PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

11°

Contenidos	Habilidades
Función Inversa	H1: Identificar las condiciones para que una función tenga inversa.
	H2: Relacionar la gráfica de una función con la gráfica de su inversa.
	H3: Determinar intervalos en los cuales una función representada gráficamente tiene inversa

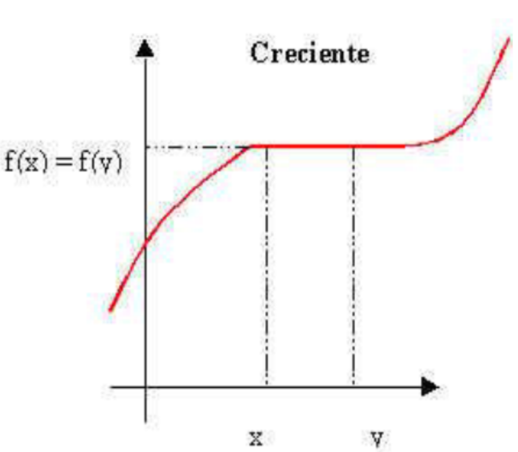
Colaboradores:

Céspedes Gómez Lency Francini
Guillén Méndez Jean Carlo
Nuñez Morales Gustavo
Segura Siles Verónica

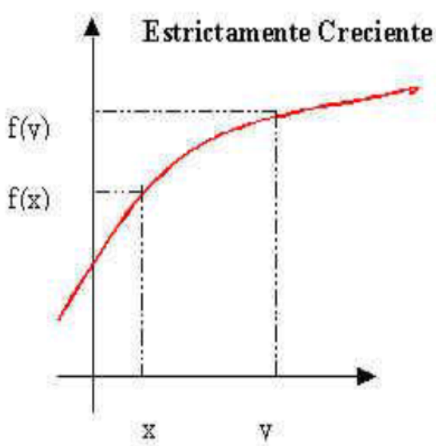
Resumen: Función inversa

Condiciones para que una función tenga inversa:

- Para que una función tenga inversa debe ser una función biyectiva.
  - Para cada imagen existe una única preimagen (inyectividad).
  - El codominio debe ser igual al ámbito.
- La función debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.



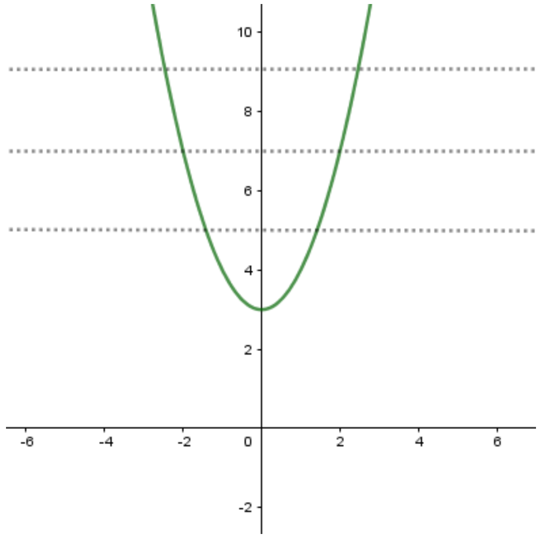
La función f no posee inversa



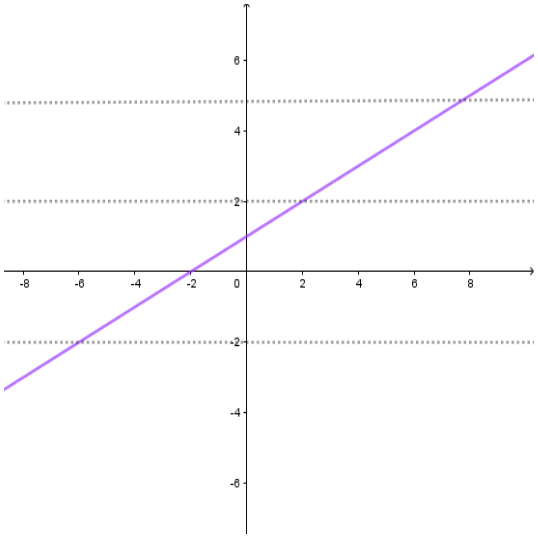
La función f posee inversa

Prueba de la línea horizontal:

