}}\left(\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)\right)'$$

$$= \frac{\left(\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)\right)^{\frac{-2}{3}}}{3\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\left(e^{-x}+\ln 2\right)\ln 10}\left(e^{-x}+\ln 2\right)'$$

$$= \frac{\left(\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)\right)^{\frac{-2}{3}}}{3\ln 10\left(e^{-x}+\ln 2\right)\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{\log\left(e^{-x}+\ln 2\right)}\right)^2}}\cdot -e^{-x}$$

2. **[4 puntos]** Considere la curva C de ecuación $y^2 = \ln(x+y)$. Determine la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(1,0)$.

Solución:

Primero se debe derivar de forma implícita la curva:

$$
\begin{aligned}
& (y^2)' = (\ln(x+y))' \\
\Rightarrow\ & 2yy' = \frac{1}{x+y}(x+y)' \\
\Rightarrow\ & 2yy' = \frac{1}{x+y}(1+y') \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Ahora, como el punto $(1,0)$ es un punto de la curva C y la recta tangente pasa por ahí, se tiene que al sustituir el punto en la ecuación (1) se obtiene:

$$
\begin{aligned}
& 2 \cdot 0 \cdot y' = \frac{1}{1+0}(1+y') \\
\Rightarrow\ & 0 = 1 + y' \\
\Rightarrow\ & -1 = y'
\end{aligned}
$$

Luego, la ecuación de la recta tangente buscada corresponde a:

$y - 0 = -(x-1) \Rightarrow y = -x + 1$

3. **[4 puntos]** Verifique que la función f de ecuación $f(x) = (1+x)e^x$, satisface la igualdad

$$f'''(x) - 2f''(x) + f'(x) = 0.$$

Solución:

Se deben determinar las derivadas $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, esto es:

$f'(x) = e^x + (1+x)e^x$

$\Rightarrow f''(x) = e^x + e^x + (1+x)e^x = 2e^x + (1+x)e^x$

$\Rightarrow f'''(x) = 2e^x + e^x + (1+x)e^x = 3e^x + (1+x)e^x$

Luego,

$$\begin{aligned} f'''(x) - 2f''(x) + f'(x) &= 3e^x + (1+x)e^x - 2\left(2e^x + (1+x)e^x\right) + e^x + (1+x)e^x \\ &= 3e^x + (1+x)e^x - 4e^x - 2(1+x)e^x + e^x + (1+x)e^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. **[3 puntos]** Si $y = x^{\text{sen}x}$ con $x > 0$, determine $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución:

Se debe realizar derivación logarítmica, para esto es necesario reescribir la expresión

$$y = x^{\text{sen}x}$$

Como,

$$\ln y = \ln x^{\text{sen}x} \Longrightarrow \ln y = \text{sen}x \cdot \ln x$$

Ahora se debe derivar de forma implícita respecto a x:

$$\begin{aligned}
\ln y = \text{sen}x \cdot \ln x \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \ln x + \text{sen}x \cdot \frac{1}{x} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\text{sen}x}{x} \right) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^{\text{sen}x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\text{sen}x}{x} \right)
\end{aligned}$$

5. Considere la función f definida por $f(x) = -x^3 + 4x + 3$ en $[a, 0]$, con $a < 0$.

   a) **[1 punto]** Enuncie el Teorema de Rolle.

   Solución:

   > **Teorema de Rolle:** Si f es una función continua en $[a, b]$, y derivable en $]a, b[$ y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

   b) **[4 puntos]** Determine el valor de a para el cual la función f satisface las hipótesis del Teorema de Rolle y determine el valor de $c \in]a, 0[$ donde se garantiza este teorema.

   Solución:

   Note que la función dada f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ ya que corresponde a una función polinomial, particularmente, es continua en $[a, 0]$ y derivable en $]a, 0[$, con $a < 0$.
   Además, para cumplir el Teorema de Rolle se requiere que $f(0) = f(a)$, esto es

$$\begin{aligned} f(0) = f(a) &\implies 3 = -a^3 + 4a + 3 \\ &\implies 0 = -a^3 + 4a \\ &\implies 0 = a(4 - a^2) \\ &\implies a = 0 \quad o \quad a = \pm 2 \end{aligned}$$

