PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

11°

Contenidos	Habilidades
Relaciones y Álgebra	H1: Identificar las condiciones para que una función tenga inversa
	H2: Relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su inversa. .

Colaboradores:

Gómez Ramírez Maria José
Guillén Méndez Jean Carlo
Núñez Morales Gustavo

Inversa de una función

La condición para que cualquier función tenga función inversa es que sea biyectiva. Recuerde que una función biyectiva es aquella que es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo.

- Inyectiva: Cada imagen tiene una única preimagen.
- Sobreyectiva: El codominio y el ámbito tienen exactamente los mismos elementos.

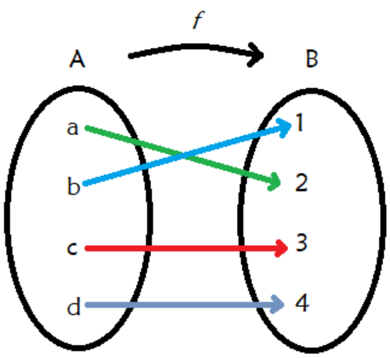


Figura 1: Diagrama de Venn de una función biyectiva

Definición

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva, decimos que la función inversa de f es $f^{-1} : B \to A$ si se cumple que $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ para cualquier $x \in A$ e $y \in B$.

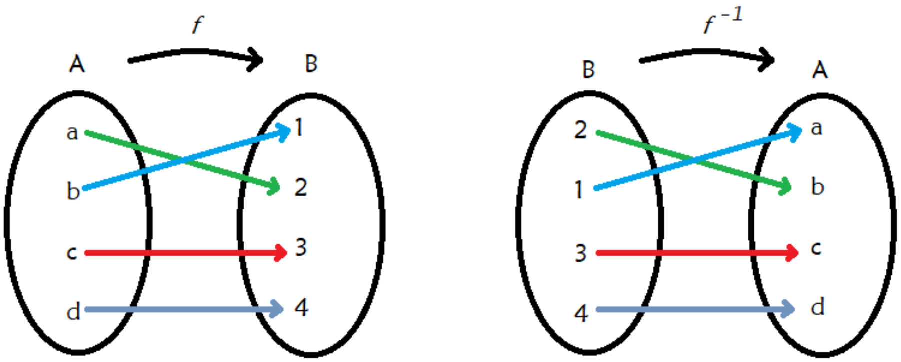
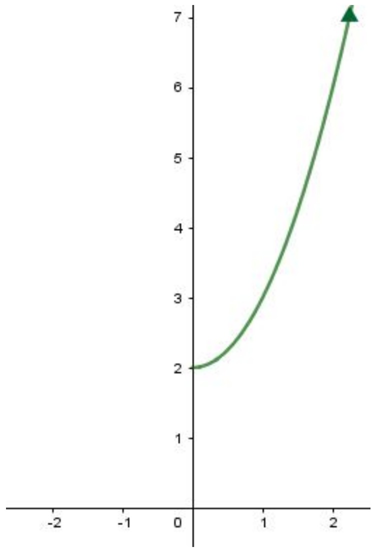


Figura 2: Diagrama de Venn de una función inversa

Ejemplos

Ejemplo 1

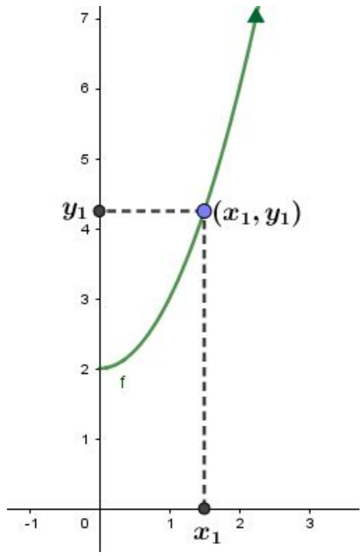
Considere la gráfica de la función $f : [0, +\infty[\to]2, +\infty[$



Determine si f tiene inversa.

R/ Observando la descripción del dominio y codominio, la función está bien definida y además el ámbito corresponde con el codominio, por lo tanto f es sobreyectiva.

