Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cálculo
Tercer examen parcial

Tiempo máximo disponible: 3 horas

Sábado 09 de setiembre de 2023 | Valor: 45 puntos

Instrucciones Generales:

1. Lea cuidadosamente cada instrucción y pregunta antes de contestar.
2. Esta es una prueba de desarrollo por lo que deben aparecer, de manera clara y ordenada, todos los procedimientos que justifiquen correctamente la solución y la respuesta de cada uno de los ítems.
3. Escriba con bolígrafo de tinta indeleble azul o negra. No proceden reclamos sobre pruebas escritas con lápiz o que presenten alguna alteración. Si algún procedimiento está desordenado, no se calificará.
4. El trabajo durante la prueba debe ser individual. No se permite el uso de apuntes, teléfono celular ni otros dispositivos electrónicos. Ante un intento de fraude la persona aplicadora de la prueba le llamará la atención una única vez y de persistir la conducta le retirará la prueba y se asignará 0 como calificación.
5. El examen debe ser resuelto en los documentos que se brindan para tal efecto. No se permite el uso de hojas adicionales ni el intercambio de materiales (lápiz, borrador, lapiceros, etc).
6. Puede utilizar calculadora científica no programable.

Nombre completo: ______________________________

Código de MATEM: ______________

Nombre del Colegio: ______________________________

DESARROLLO. **Valor: 45 puntos.**

INSTRUCCIONES: Resuelva cada uno de los ítems planteados de forma clara, completa y ordenada. Debe indicar todo el procedimiento que justifique la respuesta.

1. Calcule las siguientes integrales:

   a) **[3 puntos]** $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x\sqrt[4]{(x^2+\ln x)^3}}dx$

   Solución:

   Para la integral dada $\displaystyle\int \frac{2x^2+1}{x\sqrt[4]{(x^2+\ln x)^3}}dx$ (*)

   tome la sustitución $u = x^2 + \ln x$

   $$\Rightarrow du = \left(2x + \frac{1}{x}\right) dx$$
   $$\Rightarrow du = \left(\frac{2x^2+1}{x}\right) dx$$

   Luego, la integral (*) se convierte en

   $$\begin{aligned}
   &\int \frac{1}{u^{3/4}}du \\
   &= \int u^{-3/4}du \\
   &= 4u^{1/4} + C \\
   &= 4\left(x^2 + \ln x\right)^{1/4} + C
   \end{aligned}$$

   b) **[4 puntos]** $\displaystyle\int 4x^3\left(2x^2+9\right)^9 dx$

   Solución:

   Reescriba la integral dada $\displaystyle\int 4x^3\left(2x^2+9\right)^9 dx = \int x^2\left(2x^2+9\right)^9 \cdot 4x dx$ (*)

   tome la sustitución $u = 2x^2 + 9$

   $$\Rightarrow \frac{u-9}{2} = x^2 \quad \text{y} \quad du = 4xdx$$

   Luego, la integral (*) se convierte en

   $$\int \frac{u-9}{2}u^9 du$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(u^{10} - 9u^9\right) du$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{11}}{11} - \frac{9u^{10}}{10}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(2x^2+9\right)^{11}}{11} - \frac{9\left(2x^2+9\right)^{10}}{10}\right) + C$$

c) **[5 puntos]** $\displaystyle\int \sec^2\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta$

Solución:

$$\int \sec^2\theta\,(1+\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta$$
$$= \int (\sec\theta + \sec\theta\cdot\operatorname{sen}\theta)^2\,d\theta$$
$$= \int (\sec\theta + \tan\theta)^2\,d\theta$$
$$= \int \left(\sec^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta + \tan^2\theta\right) d\theta$$
$$= \int \left(\sec^2\theta + 2\sec\theta\tan\theta + \sec^2\theta - 1\right) d\theta$$
$$= 2\tan\theta + 2\sec\theta - \theta + C$$

d) **[3 puntos]** $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2+4}dx$

Solución:

$$\int \frac{2x+5}{x^2+4}dx$$
$$= \int \left(\frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\right) dx$$
$$= \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \int \frac{5}{x^2+4}dx$$