Una función es inyectiva si en su gráfica, no existe una línea horizontal que interseque la gráfica en más de un punto. Por ejemplo:



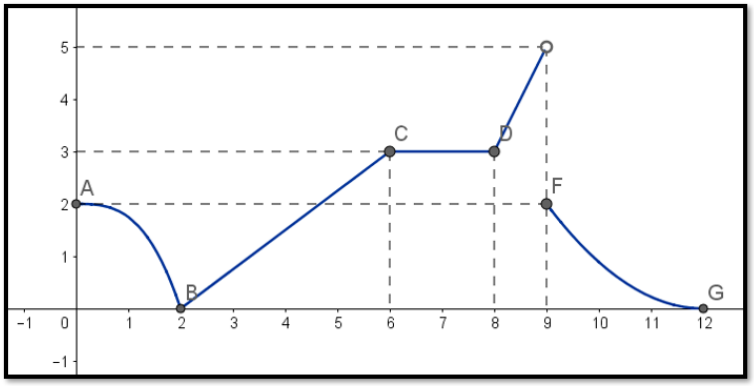
Función NO inyectiva



Función inyectiva

Ejemplo 1

Según la siguiente gráfica (la gráfica de f) resuelva lo siguiente

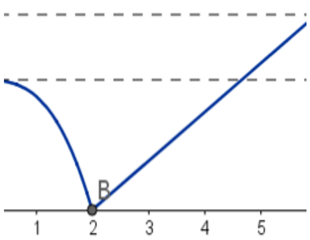


a. ¿La función tiene inversa en $[1, 5]$?

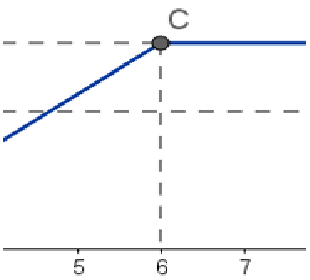
Solución

Note que, en este intervalo, se puede trazar una línea recta que interseca en dos puntos.

Por lo tanto, en $[1, 5]$ la función no tiene inversa.



b. ¿La función tiene inversa en $[5, 7]$?



Solución

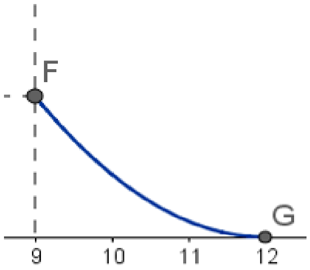
Note que, en $[6, 7]$, la función es horizontal (constante).

Cuando esto sucede, la función no tiene inversa.

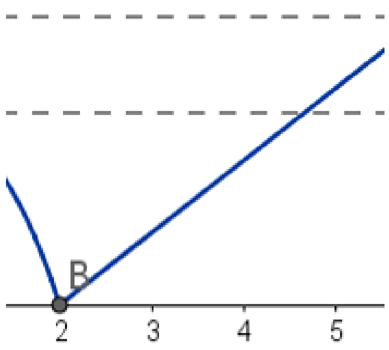
c. ¿La función tiene inversa en $[9, 11]$?

Solución

Note que, en este intervalo, basta con probar que la función va de 1 en 1, es decir, que toda imagen tiene una única preimagen asociada.
Se puede pensar también que si se traza una línea horizontal, no hay forma de que esa línea interseque dos veces a la función en este intervalo.



d. ¿La función tiene inversa en $[2, 5]$?



Solución

Para este intervalo sucede lo mismo que en el ejemplo anterior.