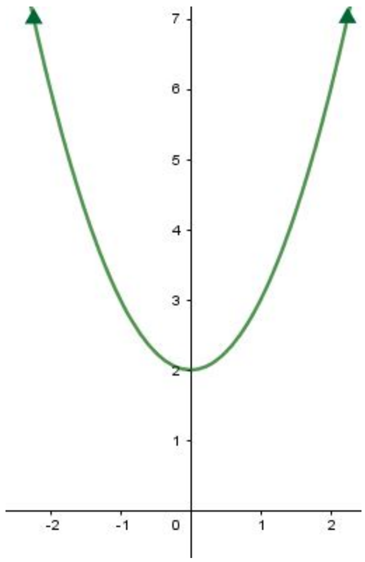
Tomando en cuenta la gráfica de f, es posible observar que cada imagen tiene una única preimagen:



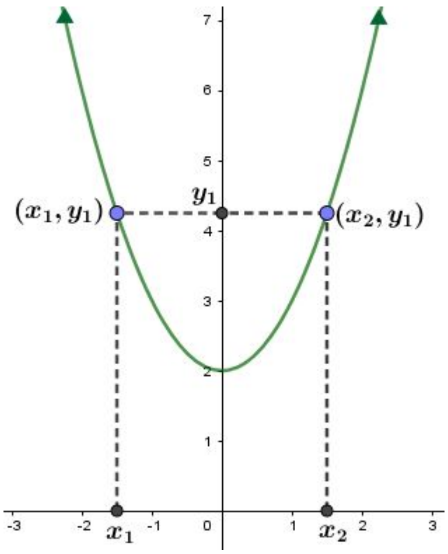
De esta manera, f es biyectiva y por lo tanto tiene inversa.

Ejemplo 2

Considere la gráfica de la función $g : \mathbb{R} \to]2, +\infty[$ y determine si tiene inversa.



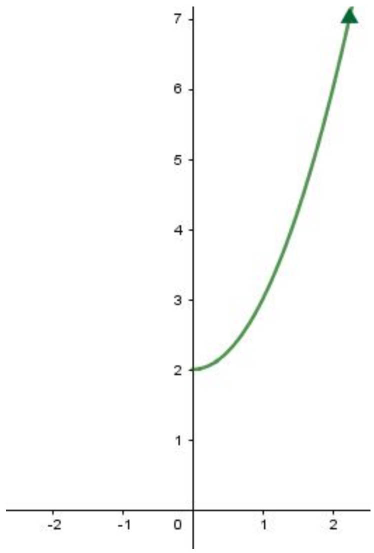
R/ Al igual que en el ejercicio anterior, observando la descripción del dominio y codominio, la función está bien definida y además el ámbito corresponde con el codominio, por lo tanto g es sobreyectiva, sin embargo, al observar la gráfica se determina que existen casos donde una imagen tiene dos preimágenes, siendo esto que g no es inyectiva.



En conclusión, g no es biyectiva y por tanto no tiene inversa.

Ejemplo 3

Considere la gráfica de la función $h : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ y determine si tiene inversa.



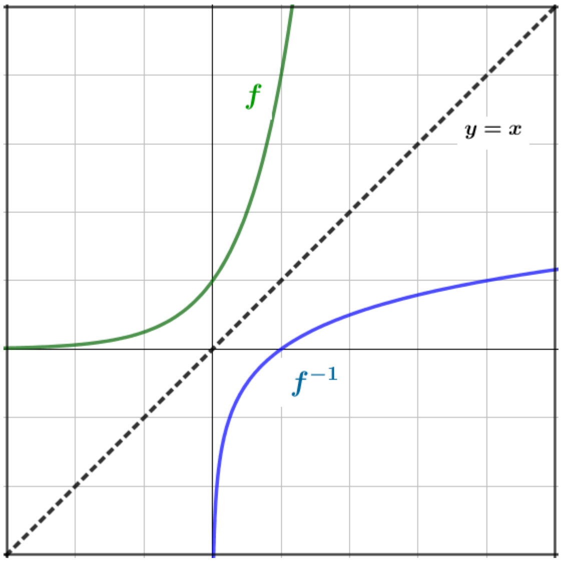
R/ Para este caso, al igual que en el ejemplo 1, es posible observar que la función es inyectiva, sin embargo, el codominio de la función ($\mathbb{R}$) es distinto del ámbito ($[2, +\infty[$), resultando en que h no es sobreyectiva.
Por tanto, h no es biyectiva y no tiene función inversa.