   Pero, como $a < 0$ se tiene que las hipótesis del teorema se cumplen para $a = -2$, entonces existe $c \in]-2, 0[$ tal que

$$f'(c) = 0 \quad \text{con} \quad f'(x) = -3x^2 + 4$$

$$\begin{aligned} -3c^2 + 4 = 0 &\implies c^2 = \frac{4}{3} \\ &\implies c = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \\ &\implies c = -\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{ya que } c \in]-2, 0[\end{aligned}$$

6. Calcule, si existen, los siguientes límites.

   a) **[5 puntos]** $\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{z+1}{z^2e^z}\right)$

   Solución:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{z+1}{z^2e^z}\right) \quad \rightsquigarrow \text{F.I: } \infty-\infty$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z-z-1}{z^2e^z} \quad \rightsquigarrow \text{F.I: } \frac{0}{0}$$

$$\overset{L'H}{=}\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{2ze^z+z^2e^z} \quad \rightsquigarrow \text{F.I: } \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{e^z}{2e^z+2ze^z+2ze^z+z^2e^z}$$

$$=\frac{1}{2}$$

b) **[7 puntos]** $\lim\limits_{w\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos w)^{w-\frac{\pi}{2}}$

Solución:

$$\lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos w)^{w-\frac{\pi}{2}} \quad \rightsquigarrow \text{F.I: } 0^0$$

$$= \lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\ln(\cos w)^{w-\frac{\pi}{2}}}$$

$$= \lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\left(w-\frac{\pi}{2}\right)\ln(\cos w)}$$

Se analizará el límite $\lim\limits_{w\to\frac{\pi}{2}^-} \left(w-\dfrac{\pi}{2}\right)\ln(\cos w)$:

$$\lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} \left(w-\frac{\pi}{2}\right)\ln(\cos w) \quad \rightsquigarrow \text{F.I: } 0\cdot\infty$$

$$= \lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\cos w)}{\left(w-\frac{\pi}{2}\right)^{-1}} \quad \rightsquigarrow \text{F.I: } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos w}\cdot -\operatorname{sen} w}{-\left(w-\frac{\pi}{2}\right)^{-2}}$$

$$= \lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{sen} w\left(w-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos w} \quad \rightsquigarrow \text{F.I: } \frac{0}{0}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos w\left(w-\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\operatorname{sen} w\left(w-\frac{\pi}{2}\right)}{-\operatorname{sen} w}$$

$$= 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} (\cos w)^{w-\frac{\pi}{2}} = \lim_{w\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\left(w-\frac{\pi}{2}\right)\ln(\cos w)} = e^0 = 1$$

7. [**4 puntos**] Considere la función f definida por $f(x) = x^4 + ax + b$, con a y b constantes reales no nulas. Determine los valores de a y b tales que $f(1) = 3$ sea un valor extremo de f en $[0, 2]$. Indique si este valor corresponde a un máximo o un mínimo.

Solución:

Como se cumple que

$$\begin{aligned} f(1) = 3 &\Longrightarrow 1 + a + b = 3 \\ &\Longrightarrow a + b = 2 \qquad (*) \end{aligned}$$

Además, como en $x = 1$ se alcanza un valor extremo de la función f se cumple que

$$f'(1) = 0 \qquad \text{con} \qquad f'(x) = 4x^3 + a$$

Es decir,

$$4 + a = 0 \Longrightarrow a = -4 \qquad (**)$$

Sustituyendo (**) en (*) se obtiene

$$-4 + b = 2 \Longrightarrow b = 6$$

Así, la función que cumple las condiciones tiene por criterio $f(x) = x^4 - 4x + 6$, y para clasificar el valor extremo se tiene:

$f(0) = 6$

$f(1) = 3 \longrightarrow$ es un valor mínimo

$f(2) = 14$

8. Considere la función $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x + e^{\frac{-2}{x}}$

   a) **[2 puntos]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{x}$

   Solución:

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + e^{\frac{-2}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{1}{xe^{\frac{2}{x}}} = 3$$