Para que la función **NO** tenga inversa, se puede pensar en dos casos:

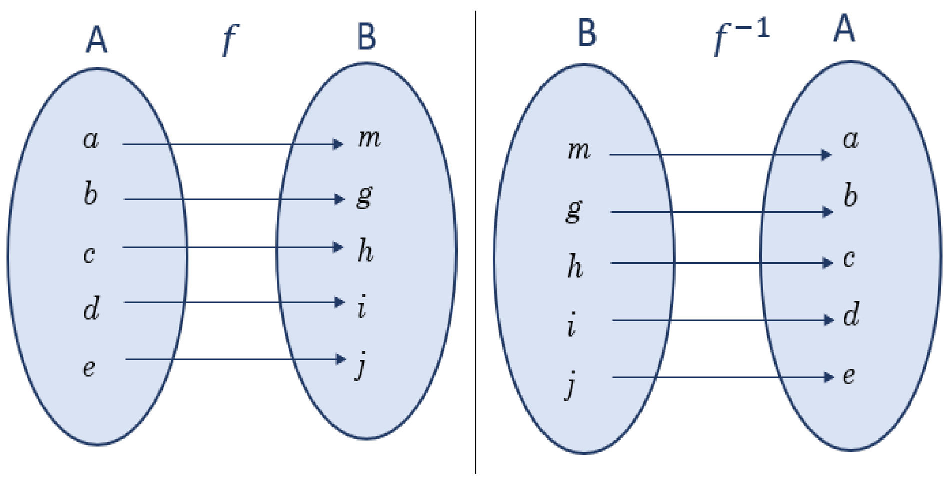
- La función es constante (horizontal)
- Existe una línea horizontal que interseca dos veces la función

Notamos que en $[2, 5]$ no se cumple ninguna de la cumple con alguno de los casos anteriores.
Por tanto, la función es invertible.

Definición:

Si f es biyectiva, entonces $f^{-1} : B \to A$ es la función inversa de f si se cumple que:$f(x) = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x$, para cualquier valor $x \in A$ y su respectiva $y \in B$.

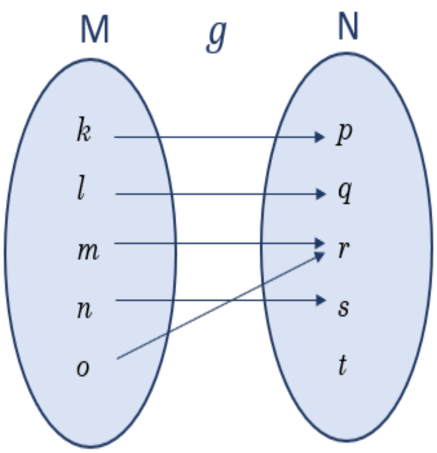
Ejemplo de una función f biyectiva mediante diagramas de Venn:



Nota

La función f posee inversa, porque es una función biyectiva.

Ejemplo de una función g NO biyectiva mediante diagramas de Venn:

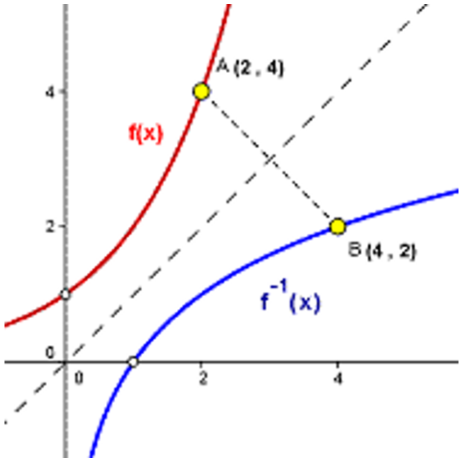


Nota

La función g **NO** posee inversa, porque no es una función biyectiva.

