CIEMAC

Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

TEC | Tecnológico de Costa Rica

MEMORIAS

X Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Cartago, Costa Rica

2007

Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática. Teléfono: (506) 2550 2225
www.tec.ac.cr/congresociemac

TALLERES

Actividades matemáticas para el salón de clase

Luis F. Cáceres[1]

Resumen

Se presentarán diversas actividades matemáticas que pueden ser desarrolladas con estudiantes de nivel elemental o intermedio. Una de las características fundamentales de las matemáticas es el pensamiento lógico deductivo y es importante el desarrollo de este pensamiento desde temprana edad. Usando diagramas de Venn se pueden realizar ejercicios para el análisis de razonamientos matemáticos válidos.

Este será el primer tema que se discutirá. Otro tema importante es el desarrollo de la habilidad espacial y para esto se discutirá una actividad relacionada con las vistas de objetos en tres dimensiones, su volumen y área de superficie. Un tema fundamental de geometría de la escuela elemental e intermedia es la simetría. Discutiremos actividades para el estudio de los grupos de simetría básicos.

Otro tema que ha tomado mucha fuerza dentro de la matemática discreta es la teoría de grafos, este tema integra varias áreas de matemáticas tales como geometría y combinatoria. Presentaremos conceptos fundamentales de la teoría de grafos y aplicaciones, incluyendo el teorema de los Cuatro Colores. En algunas de las actividades que se discutirán se integrará la tecnología y el uso de manipulativos.

[1] University of Puerto Rico, Mathematical Sciences Department, Mayaguez, Campus, lcaceresd@gmail.com

APRENDAMOS MATEMÁTICA UTILIZANDO MATERIALES DESECHABLES

Rosalinda Sanabria Monge[1]

Población al cual está dirigido el taller: Maestros, estudiantes de secundaria y estudiantes universitarios.

Introducción

Es preocupación del ser humano sobre la problemática ambiental y por ello es necesaria la búsqueda de soluciones y la enseñanza de la matemática no se escapa de ello.

Existe en la actualidad una fuerte corriente en educación matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas se dé en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad.

Es obvio que si nos limitamos en nuestra educación a una mera presentación de los resultados que constituye el edificio puramente teórico que se ha desarrollado en tal intento, dejando ***a un lado sus orígenes en los problemas que la realidad presenta y sus aplicaciones para resolver tales problemas****, estaríamos ocultando una parte muy interesante y substancial de lo que la matemática verdaderamente es. De ahí que el conocimiento matemático puede ser introducido de forma agradable en actividades y manipulaciones con materiales desechables.*

En el taller se elaboraran situaciones problemáticas con los diferentes materiales desechables que los participantes lleven y tales situaciones tendrán su solución, así como la elaboración de materiales didácticos para el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática.

Objetivos

1. Promover un enfoque de la enseñanza de la matemática dirigido hacia la solución de problemas utilizando materiales de desecho.

2. Elaborar materiales didácticos con el manejo adecuado de los desechos.

3. Responder a la necesidad de dar soluciones desde las aulas mismas al problema del ambiente.

4. Concienciar al público presente con respecto a su responsabilidad ambiental.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, rsanabria@itcr.ac.cr

Centros de Recursos Virtuales

Mario Marín Sánchez [1],
Geovanni Figueroa Mata[2],
Walter Mora Flores[3]

Resumen

El centro de Recursos Virtuales (CRV) es un proyecto de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) y de la Fundación Costa Rica Estados Unidos de América (CR-USA) cuyo objetivo principal es apoyar la educación matemática costarricense a través del desarrollo de recursos didácticos con un alto componente computacional.

El taller propuesto está orientado a mostrar a los y las participantes las posibilidades que ofrece la plataforma y capacitarlos en el uso de los mismos.

Palabras Claves:

Bases de datos dinámicas, enseñanza asistida por computadora, educación en línea, recursos didácticos digitales.

Introducción:

El vertiginoso avance de la tecnología, en especial la tecnología de las comunicaciones y de la computación, obliga a las instituciones ligadas con la educación a tomar acciones tendientes a investigar acerca de estrategias para incorporar las ventajas de estos medios en la educación. El impacto de la tecnología en las metodologías educativas nos empuja al establecimiento de estrategias específicas para el desarrollo del aprendizaje en los nuevos escenarios que se configuran. En el proyecto Centro de Recursos Virtuales pensamos que las acciones tendientes a sacar provecho de estas opciones deben partir del análisis teórico del problema para trascenderlo y buscar acciones concretas que ayuden a desarrollar herramientas y validarlas directamente con los estudiantes. Esto, para lograr un avance equilibrado entre el conocimiento mismo, la disponibilidad de opciones y en especial el establecimiento de una cultura de uso y evaluación de este tipo de alternativas.

No cabe duda la importancia de explorar adecuadamente el binomio educación tecnología para entender, oportunamente, las diversas aristas del mismo y con base en ellas establecer estrategias para obtener los mejores resultados en el uso de la tecnología en educación. Desde nuestra óptica, una vez que superamos la alucinación inicial que produce la abrumadora oferta de propuestas educativas apoyadas por la Internet, es momento de buscar una incorporación sistemática y analizada de las mismas en el entorno educativo nacional. Esa es la intención principal del Centro de Recursos Virtuales.

El CRV reúne en un proyecto una serie de posibilidades, que si bien no constituyen la última palabra en el tema, si constituyen un sano equilibrio entre lo que desearíamos hacer y lo que las condiciones actuales del país y del desarrollo del tema nos permiten. Además, busca responder ante el compromiso que tienen las universidades públicas de contribuir con el desarrollo de la sociedad costarricense.

La plataforma de Servicio al Cliente.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, mmarin@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica, gfigueroam@yahoo.com.mx
[3] Instituto Tecnológico de Costa Rica, wmora2@yahoo.com.mx

El software que se presenta ha sido desarrollado completamente dentro del proyecto Centro de Recursos Virtuales; por lo cual se ha generado una experiencia importante y la posibilidad de adaptarlo según las necesidades que hemos detectado además, trasciende el entorno puramente administrativo al incluir aspectos centrales orientados a apoyar al estudiante y al docente.

El proyecto CRV provee una estructura que se puede usar indistintamente desde Internet o en entornos de redes intranet, como los que ha instalado el MEP a través de PROMECE o de Fundación Omar Dengo en diversas instituciones costarricenses. Esta estructura permite al docente administrar materiales para sus estudiantes, el diseño de planes de estudio y el seguimiento individualizado de algunas de las tareas que el estudiante desarrolle dentro del sistema. También permite al estudiante tener acceso a una serie de materiales desarrollados para apoyar su estudio.

Las funcionalidades claves del sistema administrativo son:

· Gestión de materiales didácticos: publicar, eliminar, modificar.
· Gestión de Preguntas: Pruebas con retroalimentación en tiempo real.
· Administración de usuarios.
· Administración de Centros.
· Administración de Programas.
· Otras funciones periféricas.

Base de datos de Materiales

Un aspecto esencial de este proyecto lo constituye los materiales: están a disposición de los estudiantes y docentes una serie de documentos elaborados bajo estándares de formato, calidad y forma que permiten proveer recursos didácticos a los estudiantes. En este momento se tienen publicados cerca de 50 materiales; la mayor parte de ellos incluye posibilidades de interacción, visualización y laboratorios para que el estudiante pueda reforzar sus conocimientos a través de la exploración.

