

Examen Final Nivel 1

Nombre Completo:

Instrucciones: Lea cuidadosamente todas las instrucciones sobre la realización y entrega de la prueba.

- Dispone de **2 horas** para realizar el presente examen.
- Este examen consta de 57 puntos distribuidos en 5 problemas.
- Este es un examen de desarrollo por lo que se **debe mostrar y explicar cada uno de los pasos utilizados para llegar a su resolución**. De lo contrario, al no ser su solución lo suficientemente clara, perderá puntos. Si utiliza alguna identidad no vista en clase **debe demostrarla**.
- Debe resolver el examen en las hojas que se le proporcionan con el enunciado.
- Utilice lapicero con tinta de color azul o negra. No use lápiz, lapicero borrable ni corrector. Si los utiliza no se aceptarán reclamos.
- Se puede utilizar calculadora científica no programable.
- Puede retirarse del aula hasta después de 30 minutos de haberse iniciado el examen, antes no será permitido.
- Debe apagar y guardar su celular o cualquier otro dispositivo electrónico durante el examen.

Algunas ecuaciones de interés

$$E = U + K \quad U = -\frac{GMm}{r} \quad K = \frac{1}{2}mv^2 \quad L = L_{\odot} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^a \quad F = ma \quad F = m \frac{v^2}{r}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \quad \tau = 10^{10} \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^{5/2} \quad M_{\text{Ch}} = \frac{\omega_3^0 \sqrt{3\pi}}{2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{1}{(\mu_e m_H)^2} \quad F = qvB$$

$$\frac{P}{A} = e\sigma T^4 \quad S_{\nu} = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad v = H_0 r \quad s = H + \alpha \quad v_e = \sqrt{2}v_o$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \mu}{Gm_1 m_2} r^3 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \sin \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad \frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{1}{f} \quad \sin h \cos \delta = \sin A_s \cos a$$

$$\cos h \cos \delta = \cos A_s \cos a \sin \phi + \sin a \cos \phi \quad \sin \delta = -\cos A_s \cos a \cos \phi + \sin a \sin \phi$$

$$\cos A_s \cos a = \cos h \cos \delta \sin \phi - \sin \delta \cos \phi \quad \sin a = \cos h \cos \delta \cos \phi + \sin \delta \sin \phi$$

Constantes

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2 \quad \sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ J s}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s} \quad h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

$$M_{\odot} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg} \quad R_{\odot} = 6,96 \times 10^8 \text{ m} \quad R_{\oplus} = 6,37 \times 10^6 \text{ m} \quad m_H = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\omega_0^3 = 2,018 \quad 1 \text{ U.A.} = 1,49 \times 10^8 \text{ km} \quad 1 \text{ pc} = 206265 \text{ U.A.} \quad 1 \text{ pc} = 3,26 \text{ año-luz}$$

$$H_0 = 72 \text{ (km/s)/Mpc}$$

Problema 1

(Valor: 17 pts)

El radio de Schwarzschild se define como aquel radio al cual ni la luz logra escapar de un cuerpo masivo M de muy alta gravedad. Para obtener dicha solución se debe utilizar la conservación de la energía, donde se requieren las siguientes relaciones:

$$E_{\text{inicial}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

La idea radica en que si una partícula lograra escapar, la misma llegará tan lejos hasta que toda su energía sea $E_f = 0$ J. Sin embargo si el cuerpo masivo tiene una gravedad lo suficientemente alta dicha partícula nunca escapará.

- (a) Basándose en lo anterior y usando consideraciones energéticas de una partícula que viaja inicialmente a $v = c$ encuentre una expresión para el radio de Schwarzschild R_S en términos de c , G y M . (9 pts)
- (b) Determine el radio de Schwarzschild para un cuerpo masivo semejante a una estrella que está en el límite de Chandrashekar ($M_{\text{Ch}} = 1,44 M_{\odot}$). (5 pts)
- (c) Determine la aceleración de la gravedad o gravedad efectiva, en la superficie del objeto hipotético del inciso (b) sabiendo que $F = \frac{GMm}{r^2}$. (3pts)

Problema 2

(Valor: 8 pts)

Si el parámetro de Hubble determina la edad del Universo observable, es posible determinar dicho parámetro si a la inversa se conoce la edad del Universo. Asuma que dentro de 4000 millones de años (tiempo aproximado que le ha tomado a la vida evolucionar en la Tierra), se hace una medición del parámetro de Hubble, si actualmente el universo tiene 13800 millones de años ¿qué valor tendrá el parámetro de Hubble en ese momento en unidades de (km/s)/Mpc asumiendo que el mismo cambia linealmente? *Nota:* $1 \text{ Mpc} = 1 \times 10^6 \text{ pc}$. (8 pts)

Problema 3

(Valor: 15 pts)

La latitud media a la que ocurren las auroras en nuestro planeta es de unos $85,0$ ó $\theta = 5,00$ desde el Polo. Si las partículas que llegan en el viento solar poseen una carga $q = 1,60 \times 10^{-19} \text{C}$, una masa $m = 1,50 \times 10^{-25} \text{kg}$ y una velocidad $v = 3,00 \times 10^7 \text{m/s}$, determine el valor del campo magnético de la Tierra si las partículas quedan atrapadas en un movimiento circular a lo largo de la latitud mencionada. *Nota:* El radio al que giran las partículas a esa latitud es $R_{\text{Aurora}} = 555 \times 10^3 \text{m}$. Además la fuerza magnética está dada por $F = qvB$ donde B es el campo magnético. (15 pts)

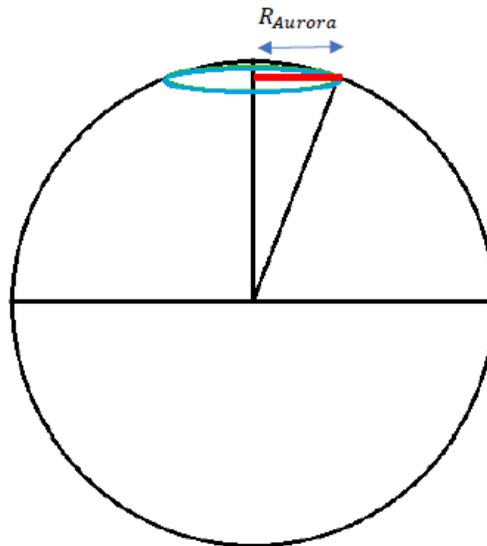


Figura 1: Diagrama de la situación del Problema 3.

Problema 4

(Valor: 16 pts)

Sean dos estrellas A y B las cuales se encuentran en un sistema orbital circular binario. Se sabe que la distancia de A al centro de masa del sistema es de 2 U.A. y además se sabe que la masa de A es de $2 M_{\odot}$. Si la masa reducida μ del sistema es de $4/3 M_{\odot}$ encuentre:

- (a) La masa de B . (4 pts)
- (b) La distancia de B al centro de masa si se cumple que $m_A r_A = m_B r_B$. (4 pts)
- (c) La distancia entre A y B . (4 pts)
- (d) El período del sistema binario (en años). (4 pts)

Problema 5

(Valor: 18 pts)

Para una estrella la relación entre su magnitud absoluta M , su magnitud aparente m y su distancia r es

$$M = m + 5 - 5 \log_{10}(r)$$

Las estrellas Pollux y Spica ambas poseen la misma magnitud aparente m . Si la magnitud absoluta M de Pollux es de 1,2 y si además se sabe que las distancias a Spica y a Pollux son de 11,04 pc y de 1,84 pc respectivamente ¿cuál es la magnitud absoluta de Spica? (18 pts)