Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cálculo I
Segundo examen parcial

Tiempo máximo disponible: 3 horas

Sábado 17 de junio de 2023

Valor: 55 puntos

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de desarrollo, por lo que deben aparecer, de manera clara y ordenada, todos los procedimientos que justifiquen correctamente la solución y la respuesta de cada uno de los enunciados.
3. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración. Si algún procedimiento está desordenado o ininteligible, no se calificará.
4. El trabajo durante la prueba debe ser individual. No se permite el uso de apuntes, teléfono celular ni otros dispositivos electrónicos. Ante un intento de fraude la persona aplicadora de la prueba le llamará la atención una única vez y de persistir la conducta le retirará la prueba y se asignará 0 como calificación.
5. El examen debe ser resuelto en los documentos que se brindan para tal efecto. No se permite el uso de hojas adicionales.
6. Puede utilizar calculadora científica no programable.

Nombre completo: ____

Código de MATEM: ____________________

Nombre del colegio: ____

DESARROLLO. **Valor: 55 puntos.**

INSTRUCCIONES: Resuelva cada uno de los ítems planteados de forma clara, completa y ordenada. Debe indicar todo el procedimiento que justifique la respuesta.

1. [**4 puntos**] Si $y = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt[3]{\log\left(e^{-x} + \ln 2\right)}\right)$, determine $\dfrac{dy}{dx}$.

2. [**4 puntos**] Considere la curva C de ecuación $y^2 = \ln(x+y)$. Determine la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(1,0)$.

3. [**4 puntos**] Verifique que la función f de ecuación $f(x) = (1 + x)e^x$, satisface la igualdad

$$f'''(x) - 2f''(x) + f'(x) = 0.$$

4. [**3 puntos**] Si $y = x^{\operatorname{sen} x}$ con $x > 0$, determine $\dfrac{dy}{dx}$.

5. Considere la función f definida por $f(x) = -x^3 + 4x + 3$ en $[a, 0]$, con $a < 0$.

   a) [**1 punto**] Enuncie el Teorema de Rolle.

   b) [**4 puntos**] Determine el valor de a para el cual la función f satisface las hipótesis del Teorema de Rolle y determine el valor de $c \in \,]a, 0[$ donde se garantiza este teorema.

6. Calcule, si existen, los siguientes límites.

   a) **[5 puntos]** $\lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{z^2} - \frac{z+1}{z^2 e^z} \right)$

$b)$ **[7 puntos]** $\lim\limits_{w \to \frac{\pi}{2}^-} (\cos w)^{w - \frac{\pi}{2}}$

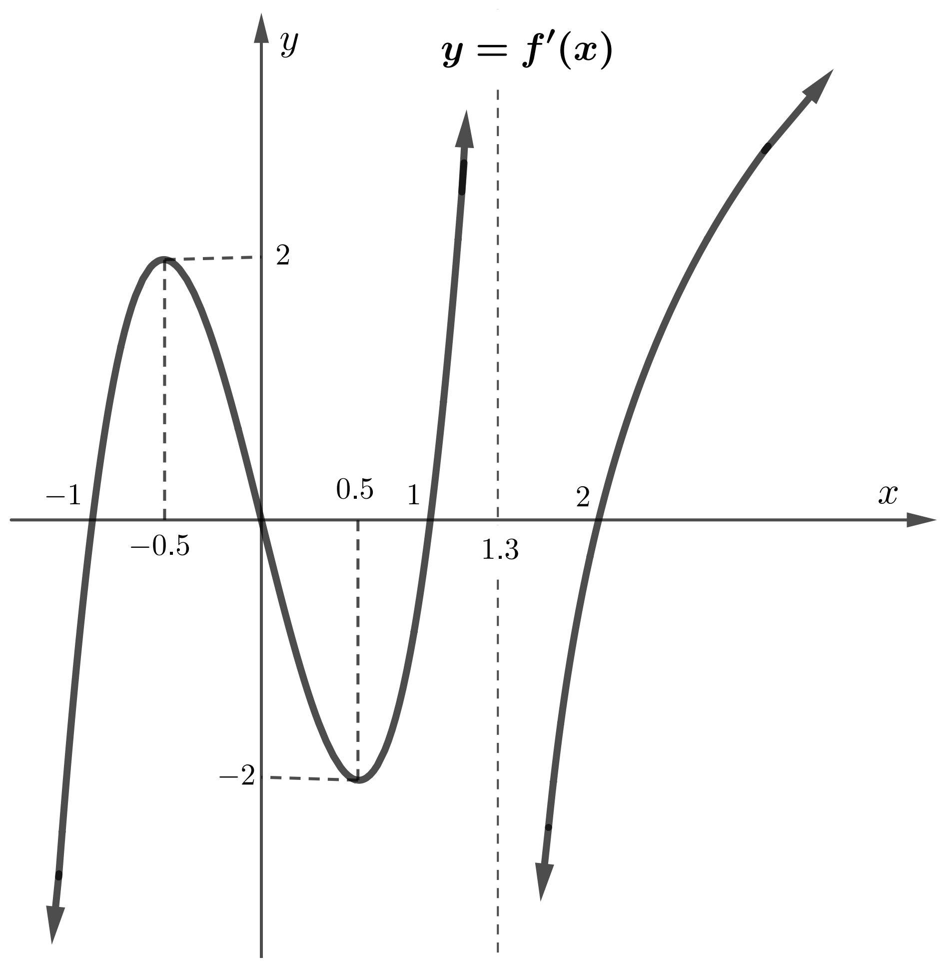
7. [**4 puntos**] Considere la función f definida por $f(x) = x^4 + ax + b$, con a y b constantes reales no nulas. Determine los valores de a y b tales que $f(1) = 3$ sea un valor extremo de f en $[0, 2]$. Indique si este valor corresponde a un máximo o un mínimo.