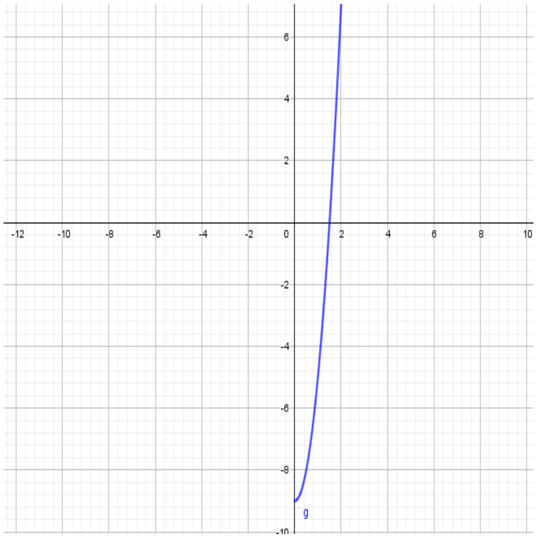
Gráfica de una función inversa

Para dibujar la gráfica de la función inversa de una función dada, primero se dibuja la recta identidad, luego se refleja cada punto de la gráfica de la función simétricamente sobre esa recta.



Ejemplo 2

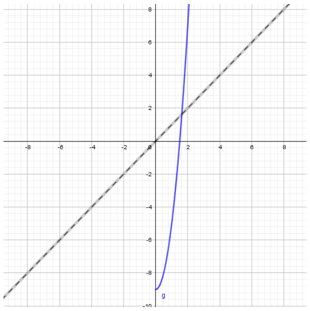
Grafique la función inversa de f a partir de su gráfica.



Solución

PASO 1

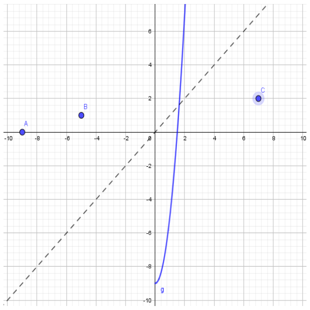
Se debe trazar la recta identidad $y = x$ ya que este será el eje de simetría entre la función y su inversa.



PASO 2

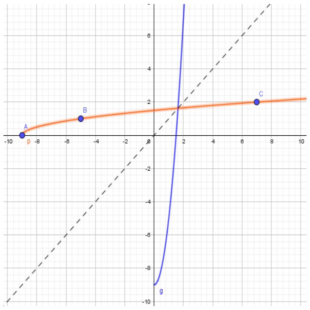
Recuerde que si (a, b) es un punto de f, entonces (b, a) es un punto de f^{-1}. Entoces se pueden tomar varios puntos de f y aplicar lo anterior.

$f(x)$	$f^{-1}(x)$
$(0, -9)$	$(-9, 0)$
$(1, -5)$	$(-5, 1)$
$(2, 7)$	$(7, 2)$



PASO 3

Utilizando el eje de simetría y los puntos anteriores, grafique la inversa de f.



Intervalo donde una función tiene inversa

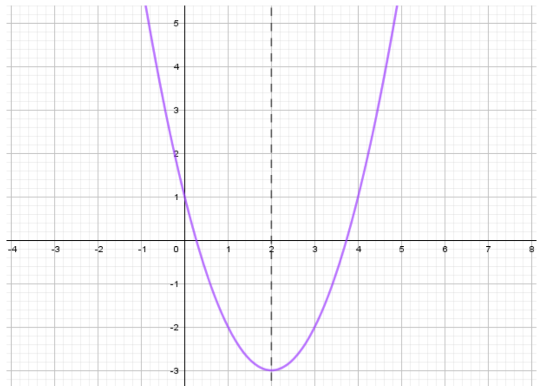
Dada una función f, si en un intervalo I que pertenezca al dominio, f es continua e inyectiva, y $f:[a,b]\to[f(a),f(b)]$ entonces existe una función inversa que cumple: $f^{-1}:[f(a),f(b)]\to[a,b]$

Ejemplo 3

Sea la función $f(x)=x^2-4x-1$. Determine un intervalo donde la función tenga inversa.
Solución:

PASO 1

Gráficamente, se observa que la función es simétrica.Recuerde que el eje de simetría de una función cuadrática es $x=\dfrac{-b}{2a}$



PASO 2

En este caso, en eje de simetría es $x=\dfrac{-(-4)}{2\cdot 1}\Rightarrow x=2$

PASO 3

En este caso, para que la función posea inversa se puede tomar un intervalo a la derecha o a la izquierda del eje de simetría. Varios ejemplos son:

- $[2,+\infty]$
- $[-\infty,1]$
- $[4,100]$
- $[-13,0]$

Ejemplo 4

Si $f(x) = \frac{x}{3} - 1$ es biyectiva y el dominio de f ($D_f =$) $[-1, 4[$. Calcule $D_{f^{-1}}$

Solución

PASO 1

Recuerde que $D_{f^{-1}} = C_f$. Entonces se debe calcular el codominio de f.