Gráfica de la función inversa

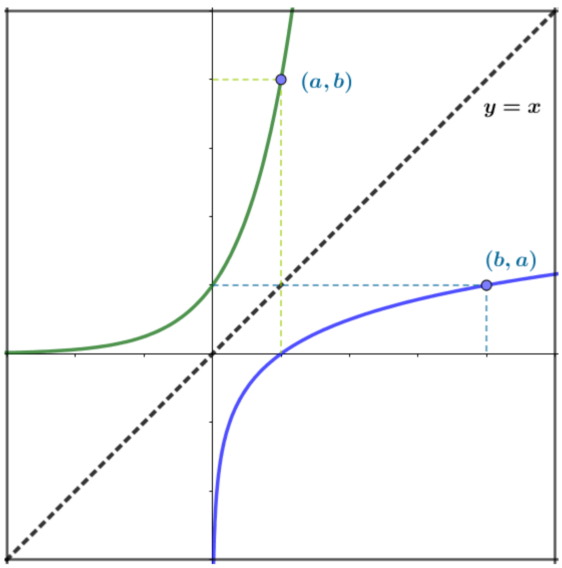
Dado la gráfica de una función de $f : A \to B$ biyectiva, en un plano cartesiano, se puede determinar la gráfica de su función inversa $f^{-1} : B \to A$

- Ambas funciones, f y f^{-1}, presentan una simetría respecto a la recta $y = x$
- Cada par ordenado $(a, b) \in f$ es simétrico a un par ordenado $(b, a) \in f^{-1}$ respecto al a recta $y = x$

Definición



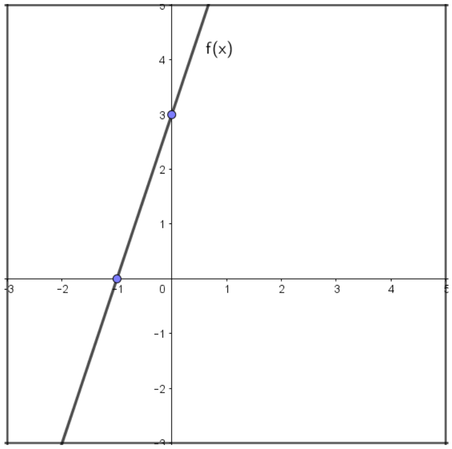
- Es importante identificar la recta $y = x$ en el plano cartesiano.
- La recta $y = x$ tiene como nombre **Recta identidad**
- La función $f^{-1}(x)$ se puede obtener al reflejar la gráfica $f(x)$ utilizando como eje de simetría a la recta identidad.



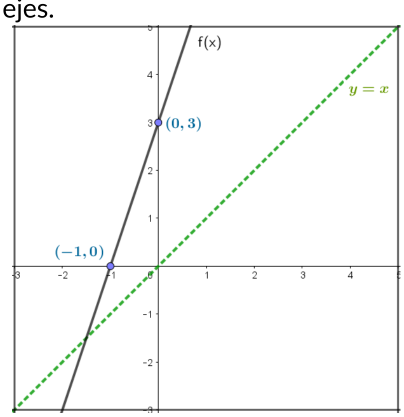
- Cada par ordenado $(a, b) \in f$ es simétrico a $(b, a) \in f^{-1}$ respecto al eje de simetría $y = x$
- Como (a, b) y (b, a) son simétricos, ambos puntos se encuentran a la misma distancia de la recta $y = x$.

Ejemplo 4

Realice la gráfica de $f^{-1}(x)$ de la siguiente función $f(x)$

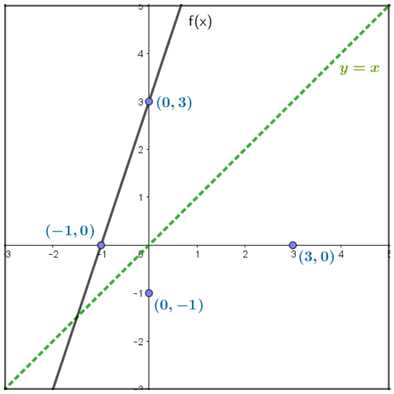


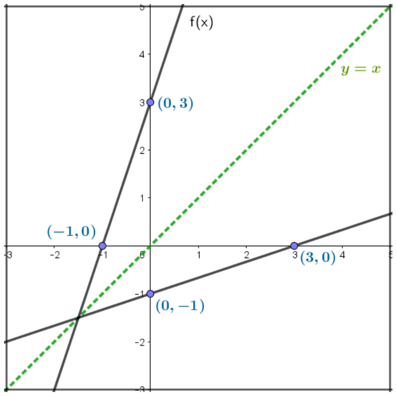
Lo primero es trazar la recta identidad $y = x$, ya que esta será el eje de simetría. Luego se debe de identificar puntos clave de $f(x)$ para realizar su reflexión, en este caso se pueden usar las intersecciones con los ejes.