Base de Datos de Preguntas

De manera complementaria con los materiales se desarrolló una base de datos de preguntas. En la primera etapa las preguntas son pequeños programas en el lenguaje de programación JAVA que al ser llevados al explorador Internet, se genera de manera aleatoria parámetros adecuados. Estas preguntas se le presentan al estudiante en un formulario en el cual es posible responder y el sistema le realiza un chequeo de las opciones correctas y le permite ver procedimientos correctos para la solución de los problemas, todo en tiempo real. Este sistema está funcionando correctamente y puede verse en el sitio Web www.cidse.itcr.ac.cr.

Interacción Profesor Estudiante

Si bien es cierto que el correo electrónico es una excelente herramienta para la interacción entre estudiantes, en matemática se presenta una dificultad importante relacionada con la edición de texto matemático.

Además de las funciones usuales de un sistema de esta naturaleza, el CRV permitirá al estudiante editar y transmitir a sus profesores respuestas a preguntas de desarrollo mediante una herramienta que les permite generar código Látex y archivos en formato PDF. Con esta alternativa se amplían las posibilidades de comunicación entre estudiantes y profesores.

Por otro lado el sistema ofrece al docente una serie de funciones administrativas conexas, una de ellas la hemos llamado bitácora de estudiante, la cual es un reporte sobre las visitas y acciones que el estudiante ha realizado, incluyendo resultados de pruebas.

Sostenibilidad del Proyecto

La filosofía general del CRV está sustentada en brindar una base de recursos didácticos ya disponibles, las cuales se complementarán con materiales publicados por los propios docentes o profesionales que quieran colaborar. En general el procedimiento para agregar materiales a las bases de datos o nuevas preguntas es bastante simple. Se espera que la cultura de desarrollo y publicación de materiales por parte de los docentes se empiece a generar en un futuro cercano, como producto de los procesos de capacitación que se desarrollan en el contexto del proyecto mismo y como resultado tanto del Ministerio de educación pública como de las universidades.

Proyección del proyecto.

Es importante resaltar que este sistema se ha planificado de manera que sirva para todas las materias del programa del Ministerio de Educación Pública y lo único que se requiere para usarlo en el contexto de otras materias es producir los materiales. Quedará como tarea completar los programas para todos los niveles de tercer y cuarto ciclo y, de ser posible, incorporar otras materias. También se puede utilizar en otro tipo de institución educativa tales como universidades o programas de capacitación.

La mayoría de las veces, el tipo de recursos que se presenta está bastante lejano a los materiales que un profesor puede encontrar en un libro; la verdad es que la diversidad y versatilidad que este sistema ofrece supera por mucho lo que se puede obtener de un libro de texto. Los materiales y los generadores de pruebas permiten al docente y al estudiante planificar diversos niveles de profundidad en la exploración de la materia, desde niveles muy instrumentales hasta tareas que implican razonamiento abstracto.

Este esfuerzo constituye un primer paso en el desarrollo de un sistema integral; no es sólo una plataforma de gestión de recursos, también incluye materiales que gradualmente evolucionaran hacia elementos cognitivos de un alto valor académico y de apoyo a docentes y estudiantes. En esta parte es central la incorporación de docentes de todos los niveles para lograr aprovechar sus experiencias de aula y con base en ellas desarrollar nuevos recursos. Ese sí que es un reto.

Una labor que no puede esperar más para consolidar este tipo de alternativa en el contexto nacional está relacionada con la investigación y estandarización de una metodología de evaluación de recursos didácticos apoyados por el computador. Existe suficiente bibliografía en ese sentido y el trabajo fundamental estará orientado a la interpretación de las propuestas disponibles y a la definición de lineamientos para la evaluación de software didáctico.

Descripción del Taller

Este taller se desarrollará en tres sesiones de 2 horas cada una.

Presentación de la Plataforma, Acceso, usos básicos.
Cómo preparar un documento Web que sirva como punto de partida para utilizar el CRV y preparación de preguntas. (3 horas)

Administración de recursos en el contexto de CRV, Materiales y Preguntas (1 Hora)
Administración avanzada del Centro de Recursos Virtuales (2 Horas)

¿Cómo escoger un buen software educativo?

Jeffry Chavarría Molina [1]
Juan José Fallas Monge [2]

Introducción

En la actualidad existe una tendencia por incorporar la herramienta computacional al proceso de enseñanza-aprendizaje; por ejemplo, basta escribir en un buscador web la frase *software matemático para la enseñanza* y aparecerá una cantidad muy numerosa de propuestas diseñadas para la instrucción de algún tema específico.

En el caso particular de la Matemática, en muchos casos, el diseño de propuestas didácticas es realizado por profesionales cuya experiencia es ajena al aula de Matemática. Por ello, es importante que el docente adopte una actitud crítica y valorativa, respecto al empleo de este tipo de herramientas en nuestras aulas. El docente debe saber escoger muy bien el software educativo que empleará con la intención de enriquecer su clase.

Es claro que se debe valorar la preocupación de muchos por diseñar nuevas estrategias didácticas que buscan el mejoramiento de la educación. Sin embargo, muchas de estas propuestas no están respaldas por estudios que certifiquen su vigencia. Así como lo asegura Ramírez (2001), en la actualidad parece existir una mayor preocupación por simplemente "hacer cosas", más que por reflexionar o investigar sobre ellas.

Nuestro Taller

Como respuesta al problema planteado anteriormente, nos hemos dado a la tarea de investigar sobre el tema de "software educativo". En general, nuestro objetivo ha sido determinar qué criterios mínimos deben tomarse en cuenta a la hora de evaluar un software educativo.
A partir de esa experiencia, planeamos impartir un taller en el V CIEMAC, cuyo objetivo es brindar a los participantes las bases necesarias para discernir entre un buen software educativo y uno que no lo sea.

Protocolo del taller

El taller se desarrollará en dos sesiones, de 2 horas cada una.

Primera sesión:

1. Basados en la teoría sobre software educativo, previamente analizada, presentaremos una pequeña ponencia sobre este tema por aproximadamente 40 minutos. Enfatizaremos aspectos fundamentales en los que autores estudiados coinciden; en relación con los requisitos mínimos que deben tomarse en cuenta para evaluar un software educativo. La ponencia se desarrollará desde un punto de vista general, evitando hacer alusión en ningún momento a algún software educativo en específico.
2. Posterior a la ponencia, aportaremos algunos programas educativos previamente seleccionados. Se realizará una actividad en parejas, en la cual, a cada pareja le corresponderá un software que deberá evaluar en función de su experiencia profesional y sustentada en la teoría sobre software educativo previamente expuesta.
3. Esta sesión se cerrará con una presentación efectuada por cada pareja, en la cual deberán enfatizar en los aspectos positivos y negativos que le determinaron al software correspondiente. La discusión y el análisis serán parte fundamental en esta actividad.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, jchavarria@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, jfallas@itcr.ac.cr

Segunda sesión:

1. Diversos autores han diseñado instrumentos que podrían facilitar la labor de evaluar un software educativo. De una forma similar a la sesión anterior, comenzaremos esta sesión con una pequeña presentación, mostrando dos instrumentos debidamente validados que han sido diseñados para este fin (El primero de ellos fue propuesto por Cataldi (2005) y el otro adoptado por González (2002), y que fue propuesto por Barroso, Medel y Valverde (1997)).
2. Posteriormente, pediremos a los participantes del taller que realicen una validación del software educativo PoliEstudio 1.0 (al final de este documento agregamos una descripción de este software), empleando los instrumentos de validación indicados anteriormente.
3. Al finalizar esta sesión, obsequiaremos a los participantes un CD que además de PoliEstudio, contendrá una gama de programas educativos libres, para la enseñanza de diversos temas de matemática. Cada uno de los participantes tendrá la oportunidad de analizarlos posteriormente, con la finalidad de identificar cuál o cuáles de ellos se adaptan a sus necesidades.

