Material de Apoyo

11°

Contenidos	Habilidades
Función expnencial	H6: Analizar gráfica, tabular y algebraicamente las funciones exponenciales.
	H7: Plantear y resolver problemas en contextos reales utilizando ecuaciones exponenciales.
	H8: Identificar y aplicar modelos matemáticos que involucran las funciones exponenciales.

Colaboradores:

Céspedes Gómez Lency Francini
Guillén Méndez Jean Carlo
Nuñez Morales Gustavo
Segura Siles Verónica

Función exponencial

La función exponencial f con base a y varible independiente x, es una función definida por la ecuación $f(x) = a^x$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, donde se cumple que $a > 0$ y $a \neq 1$.

Dependiendo el valor que tenga la base a, la función exponencial es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

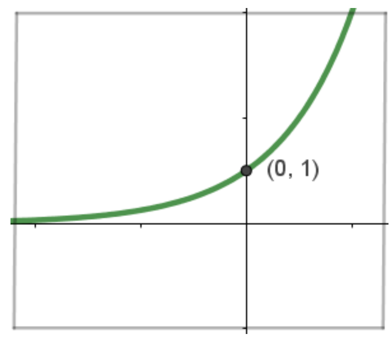
Función exponencial estrictamente creciente

En una función exponencial, si se cumple que la base es mayor a uno ($a > 1$), la función es estrictamente creciente.

Para la función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 1$,
se cumplen las siguientes caracteristicas :

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Ámbito: $\mathbb{R}^+$
- f es inyectiva
- f es creciente
- interseca al eje y en $(0, 1)$
- Asíntota $y = 0$

Ejemplo: Gráfica de $f(x) = 2^x$



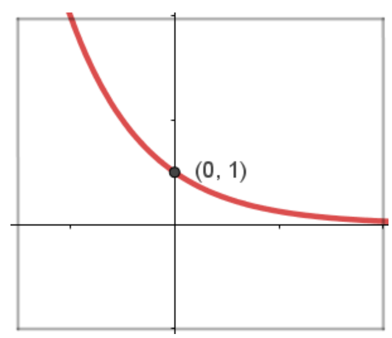
Función exponencial estrictamente decreciente

En una función exponencial, si se cumple que el valor de la base está entre cero y uno ($0 < a < 1$), la función es estrictamente decreciente.

Para la función exponencial $f(x) = a^x$, con $0 < a < 1$,
se cumplen las siguientes caracteristicas :

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Ámbito: $\mathbb{R}^+$
- f es inyectiva
- f es decreciente
- interseca al eje y en $(0, 1)$
- Asíntota $y = 0$

Ejemplo: Gráfica de $f(x) = \frac{1}{2}^x$



Nota: Estas características pueden cambiar si se realiza una trasformación a la función exponencial. Sin embargo, la función seguirá siendo inyectiva.

Transformaciones de la función esponencial

Traslación vertical

$$f(x) = a^x \pm k$$

La gráfica de f se traslada k unidades:

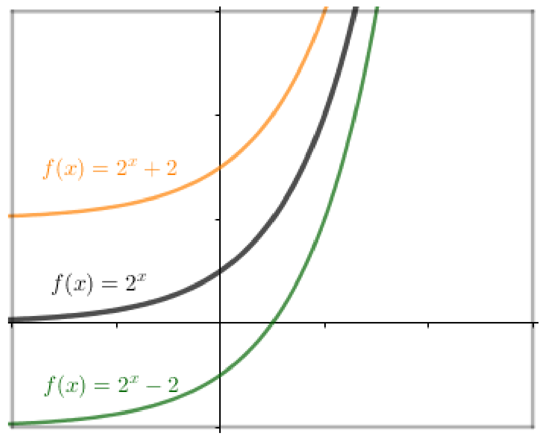
Hacia arriba

$$f(x) = 2^x + 2$$

Hacia abajo si

$$f(x) = 2^x - 2$$

Comparemos respecto $f(x) = 2^x$



Traslación horizontal

$$f(x) = a^{x \pm k}$$

La gráfica de f se traslada k unidades:

