

Proyecto de apoyo a la
educación matemática

EL

Resolución de
ecuaciones lineales

Profesor José Paulo Jiménez Segura

GUÍA INTRODUCTORIA
Aspectos generales, ejemplos y práctica



Al manipular ecuaciones debe tenerse presente que en distintas ocasiones se trabaja con las ordinarias cuyos coeficientes son valores numéricos conocidos. Sin embargo, existen otro tipo de ecuaciones cuyos coeficientes están expresados con variables. Estas ecuaciones se conocen como *literales*.

Lo anterior es necesario debido a que en contenidos de años posteriores se requerirá el manejo de este tipo de ecuaciones, por lo cual es necesario abarcarlo desde una perspectiva funcional, es decir, ejemplos prácticos y suficiente claridad, por lo cual se espera que esta guía pueda servir de insumo para que el estudiante pueda abarcar dudas y comprender mejor los conceptos y su aplicación.

Cabe destacar que en este caso por tratarse de octavo año, se utilizarán ecuaciones de primer grado y una incógnita. Además, se requieren tener presente las propiedades vistas de números, relaciones y álgebra que abarcan números naturales, enteros y racionales, por lo cual se invita al lector a realizar un repaso del mismo.

Por último, entonces se tiene que, esta guía pretende abarcar el contenido esencial de las ecuaciones literales, por cuanto se abarcarán elementos teóricos y prácticos, es decir, ejemplos. Eso sí, para alcanzar la meta, se realizará un repaso de conceptos importantes y tips para un mejor trabajo con la temática en cuestión.



1. Conocimientos previos

1.1 Ecuación, concepto y aspectos generales

Es muy importante conocer el concepto de ecuación en aras de comprender lo que se trabajará y obtener claridad para efectuar correctamente los ejercicios que la involucran. Por lo cual, se brinda la siguiente definición matemática:

Definición 1.1.1 — Ecuación. En matemática se llama ecuación a la equivalencia entre dos expresiones algebraicas, las cuales serán denominadas miembros de la ecuación.

En las ecuaciones, los miembros aparecerán relacionados a través de operaciones aritméticas básicas (suma, resta, división, multiplicación) con constantes (números) o incógnitas, es decir, variables (representadas por letras).

El complemento anterior a la definición brindada se refiere en otras palabras a que los términos que conforman las ecuación están compuestos por monomios, binomios, trinomios o polinomios de más de 4 términos.

- Ahora bien por tratarse de octavo año, las ecuaciones que se utilizan son de primer grado con una incógnita. Además, los coeficientes que se utilizan pueden ser números naturales, enteros o racionales, así como su uso puede ser empleado también para las soluciones. En esta temática además, se involucran coeficientes expresados como variables.

1.2 Ecuaciones en resolución de problemas

Las ecuaciones involucran el uso de *incógnitas* y *valores numéricos*. En secundaria es usual debido al aprendizaje escalonado que, en los primeros pasos, los estudiantes se involucren con aquellas que solo muestran una incógnita (o una variable), así como la siguiente

$$4x - 3 = 8(x - 2) - 7x + 2$$

Ahora bien, como es normal en la matemática, existen muchos casos que requieren expandir un poco más el álgebra para dar solución a las distintas situaciones que la naturaleza o el entorno presente, y es muy importante ver que existen eventos donde se va a requerir el uso de ecuaciones pero con una perspectiva diferente, es decir, se requerirá el uso de más variables (también llamadas literales).

Entonces, a manera de ejemplificar lo que se habla puede brindarse una aplicación común, para mirar la necesidad del uso de más variables en una ecuación.

Algunos problemas o ejercicios utilizan fórmulas como instrumento primordial para dar solución a lo que nos plantea dicho problema. Cada variable en la fórmula “literalmente” representa una parte importante de toda la relación expresada por la ecuación.

Así, tomemos una figura geométrica, el rectángulo que se presenta a continuación.