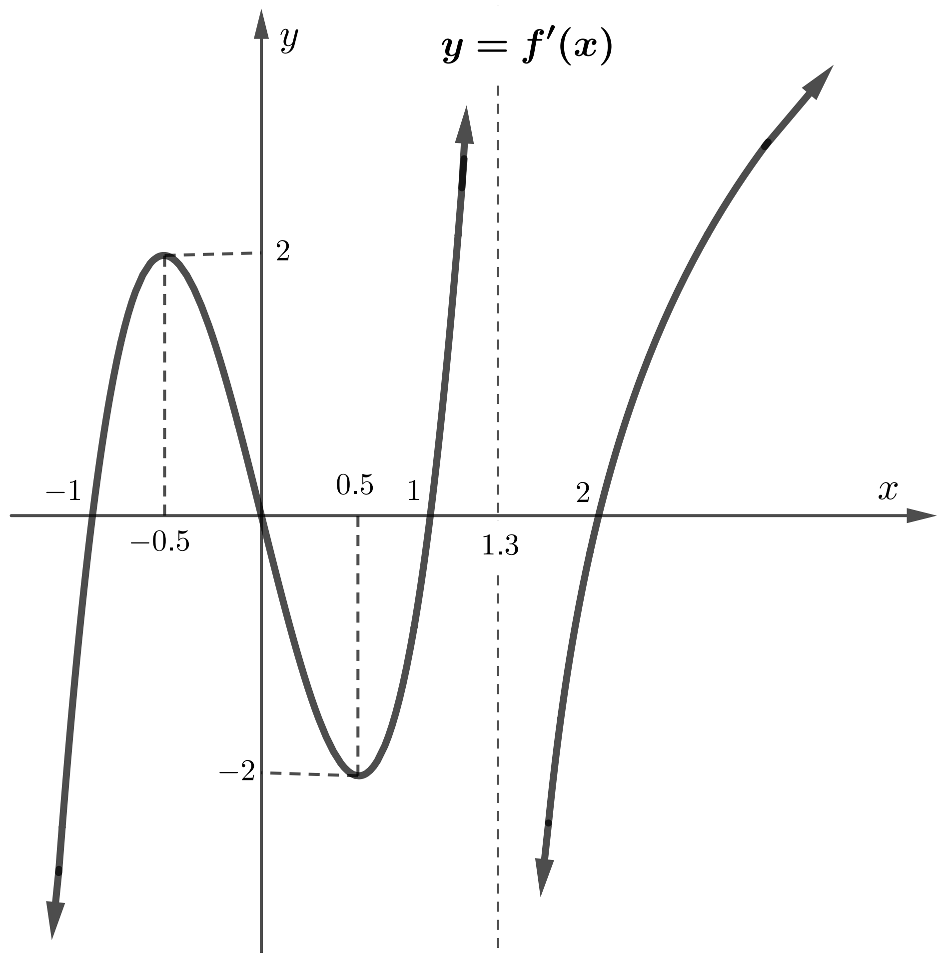
   b) **[2 puntos]** Justifique si la gráfica de la función g tiene o no asíntota oblicua en $+\infty$

   Solución:

   $$\lim_{x\to+\infty} (g(x) - 3x) = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{-2}{x}} = 1$$

   Como el límite anterior existe, se concluye que la función g presenta una asíntota oblicua en $+\infty$

9. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y la gráfica adjunta correspondiente a la **primera derivada** de esta función:



De acuerdo con la gráfica anterior, determine:

a) **[1 punto]** Los valores de x donde f alcanza extremos relativos (indique si son máximos o mínimos relativos).

Solución:

- En $x = -1$, $x = 1$ y $x = 2$ se alcanzan mínimos relativos
- En $x = 0$ y $x = 1.3$ se alcanzan máximos relativos

b) **[2 puntos]** Los intervalos donde f es decreciente. Justifique su respuesta.

Solución:

Para determinar dónde la función f es decreciente se debe analizar dónde la función f' es negativa.
Es decir, f es decreciente en los intervalos: $]-\infty, -1[$, $]0, 1[$ y $]1.3, 2[$

c) **[2 puntos]** Los intervalos donde f es cóncava hacia arriba. Justifique su respuesta.

Solución:
Para que la función f sea cóncava hacia arriba se requiere que f'' sea positiva; por otro lado como f'' es la primera derivada de la función f' es suficiente para analizar el signo de la segunda derivada de f analizar cuándo f' es creciente.

Es decir, la función f es cóncava hacia arriba en $]-\infty, -0.5[$, $]0.5, 1.3[$ y $]1.3, +\infty[$

d) **[1 punto]** Los valores de x donde f posee puntos de inflexión.

