RESUMEN CAPÍTULO 3: MECÁNICA CELESTE

Leyes de Kepler y Fuerza de Gravedad:

Describen el movimiento de los planetas en su órbita alrededor del Sol.

Son tres leyes:

1. ## Primera Ley de Kepler

Cada planeta gira alrededor del Sol describiendo una órbita elíptica y el sol se ubica en uno de los focos de la elipse.

Parámetros de una elipse para entender porque la órbita de un planeta es elíptica:

1.1) Eje mayor y eje menor:

Las elipses poseen 2 ejes, sin embargo, para efectos matemáticos se trabajan con semiejes los cuales se definen como la mitad de los ejes. El semieje mayor se denota con la letra α (Alpha minúscula).

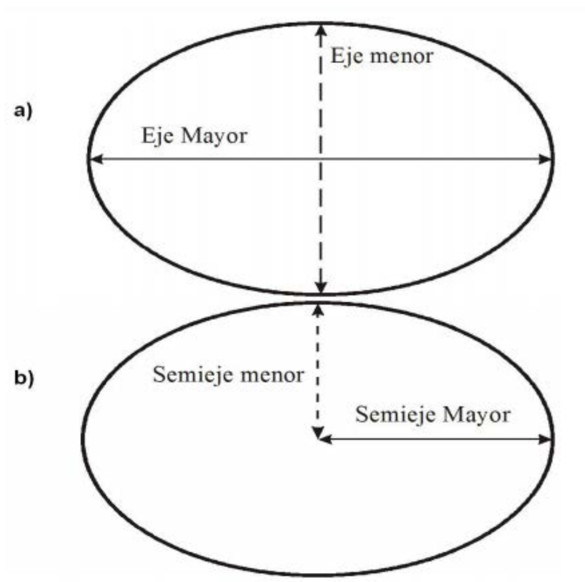

Figura 1.0: a) Representación del eje mayor y del eje menor de una elipse. b) Representación del semieje mayor y del semieje menor de una elipse

1.2) Focos de una elipse:

Una elipse tiene dos puntos llamados focos, los cuales se encuentran sobre el eje mayor.

Vamos a denotar con F a la distancia entre los focos, con Q a la distancia entre un Foco y un punto dado de la elipse y con R a la distancia entre el otro Foco y el mismo punto dado de la elipse. La suma F + Q + R, siempre va a ser la misma distancia. La suma de F + Q + R, es igual a la longitud de la cuerda con la que trazamos una elipse.

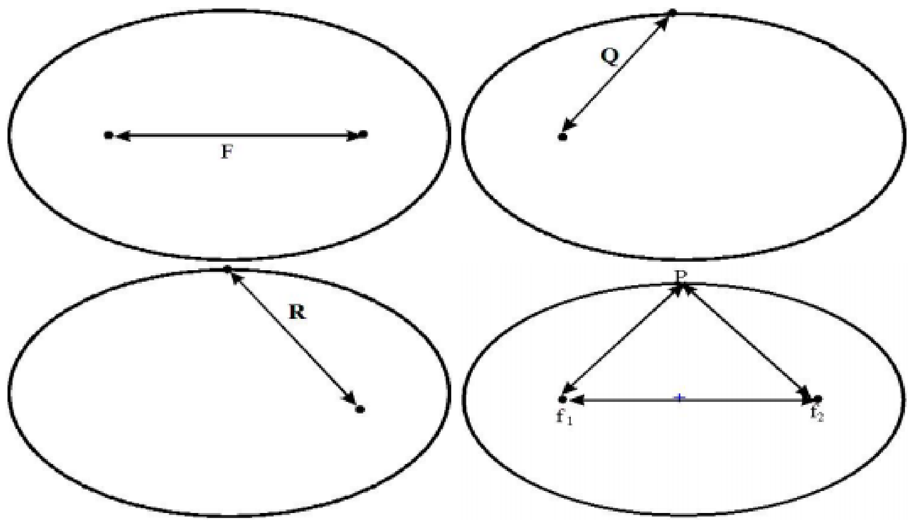

Figura 2.0: En la elipse superior-izquierda se dibuja la distancia (F) entre los focos de la elipse. En la elipse superior-derecha se dibuja la distancia (Q) entre un foco y un punto de la elipse. En la elipse inferior-izquierda se muestra la distancia (R) entre el otro foco y el mismo punto de la elipse. En la elipse inferior-derecha se muestran F, Q, R distancias juntas.