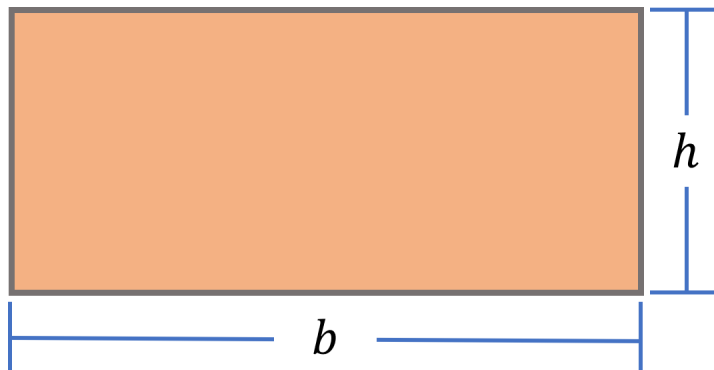


Figura 1.1: Representación geométrica de un rectángulo de base b y altura h .

La fórmula del perímetro del rectángulo viene dada por

$$P = 2b + 2h$$

Como se aprecia en la fórmula, se tiene la base b y la altura h que son valores desconocidos hasta el momento. Depende del problema que se nos presente se trabajará entonces en función de lo que nos brinden y lo que nos soliciten. Puede ser que nos den la medida del perímetro y la base y nos pidan determinar el valor de la altura, para lo cual se necesitará realizar un despeje, o bien, puede que nos den el valor de la medida de la base y la altura y nos pidan el valor del perímetro.

En todo caso, en el ejemplo anterior así como en muchos otros se necesitará hablar entonces de una ecuación que involucre varias variables, por lo cual es necesario hablar de aspectos importantes relacionadas a ellas como significado, notación, uso y otros más.

$$fg + 2(t + v) = 4$$

$$2w + b = d$$

$$ax + b = y$$

2. Ecuaciones Literales

2.1 Aspectos importantes

Ahora bien, al tener claros los conocimientos previos es importante tener presente que ahora se hará el uso de varias variables en una misma ecuación, con la salvedad que se utilizan ecuaciones de primer grado, es decir, ecuaciones lineales.

Por otro lado, para abarcar correctamente el conocimiento se requiere lo siguiente:

1. Se debe saber despejar incógnitas correctamente.
2. Conocer y aplicar la prioridad de operaciones aritméticas.
3. Resolver correctamente operaciones combinadas.

Así, la siguiente sección involucra aspectos importantes para la resolución de ecuaciones literales, sin embargo es muy importante la siguiente observación:

- A pesar de haber casos similares de ejercicios, en esencia cada ejercicio es particular, así que, la práctica constante desarrolla la habilidad.

2.2 Ecuación literal, concepto y aspectos generales

Es muy importante conocer el concepto de ecuación literal en aras de comprender lo que se trabajará y obtener claridad para efectuar correctamente los ejercicios que la involucran. Por lo cual, se brinda la siguiente definición matemática:

Definición 2.2.1 — Ecuación literal. Una ecuación literal es una ecuación que involucra más de una variable.

Recordemos además que una variable es un símbolo matemático que representa un valor o número arbitrario. Así, es normal encontrar que dichas variables se representan mediante letras del abecedario (de ahí que también se llamen “literales”), tales como a, b, c, d, x, y, z .

Por otro lado, es usual (pero no siempre) que las primeras letras del abecedario se utilicen para representar cantidades conocidas y constantes, y las últimas se reserven para representar

cantidades variables o incógnitas. Así, por ejemplo, si en una ecuación aparecen las mencionadas a, b, c, y, x, y, z , entonces, x, y, z serán las incógnitas y a, b, c se consideran cantidades conocidas aunque no se especifique de momento sus valores numéricos.

Entonces uno puede preguntarse para qué se abarcan las ecuaciones literales. Pues bien, **el objetivo es resolver una ecuación para solo una variable con respecto a otras**, es decir, simplemente buscamos la relación entre las variables para dejar definida una en función de las otras.

2.2.1 Estrategia para resolver ecuaciones literales

El punto de resolver una ecuación literal es aislar o mantener por sí misma una determinada variable en un lado de la ecuación (izquierda o derecha) y el resto en el lado opuesto.