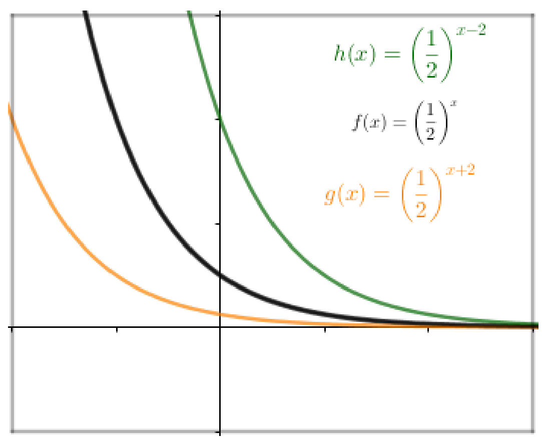
Hacia la izquierda

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}$$

Hacia la derecha

$$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$$

Comparemos respecto $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Reflexión respecto al eje y

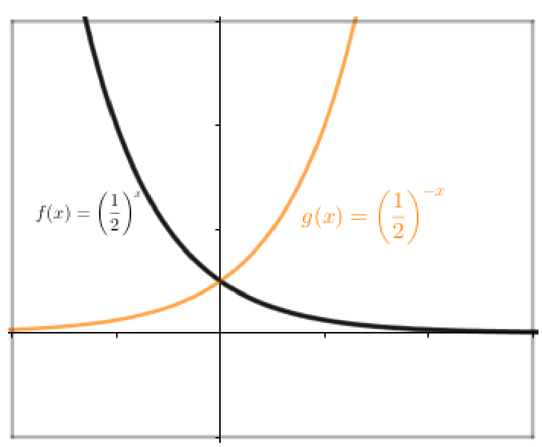
$$f(x) = a^{-x}$$

La gráfica de f se refleja respecto al eje y:

Reflexión respecto al eje y

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 2^x$$

Comparemos respecto $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Reflexión respecto al eje x

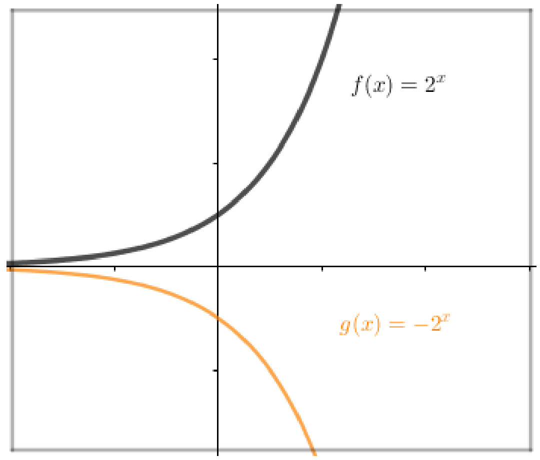
$$f(x) = -a^x$$

La gráfica de f se refleja respecto al eje x:

Reflexión respecto al eje x

$$g(x) = -2^x$$

Comparemos respecto $f(x) = 2^x$



Se estira o se comprime verticalemnte

$$f(x) = k \cdot a^x$$

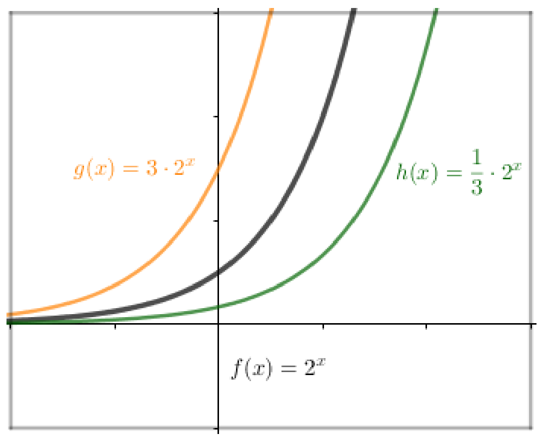
La función se estira: $k > 1$

$$g(x) = 3 \cdot 2^x$$

La función se comprime: $0 < k < 1$

$$h(x) = \frac{1}{3} \cdot 2^x$$

Comparemos respecto $f(x) = 2^x$



Se comprime o se estira horizontalmente

$$f(x) = a^{k \cdot x}$$

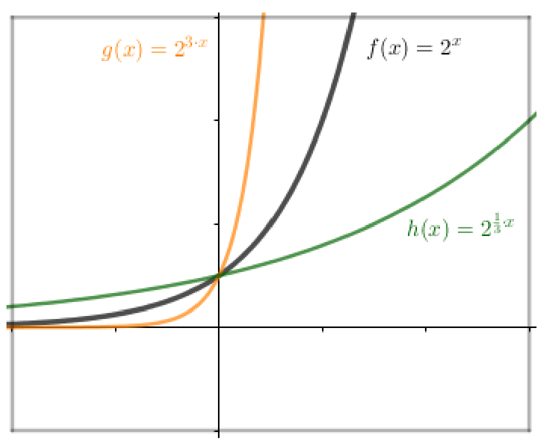
La función se comprime: $k > 1$

$$g(x) = 2^{3 \cdot x}$$

La función se estira: $0 < k < 1$

$$h(x) = 2^{\frac{1}{3} \cdot x}$$

Comparemos respecto $f(x) = 2^x$



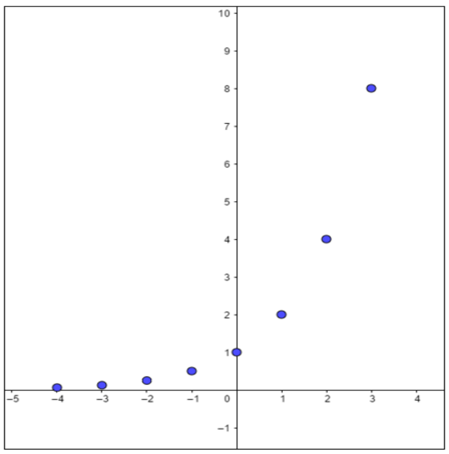
Ejemplos

1. Dada la función exponencial $y = f(x) = 3^x$ y su tabla correspondiente, se puede realizar su gráfica:

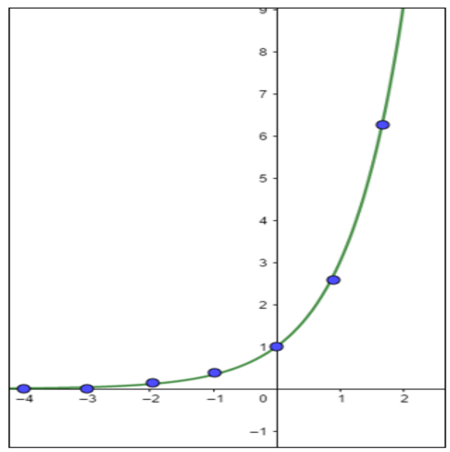
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 3^x$	0.0625	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8	16

Solución:

- **Paso 1:** ubicar los puntos (x_0, y_0) en el plano cartesiano de la siguiente forma:



- **Paso 2:** trazar la curva que pasa por los puntos, esta curva corresponderá a la gráfica de $y = 3^x$ que se solicita:



Nota:

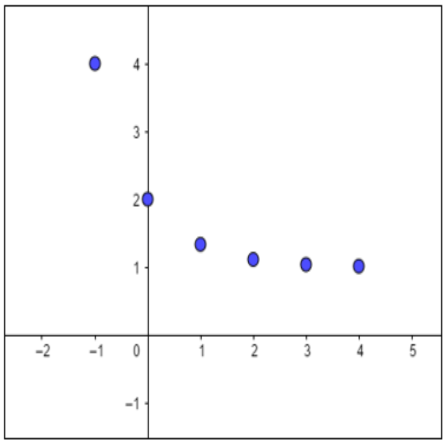
Observe que la función dada es creciente, pues $a > 1$, con $a = 3$.

2. Dada la función exponencial $y = f(x) = \frac{1}{3}^{x} + 1$ y su tabla correspondiente, se puede realizar su gráfica:

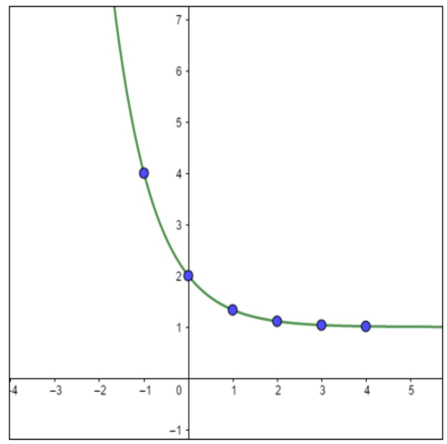
x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = \frac{1}{3}^{x} + 1$	28	10	4	2	1.34	1.12	1.037	1.0123

Solución:

- **Paso 1:** ubicar los puntos (x_0, y_0) en el plano cartesiano de la siguiente forma:



- **Paso 2:** trazar la curva que pasa por los puntos, esta curva corresponderá a la gráfica de $y = \frac{1}{3}^{x} + 1$ que se solicita:



Nota:

Observe que la función dada es decreciente, pues $0 < a < 1$, con $a = \frac{1}{3}$.