Para determinar $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+4}dx$ se utiliza la sustitución $u = x^2+4 \Rightarrow du = 2xdx$ por lo que se obtiene

$$\int \frac{2x}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C_1 = \ln\left(x^2+4\right) + C_1$$

Así,

$$\int \frac{2x+5}{x^2+4}dx$$
$$= \ln(x^2+4) + \frac{5}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

2. **[4 puntos]** Sea f una función cuya gráfica se muestra en la Figura 2. Si se sabe que $\int_3^1 f(x)dx = -4$

Calcule el valor de $\int_1^3 xf(x^2)dx$.

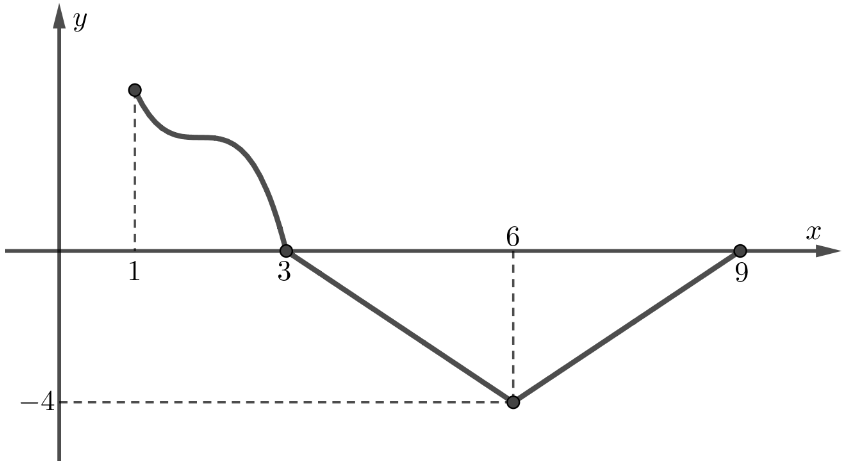

Figura 2. Gráfica de la función f

Solución:

Para la integral $\int_1^3 xf(x^2)dx$ (*)

tome la sustitución $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow \frac{1}{2}du = xdx$

Por lo que la integral (*) se convierte en

$$\begin{aligned}
\int_1^9 \frac{1}{2}f(u)du &= \frac{1}{2}\left(\int_1^3 f(u)du + \int_3^9 f(u)du\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\int_3^9 f(u)du \\
&= 2 + \frac{1}{2}\cdot -\frac{6\cdot 4}{2} \\
&= -4
\end{aligned}$$

Así, se tiene que $\int_1^3 xf(x^2)dx = -4$

3. **[5 puntos]** Determine el criterio de una función h tal que $\frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}} = x^3$ y $h(0) = 1$.

Solución:

Para determinar el criterio de la función h, se integrará en ambos lados de la igualdad respecto a x:

$$\int \frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}} dx = \int x^3 dx \quad (*)$$

Trabajando la integral de la izquierda por medio de la sustitución $u = h(x) \Rightarrow du = h'(x)dx$ se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{h'(x)}{\sqrt{h(x)}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= 2\sqrt{u} + C_1 \\ &= 2\sqrt{h(x)} + C_1 \end{aligned}$$

Así, la igualdad dada en (*) se convierte en

$$2\sqrt{h(x)} = \frac{x^4}{4} + C$$

Como se cumple que $h(0) = 1$, entonces se tiene

$$2\sqrt{h(0)} = C \Rightarrow 2 = C$$

Por lo que el criterio de la función h corresponde a

$$h(x) = \left(\frac{x^4}{8} + 1\right)^2$$

4. [**5 puntos**] Mediante sumas de Riemann verifique que $\displaystyle\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

Solución:

Realizando una partición uniforme, en n subintervalos, se tiene que la longitud de cada uno viene dado por $\Delta_x = \dfrac{b-a}{n}$. Además, sea $f(x) = x$