El software PoliEstudio 1.0

PoliEstudio es un programa elaborado en el segundo semestre del año 2004. Éste nace como un proyecto de los instructores de este taller, para el curso Taller de Software Didáctico, impartido en la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, en el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

PoliEstudio es una herramienta computacional para el trabajo y manipulación de polinomios en una variable. Inicialmente, fue concebido como un complemento para una propuesta didáctica, orientada a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de polinomios.

Entre las funciones que realiza el programa tenemos: la adición, sustracción, multiplicación, división y factorización de polinomios. Además, es capaz de resolver ecuaciones polinomiales y encontrar los ceros de un polinomio. Por otra parte, cuenta con un graficador de funciones polinomiales que nos permite representar un polinomio en un sistema de coordenadas cartesianas.
PoliEstudio es un programa de licencia libre, lo que significa que los profesores y los estudiantes pueden utilizarlo sin ninguna restricción en el aula, en el laboratorio de informática o si es preciso, en sus hogares.

Finalmente, cabe recalcar que este taller forma parte de las actividades que estamos desarrollando como parte de nuestro Trabajo Final de Graduación de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, en la Universidad Nacional de Costa Rica. Estamos realizando una validación cualitativa del software PoliEstudio, con la intención de brindar al Sistema Educativo Costarricense una herramienta didáctica-cognitiva debidamente validada, en calidad de software libre.

Concepto de función: situaciones cotidianas

Carolina Morales[1]
Adriana Monge[2]

Introducción

Actualmente se vive una situación de experimentación y cambio, y esto afecta la enseñanza de las matemáticas. En un mundo científico e intelectual tan rápidamente cambiante vale mucho más hacer acopio de procesos de pensamiento útiles que de contenidos que rápidamente se convierten en "ideas inertes", ideas que los alumnos olvidan con facilidad, que no son capaces de combinarse con otras para formar nuevos conocimientos para abordar los problemas del presente.
En esta dirección se encauzan los intensos esfuerzos por transmitir estrategias heurísticas adecuadas para la resolución de problemas en general, por estimular la resolución autónoma de verdaderos problemas, más bien que la mera transmisión de recetas o procedimientos algorítmicos.

Desde hace algunos años se presiente que la forma de enseñanza y sus mismos contenidos tienen que experimentar drásticas reformas. Se debe priorizar en la comprensión de los procesos matemáticos más bien que en la ejecución de ciertas rutinas que en nuestra situación actual, ocupan todavía gran parte de la energía de nuestros alumnos, con el consiguiente sentimiento de esterilidad del tiempo que en ello emplean. Lo verdaderamente importante es su preparación para el diálogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro. Una preocupación general que se observa en el ambiente conduce a la búsqueda de la motivación del alumno desde un punto de vista más amplio, que no se limite al posible interés intrínseco de la matemática y de sus aplicaciones. Se trata de hacer patentes los impactos mutuos que la evolución de la cultura, la historia, los desarrollos de la sociedad, por una parte, y la matemática, por otra, han proporcionado.

Cada vez va siendo más patente la enorme importancia que los elementos afectivos y sociales que involucran a toda la persona pueden tener influencia en la matemática. Una gran parte de los fracasos matemáticos de muchos estudiantes tienen su origen en la inadecuada introducción de los temas por parte de los profesores. Por eso se debe intentar, a través de diversos medios, que los estudiantes perciban el sentimiento estético, el orden, el razonamiento deductivo e inductivo que la matemática es capaz de proporcionarles, a fin de involucrarlos en ella de un modo más personal y humano.

En nuestro ambiente contemporáneo, con una fuerte tendencia hacia la deshumanización de la ciencia, a la despersonalización producida por nuestra cultura computarizada, es cada vez más necesario un saber humanizado en que el hombre y la máquina ocupen cada uno el lugar que le corresponde. La educación matemática adecuada puede contribuir eficazmente en esta importante tarea (De Guzmán, sf).
Los libros de texto son pasivos, no hay interacción entre el estudiante y el libro. Aún así, los estudiantes subrayan, marcan, anotan, y en general complementan el contenido del libro de texto (Cañas,1999), sin adquirir realmente los conceptos que los profesores desean transmitirles.
Por su parte, el trabajo en equipo permite que los estudiantes se organicen, distribuyan tareas, formulen y confronten hipótesis, deliberen sobre ideas diferentes y que cada uno se transforme en un recurso para los demás (Mercer,1997). Los alumnos no desempeñan espontáneamente bien estos roles. Ellos tienen que reconocer, asumir y practicar las responsabilidades de cada uno para el desarrollo de la tarea encomendada. Los docentes pueden favorecer estas actividades alentando a la autoevaluación para reconocer las tareas que se llevaron a cabo en la búsqueda por solucionar el problema planteado (Litwin,sf). Definiremos como tarea toda propuesta que se haga en un entorno de aprendizaje con el objetivo de desencadenar un proceso comunicativo con vistas a enseñar. La actividad es lo que el alumno hace una vez que ha recibido la propuesta. Debe tomarse en consideración que alumnos distintos realizarán diferentes actividades para la misma propuesta recibida, ya que el trabajo que ellos realizan no depende solamente de lo que se les proponga que hagan, sino de otras variables entre las que se destacan, por su relevancia, los conocimientos previos y su actitud (Guerrero,2001).

[1] Profesora Liceo Laboratorio Emma Gamboa, Costa Rica, carolinamoralesquiros@yahoo.es
[2] Profesora Pan-American School, Costa Rica, a.monge@costarricense.cr

El proceso de enseñanza gira, fundamentalmente, en torno a la organización de las tareas que se encomienda a los alumnos. El proceso de aprendizaje, en cambio, en torno a las actividades que los alumnos llevan a cabo (Guerrero,2001).

Los contextos y la vida cotidiana deberían desempeñar un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación, sino también en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o aún mejor reinventan las matemáticas. Los contextos son importantes porque pueden motivar a los estudiantes, ayudarlos a comprender por qué las matemáticas son útiles y necesarias. Pueden aclarar por qué ciertos ámbitos de las matemáticas revisten importancia, y pueden contribuir a que los alumnos entiendan el modo en que se emplean las matemáticas en la sociedad y en la vida cotidiana (Van Reeuwijk, 1997).

Dada la importancia de la enseñanza de la matemática desarrollada de una manera "diferente", tomando en cuenta la reforma en la manera de enseñar, el trabajo en grupos, la relación matemática versus vida cotidiana, descrita anteriormente es que en este taller se presentará una propuesta didáctica para desarrollar el concepto de relación en general y de función en particular, se integrarán diversos valores que es necesario que los estudiantes desarrollen dado que el profesor no sólo está enseñando una asignatura, también está modelando la vida de sus alumnos.

Objetivo General

Presentar situaciones cotidianas para establecer el concepto de función.

Objetivos Específicos

Identificar relaciones en situaciones o fenómenos del contexto nacional.
Clasificar relaciones en funciones y no funciones.
Interpretar el concepto de variable dependiente y variable independiente
Identificar imágenes y pre imágenes en una relación.