1.3) Excentricidad:

Se usa para determinar qué tan alargada esa una elipse. Se puede expresar de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \frac{C}{a}$$

En esta ecuación α es el semieje mayor y C es la distancia entre un foco y el centro de la elipse. Con esto se demuestra que la excentricidad de una elipse es mayor entre más alargada sea la elipse y solo puede tener valores que estén entre 0 y 1.

Si la excentricidad es igual a 0, el centro de la elipse coincide con los focos y se obtiene una circunferencia. Con esto se puede indicar que una elipse con excentricidad 0 es equivalente a que la distancia entre un foco y el centro sean 0.

Ejercicios de Apoyo para excentricidad:

A) Excentricidad de la órbita de la Tierra:

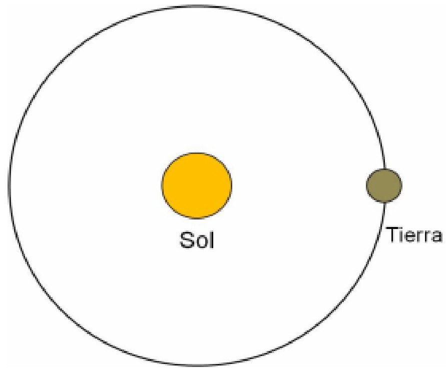

Figura 3.0: Órbita de la Tierra alrededor del Sol

La excentricidad de la ´orbita de la Tierra es de ε = 0·017. Si dibujamos la órbita de la Tierra con un círculo cuyo diámetro sea 10 cm, ¿de cuántos milímetros es C (distancia entre un foco y el centro de la elipse)?

Respuesta:

De acuerdo con la definición que dimos anteriormente esto quiere decir que

$$\varepsilon = \frac{C}{a} = 0.017 \tag{1}$$

donde C es la distancia entre el centro de la elipse y el foco y a es el semieje mayor. Por lo tanto,

$$C = 0.017 * a \tag{2}$$

Esto quiere decir que la distancia entre el centro de la elipse y el foco es muy pequeña comparada con el semieje mayor. Si reemplazamos “a” con un valor de 10 cm, podemos observar que el resultado de ε da menos de 2mm, esto quiere decir que la órbita de la Tierra, aunque es elíptica, se aproxima mucho a una circunferencia.

B. Excentricidad de la órbita de Plutón y excentricidad de la órbita de Neptuno

La excentricidad de Plutón es 0.25 y la de Neptuno 0.01

B.1) Haz un dibujo para representar esquemáticamente las orbitas de Neptuno y Plutón y la posición del Sol en ambas.

B.2) Analizando la órbita de Plutón ¿este siempre está más lejos del Sol que Neptuno?

Respuesta:

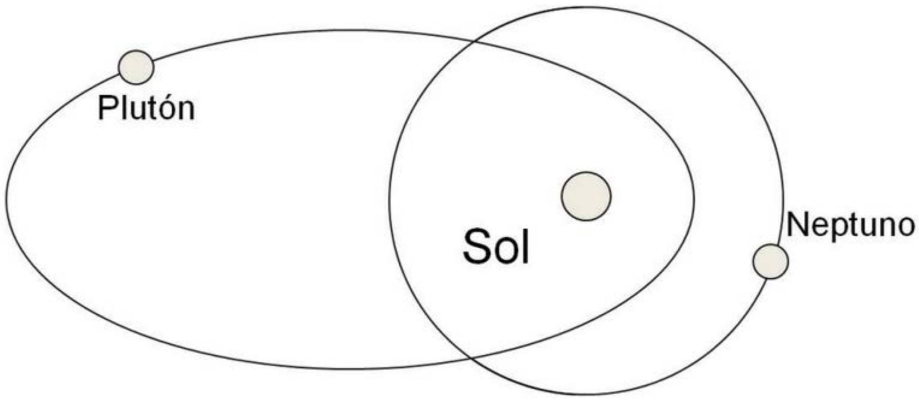

Figura 4.0: Órbita de Plutón y Neptuno alrededor del Sol

B.1) De acuerdo con la primera ley de Kepler, el sol está en uno de los focos de ambas elipses de los 2 planetas.