3. Si se agregan 20 gramos de sal a una cantidad de agua, la cantidad $q(t)$, con $t \in \mathbb{N}$, de sal sin disolver luego de **t** segundos está dada por: $q(t) = 20 \cdot \frac{4}{5}^{x}$

   - ¿Cuál es la cantidad de sal sin disolver que se obtienen luego de 10 segundos?

     Solución:

     t: después de 10 segundos corresponde a $t = 11$ segundos, entonces se tiene que:
     $q(11) = 20 \cdot \frac{4}{5}^{11} = 1,72$

     $R/$ Luego de t segundos hay 1,72g de sal sin disolver.

4. El peso en gramos de una bacteria en un cultivo, **t** horas después de iniciar el cultivo está dado por la expresión:

$$P(t) = 50 \cdot 2^{0,1t} \text{ gramos}$$

   - ¿Cuál es el peso inicial de la bacteria?

     Solución:

     El peso inicial de la bacteria se puede determinar cuando $t = 0$, entonces sustituyendo $t = 0$ en la función dada se tiene:

$$P(0) = 50 \cdot 2^{0,1 \cdot 0} = 50 \text{ gramos}$$

     $R/$ El precio inicial de la bacteria corresponde a 50g.

   - Considere $t \in \mathbb{N}$. ¿Cuál es aproximadamente el peso del cultivo después de 4 horas?

     Solución:

     El peso aproximado del cultivo después de 4 horas se puede determinar cuando $t = 5$, entonces sustituyendo $t = 5$ en la función dada se tiene:

$$P(5) = 50 \cdot 2^{0,1 \cdot 5} = 70,71 \text{ gramos}$$

     $R/$ El precio aproximado de la bacteria después de 4 horas corresponde a 70,71 g.

Práctica: Transformaciones de la función inversa

Indicaciones generales

1. Analice y complete la siguiente tabla. Si la función es exponencial, indique con un “SI”, en caso contrario, con un “NO”.

Criterio	Solución	Criterio	Solución	Criterio	Solución	Criterio	Solución
4^{5x}		$\left(\frac{2\pi}{9}\right)^x$		$(3x)^x$		9^{-x}	
1^x		$\frac{1}{2^x}$		$\left(\frac{1}{100}\right)^x$		0^x	

2. Clasifique las siguientes funciones exponenciales según su monotonía (creciente o decreciente). Justifique su respuesta.

Función	Respuesta	Función	Respuesta
$f(x)=\left(\frac{1}{100}\right)^x$		$p(x)=\left(3\sqrt{3}\right)^x$	
$r(x)=(0{,}5)^x$		$g(x)=\left(\frac{e}{3}\right)^x$	
$m(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$		$f(x)=12^{-x}$	

3. Complete la tabla que se le presenta a continuación.

Función	Dominio	Ámbito	Intersección en y	Intersección en x
$f(x)=2^x$		$[1,32[$		
$h(x)=(0{,}5)^x$	$\mathbb{R}$			
$m(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$		$]9.+\infty[$		
$g(x)=\left(\sqrt{2}\right)^x$	$\mathbb{R}-\{6\}$			

4. Determine la gráfica, la asíntota horizontal y las intersecciones con los ejes de las funciones f y g tales que:

   a. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3} + 1$

   b. $g(x) = -2^{-1+x} + 4$

5. Resuelva los siguientes problemas relacionados con funciones exponenciales:

   a. La densidad poblacional en cierta región se puede modelar con la función $d(t) = p_0 \cdot e^{\frac{t}{2}}$ donde p_0 es la población inicial y t el tiempo en años. En dicha región, la población actual es de 5210 habitantes. ¿Cuántos habitantes habrán al cabo de 3 años?

   b. El número C de computadoras infectadas por un virus, aumenta según el modelo $C(t) = 3 \cdot e^{1,2t}$, donde t representa el tiempo en horas después del ataque cibernético. Determine lo siguiente:

      i. La cantidad de computadoras infectadas medio día después del ataque.
      ii. La cantidad de computadoras infectadas 30 minutos después del ataque.
      iii. El tiempo que transcurrió si $13\,341$ computadoras se infectaron.

   c. Cuando Ana nació, sus padres realizaron un depósito de $20\,000\,000$ de colones en una cuenta de ahorro que paga un 6 % de interés. El banco realizó una proyección mediante el modelo $D(t) = 20\,000\,000 \cdot e^{0,06t}$, donde D es la cantidad de dinero ahorrado después de t años. Determine el saldo que tendrá la cuenta de ahorros cuando Ana cumpla 17 años.