Note que $(0, -3)$ y $(-1, 0)$ pertenecen a $f(x)$ esto implica que $(-3, 0)$ y $(0, -1)$ pertenecen a $f^{-1}(x)$

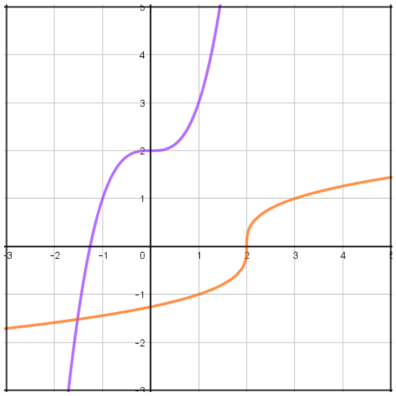
Una vez identificados los puntos pertenecientes a $f^{-1}(x)$ se procede a realizar la gráfica de la función f^{-1}



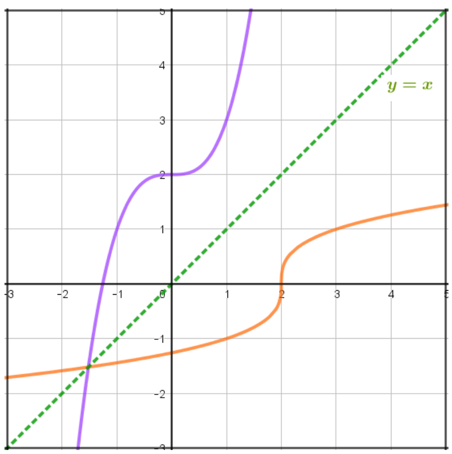


Ejemplo 5

Identifique si el siguiente par de funciones corresponden o no a una función y su inversa.



Para poder determinar si una función es la inversa de la otra, es necesario trazar la recta de identidad $y = x$ y verificar que efectivamente ambas funciones son simétricas respecto a esta recta.



Ambas gráficas representan una función y su inversa, También se puede tomar cualquier par ordenado de una grafica y comprobar si su inversa pertenece a la otra gráfica

Ejemplo 6

Ingrese al siguiente enlace y manipule el deslizador para observar el comportamiento de f y f^{-1}
https://www.geogebra.org/m/txteq4yy

Práctica: Función inversa

Indicaciones generales

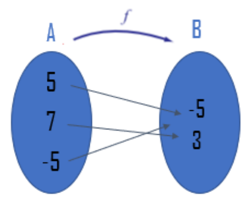
Realice en su cuaderno todos los procedimientos necesarios para llegar a la solución correcta.

1. Indique si las siguientes funciones poseen inversa:

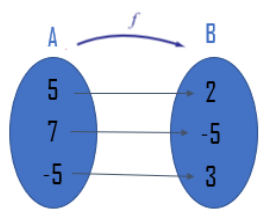
   a) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; con $g(x) = x^2 - 3$