B.2) Al analizar los focos de las elipses se puede que a pesar de que la órbita de Plutón sea más alargada que la de Neptuno, en una zona Plutón estará más cerca del Sol que Neptuno.

---

2. Segunda Ley de Kepler:

La segunda Ley de Kepler se puede expresar de la siguiente manera: La línea que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Podemos tomar la siguiente imagen:

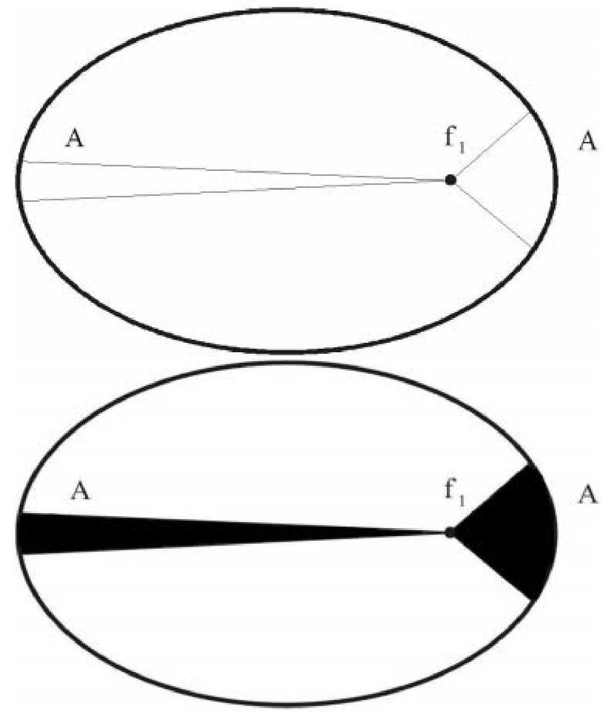

Figura 5.0: Representación de las áreas que barre un planeta en su órbita alrededor del Sol en tiempos iguales.

De esta imagen se define que las dos áreas son iguales y que f1 es la posición del sol, podemos observar que, en su órbita, el trayecto que recorre en el área de la izquierda es menor que en el área de la derecha, y ya que estas miden lo mismo se puede determinar que el objeto tiene mayor velocidad cuando está cerca del sol y más lento cuando está lejos.

3. Tercera Ley de Kepler:

Esta ley expresa, mediante una ecuación, la relación que hay entre el periodo de un planeta alrededor del Sol y el semieje mayor de su órbita.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \tag{3}$$

donde T es el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta alrededor del Sol (periodo), M es la masa del Sol, m es la masa de un planeta dado, a es el semieje de la órbita de dicho planeta y G es la constante de gravitación.

4. Ley de la Gravitación Universal

La fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellos. Y se define con la siguiente fórmula:

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{4}$$

Esta expresión es válida para cualquier par de cuerpos y por lo tanto es válida para algún planeta y el Sol o para la Tierra y la Luna.

Ejercicios extra para practicar:

3.5.10. Masa de la Tierra

Suponga que la Luna gira alrededor de la Tierra siguiendo una órbita circular y con un período de 27 días, a una distancia de 384 401 km, calcule la masa de la Tierra. Considere el valor de $G = 6.67x10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$

Respuesta:

La fuerza centrípeta se define como

$$F_c = 4\pi^2 f^2 mR$$

donde *m* es la masa del objeto, *f* es la frecuencia de y *R* es el radio de giro. Por otra parte, la fuerza gravitacional se define como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde *m1* y *m2* son las masas de cualquier par de objetos separados por una distancia *r* y *G* es la constante de Gravitación Universal igual a $G = 6.67x10^{-11}\,\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$. Para que la Luna de masa *m*, se mantenga girando alrededor de la Tierra, cuya masa es $M_\oplus$, a una distancia *d*, la fuerza centrípeta, F_c, debe ser igual a la fuerza gravitacional, F_g, en un periodo T. Igualando la fuerza centrípeta con la fuerza gravitacional se tiene que

$$F_c = F_g$$

$$\frac{4\pi^2 md}{T^2} = \frac{GmM_\oplus}{d}$$

$$M_\oplus = \frac{4\pi^2 d^3}{GT^2}$$

$$M_\oplus = 5.97\text{x}10^{24}\text{ kg}$$

La masa de la Tierra es $M_\oplus = 5.97\text{x}10^{24}$ kg

3.5.20. Periodo de rotación de Júpiter

La luz solar tarda 8.33 minutos en llegar a la Tierra y 43.3 minutos en alcanzar Júpiter. Si $G = 6.67x10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}$

a) ¿Cuál es el período de rotación de Júpiter alrededor del Sol?

b) Si suponemos que las orbitas son circulares, ¿cuál es la masa del Sol?