Descripción de actividades

En equipos de trabajo de 5 a 6 personas, se les presentará una serie de actividades que deben desarrollar de manera conjunta.

Actividad I Relaciones

Con el fin de promover el sentido de conciencia social e iniciar el tema de relaciones, se les solicita a los participantes que en subgrupos busquen en un periódico o en una revista, diferentes problemáticas sociales que ocurren dentro o fuera de nuestro país. Los aportes deben escribirlos en un cartel con el material recolectado por los compañeros del subgrupo.

Se les solicita identificar algunas causas que puedan generar cada una de las problemáticas citadas. Se les pide que escriban las asociaciones que u observando en los carteles.

De manera similar, se plantea reconocer las consecuencias que conllevan estos problemas, asociándolos respectivamente (aunque no se está practicando precisamente en el campo de las matemáticas, se fomenta la habilidad de **identificación,** considerando una de las sugerencias que brinda el programa del MEP para promoverla: fijar la atención en las características de las situaciones que se observa, en este caso, aquellas que se identifican como problemáticas.

También se muestra la **diferenciación, comparación y clasificación**, al distinguir y categorizar entre causas y consecuencias).

Las asociaciones realizadas son un ejemplo en que se pueden relacionar los conjuntos CAUSAS (C), PROBLEMÁTICA SOCIAL (P) y CONSECUENCIAS (K). Las primeras conexiones relacionan elementos del conjunto C, al cual se llamará **Conjunto de Salida o Dominio**; y del conjunto P, que será el **Conjunto de Llegada** o **Codominio**. Previendo que a partir de este primer ejemplo los estudiantes interioricen que cada elemento del conjunto de salida tenga que estar relacionado, se pueden incluir situaciones que no sean causantes de alguna problemática mencionada. Similarmente con los elementos del conjunto de las consecuencias.

Estas asociaciones se pueden representar utilizando la notación de par ordenado; donde "C_1 se asocia con P_3", sería (C_1, P_3). Para el listado creado en los subgrupos se escriben los pares ordenados (aquí se emplea la **codificación**: proceso mediante el cual la persona establece símbolos o los interpreta, que permiten la ampliación a los términos, evitando ambigüedad aunque aumente la abstracción)

Para las otras relaciones, entre los conjuntos P y K, se plantea: *¿quién es el conjunto de partida? ¿el de llegada? ¿cuáles son las asociaciones entre los elementos de estos conjuntos, utilizando pares ordenados para expresarlas?.*

Actividad II Definición de gráfico

En otras situaciones que describen en los periódicos, se pueden identificar relaciones entre dos o más conjuntos. Por ejemplo se les puede solicitar a los participantes que busquen en el periódico un recorte relacionado con el deporte preferido, una película que fueron a ver o que desean ver, una universidad de preferencia. Luego se les solicitará que creen diagramas relacionando mediante flechas los nombres de los integrantes del subgrupo con el deporte y la película.

Además de identificar el conjunto de llegada y el conjunto de salida, se darán cuenta que cada participante tiene un único deporte, una única película, dado que se les pidió que eligieran un único deporte y una sola película. También se darán cuenta que dos o más estudiantes pudieron elegir un mismo deporte y una misma película.
Ya familiarizados con la representación mediante pares ordenados, se define gráfico..

Actividad III Definición de relación

Con el mismo periódico o revista que los estudiantes trajeron; se les solicita identificar situaciones que se ilustran mediante relaciones. Los hallazgos deben recortarlos y usarlos para completar la siguiente tabla.

Relaciones encontradas entre dos conjuntos	*Un Conjunto de Partida*	*Un Conjunto de Llegada*	*Gráfico*

También se le puede solicitar que busquen en el periódico el vehículo o la casa propia o de alquiler que más les guste y con esa información se pueden establecer relaciones que más adelante se pueden categorizar como funciones o no.

Algunos participantes darán una breve descripción de: la relación que encontró (columna 1), cada uno de los conjuntos donde pertenecen los elementos que asocian (columna 2 y 3) y el gráfico de la misma (la **identificación, diferenciación** y **clasificación** son otras habilidades que entran en juego en esta actividad; desde que buscan en el periódico, hasta que establecen los conjuntos que se les solicitan). Se pueden decir oralmente otras relaciones halladas.

Posteriormente se pregunta, *¿cuáles son los elementos que necesitamos para definir una relación?* Buscando que los participantes enuncien Conjunto de Partida, Conjunto de Llegada y Gráfico (El trabajo realizado hasta el momento sobre funciones, pretende haber ofrecido una cierta noción de **relación**, para llegar a la **conceptualización**. Aunque está claro que en las actividades siguientes, se busca aclarar mejor qué es una relación).

Defino relación:_____

Definición:

Una relación de A (conjunto de salida) *en B* (conjunto de llegada) *es un conjunto* $\Re$ *formado por tres elementos: A, B y G.* Se denota por

$\Re : A \to B$, y se lee "$\Re$ una relación de A en B".

Cuando el conjunto de partida es igual al conjunto de llegada; por ejemplo $\Re : A \to A$ *se dice "*$\Re$ *una relación de A en A".*

Definición:

Sea $\Re : A \to B$, *con* $a \in A$ *y* $b \in B$, *se dice que a* $\Re$ *b sii (a,b) pertenece al gráfico de* $\Re$

<u>Actividad IV</u> Definición de preimágenes e imágenes

En la siguiente actividad se solicitan cinco voluntarios (al menos alguien hijo único) y escribo los nombres en la pizarra.

De éstos, se identifican los que tienen hermanos (o hijos) menores de cuatro años y se incluyen en los nombres que den en la lista. Buscan una abreviatura para que sea más rápido hacer referencia a cada persona (codificación).

Se les dice que ellos son los elementos del conjunto de partida para el cual vamos a establecer algunas relaciones. *¿Nómbrenlo? X*; y se representa mediante un diagrama de Venn. Se buscan otras formas de representarlo, por ejemplo la notación por comprensión: X={G, M, N, A, P, J, L}.

Continuando con la actividad, se enuncia el conjunto de llegada como el conjunto de los números naturales sin el cero: IN^*. Se representa por comprensión y por diagrama de Venn.
Los participantes nombran esta primera relación que se hará, *S*. Lo que indicará cómo obtener el gráfico de $S : X \to IN^*$ es la cantidad de hermanos o hermanas. Los participantes van diciendo las asociaciones:

Se resalta que las personas sin hermanos no se relacionan, porque el cero no pertenece al conjunto de llegada.

Después se formulan preguntas como: *¿Cuáles elementos del conjunto de partida están relacionados con algún elemento del conjunto de llegada? ¿Cuáles elementos del conjunto de llegada están relacionados con algún elemento del conjunto de salida? ¿Cuál es el gráfico de S?*

Utilizando el mismo criterio e igual conjunto de partida, pero cambiando el conjunto de llegada; se considera la siguiente relación $S_1 : X \to IN$; *¿cuál es el gráfico de S_1? ¿Cuáles elementos del conjunto de partida están relacionados con algún elemento del conjunto de llegada? ¿Cuáles elementos del conjunto de llegada están relacionados con algún elemento del conjunto de salida?*

Definiciones:

Sea $\Re : D \to E$, si $a \in D$ está relacionado con $b \in E$, entonces a se llama una preimagen de b; y b una imagen de a.

El subconjunto de elementos de E que están relacionados con algún elemento de D se llama el ámbito de $\Re$.