   b) Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; con $h(x) = x + 3$

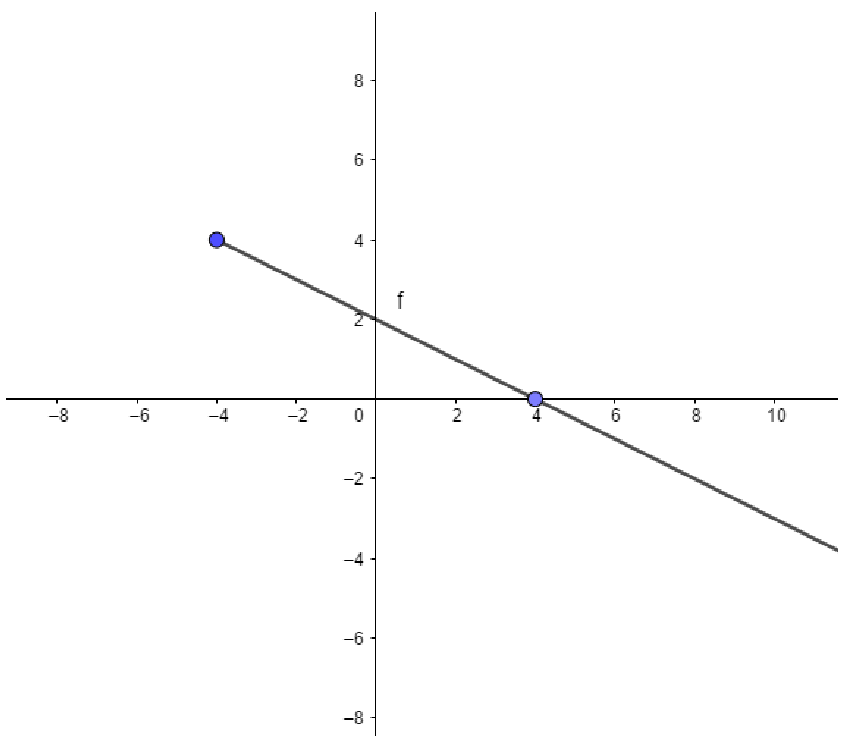
   c) Sea $f : A \to B$



   d) Sea $f : A \to B$



   e) Sea $f :\ [-4, +\infty[\to] - \infty, 4]$



2. De acuerdo con el ejercicio anterior, justifique por qué las funciones poseen o no inversa:

   a) Justificación: ______________________________

   b) Justificación: ______________________________

   c) Justificación: ______________________________

   d) Justificación: ______________________________

   e) Justificación: ______________________________

3. Con respecto al ejercicio 1, escriba el dominio y el codominio tanto de las funciones dadas como el de sus inversas (en los casos afirmativos).

   a) Función
   Dominio: ____________________ Codominio: ____________________

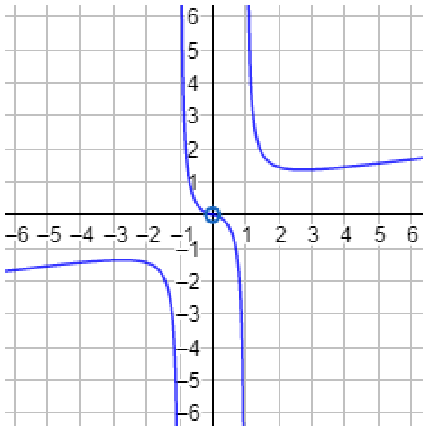
   b) Inversa
   Dominio: ____________________ Codominio: ____________________