Solución: Tiene puntos de inflexión en $x = -0.5$ y $x = 0.5$

10. **[4 puntos]** A continuación se presenta un cuadro de variación con información acerca de la primera y segunda derivada de una función f, $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$:

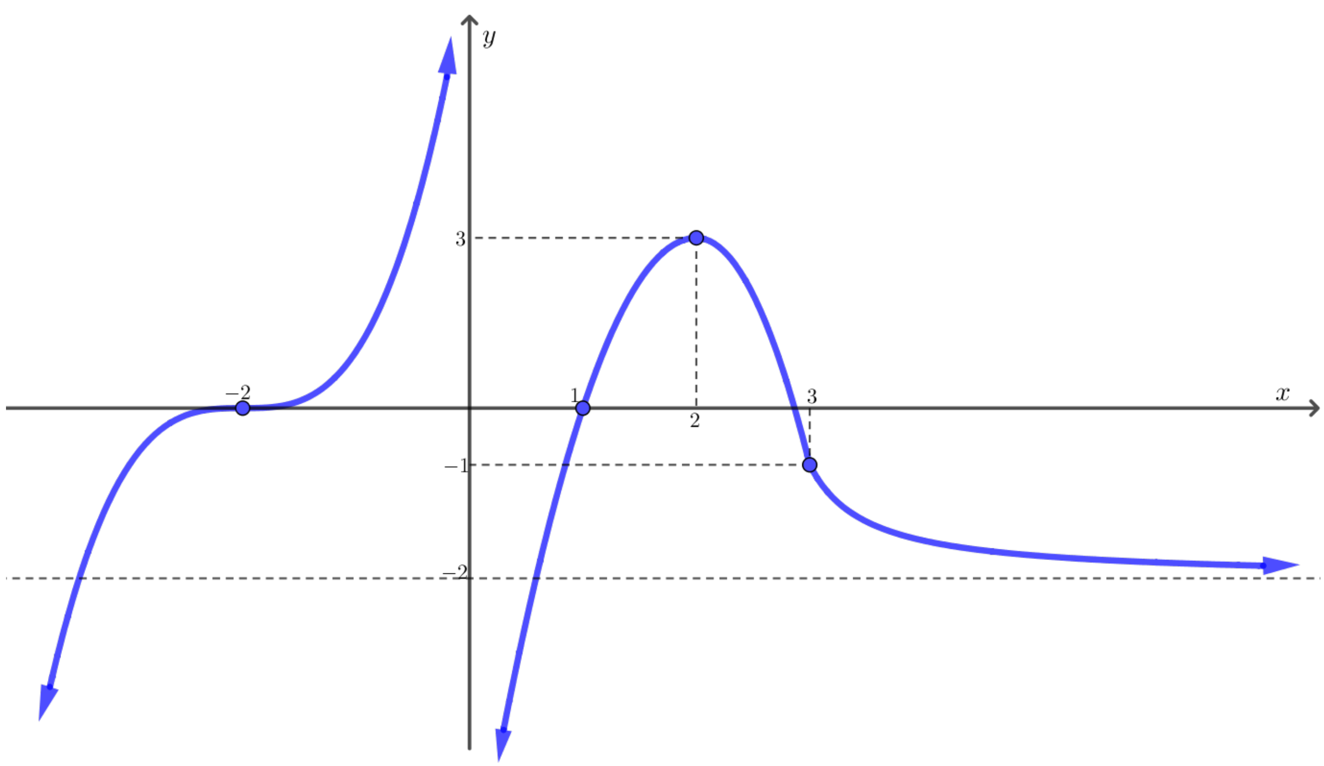
	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 2	2 … 3	3 … $+\infty$
f'	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
f''	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Además, de los siguientes datos:

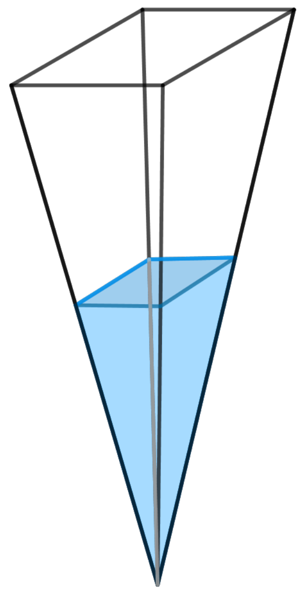
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$
- Tiene como extremo relativo al punto $(2, 3)$
- $f(-2) = f(1) = 0$
- $f(3) = -1$

De acuerdo con la información anterior, trace una posible gráfica de f.