Además, si ya se cuenta con la experiencia de cómo resolver ecuaciones ordinarias (de coeficientes constantes), el proceso para las literales es muy similar, entonces puede que ya tengas las habilidades para abordarlo (las mencionadas en el apartado anterior) y ahora solo es cuestión de práctica y familiarización.

Entonces, a nivel general se puede utilizar el siguiente procedimiento:

1. Se efectúan las operaciones indicadas, es decir, se procede a resolver según la variable que se solicita.
2. Se trasladan los términos de tal manera que se agrupen en un miembro de la ecuación los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro los términos que no la contienen y por lo tanto son conocidos (aunque estén expresados con otras variables o letras).
3. Es recomendable reducir los términos semejantes en los dos miembros, para obtener más fácilmente la incógnita.
4. Se despeja la incógnita. Aquí es útil recordar que en una igualdad se pueden hacer operaciones aritméticas básicas iguales a los dos miembros, sin alterar la igualdad, tales como sumas, restas, multiplicaciones o divisiones.



Se debe tener cuidado de no combinar términos diferentes, es decir, monomios no semejantes.

2.3 Ejemplos resueltos de ecuaciones literales

En esta sección se abarcarán 4 ejercicios para una mejor comprensión al lector de formas particulares para enfrentar situaciones que involucren ecuaciones literales. Cada una presenta un nivel de dificultad superior respecto a la anterior.

2.3.1 Ejemplo 1

Ejemplo 2.3.1 Resuelva para la altura la ecuación del perímetro de un rectángulo. ■

Solución

Para este caso, es necesario recordar que la ecuación del perímetro de un rectángulo viene dada por

$$P = 2b + 2h$$

donde b corresponde a la base y h a la altura.

En este caso resolver para la altura es resolver para h , por lo que, se debe despejar de la ecuación anterior esa variable, por lo que al final quedará la altura en función del perímetro y la base.

Así, al realizar la resolución, se tiene que

$$P = 2b + 2h$$

Puede darse vuelta a los miembros de la ecuación

$$2b + 2h = P$$

Ahora, restar $2b$ a cada miembro

$$2b + 2h - 2b = P - 2b$$

Luego, simplificar la ecuación

$$2h = P - 2b$$

Entonces, se divide ambos lados por 2

$$\frac{2h}{2} = \frac{P - 2b}{2}$$

Se simplifica la ecuación

$$h = \frac{P - 2b}{2}$$

Así, la altura h ya se encuentra resuelta, es decir, queda en términos del perímetro y la base.

2.3.2 Ejemplo 2

En Costa Rica la unidad de medida de la temperatura se expresa en grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$) y en Estados Unidos en grados Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$). Así, existe una ecuación que permite de pasar de una a otra para una mejor comprensión de la medida. La misma se brinda en el siguiente ejemplo:

Problema 2.3.1 Resuelva para C la siguiente ecuación literal que corresponde a la conversión de temperaturas de grados Celsius ($^{\circ}\text{C}$) a Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$):

$$F = \frac{9C}{5} + 32$$

Solución

En este caso resolver para C quiere decir que, se debe despejar de la ecuación anterior esa variable, por lo que al final quedará la temperatura en grados Celsius en función de la temperatura en grados Fahrenheit.

Así, al realizar la resolución, se tiene que

$$F = \frac{9C}{5} + 32$$

Se resta 32 a cada miembro

$$F - 32 = \frac{9C}{5} + 32 - 32$$

Se simplifica la ecuación

$$F - 32 = \frac{9C}{5}$$

Ahora, se multiplica ambos lados por 5

$$5(F - 32) = 5 \cdot \frac{9C}{5}$$

Luego, se simplifica la ecuación

$$5(F - 32) = 9C$$

Se dividen ambos lados por 9

$$\frac{5(F - 32)}{9} = \frac{9C}{9}$$

Por último, se simplifica la ecuación

$$\frac{5(F - 32)}{9} = C$$

Así, C ya se encuentra resuelta, es decir, queda en términos la temperatura en grados Fahrenheit.