   c) Función
   Dominio: ____________________ Codominio: ____________________

   d) Inversa
   Dominio: ____________________ Codominio: ____________________

   e) Inversa
   Dominio: ____________________ Codominio: ____________________

4. Determine si la siguiente función es o no inyectiva a partir de su representación gráfica:

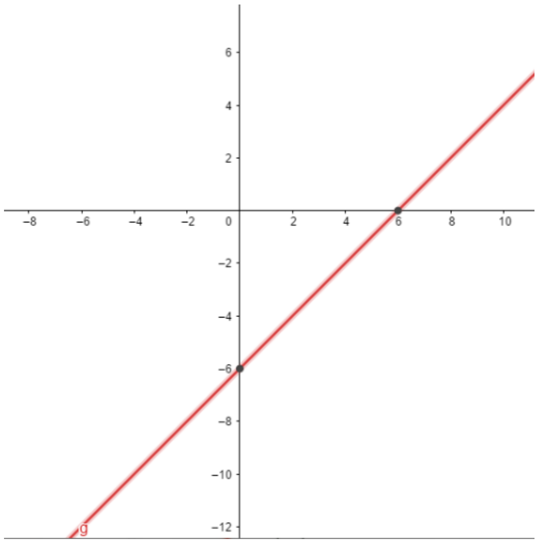


5. Indique los intervalos del dominio en los cuales $f(x) = x^2$ posee inversa:

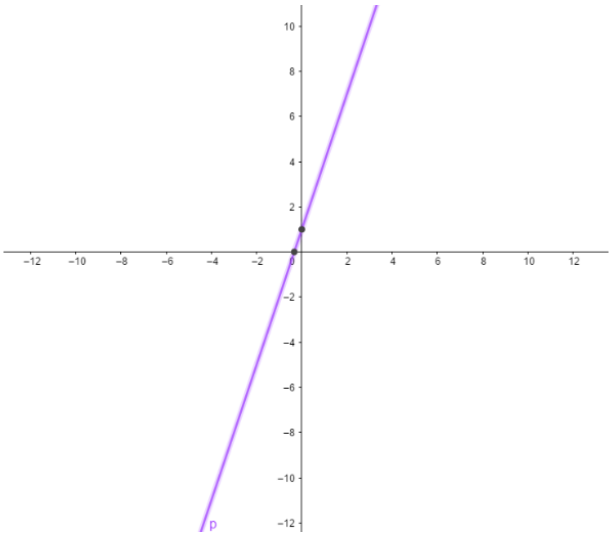
   a) ____________________________

   b) ____________________________

6. Grafique en su respectivo eje de coordenadas la inversa de la siguiente función:

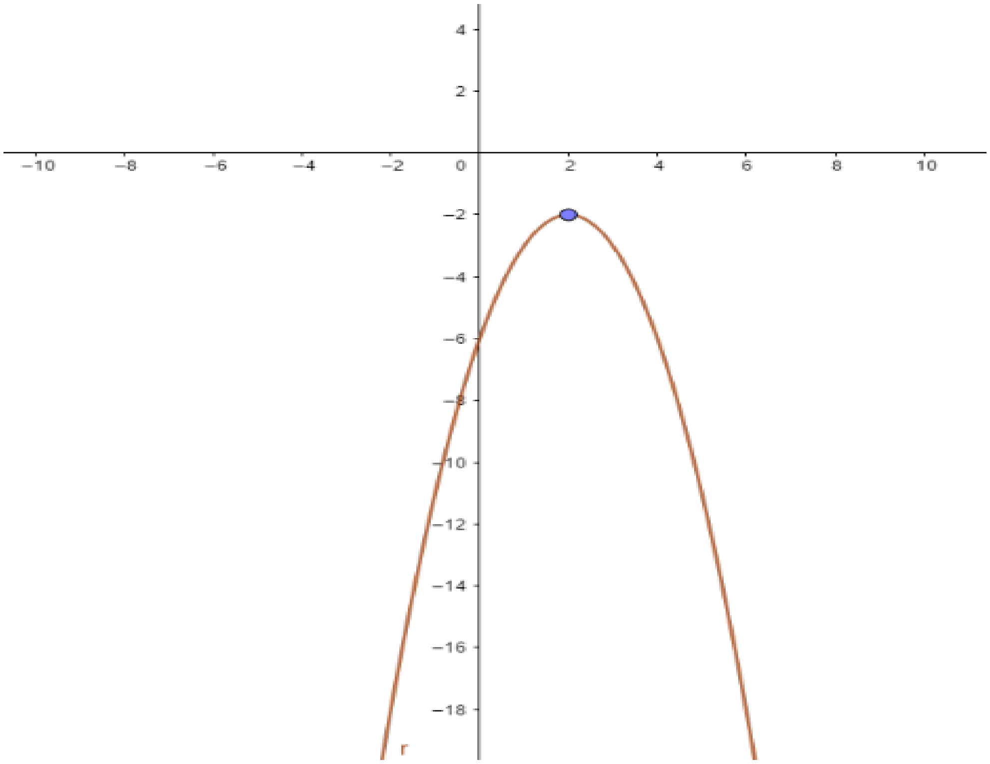


Función f



Función g

7. Determine un intervalo en el cual la función r posee inversa:



Soluciones

1. ¿Las funciones poseen inversa?
   a) No posee inversa.
   b) Sí posee inversa.
   c) No posee inversa.
   d) Sí posee inversa.
   e) No posee inversa.

2. Justificaciones:
   a) La función no es inyectiva, esto quiere decir que dos elementos distintos del dominio poseen la misma imagen, ejemplo $f(5) = f(-5)$ y evidentemente 5 $\neq$ -5. Además, los elementos de $]-\infty, -3[$ no pertenecen al ámbito son distintos, esto quiere decir que el codominio y el ámbito son distintos.

   b) Es inyectiva; además todos los elementos del codominio pertenecen al ámbito.

   c) La función no es inyectiva, esto quiere decir que dos elementos distintos del dominio poseen la misma imagen, ejemplo $f(5) = f(-5)$ y evidentemente 5 $\neq$ -5.

   d) Es inyectiva, además el codominio es igual que el ámbito.