PASO 2

Como f es una función lineal y $D_f = [-1, 4[$, note que $C_f = [f(-1), f(4)[$. Calcule $f(-1)$ y $f(4)$

$$f(-1) = \frac{-1}{3} - 1 = \frac{-4}{3}$$

$$f(4) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

PASO 3

Como resultado, se obtiene $C_f = D_{f-1} = \left[\frac{-4}{3}, \frac{1}{3}\right[$

Práctica: Función inversa

Indicaciones generales

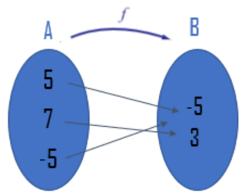
Realice en su cuaderno todos los procedimientos necesarios para llegar a la solución correcta.

1. Indique si las siguientes funciones poseen inversa:

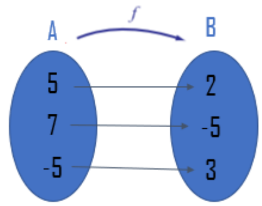
   a) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; con $g(x)=x^2-3$

   b) Sea $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; con $h(x)=x+3$

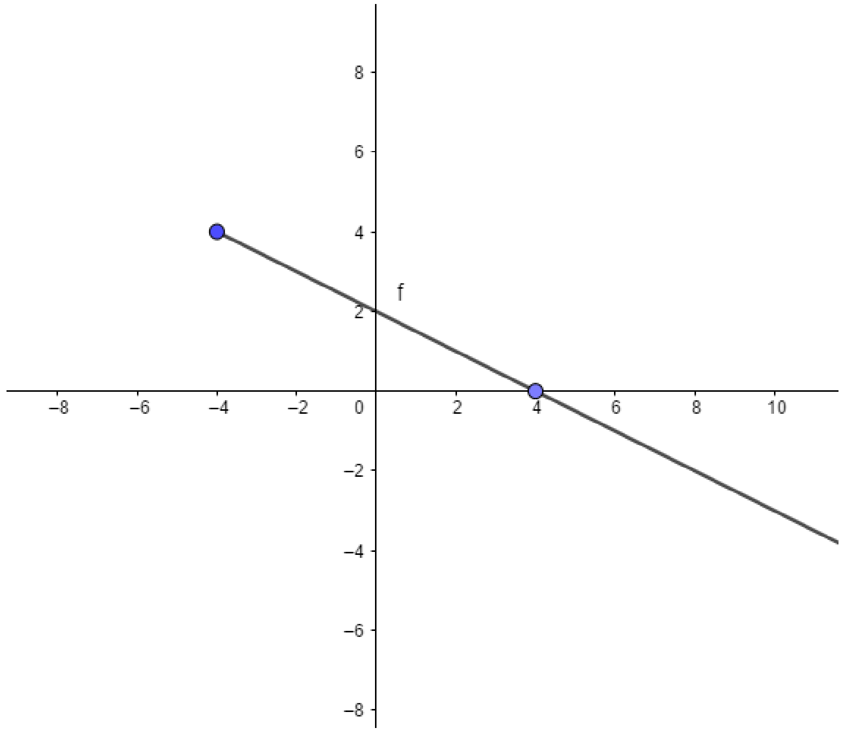
   c) Sea $f:A\to B$



   d) Sea $f:A\to B$



   e) Sea $f:\ [-4,+\infty[\to]-\infty,4]$



2. De acuerdo con el ejercicio anterior, justifique por qué las funciones poseen o no inversa:

   a) Justificación: ______________________

   b) Justificación: ______________________

   c) Justificación: ______________________

   d) Justificación: ______________________

   e) Justificación: ______________________

3. Con respecto al ejercicio 1, escriba el dominio y el codominio tanto de las funciones dadas como el de sus inversas (en los casos afirmativos).