Luego, utilizando los extremos derechos de cada subintervalo se tiene

$$\int_a^b x dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)\, \Delta_x\right]$$

donde,

$$x_i = a + i\Delta_x = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$$

con

$$f(x_i) = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i)\,\Delta_x\right] &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) \cdot \frac{b-a}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \left[an + \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty} (b-a) \left[a + \frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot (b-a)\right] \\
&= (b-a)\left[a + \frac{1}{2} \cdot (b-a)\right] \\
&= (b-a)\frac{a+b}{2} \\
&= \frac{b^2-a^2}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que $\displaystyle\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$

5. [**4 puntos**] Determine la función $g(x)$ y todos los valores de a, $a \in \mathbb{R}$, tales que

$$\int_x^a g(t)dt = -x^2 - x + 6$$

Solución:

Para determinar la función $g(x)$ que cumple

$$\int_x^a g(t)dt = -x^2 - x + 6 \quad (*)$$

Primero se debe recordar que $\displaystyle\int_x^a g(t)dt = -\int_a^x g(t)dt$ (**)

Luego, se sustituye (**) en (*) y se deriva respecto a x en ambos lados de la igualdad obteniendo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(-\int_a^x g(t)dt\right) &= \frac{d}{dx}\left(-x^2 - x + 6\right) \\
\Rightarrow -g(x) &= -2x - 1 \\
\Rightarrow g(x) &= 2x + 1
\end{aligned}$$

Ahora para determinar el valor o los valores de c se resuelve la integral siguiente

$$\begin{aligned}
\int_x^a (2t+1)\,dt &= t^2+t\big|_x^a \\
\Rightarrow -x^2-x+6 &= a^2+a-x^2-x \\
\Rightarrow 6 &= a^2+a \\
\Rightarrow 0 &= a^2+a-6 \\
\Rightarrow a=-3 \quad &\text{o} \quad a=2
\end{aligned}$$

6. [**5 puntos**] Calcule el área de la región sombreada que se muestra en la Figura 3, limitada por la curvas

$$f(x)=x\sqrt{1-x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\frac{1}{2}x$$

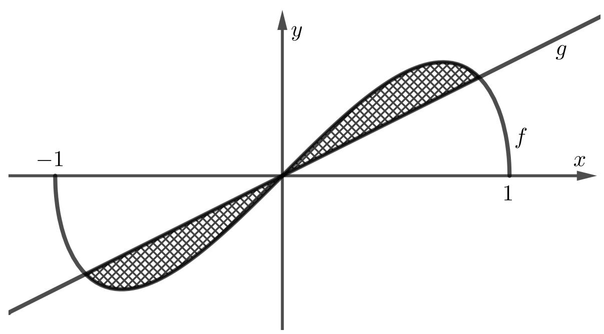

Figura 3.

Solución:

Se debe determinar las intersecciones entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, es decir:

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
\Rightarrow x\sqrt{1-x^2} &= \frac{1}{2}x \\
\Rightarrow x\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}\right) &= 0 \\
\Rightarrow x=0 \quad &o \quad \sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}=0 \\
\Rightarrow x=0 \quad &o \quad \sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2} \\
\Rightarrow x=0 \quad &o \quad 1-\frac{1}{4}=x^2 \\
\Rightarrow x=0 \quad &o \quad \pm\frac{\sqrt{3}}{2}=x
\end{aligned}$$

El área A de la región sombreada corresponde a:

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} \left(\frac{1}{2}x - x\sqrt{1-x^2}\right) dx + \int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x\right) dx$$

Por otro lado,

$$\int \left(x\sqrt{1-x^2}\right) dx = \int -u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} + C$$

mediante la sustitución $\sqrt{1-x^2} = u \Rightarrow 1 - x^2 = u^2 \Rightarrow xdx = -udu$

Luego,

$$A = \frac{1}{4}x^2 + \frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}\Bigg|_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{0} + -\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3} - \frac{1}{4}x^2\Bigg|_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{48} + \frac{5}{48} = \frac{5}{24}$$

Por tanto, la región sombreada tiene el valor de $\frac{5}{24}(ul)^2$

7. [**7 puntos**] Considere la parábola de ecuación $y = 3 - x^2$. Determine el punto P del primer cuadrante tal que la recta tangente a la parábola en dicho punto forma con los ejes coordenados un triángulo de área mínima (ver Figura 1.).

