PAEM Proyecto de Apoyo a la Educación Matemática

TEC Tecnológico de Costa Rica

Material de Apoyo

11°

Contenidos	Habilidades
Funciones exponenciales • ecuaciones exponenciales	H7: Plantear y resolver problemas utilizando ecuaciones exponenciales.

Colaboradores:

Céspedes Gómez Lency Francini
Guillén Méndez Jean Carlo
Nuñez Morales Gustavo
Segura Siles Verónica

Resumen de ecuaciones exponenciales:

Definición

Una **ecuación exponencial** es una ecuación cuya incógnita está únicamente en el exponente de uno o varios términos de la ecuación.

Nota:
Se debe tener en cuenta que no hay un procedimiento concreto para resolverlas, dependiendo de algunas de las características de las ecuaciones exponenciales, así será el método adecuado para resolverlas, cabe destacar que es sumamente importante conocer y aplicar las propiedades de las potencias, de las raíces y, en su caso, de los logaritmos para resolverlas.

Ecuaciones que se pueden expresar con la misma base:

Si retomamos el concepto de preimágenes en una función exponencial, se puede notar que frecuentemente se tiene la necesidad de resolver ecuaciones de la forma $a^x = b$.

Algunos casos que se pueden presentar son:

- Conseguir que los dos miembros de la ecuación tengan la misma base.
- Aplicar un cambio de variable.
- Extraer factor común.

Para resolver ecuaciones exponenciales, se debe intentar escribir ambos lados de la ecuación como potencias con la misma base, luego deducir que si:

$$a^x = a^y \Longleftrightarrow x = y$$

Por último, se resuelve la ecuación que queda.

Nota:
En este último paso, se ha usado el hecho de que las funciones exponenciales son inyectivas. En el proceso será necesario aplicar las leyes de potencias constantemente para poder expresar las potencias con una misma base.

Ahora, se mostrarán algunos ejemplos que aclaren cada uno de los casos que se puedan presentar.

Ejemplos

1. Ver video en el siguiente enlace https://youtu.be/3UfP4gnqtQ8
2. Ver video en el siguiente enlace https://youtu.be/iimKK4alxLU
3. Resuelva las siguientes funciones exponenciales.

a) $14^{5x-1} = 14^{4-x}$

Paso 1 Si las bases son iguales, se igualan los exponentes.

$5x - 1 = 4 - x$

Paso 2 Despejar x.

$5x + x = 4 + 1$

Paso 3 Resolver la ecuación.

$6x = 5$

$\Rightarrow x = \dfrac{5}{6}$

Paso 4 Escribir el conjunto solución

$S : \left\{\dfrac{5}{6}\right\}$

b) $2^{2x+6} = 16^{-x}$

Paso 1 Asegurarnos que las bases sean iguales.

$2^{2x+6} = 2^{-4x}$

Paso 2 Si las bases son iguales, se igualan los exponentes.

$2x + 6 = -4x$

Paso 3 Despejar x.

$2x + 4x = 6$

Paso 4 Resolver la ecuación.

$6x = 6$

$\Rightarrow x = \dfrac{6}{6}$

$\Rightarrow x = 1$

Paso 5 Escribir el conjunto solución

$S : \{1\}$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 27^{-x}$

Paso 1 Asegurarnos que las bases sean iguales.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{3^3}\right)^{x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{3x}$$

Paso 2 Si las bases son iguales, se igualan los exponentes.

$2x = 3x$

Paso 3 Despejar x.

$2x - 3x = 0$

Paso 4 Resolver la ecuación.

$-1x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow x = 0$

Paso 5 Escribir el conjunto solución

$S : \{0\}$

d) $4^{x+15} \cdot 16^{3x} = 64^{x-1}$

Paso 1 Asegurarnos que las bases sean iguales.

$4^{x+15} \cdot 4^{2\cdot 3x} = 4^{3\cdot(x-1)}$

$\Rightarrow 4^{x+15+2\cdot 3x} = 4^{3\cdot(x-1)}$

$\Rightarrow 4^{x+15+6x} = 4^{3\cdot(x-1)}$

$\Rightarrow 4^{7x+15} = 4^{3\cdot(x-1)}$

Paso 2 Si las bases son iguales, se igualan los exponentes.

$7x + 15 = 3 \cdot (x - 1)$

Paso 3 Despejar x.

$7x + 15 = 3x - 3$

$\Rightarrow 7x - 3x = -15 - 3$

Paso 4 Resolver la ecuación.

$4x = -18$

$$\Rightarrow x = \frac{-18}{4} = \frac{-9}{2}$$

Paso 5 Escribir el conjunto solución

$$S : \left\{\frac{-9}{2}\right\}$$

Ejemplo de ecuación exponencial haciendo cambio de variable.

a) $4^x - 5 \cdot 2^{2x} + 2^x = 0$

Paso 1 Realizar cambio de variable a

$2^{2x} - 5 \cdot 2^{2x} + 2^x = 0$

Para $u = 2^x$

Paso 2 Realizar la sustitución

$u^2 - 5 \cdot u^2 + u = 0$

Paso 3 Resolver la ecuación

$-4u^2 + u = 0$

$\Rightarrow u(-4u + 1) = 0$

$\Rightarrow u = 0 \vee -4u + 1 = 0$

$\Rightarrow u = 0 \vee u = \dfrac{1}{4}$

Paso 4 Sustituimos el valor de u del paso 1.

Para $u = 0$

$0 = 2^x$ (Note que esto no puede pasar, pues no es posible que 2^x sea cero.)