   a) Función
   Dominio: ______________ Codominio: ______________

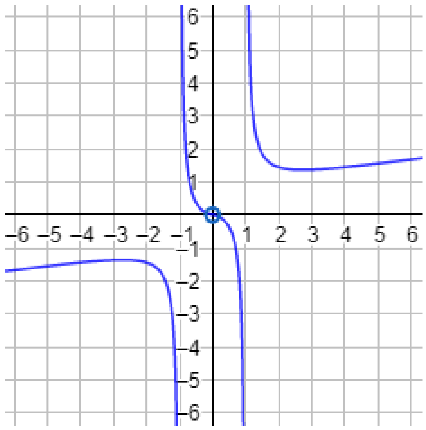
   b) Inversa
   Dominio: ______________ Codominio: ______________

   c) Función
   Dominio: ______________ Codominio: ______________

   d) Inversa
   Dominio: ______________ Codominio: ______________

   e) Inversa
   Dominio: ______________ Codominio: ______________

4. Determine si la siguiente función es o no inyectiva a partir de su representación gráfica:

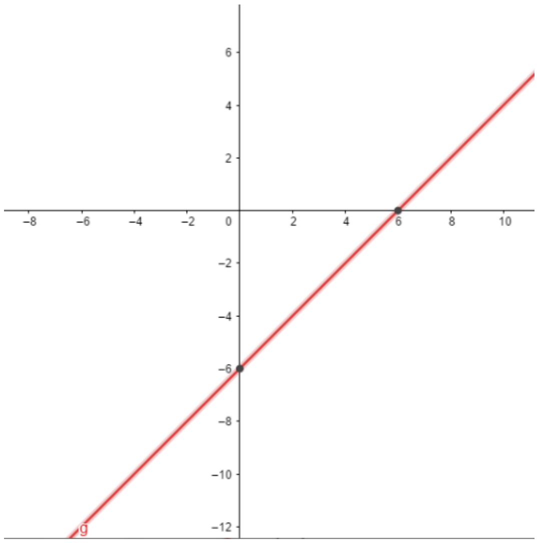


5. Indique los intervalos del dominio en los cuales $f(x) = x^2$ posee inversa:

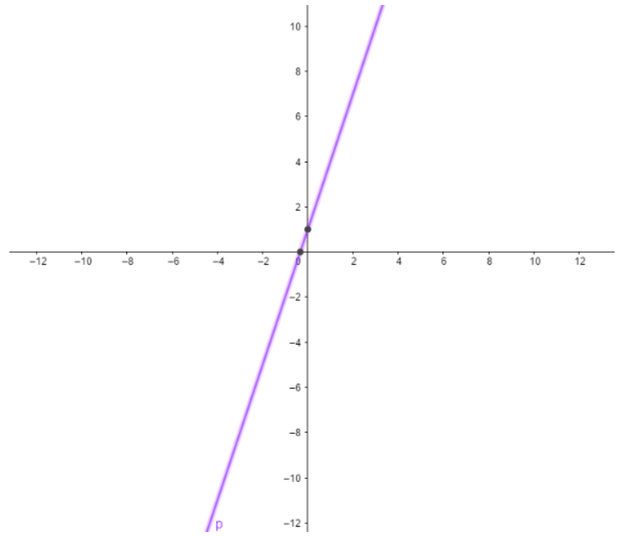
   a) ______________________

   b) ______________________

6. Grafique en su respectivo eje de coordenadas la inversa de la siguiente función:

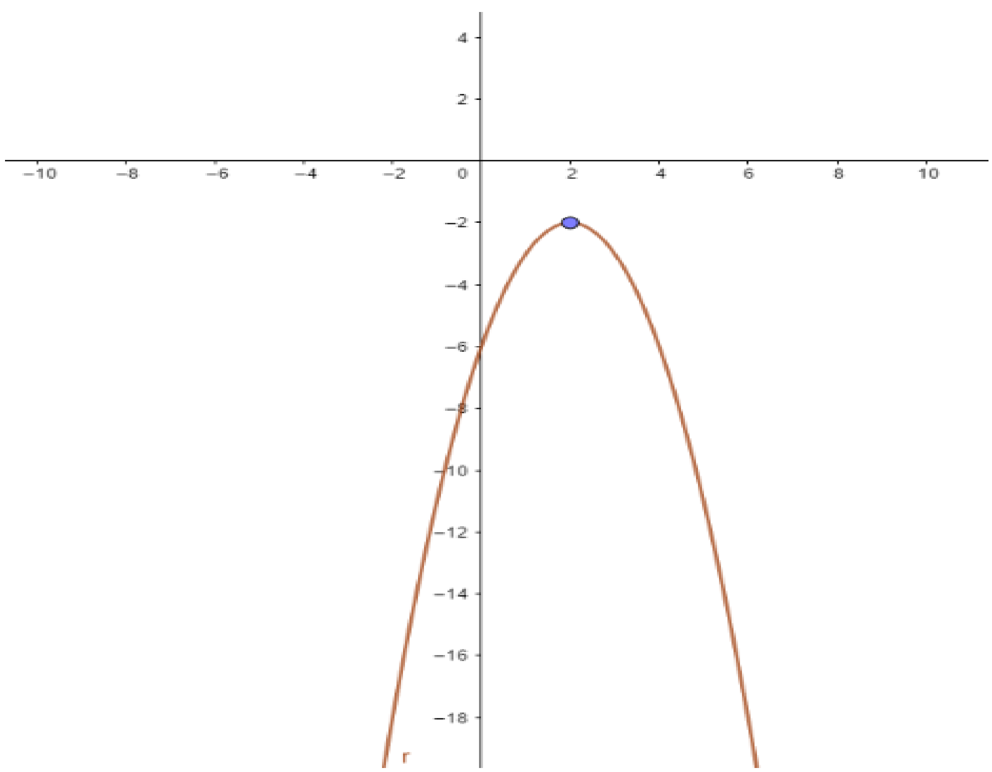


Función f



Función g

7. Determine un intervalo en el cual la función r posee inversa:



Soluciones

1. ¿Las funciones poseen inversa?

   a) No posee inversa.
   b) Sí posee inversa.
   c) No posee inversa.
   d) Sí posee inversa.
   e) No posee inversa.

2. Justificaciones:

   a) La función no es inyectiva, esto quiere decir que dos elementos distintos del dominio poseen la misma imagen, ejemplo $f(5) = f(-5)$ y evidentemente 5 $\neq$ -5. Además, los elementos de $]-\infty, -3[$ no pertenecen al ámbito son distintos, esto quiere decir que el codominio y el ámbito son distintos.

   b) Es inyectiva; además todos los elementos del codominio pertenecen al ámbito.

   c) La función no es inyectiva, esto quiere decir que dos elementos distintos del dominio poseen la misma imagen, ejemplo $f(5) = f(-5)$ y evidentemente 5 $\neq$ -5.

   d) Es inyectiva, además el codominio es igual que el ámbito.

   e) No posee inversa, los elementos de $]4, +\infty[$ no pertenecen al ámbito.