Solución:



11. [**5 puntos**] Plantee y resuelva el siguiente problema:
Un tanque tiene forma de pirámide con base cuadrada y vértice hacia abajo (como se observa en la figura), el lado de la base es 4 metros y la altura es 12 metros. Si se bombea agua hacia el tanque a razón de $\frac{2}{3}\ m^3$ por segundo. ¿A qué tasa aumenta la altura del agua cuando dicha altura tiene 2 metros de profundidad?



Solución:

l: lado de la base de la pirámide formada por el agua, la cual varía en el tiempo t.

h: altura de la pirámide formada por el agua, la cual varía en el tiempo t.

V: volumen de la pirámide formada por el agua, la cual varía en el tiempo t.

La ecuación que modela el problema es

$V = \dfrac{l^2 \cdot h}{3}$ (*)

Además, de la figura dada se pueden construir dos triángulos rectángulos semejantes:

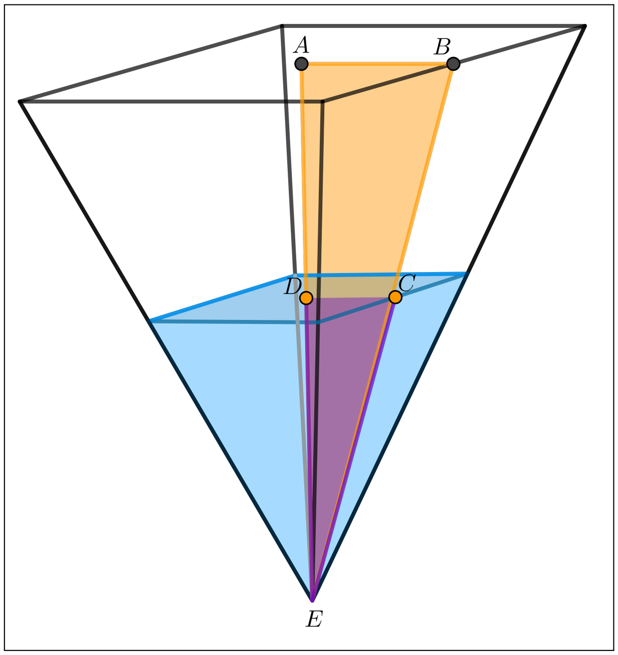


Figura 1.

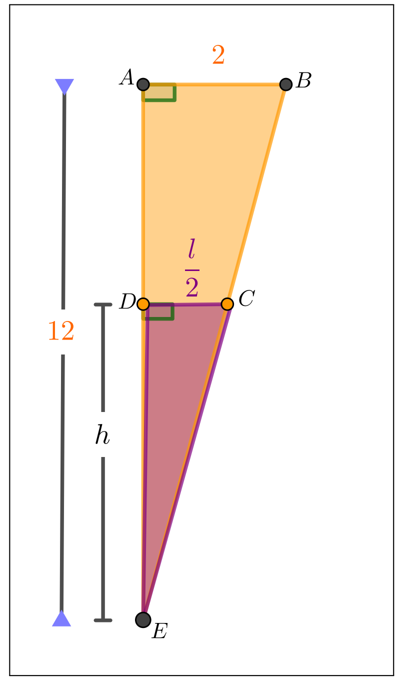


Figura 2.

De la Figura 2 se tiene que $\triangle ABE \sim \triangle DCE$, ya que ambos triángulos tienen un ángulo recto y comparten el ángulo del vértice E, entonces

$$\begin{aligned} \frac{h}{12} = \frac{\frac{l}{2}}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{h}{12} = \frac{l}{4} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{h}{3} = l \quad (**) \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo (**) en (*) se tiene:

$$V = \frac{l^2 \cdot h}{3} \Longrightarrow V = \frac{h^3}{27} \quad (***)$$

Derivando respecto al tiempo t la ecuación (***) se obtiene:

$$\frac{V}{dt} = \frac{1}{9}h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

Ahora, para determinar la tasa a la que cambia la altura cuando $h = 2$ y $\frac{V}{dt} = \frac{2}{3}$ se tiene:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{9} \cdot \frac{dh}{dt} \Longrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{2}$$

R/ La altura del agua está aumentando a una tasa de $\frac{3}{2}$ m/s.