Entonces para $u = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4} = 2^x$

Paso 5 Escribir las bases iguales

$\dfrac{1}{4} = 2^x$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2^2} = 2^x$

$\Rightarrow 2^{-2} = 2^x$

Paso 6 Si las bases son iguales, se igualan los exponentes.

$-2 = x$

Paso 7 Escribir el conjunto solución

$S : \{-2\}$

Práctica:

1) Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales y determine su conjunto solución con el método que considere más adecuado. **En caso de ser necesario**, indique el cambio de variable que utilizó.

a) $5^{3x} = 5^{2x} \cdot 125$

b) $2^x = 4^{x-1}$

c) $5^{x^2-2x+4} = 125$

d) $\sqrt{3^{5x-11}} = 9$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{1}{49}\right)^{-3x-5}$

f) $\left(\frac{64}{\sqrt[3]{8}}\right)^{\frac{x-1}{2}} = (0,25) \cdot 2^{\frac{x}{2}+1}$

g) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$

h) $3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x = -1$

i) $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$

j) $26 \cdot 5^x = 5 \cdot 5^{2x} + 5$

2) Realice la comprobación del conjunto solución las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 7$ Conjunto solución : $\{1\}$

b) $4^{3x+5} = 4^2$ Conjunto solución $S : \{-1\}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+4}$ Conjunto solución $S : \{\frac{-4}{5}\}$

3) Proponga una ecuación exponencial en la que el conjunto solución sea el indicado en cada caso.

a) $S : \{5\}$

Posible ecuación exponencial: ______________

b) $S : \{-4\}$

Posible ecuación exponencial: ______________

Soluciones

1) Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales y determine su conjunto solución con el método que considere más adecuado. **En caso de ser necesario**, indique el cambio de variable que utilizó.

a) $5^{3x} = 5^{2x} \cdot 125$
$S : \{3\}$

b) $2^x = 4^{x-1}$
$S : \{2\}$

c) $5^{x^2-2x+4} = 125$
$S : \{1\}$

d) $\sqrt{3^{5x-11}} = 9$
$S : \{3\}$

e) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+2x} = \left(\frac{1}{49}\right)^{-3x-5}$
$S : \{-6{,}4494, -1{,}5505\}$

f) $\left(\frac{64}{\sqrt[3]{8}}\right)^{\frac{x-1}{2}} = (0,25) \cdot 2^{\frac{x}{2}+1}$
$S : \{\frac{3}{4}\}$

g) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$
$S : \{3\}$

h) $3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x = -1$
Cambio de variable: $y = 3^x$
$S : \{0, 1\}$

i) $2^{2x+2} + 2^{x+3} = 320$
Cambio de variable: $y = 2^x$
$S : \{3\}$
Nota: $2^x = -10$ no tiene solución

j) $26 \cdot 5^x = 5 \cdot 5^{2x} + 5$
Cambio de variable: $y = 5^x$
$S : \{-1, 1\}$

2) Realice la comprobación del conjunto solución las siguientes ecuaciones exponenciales.

a) $2^{x+1} + 2^x + 2^{x-1} = 7$ Conjunto solución : $\{1\}$
$2^{1+1} + 2^1 + 2^{1-1} = 7$
$2^2 + 2^1 + 2^0 = 7$
$4 + 2 + 1 = 7$
$7 = 7$

b) $4^{3x+5} = 4^2$ Conjunto solución $S : \{-1\}$
$4^{3(-1)+5} = 4^2$
$4^{-3+5} = 4^2$
$4^2 = 4^2$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x+4}$ Conjunto solución $S : \{\frac{-4}{5}\}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{5}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3\frac{-4}{5}+4}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{5}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-8}{5}}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-4}{5}}$

3) Proponga una ecuación exponencial en la que el conjunto solución sea el indicado en cada caso.

a) $S : \{5\}$

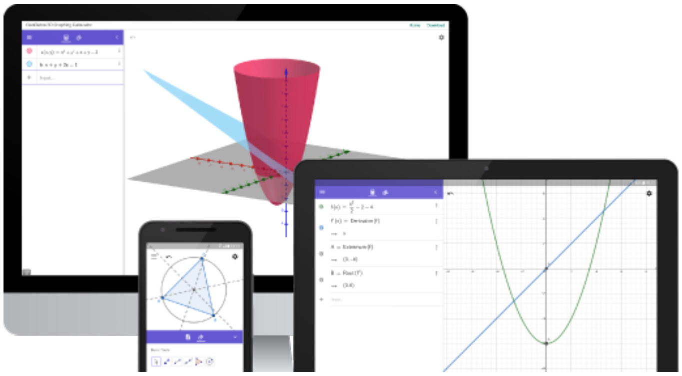
Posible ecuación exponencial: $9^x \cdot 3 = 3^{x+2} \cdot 3^4$

b) $S : \{-4\}$

Posible ecuación exponencial: $8^x \cdot \frac{1}{4}^x = 2^x$

Anexos

¿Desea ver material interactivo?



Ingrese al enlace para conocer más acerca de la inversa de la función lineal y su comportamiento gráficamente.

Referencias bibliográficas

- F Prima. (2015). *Matemática 11: hacia la resolución de problemas*. (2015) F prima Grupo Editorial.
- Gómez, L. (2016). *Matemática 11°: Desarrollando Habilidades*. San José, Costa Rica. Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS).
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programa de estudios. Matemáticas. Costa Rica. Obtenido de ENLACE.
- Porras, V., Durán, E. (2015). Matemática 11°. San José, Costa Rica. Publicaciones Porras.
- Santillana. (2016). *Trabajar en: Matemática 11*. Costa Rica. Editorial Santillana.