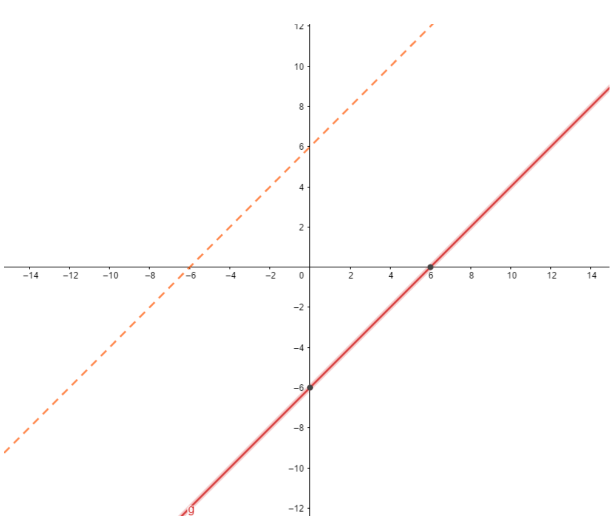
3. (2) h :

   a) **Función**
   Dominio: $\mathbb{R}$ Codominio: $\mathbb{R}$
   b) **Inversa**
   Dominio: $\mathbb{R}$ Codominio: $\mathbb{R}$
   (5) f :
   a) **Función**
   Dominio: $\{5, 7, -5\}$ Codominio: $\{2, -5, 3\}$
   b) **Inversa**
   Dominio: $\{2, -5, 3\}$ Codominio: $\{5, 7, -5\}$

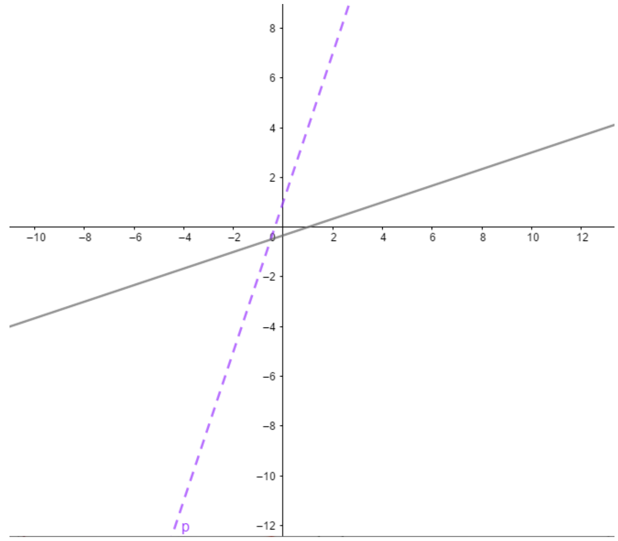
4. No.

5. a) $]-\infty, 0[$
   b) $]0, +\infty[$

6. Gráfica de la función y su inversa:



Función f

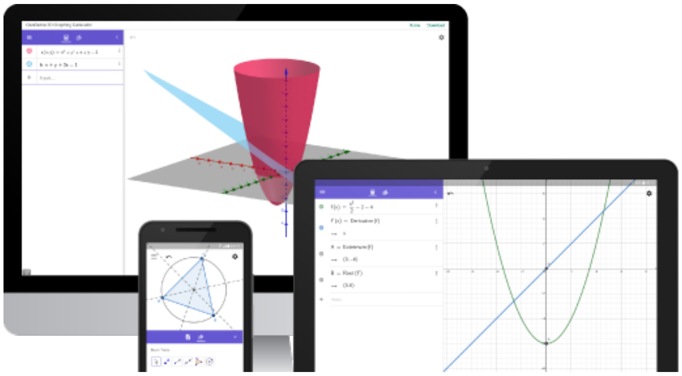


Función g

7. $]-\infty, 2[$ o $]2, +\infty[$

Anexos

¿Desea ver material interactivo?
https://www.geogebra.org/m/b4vyz5s3



Ingrese al enlace para conocer más acerca de las funciones inversas y su comportamiento gráficamente.

Referencias bibliográficas

- F Prima. (2015). *Matemática 11: hacia la resolución de problemas*. (2015) F prima Grupo Editorial.
- Gómez, L. (2016). *Matemática 11°: Desarrollando Habilidades*. San José, Costa Rica. Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS).
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programa de estudios. Matemáticas. Costa Rica. Obtenido de ENLACE.
- Porras, V., Durán, E. (2015). Matemática 11°. San José, Costa Rica. Publicaciones Porras.
- Santillana. (2016). *Trabajar en: Matemática 11*. Costa Rica. Editorial Santillana.