2.3.3 Ejemplo 3

Además de realizar operaciones básicas a ambos lados de la ecuación, es decir, a cada miembro, empleando coeficientes numéricos, en ocasiones debe realizarse también con variables como se muestra en el siguiente ejemplo:

Problema 2.3.2 Resuelva para x la siguiente ecuación literal:

$$V - T = \frac{a}{x} - R$$

donde $x \neq 0$. ■

Solución

En este caso resolver para x quiere decir que, se debe despejar de la ecuación anterior esa variable, por lo que al final quedará x en función de las variables V, T, a y R .

Así, al realizar la resolución, se tiene que

$$V - T = \frac{a}{x} - R$$

Se suma R a cada miembro

$$V - T + R = \frac{a}{x} - R + R$$

Ya simplificada la ecuación, se multiplica x a cada miembro

$$x(V - T + R) = x \cdot \frac{a}{x}$$

Ahora, se simplifica la ecuación

$$x(V - T + R) = a$$

Luego, divide cada miembro por $(V - T + R)$, sabiendo que dicha expresión no puede ser igual a 0 o de lo contrario se indefine la ecuación

$$\frac{x(V - T + R)}{(V - T + R)} = \frac{a}{(V - T + R)}$$

Se puedan cancelar los siguientes factores (en azul)

$$\frac{\cancel{x(V - T + R)}}{\cancel{(V - T + R)}} = \frac{a}{(V - T + R)}$$

Por último, se tiene la ecuación simplificada

$$x = \frac{a}{(V - T + R)}$$

Así, x ya se encuentra resuelta, es decir, queda en términos de las variables V, T, a y R .

2.3.4 Ejemplo 4

Para el siguiente ejemplo se resolverá sin colocar los pasos a seguir, pues también el estudiante debe identificar que se realizó en cada paso. Recordemos que este no es un aprendizaje memorístico sino de interpretación y ejecución en base a razonamientos. Se procede entonces a realizar el siguiente ejercicio:

Problema 2.3.3 Resuelva para z la siguiente ecuación literal

$$(a - 1)z + (b - 1)z = (z - 1)a + (z - 1)b$$

Solución

En este caso resolver para z quiere decir que, se debe despejar de la ecuación anterior esa variable, por lo que al final quedará z en función de las variables a y b .

Así, al realizar la resolución, se tiene que

$$\begin{aligned} (a - 1)z + (b - 1)z &= (z - 1)a + (z - 1)b \\ \Rightarrow az - z + bz - z &= az - a + bz - b \\ \Rightarrow -az + az - z + bz - z &= -az + az - a + bz - b \\ \Rightarrow -z + bz - z &= -a + bz - b \\ \Rightarrow -bz + -z + bz - z &= -bz + -a + bz - b \\ \Rightarrow -z - z &= -a - b \\ \Rightarrow -2z &= -a - b \\ \Rightarrow \frac{-2z}{-2} &= \frac{-a - b}{-2} \\ \Rightarrow z &= \frac{-a - b}{-2} \\ \Rightarrow z &= \frac{-(a + b)}{-2} \\ \Rightarrow z &= \frac{a + b}{2} \end{aligned}$$

Así, z ya se encuentra resuelta, es decir, queda en términos de las variables a y b .

2.4 Práctica

Ejercicio 2.4.1 Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para la variable que se le solicita (al lado de la ecuación).

1. $ab + 7 = n - 4$; a

2. $g = \frac{V_f - V_i}{t}$; V_f

3. $-9b + 2x + 1 = bx - 8b - 3$; x

4. $\frac{5a + kb}{m} = 3w$; b

5. $\frac{x - a}{a} + \frac{x - b}{b} = 2$; x

6. $\frac{10y}{3} + \frac{10}{3} = \frac{40}{2} + n + \frac{5y}{2}$; y

SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

1. $a = \frac{n - 11}{b}$

3. $x = -1$

5. $x = \frac{4ab}{a + b}$

2. $V_f = gt + V_i$

4. $b = \frac{3wm - 5a}{k}$

6. $y = \frac{-3}{8} - \frac{6n}{5}$