Para las relaciones estudiadas hasta el momento y los conjuntos de llegada y de salida de éstas, se identifica el dominio, ámbito, preimágenes e imágenes.

Actividad V Resolución de problemas I

Se les da a los participantes una serie de problemas para trabajar en ellos.

Ejemplo

El costo de una ventana cuadrada depende de su tamaño. El precio del vidrio (12 mm de espesor) es de 20 colones por dm^2 y el marco de 40 colones por dm. ¿Cuánto costará una ventana de 7dm de lado?, ¿de 1m? y ¿de 1,5m? Construya una tabla, con los datos anteriores y otros que elija, que dé el costo según la longitud del lado de la ventana. Sitúe los valores de la tabla en una gráfica en el plano cartesiano.

Actividad VI Mapa Conceptual de Relación

Se les solicita a los participantes decir los conceptos que se han empleado. La lista se escribe en la pizarra. Los participantes deben conocer previamente qué es un mapa conceptual, reconocer sus partes y poder elaborarlos. Empleando los conceptos que se han nombrado, se construye "entre todos" el mapa que encabeza el concepto de **Relación**.

Actividad VII Concepto de función

Dado que se han estudiado relaciones, se introduce el concepto de función de manera deductiva, como un tipo de relaciones especiales entre conjuntos.

Definición:

Una relación f de A en B, $f = \{A, B, G\}$ es una función cada elemento de A se asocia un único elemento de B.

Se escribe: $\forall x \in A \exists! y \in B / xfy$

Cada una de las relaciones estudiadas hasta el momento se clasifica, oralmente, como función o no función. Haciendo notar que cuando es función, el conjunto de salida coincide con el dominio (Ejemplificando las habilidades de identificación, diferenciación y clasificación).

Actividad VIII Resolución de problemas II

Seguidamente se plantean problemas en donde se identifiquen funciones y se puedan resolver mediante la aplicación de los elementos de éstas. En cada uno de éstos se solicitará, entre otras cosas: criterio, dominio, ámbito, representar gráficamente la función (Durante su resolución es factible promover la habilidad de análisis y pensamiento convergente).

Ejemplo
A los marcadores del kilometraje y costo que utilizan los taxis, "maría", se les programa para que marquen lo que el pasajero debe pagar por cada 10 segundos de recorrido o mientras que el automóvil permanece estacionado. Si el primer minuto se recorre por una tarifa básica 385 colones y cada 10 segundos aumenta cinco colones. ¿Cuál es el criterio que representa la relación entre segundos y colones?

Actividad IX

Luego de calcular preimágenes e imágenes a partir de los criterios que se encontraron en cada caso; se destaca el hecho de que las segundas dependen del elemento del dominio que se eligió y del criterio que se está utilizando. Esta relación de independencia-dependencia se rescata para definir variable independiente y variable dependiente. Para algunas de las relaciones ya trabajadas, se identifican cuáles son de dependencia y cuales no. En esta parte se hace mención del hecho que los estudiantes del colegio realizan a lo largo del año la feria científica por lo que en su investigación deben identificar las variables.

Se debe enfatizar en "la forma" que tiene el criterio para cada uno de los problemas anteriores.
Reconociendo en algunos casos que la variable está multiplicada por una constante y sumándole otra.
Asociando intuitivamente, la gráfica de una recta con los criterios de esta forma.
Se harán ejercicios prácticos de reconocimiento de constantes: factor del término con la variable y término sin variable.

Actividad X Resolución de problemas III

También se trabajará ejercicios en donde se calculen preimágenes e imágenes, dominio, codominios, ámbito; a partir de un criterio. Además se elaborarán algunos criterios a partir de los gráficos de las funciones.

Ejemplo
En un circuito eléctrico el voltaje V en voltios y la corriente i en amperios están relacionados linealmente. Cuando i=9, V=3, cuando i=18, V=6. Expresar V como una función de i. Encontrar el voltaje cuando la corriente es de 11 amperios.

Referencias Bibliográficas

- Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. España: Editorial Síntesis.
- Berini, M (1997). *Las matemáticas y la realidad. La utilización del entorno como recurso didáctico*. En Revista Uno: Las matemáticas en el entorno. España: Editorial Graó.
- Falsetti, M. y Rodríguez, M. (1997). *Funciones una herramienta múltiple*. Buenos Aires, Argentina: Editor responsable: Universidad Nacional de General Sarmiento.
- Guerrero, S (2001). *Las tareas matemáticas* . En Revista Uno: Las tareas matemáticas. España: Editorial Graó.
- Mercer, N (1997). *La construcción guiada del conocimiento*. España: Ediciones Piados Ibérica, S.A.
- Van Reeuwijk, M (1997). *Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas* . En Revista Uno: Las matemáticas en el entorno. España: Editorial Graó.
- Víquez, M. (1992). *El concepto de función*. San José, Costa Rica: EUNED.

Direcciones electrónicas

- Cañas, A. *Algunas Ideas sobre la Educación y las Herramientas Computacionales Necesarias para Apoyar su Implementación.*
  http://www.coginst.uwf.edu/index.html
- De Guzmán, M. *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*
  http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm#D
- Litwin, E. *El aprendizaje basado en problemas.*
  http://medicina.udea.edu.co/Documentos/ABP.doc

Conceptos fundamentales de la Geometría Euclídea

Cristian Alfaro Carvajal[1]
Ricardo Poveda Vásquez[2]

Resumen

Se pretende propiciar en los participantes una reflexión sobre algunos conceptos fundamentales de la geometría euclídea, específicamente en su fundamentación axiomática. Asimismo, generar una discusión sobre estrategias metodológicas que permitan realizar un abordaje adecuado de esta temática en la educación secundaria.

Contenidos del Taller

Axiomática fundamental de la Geometría Euclídea y teoremas de incidencia.

1. Métrica en geometría, en particular la función distancia y la función medida angular.
2. Algunos conjuntos de puntos (segmento, rayo, semirrecta, ángulo, entre otros).
3. Convexidad y separación en el plano.
4. Congruencia de triángulos y desigualdades geométricas
5. V Postulado de Euclides

Justificación del taller

Tradicionalmente en la educación secundaria se presenta a las matemáticas como una ciencia exacta, en donde todas las proposiciones son verdades universales y se deben aceptar como tales. Lo anterior lleva a cuestionar ¿qué debe aprenderse en una lección de matemáticas? ¿Cuál debe ser la orientación más conveniente para lograr éxito en el aprendizaje efectivo de las matemáticas por medio de la lección? ¿qué se debe priorizar, los aspectos conceptuales o aquellos de procedimiento?

Se considera importante subrayar el carácter conceptual de las matemáticas y la importancia de relacionar los conceptos con los que el estudiante ya posee; en particular, lo que se llama el conocimiento informal que previamente los estudiantes poseen, y su bagaje cultural. Desde esta perspectiva, se debe apuntar a la utilización de situaciones matemáticas no rutinarias que exijan una elaboración no mecánica.

La geometría Euclídea es muy útil para mostrar la cara axiomática de las Matemáticas sin caer en la abstracción total, ya que muchos de los resultados son fácilmente imaginados en el mundo físico.

Metodología

La actividad se desarrollará de acuerdo con la modalidad de taller, en consecuencia, se propiciarán experiencias en torno a la reflexión y análisis de algunos elementos básicos de la Geometría Euclídea y de su enseñanza-aprendizaje. Para ello, se organizará una jornada de trabajo con una duración de seis horas, la cual consistirá de tres partes.