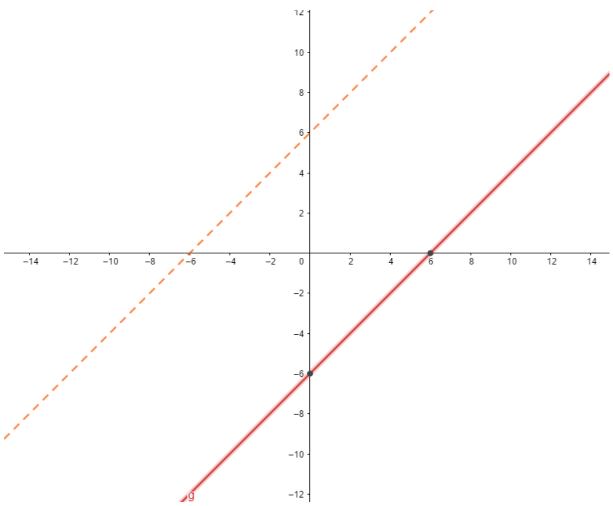
   e) No posee inversa, los elementos de $]4, +\infty[$ no pertenecen al ámbito.

3. (2) h :
   a) **Función**
   Dominio: $\mathbb{R}$ Codominio: $\mathbb{R}$
   b) **Inversa**
   Dominio: $\mathbb{R}$ Codominio: $\mathbb{R}$
   (5) f :
   a) **Función**
   Dominio: $\{5, 7, -5\}$ Codominio: $\{2, -5, 3\}$
   b) **Inversa**
   Dominio: $\{2, -5, 3\}$ Codominio: $\{5, 7, -5\}$

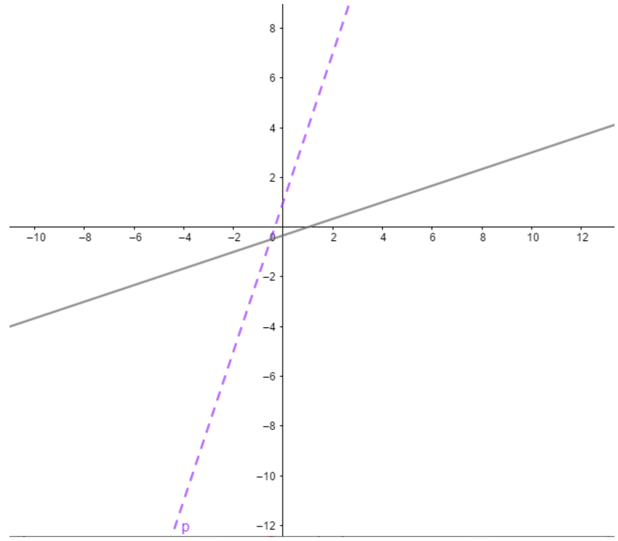
4. No.

5. a) $]-\infty, 0[$
   b) $]0, +\infty[$

6. Gráfica de la función y su inversa:



Función f

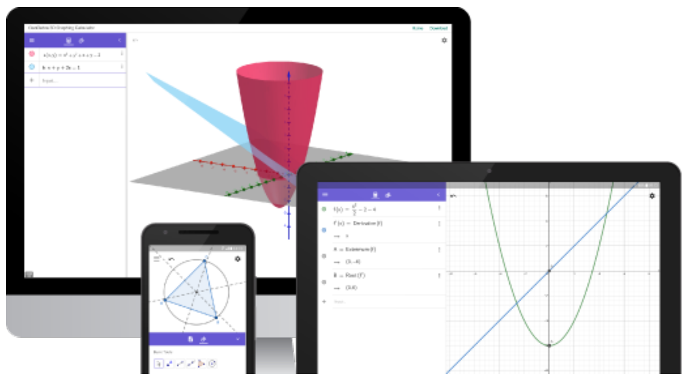


Función g

7. $]-\infty, 2[$ o $]2, +\infty[$

Anexos

¿Desea ver material interactivo?
https://www.geogebra.org/m/txteq4yy



Ingrese al enlace para conocer más acerca de las funciones inversas y sus características.

Referencias bibliográficas

- F Prima. (2015). *Matemática 11: hacia la resolución de problemas*. (2015) F prima Grupo Editorial.
- Gómez, L. (2016). *Matemática 11°: Desarrollando Habilidades*. San José, Costa Rica. Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS).
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programa de estudios. Matemáticas. Costa Rica. Obtenido de ENLACE.
- Porras, V., Durán, E. (2015). Matemática 11°. San José, Costa Rica. Publicaciones Porras.
- Santillana. (2016). *Trabajar en: Matemática 11*. Costa Rica. Editorial Santillana.