8. Considere la función $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3x + e^{\frac{-2}{x}}$

a) [**2 puntos**] Calcule $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}$

b) [**2 puntos**] Justifique si la gráfica de la función g tiene o no asíntota oblicua en $+\infty$

9. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y la gráfica adjunta correspondiente a la **primera derivada** de esta función:



De acuerdo con la gráfica anterior, determine:

a) **[1 punto]** Los valores de x donde f alcanza extremos relativos (indique si son máximos o mínimos relativos).

b) **[2 puntos]** Los intervalos donde f es decreciente. Justifique su respuesta.

c) **[2 puntos]** Los intervalos donde f es cóncava hacia arriba. Justifique su respuesta.

d) **[1 punto]** Los valores de x donde f posee puntos de inflexión.

10. **[4 puntos]** A continuación se presenta un cuadro de variación con información acerca de la primera y segunda derivada de una función f, $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$:

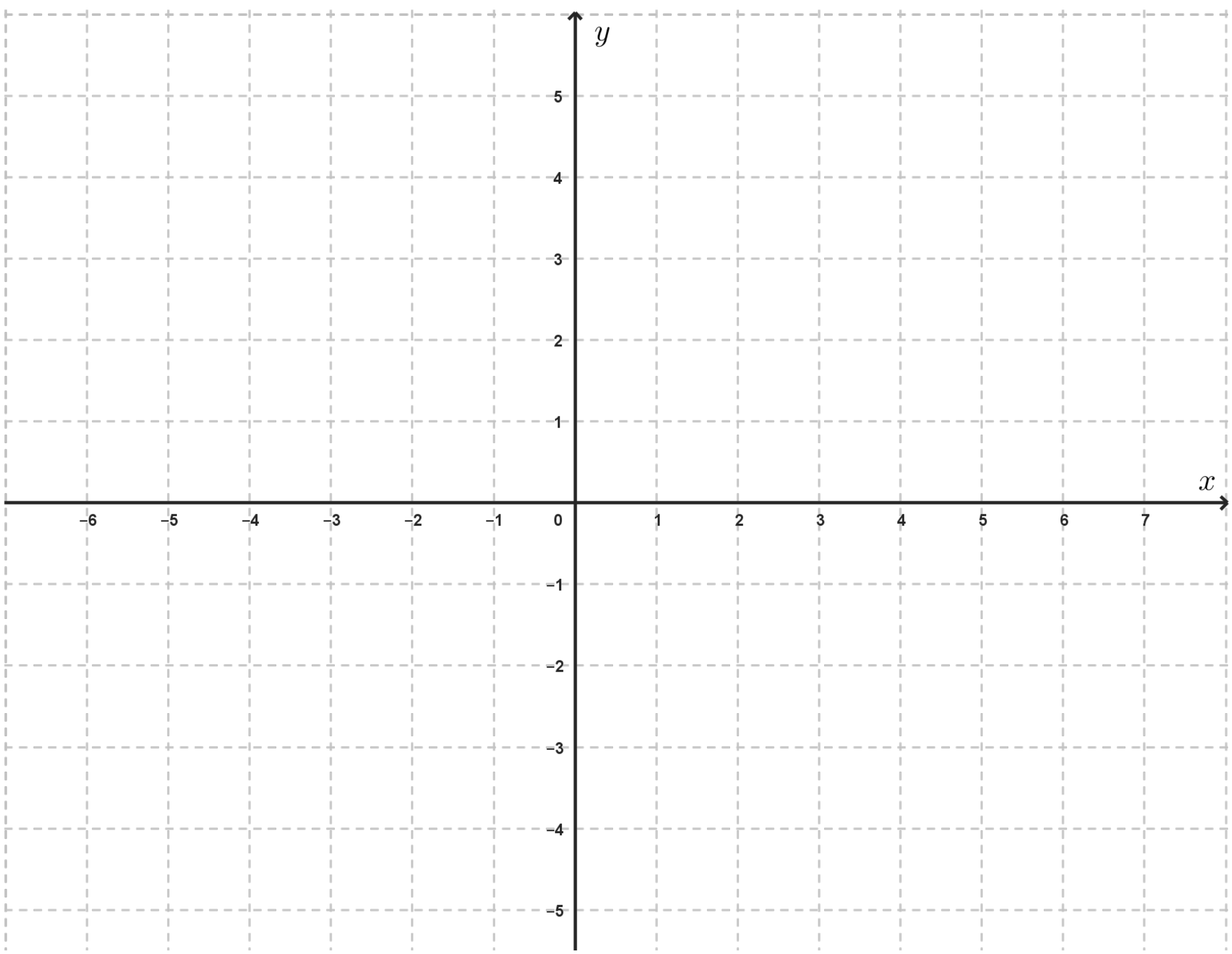
$-\infty$ $\qquad$ -2 $\qquad$ 0 $\qquad$ 2 $\qquad$ 3 $\qquad$ $+\infty$

f'	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
f''	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Además, de los siguientes datos:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$
- Tiene como extremo relativo al punto $(2, 3)$
- $f(-2) = f(1) = 0$
- $f(3) = -1$

De acuerdo con la información anterior, trace una posible gráfica de f.



11. **[5 puntos]** Plantee y resuelva el siguiente problema:

Un tanque tiene forma de pirámide con base cuadrada y vértice hacia abajo (como se observa en la figura), el lado de la base es 4 m y la altura es 12 m. Si se bombea agua hacia el tanque a razón de $\frac{2}{3}\ m^3$ por segundo. ¿A qué tasa aumenta la altura del agua cuando dicha altura tiene 2 metros de profundidad?