Olimpiada Costarricense de Astronomía y Astronáutica **(Fecha: 21/05/2022)**

Examen Final Nivel 2

Nombre Completo:

Instrucciones: Lea cuidadosamente todas las instrucciones sobre la realización y entrega de la prueba.

- Dispone de **2 horas** para realizar el presente examen.
- Este examen consta de 57 puntos distribuidos en 5 problemas.
- Este es un examen de desarrollo por lo que se **debe mostrar y explicar cada uno de los pasos utilizados para llegar a su resolución**. De lo contrario, al no ser su solución lo suficientemente clara, perderá puntos. Si utiliza alguna identidad no vista en clase **debe demostrarla**.
- Debe resolver el examen en las hojas que se le proporcionan con el enunciado.
- Utilice lapicero con tinta de color azul o negra. No use lápiz, lapicero borrable ni corrector. Si los utiliza no se aceptarán reclamos.
- Se puede utilizar calculadora científica no programable.
- Puede retirarse del aula hasta después de 30 minutos de haberse iniciado el examen, antes no será permitido.
- Debe apagar y guardar su celular o cualquier otro dispositivo electrónico durante el examen.

Algunas ecuaciones de interés

$$E = U + K \qquad U = -\frac{GMm}{r} \qquad K = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad L = L_\odot \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^a \qquad F = ma \qquad F = m\frac{v^2}{r}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \qquad \tau = 10^{10}\left(\frac{M_\odot}{M}\right)^{5/2} \qquad M_{\mathrm{Ch}} = \frac{\omega_3^0\sqrt{3\pi}}{2}\left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2}\frac{1}{(\mu_e m_H)^2} \qquad F = qvB$$

$$\frac{P}{A} = e\sigma T^4 \qquad S_\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1} \qquad H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \qquad v = H_0 r \qquad s = H + \alpha \qquad v_{\mathrm{e}} = \sqrt{2}v_{\mathrm{o}}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{Gm_1m_2}r^3 \qquad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2} \qquad \operatorname{sen}\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} \qquad \frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \qquad \operatorname{sen}h\cos\delta = \operatorname{sen}A_s\cos a$$

$$\cos h\cos\delta = \cos A_s\cos a\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}a\cos\phi \qquad \operatorname{sen}\delta = -\cos A_s\cos a\cos\phi + \operatorname{sen}a\operatorname{sen}\phi$$

$$\cos A_s\cos a = \cos h\cos\delta\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\delta\cos\phi \qquad \operatorname{sen}a = \cos h\cos\delta\cos\phi + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\phi$$

Constantes

$G = 6,67\times10^{-11}$ m^3/kg s^2 $\quad$ $\sigma = 5,67\times10^{-8}$ J s^{-1} m^{-2} K^{-4} $\quad$ $c = 3,0\times10^8$ m/s $\quad$ $h = 6,626\times10^{-34}$J s

$M_\odot = 1{,}99\times10^{30}$ kg $\quad$ $R_\odot = 6,96\times10^8$ m $\quad$ $R_\oplus = 6,37\times10^6$ m $\quad$ $m_H = 1,67\times10^{-27}$ kg

$\omega_0^3 = 2,018$ $\quad$ 1 U.A. $= 1,49\times10^8$ km $\quad$ 1 pc $= 206265$ U.A. $\quad$ 1 pc $= 3{,}26$ año-luz

$H_0 = 72$ (km/s)/Mpc

Problema 1 (Valor: 17 pts)

El radio de Schwarzschild se define como aquel radio al cual ni la luz logra escapar de un cuerpo masivo M de muy alta gravedad. La idea radica en que si una partícula lograse escapar, la misma llegará tan lejos hasta que se agoten tanto su energía potencial como su energía cinética sin embargo si el cuerpo masivo tiene una gravedad lo suficientemente alta dicha partícula nunca escapará.