Soluciones

1. Solución

Criterio	Solución	Criterio	Solución	Criterio	Solución	Criterio	Solución
4^{5x}	SI	$\left(\frac{2\pi}{9}\right)^x$	SI	$(3x)^x$	NO	9^{-x}	SI
1^x	NO	$\frac{1}{2^x}$	SI	$\left(\frac{1}{100}\right)^x$	SI	0^x	NO

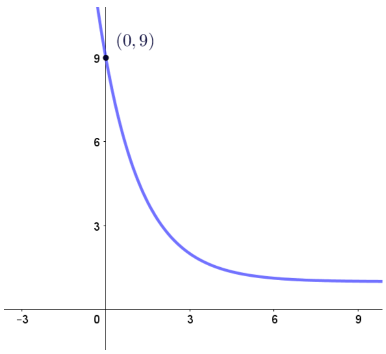
2. Solución

Función	Respuesta	Función	Respuesta
$f(x) = \left(\frac{1}{100}\right)^x$	Decreciente	$p(x) = \left(3\sqrt{3}\right)^x$	Creciente
$r(x) = (0{,}5)^x$	Decreciente	$g(x) = \left(\frac{e}{3}\right)^x$	Decreciente
$m(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$	Creciente	$f(x) = 12^{-x}$	Decreciente

3. Solución

Función	Dominio	Ámbito	Intersección en y	Intersección en x
$f(x) = 2^x$	$[0,5[$	$[1,32[$	$(0,1)$	No interseca
$h(x) = (0{,}5)^x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$	$(0,1)$	No interseca
$m(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$]-\infty,-2[$	$]9.+\infty[$	No interseca	No interseca
$g(x) = \left(\sqrt{2}\right)^x$	$\mathbb{R}-\{6\}$	$\mathbb{R}^+-\{8\}$	$(0,1)$	No interseca

4. Solución

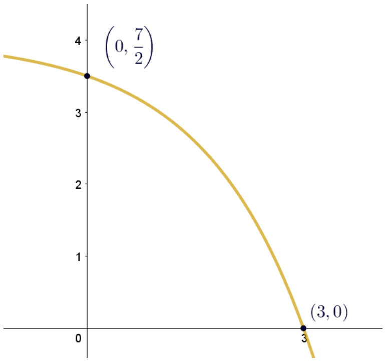


Función f

Intersección con eje y: $(0,9)$

Intersección con eje x: No tiene

Asíntota horizontal: $y=1$



Función g

Intersección con eje y: $\left(0, \frac{7}{2}\right)$

Intersección con eje x: $(3,0)$

Asíntota horizontal: $y=5$

5. Solución

a. Aproximadamente 23350 habitantes.

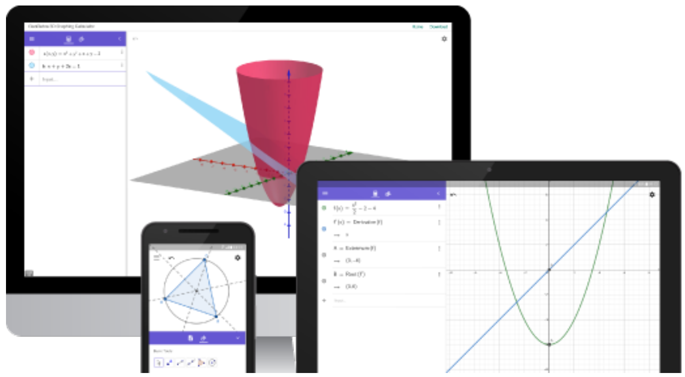
b.
   i. Aproximadamente $5\,382\,220$ computadoras.
   ii. Aproximadamente 5 computadoras.
   iii. Aproximadamente 7 horas.

c. Aproximadamente $55\,463\,900$ de colones.

Anexos

¿Desea ver material interactivo?

https://youtu.be/-TvmmuEma50



Ingrese al enlace para conocer más acerca de la inversa de la función lineal y su comportamiento gráficamente.

Referencias bibliográficas

- F Prima. (2015). *Matemática 11: hacia la resolución de problemas*. (2015) F prima Grupo Editorial.
- Gómez, L. (2016). *Matemática 11°: Desarrollando Habilidades*. San José, Costa Rica. Publicaciones Innovadoras en Matemática para Secundaria (PIMAS).
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). Programa de estudios. Matemáticas. Costa Rica. Obtenido de ENLACE.
- Porras, V., Durán, E. (2015). Matemática 11°. San José, Costa Rica. Publicaciones Porras.
- Santillana. (2016). *Trabajar en: Matemática 11*. Costa Rica. Editorial Santillana.