En cada una de las sesiones se entregarán a los participantes “guías de trabajo”, en las cuales se detallan los principales conceptos y resultados de cada temática abordada. Algunos conceptos y teoremas serán discutidos en subgrupos para valorar su importancia dentro del proceso de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría en secundaria.

[1] Universidad Nacional. Costa Rica. calfar@una.ac.cr
[2] Universidad Nacional. Costa Rica. rpoveda@una.ac.cr

Finalmente en las plenarias los subgrupos harán una exposición sobre los principales aspectos discutidos.

Estructura del taller

Primera parte (2 horas)

- Entrega del programa
- Presentación de los participantes
- Axiomática e incidencia
- Plenaria

Segunda parte (2 horas)

- Métrica y algunos conjuntos de puntos
- Convexidad y separación
- Plenaria

Tercera parte (2 horas)

- Congruencias y desigualdades geométricas
- V Postulado de Euclides
- Plenaria

Bibliografía

1. Alfaro, B. (1972). *Apuntes de geometría Euclídea*. Manuscrito sin publicar, Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica.

2. Brousseau, Guy (1986). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas*, traducción de *"Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques"*. Revista Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7, n 2, pp.33-111.

3. Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. AIQUE, Argentina.

4. Moise. E (1967). *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado.* México. Editorial Continental.

5. Moise, E & Floyd, D (1986). *Geometría Moderna*. México. Editorial Iberoamericana.

Construcción de lugares geométricos trascendentales y su importancia en la Enseñanza de la Matemática

Arguedas Flatts, Jendry[1]
Prendas Rojas, Juan Pablo[2]

Nivel educativo: medio o superior.

Dirigido a: Profesores y estudiantes en carreras de enseñanza de la Matemática o afines.

Resumen

El estudio de curvas con gran contenido histórico y con lugares geométricos interesantes son escasos en los cursos de cálculo o geometría analítica por su laboriosa construcción, limitándose a la simple mención de su ecuación. Nuestro principal objetivo no es dar a conocer un programa para graficar funciones, mas bien, construir la curva según su lugar geométrico, para así apreciar la existencia de estas curvas famosas pero relegadas por la falta de herramientas para su enseñanza. Este taller se enfocará en la Bruja de Agnesi, concoide de Nicomedes y la Cisoide de Diocles, entre otras. Estas ofrecen un aporte valioso a la enseñanza y aprendizaje de la matemática al proponer una solución a los problemas clásicos en matemática como son la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo.

Objetivos

- Describir el proceso para generar el lugar geométrico de algunas curvas planas reconocidas.
- Construir una base digital interactiva sobre los lugares geométricos generados por algunas curvas planas reconocidas.
- Señalar algunas aplicaciones de las curvas planas estudiadas.
- Construir la traza de cada una de las curvas consideradas con el apoyo del "software" libre GeoGebra.

Descripción

En la mayoría de los cursos de cálculo se omite trabajar con detalle algunas curvas de mucha trascendencia histórica (como la cisoide de Diocles, la bruja de Agnesi, la concoide de Nicomedes, entre otras) principalmente por la dificultad que tiene la construcción de los trazos a partir de la definición del lugar geométrico de la curva.

Nuestra propuesta muestra, en primera instancia, la facilidad operativa del "software" libre Geo Gebra, el cual se puede descargar ingresando a la página www.geogebra.org. Brevemente se mostrará como este software permite hacer construcciones geométricas básicas (rectas, círculos, segmentos, rayos), evidenciar relaciones en las construcciones (intersecciones, paralelismo, perpendicularidad, proyecciones) y probar el efecto en los trazos curvas que genera la modificación de alguno de los parámetros que las caracterizan.

El énfasis del taller es la definición detallada de los lugares geométricos que generan las curvas concoide de Nicomedes, cisoide de Diocles y la bruja de Agnesi, algunas construcciones básicas en el Geo Gebra, la

[1] Universidad Nacional y Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica, yargueda@una.ac.cr

[2] Universidad Nacional, Costa Rica, jprendas@una.ac.cr

ilustración del trazo de la curva y finalmente la construcción de las otras curvas utilizando el programa. Es claro que la construcción de cualquiera de estas presenta dificultades por su complicación de hacerlo a mano, la demanda de la cantidad de tiempo, que generalmente los docentes no disponen, aunado la verificación del efecto de la variación de un parámetro en la ecuación de la curva, la tarea se hace prácticamente insostenible.

La propuesta sugiere la utilización del "software" GeoGebra para la construcción y análisis de los lugares geométricos y los trazos de estas curvas. Por ejemplo, en la figura 1 se muestra un esquema que ilustra el lugar geométrico de la cisoide.

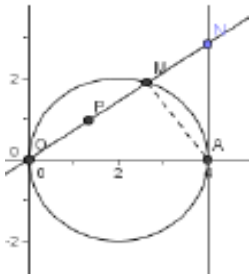


Figura 1

Descripción de lugar geométrico:
Los puntos *P* al hacer variar la inclinación de la recta *ON* es la cisoide.
Se considera una circunferencia de radio ρ, que pase por el origen de coordenadas y con centro sobre el eje de las abscisas. Se toma una distancia *OP* tal que *OP* = *PM*.

A partir de una serie de pasos se deducen las ecuaciones: $r = \dfrac{2\rho \operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\varphi}$ y $y^2 = \dfrac{x^3}{2\rho - x}$ que corresponden a la forma polar y cartesiana respectivamente.

Metodología

En la primera parte se mostrarán los detalles del lugar geométrico de algunas las curvas famosas como por ejemplo la concoide de Nicomedes, cisoide de Diocles y la bruja de Agnesi. Posteriormente los pasos básicos para el manejo del software Geo Gebra para así poder exponer la construcción de la Cisoide de Diocles en el mismo. Finalmente, se dispondrá de un espacio para que los participantes construyan algunas curvas conociendo su lugar geométrico.

El taller termina mostrando algunas propiedades de las curvas trabajadas y aplicaciones en situaciones concretas. La cisoide, por ejemplo, se utilizó como posibilidad de resolver el problema clásico de la duplicación del cubo.

Referencias

- Arguedas, J. & Prendas, J. (2007) Estudio de curvas planas. Documento sin publicar. Costa Rica.
- Baranenkov, G., Demidovich, B., Efimenko, V., Kogan, S., Lunts, G., Porshneva, E., Sichova, E., Frolov, S., Shostak, R. & Yampolski, A. (1984). Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático. Editorial MIR, Moscú.
- Familia de Curvas. En http://www.iesaltoalmanzora.com/centro/departamentos/ matematicas/ web_profesores/historia/curvas/definiciones /clasificacion.htm. Extraído el 18 de junio, 2007.
- González, L. (1962). Lugares Geométricos. Serie Ingeniería y Arquitectura N°3. Publicaciones de la Universidad de Costa Rica. Costa Rica.

Desarrollando Guías Didácticas con el Geómetra

Jeffry Chavarría Molina [1]
Juan José Fallas Monge [2]

Introducción[3]

*The Geometer's Sketchpad (Geómetra) es un software desarrollado por la empresa **Key Curriculum Press** (www.keycurriculumpress.com) que, en sus versiones iniciales, se orientó al estudio sintético y analítico de la geometría plana. Desde su inicio, este software se ha caracterizado por su flexibilidad, por una interfase de usuario muy agradable y por la facilidad en el aprendizaje de su uso.*

Hoy día, el Geómetra, ha trascendido las fronteras de la geometría y permite explorar, desde una óptica didáctica, conceptos avanzados de la geometría moderna como lo son la recursividad, la iteración e, inclusive, el manejo de conceptos sobre funciones y conceptos relacionados con el cálculo.