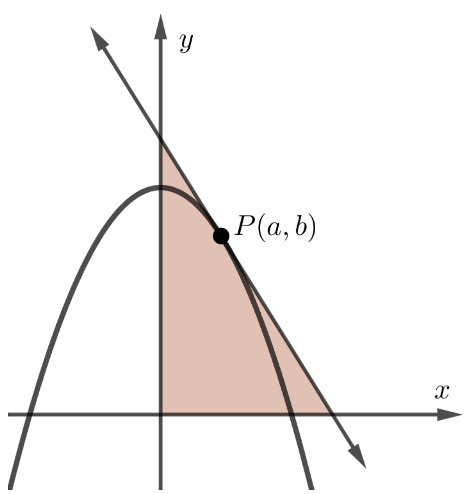

Figura 1.

Solución:

Función a optimizar: Área del triángulo

Para esto note que el punto $P(a,b)$ es un punto de la parábola, es decir, $b = 3 - a^2$. (*)

Como se requiere información del triángulo que forma la recta tangente con los ejes coordenados, es necesario determinar la ecuación de dicha recta: $y - b = m_T\,(x - a)$ (**)

Para encontrar m_T se sigue el siguiente proceso:

$$y' = -2x, \text{ evaluando en } x = a \text{ se tiene } m_T = -2a \qquad (***)$$

Sustituyendo (*) y (***) en (**) se tiene que la ecuación de la recta tangente está dada por

$$y - 3 + a^2 = -2a\,(x - a)$$

Ahora la intersección con el eje X de la recta tangente coincide con la base del triángulo y la intersección con el eje Y corresponde a la altura de dicha figura, por lo que se deben determinar ambas intersecciones:

Intersección eje X:

$$\begin{aligned} & -3 + a^2 = -2a\,(x - a) \\ \Rightarrow & -3 + a^2 = -2ax + 2a^2 \\ \Rightarrow & \frac{3 + a^2}{2a} = x \end{aligned}$$

Intersección eje Y:

$y - 3 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow y = a^2 + 3$

Así, la **Función a optimizar es** $A(a) = \dfrac{\dfrac{3 + a^2}{2a} \cdot (a^2 + 3)}{2} = \dfrac{(a^2 + 3)^2}{4a}$, $D_A = \left]0, \sqrt{3}\right[$

Se debe determinar la primera derivada para $A(a)$:

$$\begin{aligned} A'(a) &= \frac{2\,(a^2 + 3) \cdot 2a \cdot 4a - 4\,(a^2 + 3)^2}{16a^2} \\ &= \frac{16a^4 + 48a^2 - 4a^4 - 24a^2 - 36}{16a^2} \\ &= \frac{12a^4 + 24a^2 - 36}{16a^2} \end{aligned}$$

Buscando los valores críticos:

$$\begin{aligned} & A'(a) = 0 \\ \Rightarrow & \frac{12a^4 + 24a^2 - 36}{16a^2} = 0 \\ \Rightarrow & a^4 + 2a^2 - 3 = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (a^2+3)(a-1)(a+1)=0$

$\Rightarrow a=\pm 1$

Luego, por el dominio de la función se tiene que

$$a=1 \text{ es el único valor crítico}$$

Ahora se debe verificar que $A(a)$ alcanza un mínimo en $a=1$, para esto se usará el criterio de la segunda derivada:

$$A''(a)=\frac{16a^2(48a^3+48a)-32a(12a^4+24a^2-36)}{16^4a^4}$$

$$\Rightarrow A''(1)>0$$

(La clasificación del valor mínimo también puede realizarse mediante el estudio de signos de la primera derivada de la función $A(a)$).

Por lo tanto, $A(a)$ alcanza un área mínima cuando $a=1$, así el punto buscado corresponde a $P(1,2)$.