(a) Basándose en lo anterior y usando consideraciones energéticas de una partícula que viaja inicialmente a c encuentre una expresión para el radio de Schwarzschild R_S en términos de c, G y M.(9 pts)

(b) Determine el radio de Schwarzschild para un cuerpo masivo semejante a una estrella que está en el límite de Chandrashekar. (5 pts)

(c) Determine la aceleración de la gravedad o gravedad efectiva, en la superficie del objeto hipotético del inciso (b). (3pts)

(a) I) Por conservación de la energía:

$$E_i = E_f \Rightarrow K_i + U_i = K_f + U_f \Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v^2 = \frac{GM\cancel{m}}{r} \Rightarrow r = \frac{2GM}{v^2}$$

II) Como la partícula viaja a c $\Rightarrow$ $v = c$ y por tanto

$$\boxed{R_s = \frac{2GM}{c^2}}$$

(b) I) Recordamos que $M_{Ch} = 1{,}44\ M_\odot$ por tanto nuestra $M = 1{,}44\ M_\odot$

II) Sustituyendo en R_s tenemos

$$R_s = \frac{2G(1{,}44\ M_\odot)}{c^2} = \frac{2(6{,}67 * 10^{-11})(1{,}44 * 1{,}99 * 10^{30})}{(3 * 10^8)^2}$$

$$\boxed{R_s = 4247{,}4\ m}$$

(c) Igualamos la II ley de Newton a la fuerza gravitacional

$$\cancel{m}g = \frac{GM\cancel{m}}{R_s^2} \Rightarrow g = \frac{GM}{R_s^2} \Rightarrow \boxed{1{,}06 * 10^{13}\ m/s^2}$$

Problema 2 (Valor: 8 pts)

Si el parámetro de Hubble determina la edad del Universo observable, es posible determinar dicho parámetro si a la inversa se conoce la edad del Universo. Asuma que dentro de 4000 millones de años (tiempo aproximado que le ha tomado a la vida evolucionar en la Tierra), se hace una medición del parámetro de Hubble, si actualmente el universo tiene 13800 millones de años ¿qué valor tendrá el parámetro de Hubble en ese momento en unidades de (km/s)/Mpc asumiendo que el mismo cambia linealmente? (8 pts)

I) Se plantea t_H para dentro de 4000 millones de años

$$t_H = 13800 + 4000 = 17800 \text{ millones de años} * \frac{1 \times 10^6 \text{ años}}{1 \text{ millón de años}} * \frac{365 d}{1 \text{año}} * \frac{24 h}{1 d} * \frac{3600 s}{1 h}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_H = 5{,}61 * 10^{17} s}$$

II) Luego

$$1 pc = 206265 \text{ U.A.} * \frac{1{,}49 * 10^8 \text{ km}}{1 \text{ U.A.}}$$

$$1 pc = 3{,}07 * 10^{13} \text{ km}$$

$$H = \frac{1}{t_H} = \frac{1}{5{,}61 * 10^{17} s} * \frac{3{,}07 * 10^{13} \text{ km}}{1 pc} * \frac{10^6 pc}{1 Mpc}$$

$$\boxed{H = 54{,}72 \ \frac{km/s}{Mpc}}$$

Problema 3 (Valor: 15 pts)

La latitud media a la que ocurren las auroras en nuestro planeta es de unos 85,0 ó $\theta = 5{,}00$ desde el Polo. Si las partículas que llegan en el viento solar poseen una carga $q = 1{,}60 \times 10^{-19}$C, una masa $m = 1{,}50 \times 10^{-25}$ kg y una velocidad $v = 3{,}00 \times 10^{7}$ m/s, determine el valor del campo magnético de la Tierra si las partículas quedan atrapadas en un movimiento circular a lo largo de la latitud mencionada. (15 pts)

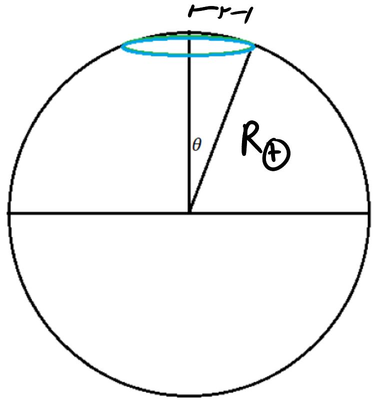


Figura 1: Diagrama de la situación del Problema 3.

I) Obtenemos el radio del circulo donde están las partículas

$$r = R_{\oplus} \operatorname{sen}\theta \Rightarrow r = (6{,}37 * 10^{6}) \operatorname{sen} 5° \Rightarrow \boxed{r = 555182{,}1 \text{ m}}$$

II) Luego lo que ocurre en esta situación es que la fuerza magnética se iguala a la centrípeta

$$F_B = F_c \Rightarrow q v B = \frac{m v^2}{r} \Rightarrow \boxed{B = \frac{m v}{q r}}$$

Sustituyendo valores

$$B = \frac{(1{,}50 * 10^{-25})(3{,}0 * 10^{7})}{(1{,}6 * 10^{-19})(555182{,}1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{B = 5{,}06 * 10^{-5} \text{ T}}$$

$$\boxed{B = 50 \ \mu\text{T}}$$

Problema 4 (Valor: 16 pts)