Nuestro taller

El objetivo de este taller es desarrollar estrategias y herramientas didácticas empleando el software The Geometer's Sketchpad (Geómetra), para que el participante sea capaz de implementarlas en su práctica de aula.

Este taller es la culminación del taller precongreso llamado "Desarrollando guías didácticas en el Geómetra", el cual comenzó en el mes de julio de 2007 y se extiende hasta noviembre de 2007. En este taller se contó con una matrícula inicial de 11 personas, sin embargo han participado en las actividades solamente 6 de ellos.

La metodología que se ha venido siguiendo con los participantes es que se les asigna quincenalmente una guía sobre el programa Geómetra y cuentan con quince días para retornar la solución, vía correo electrónico.

El perfil de entrada de un participante para el taller precongreso fue que se caracterizara por desconocer del todo el paquete Geómetra, o bien tener un manejo básico de este programa.

Como actividad de culminación para este taller, propusimos que durante el último mes (noviembre), los participantes trabajarán en la elaboración de un proyecto, que deberán exponer como actividad de cierre del curso durante el V Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, a realizarse durante los días 5, 6 y 7 de diciembre de 2007 en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, sede central.

A grandes rasgos, la idea del proyecto es que cada uno de los participantes escoja un tema del programa de matemática de secundaria y que, empleando las herramientas aprendidas en el taller, diseñe una guía didáctica para implementar dicho tema en su práctica de aula.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, jchavarria@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, jfallas@itcr.ac.cr
[3] Tomada de los manuales confeccionados por la empresa Key Curriculum Press: "Exploring Geometry with THE GEOMETER'S SKETCHPAD" y "El Geómetra: Guía para el usuario y Manual de consulta".

¿Puedo participar en este taller en el V CIEMAC a pesar de que es una culminación de un taller precongreso?

La respuesta a esta interrogante es que sí, sin embargo, mejor le explicamos la metodología que se seguirá.

El taller en el V CIEMAC se llevará a cabo en tres sesiones de 2 horas cada una. La metodología principal será el trabajo con guías sobre el Geómetra. Sin embargo, la primera sesión será exclusivamente para que los participantes del taller precongreso expongan sus proyectos. Con esta actividad se planea que los participantes compartan ideas y metodologías, empleando el paquete Geómetra, para la enseñanza de algún tema de la asignatura de Matemática de secundaria.

Los compañeros que apenas se están incorporando al taller, y que poseen poca experiencia con el uso del Geómetra, tendrán la oportunidad de observar sobre qué tipo de aplicación se puede desarrollar en este software. En general, la idea es compartir opciones y criterios sobre cada una de las metodologías propuestas.

En las dos sesiones posteriores se trabajará con el desarrollo de guías. Básicamente se emplearán dos tipos de guías: las guías orientadas para los compañeros que participaron en el taller precongreso (se supone que serán guías con un nivel de dificultad mayor) y guías de un nivel básico (para los participantes nuevos con un dominio básico del Geómetra). Esta disponibilidad de dos niveles de dificultad en las guías ofrece la posibilidad para que alguna persona que no haya participado en el taller precongreso, y que considera tener un dominio adecuado del Geómetra, puedan incorporarse al trabajo con las guías de uso “avanzado” del Geómetra.

En resumen: “Geómetra para todos los gustos”. ¡Los invitamos a participar en nuestro taller!

Descartes 3D: Básico
Diseño y Modificación de Actividades Interactivas para la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas

Cristhian Páez Páez [1]

Resumen

Descartes es un proyecto promovido y financiado por el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España.

El principal objetivo de dicho proyecto es la innovación en Educación, donde se utilicen las ventajas de la computadora e Internet para ofrecer, tanto a los profesores como a los estudiantes, formas diferentes de enfocar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, promoviendo metodologías de trabajo más activas, creativas, participativas, motivadoras y personalizadas.

Descartes es un applet configurable; es decir, una \mini-aplicación" creada en JAVA en la que se pueden tener diferentes aspectos. Las mini-aplicaciones Descartes pueden tener aspectos diferentes, ya que los usuarios pueden crear nuevas aplicaciones o modificar las ya existentes, con la ventaja de poder accederlas desde Internet, desde el disco duro de su computadora, desde un CD o desde cualquier otro medio de almacenamiento de información.

Específicamente, Descartes es un NIPPE (núcleo interactivo para programas educativos); es decir, una aplicación creada en JAVA con las características de ser interactiva o dinámica (no se limita a mostrar una sola imagen), ser configurable (permite crear aplicaciones con aspectos diversos) y estar perfectamente documentado (facilita su aprendizaje para el diseño de nuevas páginas de trabajo).

En las siguientes direcciones hay ejemplos de otras aplicaciones NIPPE que se pueden visitar en Internet.

http://personal.telefonica.terra.es/web/mja/Prometeo/prometeo/ejemplos/regpoly.html
http://personal.telefonica.terra.es/web/mja/Prometeo/prometeo/ejemplos/hyperev.html
http://personal.telefonica.terra.es/web/mja/Prometeo/prometeo/ejemplos/toro.html
http://personal.telefonica.terra.es/web/mja/Prometeo/prometeo/ejemplos/nudo.html
http://personal.telefonica.terra.es/web/mja/Prometeo/prometeo/ejemplos/funciones.html
http://fem.um.es/Ejs/EjsExamples3.3/Simulations/EarthSunAndMoon.html
http://fem.um.es/Ejs/EjsExamples3.3/Simulations/VibratingString.html
http://fem.um.es/Ejs/EjsExamples3.3/Simulations/Particles3D.html

Un objetivo que se pretende alcanzar con el desarrollo de este taller, es que los participantes adquieran conocimientos para la modificación y creación de aplicaciones didácticas con el uso de *Descartes*. Dichas aplicaciones se enmarcan dentro de un contexto simple: en *Descartes* se define un sistema de referencia cartesiano interactivo, en el que se pueden configurar y emplear todos sus elementos habituales (origen, ejes, cuadrantes, cuadrícula, puntos, coordenadas y vectores, entre otros).

Descartes permite representar curvas, dadas por sus ecuaciones tanto en forma explícita como implícita; particularmente, *Descartes* permite representar las gráficas de gran número de funciones que, habitualmente, se utilizan en la enseñanza y el aprendizaje en Educación Secundaria y Superior.

Durante el desarrollo del taller los participantes estarán trabajando directamente con los elementos que intervienen en la definición de las configuraciones; dichos elementos pueden ser parámetros modificables

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, cpaez@itcr.ac.cr

por el usuario. Asimismo, se mostrarán otras ventajas y otros usos que se pueden aprovechar con *Descartes*; por ejemplo, esta aplicación dispone de una poderosa herramienta de cálculo que permite evaluar gran número de expresiones matemáticas. Además, se pueden representar gran número de elementos geométricos básicos; como por ejemplo puntos, segmentos y arcos, entre otros, que permiten hacer numerosas representaciones geométricas.

Existen diversas versiones de *Descartes*. El presente taller está dirigido al aprendizaje de *Descartes* 3*D*, versión que permite incorporar utilidades relacionadas con geometría en el espacio, macros, espacios múltiples en la pantalla de trabajo (escena) y editor de fórmulas.