Respuesta

a) Partiendo de la tercera ley de Kepler, se tiene que

$$\frac{T_{\oplus}^2}{T_J^2} = \frac{r_{\oplus}^3}{r_J^3}$$

donde $T_{\oplus}$ y T_J son, respectivamente, los periodos de rotación de la Tierra y de Júpiter; $r_{\oplus}$ y r_J son los correspondientes radios de las orbitas para la Tierra y Júpiter. Si las consideramos circulares, entonces,

$$T_J = \sqrt{\left(\frac{r_J}{r_{\oplus}}\right)^3 T_{\oplus}^2}$$

Para calcular los radios r_J y $r_{\oplus}$, se tiene que

$$\frac{r_J}{r_{\oplus}} = \frac{ct_J}{ct_{\oplus}} = \frac{41.6\;min}{8.33\;min}$$

$$\frac{r_J}{r_{\oplus}} = 4.99$$

Como $T_{\oplus}$ = 1 año, entonces

$$T_J = \sqrt{\left(\frac{r_J}{r_{\oplus}}\right)^3 T_{\oplus}^2}$$

$$T_J = \sqrt{(4.99)^3(1\;año)^2}$$

$$T_J = 11.14\;años$$

b) Considerando la órbita circular, se tiene que la fuerza centrípeta es igual a la fuerza gravitacional, es decir,

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}$$

donde M es la masa del Sol, m es la masa del planeta, r es el radio de su órbita, ω es

la velocidad angular del planeta y G es la Constante de Gravitación Universal. Por lo tanto, despejando la masa del Sol, M, se tiene que

$$m\omega^2 r = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{m\vartheta^2 r}{t^2} = \frac{GMm}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r}$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

$$M = \frac{4\pi^2(1.49x10^{11}m)^3}{(3.15x10^7 s)^2\left(6.67x10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}\right)}$$

$$M = 1.97x10^{30}kg$$

Ejercicios propuestos:

3.6.2. El Sol visto desde Plutón

En la órbita elíptica de un cuerpo alrededor del Sol se identifican particularmente dos puntos, el más cercano al Sol y el más lejano. El Afelio es la posición en la que el objeto está en el punto más alejando del Sol. La distancia del Sol a Plutón cuando este se encuentra en su afelio

es de 49.27 UA, además considera que el radio del Sol es igual a 6.96×10^5km.

a) Calcula el diámetro angular del Sol que se observara desde Plutón cuando este se encuentra

en su Afelio, considerando que 1 $UA = 1.5x10^8\ km$.

b) La distancia entre Mercurio y el Sol es de 0.387 UA. Calcula la resolución angular que se

requiere para distinguir a Mercurio del Sol si fuera observado desde Plutón en su Afelio.

3.6.12. Salto de un astronauta en la Luna

Un astronauta completamente equipado puede saltar 60 cm verticalmente sobre la superficie

de la Tierra haciendo un esfuerzo máximo. Si el diámetro de la Luna es 1/4

del de la Tierra y su densidad es 2/3 del de la de la Tierra ¿a qué altura puede saltar el astronauta en la Luna?

3.6.5. Fuerza de gravedad y duración del día si la Tierra tuviera la mitad de su radio

Suponga que, por alguna causa interna, la Tierra reduce su radio a la mitad del actual. Sin embargo, conserva su masa. Considere que la aceleración debido a la fuerza de gravedad de la Tierra es $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ y su frecuencia de giro v = 1 vuelta/día.

a) ¿Cual sería la intensidad de la de la aceleración debido a la fuerza de gravedad de la Tierra en su nueva superficie?

b) ¿Cual sería la nueva duración del día en horas?