Sean dos estrellas A y B las cuales se encuentran en un sistema orbital circular binario. Se sabe que la distancia de A al centro de masa del sistema es de 2 U.A. y además se sabe que la masa de A es de 2 $M_\odot$. Si la masa reducida del sistema es de 4/3 $M_\odot$ encuentre:

(a) La masa de B. (4 pts)

(b) La distancia de B al centro de masa. (4 pts)

(c) La distancia entre A y B. (4 pts)

(d) El período del sistema binario (en años). (4 pts)

(a) I) De la masa reducida $\mu = \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}$

$$\rightarrow \quad m_A \mu + m_B \mu = m_A m_B$$

$$m_B(\mu - m_A) = -m_A \mu$$

$$\rightarrow \quad m_B = \frac{m_A \mu}{(\mu - m_A)} \Rightarrow m_B = \frac{-(2 \cdot \frac{4}{3})}{(\frac{4}{3} - 2)}$$

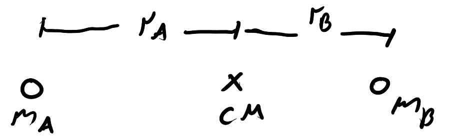
$$\rightarrow \quad \boxed{m_B = 4 M_\odot}$$

(b) De la condición del c.m en un sistema binario

$$m_A r_A = m_B r_B \Rightarrow r_B = \frac{m_A}{m_B} r_A = \left(\frac{2}{4}\right)(2)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{r_B = 1 \text{ U.A.}}$$

(c)



$$\Rightarrow \quad r = r_A + r_B$$

$$\boxed{r = 3 \text{ U.A.}}$$

(d) $T^2 = \dfrac{4\pi^2}{G(m_A + m_B)} r^3 \Rightarrow$ Si hacemos que $G = 4\pi^2$ y $m = M_\odot$ T tendrá unidades de años

$$T = \sqrt{\frac{r^3}{m_A + m_B}} \Rightarrow T = \left(\frac{3^3}{(2+4)}\right)^{1/2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{T = 2{,}12 \text{ años}}$$

Problema 5 (Valor: 18 pts)

Para una estrella la relación entre su magnitud absoluta M, su magnitud aparente m y su distancia r es

$$M = m + 5 - 5\log_{10}(r)$$

(a) ¿Cuánto se debería alejar una estrella que se encuentra a 20 parsec para que se observe una variación de la magnitud aparente de 3? (9 pts)

(b) Las estrellas Pollux y Spica ambas poseen la misma magnitud aparente. Si la magnitud absoluta de Pollux es de 1,2 y si la distancia a Spica es 6 veces la distancia a Pollux ¿cuál es la magnitud absoluta de Spica? (9 pts)

(a) I) $\Delta m = 3 = m_f - m_i$ luego $M_i = M_f$

II) la ecuación inicial: $M_i = m_i + 5 - 5\log(20)$ (a)

la ecuación final $M_f = m_f + 5 - 5\log(r_f)$ (b)

III) Hacemos (b) − (a)

$$M_f - M_i = 0 = \underbrace{m_f - m_i}_{3} + \cancel{5} - \cancel{5} - 5\left(\log(r_f) - \log(20)\right)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 3 - 5\log\left(\frac{r_f}{20}\right) \Rightarrow \quad \frac{3}{5} = \log\left(\frac{r_f}{20}\right)$$

$$r_f = 20 * 10^{3/5} \Rightarrow \boxed{r_f = 79{,}6\ pc}$$

IV) ¿Cuánto debe alejarse? $\Rightarrow \Delta r = r_f - r_i = 79{,}6 - 20$

$$\boxed{\Delta r = 59{,}6\ pc}$$

(b) I) Planteamos las ecuaciones de Spica y Pollux

(c) $M_s = m_s + 5 - 5\log r_s$ $r_s = 6\,r_p$

(d) $M_p = m_p + 5 - 5\log r_p$

II) Restamos (c) − (d)

$$M_s - M_p = \underbrace{m_s - m_p}_{0} + \underbrace{5 - 5}_{0} - 5\left(\log r_s - \log r_p\right)$$

$$\Rightarrow M_s = M_p - 5\log\left(\frac{6\,r_p}{r_p}\right) \Rightarrow M_s = 1{,}2 - 5\log 6$$

$$\boxed{M_s = -2{,}69}$$