La forma más sencilla de usar *Descartes* consiste en utilizar páginas que contengan escenas interactivas de esta aplicación, páginas que pueden estar en la *web*, en el disco duro de su computadora, en un CD o en cualquier otro medio de almacenamiento de información. Este es el uso que se espera por parte de aquellos que se acerquen por primera vez a esta aplicación. Para la navegación en estas escenas no se requieren conocimientos previos, lo único que se requiere es seguir las indicaciones que se hagan en la propia página (en dichas páginas se señalan las actividades que deben ser realizadas; es decir, son una especie de guías de trabajo).

En otro uso que se le puede dar a *Descartes* se necesita tener experiencia mínima con algún editor de páginas *web*, puede ser un editor de textos (como por ejemplo Word o inclusive Bloc de notas) que permita dar formato a este tipo de páginas. El \diseñador" puede editar las páginas que le interesen o modificar actividades ya realizadas por otras personas (quitando, corrigiendo o añadiendo actividades); esto no requiere más conocimientos que saber utilizar un procesador de textos. Si, además, el \diseñador" ha practicado con las herramientas de configuración del *applet*, puede efectuar con facilidad pequeños cambios; como por ejemplo, modificar colores, incluir o quitar ecuaciones, puntos y segmentos, entre otras cosas.

El último uso consiste en crear escenas originales y se requiere tener un buen conocimiento década uno de los páneles de configuración de las pantallas de trabajo. Para este uso se aconseja utilizar la documentación técnica de *Descartes* 3*D*.

Software libre para modelación SCILAB

Por: Michel De Lara

Ofreció un taller sobre el uso del software SCILAB para la modelación matemática de módulos de manejo agrícola

Ecuaciones Diofánticas: una opción en la resolución de problemas a nivel de secundaria

Angie Solís Palma[1]

Resumen

Mediante las actividades que se desarrollaran en el taller, se busca que los participantes se involucren en la resolución y planteamientos de problemas contextualizados a la realidad del estudiante y que involucren aritmética entera.

También en el taller, se pretende construir en forma conjunta una propuesta metodológica con el fin de que se considere como una alternativa a ser incluida dentro del plan de estudios a nivel de III Ciclo (octavo año) en el área de matemática.

Justificación del taller

La estrategia basada en la resolución de problemas, se ha convertido desde hace algunas décadas en una importante contribución a la educación matemática en el mundo. Tal vez la obra de Polya, que aunque escrita en los años 40 del siglo XX, fue la pionera en este tipo de propuestas. Él planteó una sucesión de pasos en la resolución de problemas: entender el problema, configurar un plan, ejecutar un plan y mirar hacia atrás.

Santaló (1985), gran matemático español y además muy interesado en su didáctica, señala que *«enseñar matemáticas debe ser equivalente a enseñar a resolver problemas. Estudiar matemáticas no debe ser otra cosa que pensar en la solución de problemas»*.

En el libro de Hofsdadter, Gödel, Escher y Bach, se dice que *«las capacidades básicas de la inteligencia se favorecen desde las Matemáticas a partir de la resolución de problemas, siempre y cuando éstos no sean vistos como situaciones que requieran una respuesta única (conocida previamente por el profesor que encamina hacia ella), sino como un proceso en el que el alumno estima, hace conjeturas y sugiere explicaciones»*.

Mas recientemente en el Informe Cockroft, párrafo 243 señala en su punto quinto que la enseñanza de las Matemáticas debe considerar la *«resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las mismas situaciones de la vida diaria»*. Y el N.C.T.M. de Estados Unidos, declaraba hace más de diez años que *«el objetivo fundamental de la enseñanza de las Matemáticas no debería ser otro que el de la resolución de problemas»*.

Se trata entonces de un asunto presente en la educación matemática desde hacia varias décadas, sin embargo, no se ha introducido en los currículos de los países con igual intensidad, e incluso en aquellos en los que se ha dado, ha sido muy recientemente.

La resolución de problemas, obedece a una comprensión tanto de la educación matemática como de la naturaleza de las matemáticas. Con Polya:

> "*para un matemático, que es activo en la investigación, la matemática puede aparecer algunas veces como un juego de imaginación: hay que imaginar en teorema matemático antes de probarlo; hay que imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. Los aspectos matemáticos son primero imaginados y luego probados. Si el aprendizaje de la matemática tiene algo que ver con el descubrimiento en matemática, a los estudiantes de les debe brindar alguna oportunidad de resolver problemas en los que primero imaginen y luego prueben alguna cuestión matemática adecuada a su nivel*".

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, ansolis@itcr.ac.cr

En síntesis, una correcta apreciación de la importancia de la aplicación de la resolución de problemas, se fundamenta en tres ejes:

- Enseñar "para" la resolución de problemas
- Enseñar "sobre" la resolución de problemas
- Enseñar "a través" de la resolución de problemas

Introducción Definiciones y resultados sobre ecuaciones diofanticas: Ecuaciones Diofánticas lineales con dos incógnitas

Es una igualdad de la forma $ax + by = c$, donde a, b, y c son constantes enteras, además x, y son las incógnitas de la ecuación y representan números enteros.

Definición

Una solución es cualquier par de números enteros que al ser sustituidos en la ecuación se obtiene una igualdad verdadera.

Resultado

Sea $ax + by = c$ una ecuación lineal entera de dos incógnitas, y sea $g = \text{MCD}(a, b)$, la ecuación tiene soluciones enteras si g divide a c.

Solución General (entera) de una ecuación lineal de dos incógnitas

Consideremos la ecuación $ax + by = c$ tal que $g = \text{MCD}(a, b)$ y g divide a c.

Si x_0, y_0 es una solución particular de la ecuación anterior, entonces cualquier otra solución x, y de es ecuación está dada por:

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{g}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{g}t \end{cases}$$, donde a t se le asignas valores enteros.

Lo anterior significa que, si se tiene una solución particular, basta con asignar valores enteros positivos o negativos a t para obtener las soluciones posibles de la ecuación dada.

Desarrollo

Para resolver un problema como el siguiente:

Después de que Karol compra 16 naranjas y paga con ¢2000, el dependiente debe de darle ¢1200 de vuelto, el cual se lo da en monedas de ¢50 y de ¢20. ¿Cuántas monedas de ¢50 y cuántas de ¢20 recibe Karol si en total recibe entre 40 y 44 monedas?

Solución:

Paso 1.

El problema se debe modelar matemáticamente de la siguiente manera:

Sean x el número de monedas de ¢50

y el número de monedas de ¢20

Entonces ¢50 multiplicado por el número de monedas de ¢50 más ¢20 multiplicado por el número de mondas de ¢20 tiene que dar ¢1200. Es decir:

$$50x + 20y = 1200 \ ^{(*)}$$

Paso 2.
Determinar una solución particular de la ecuación planteada en el primer paso, lo cual lo haremos de cualquier de las siguientes dos formas:

Método de Euclides para determinar una solución particular

a. Calcular el máximo común divisor de los coeficientes de *x* y de *y* : $g = MCD\ (50, 20) = 10$
b. Como $g = 10$ divide a 1200, entonces la ecuación tiene solución
c. Para buscar una solución particular, se procederá utilizando el algoritmo de la división como se muestra a continuación:

$$50 = 2 \cdot 20 + 10 \quad (1)$$

$$20 = 2 \cdot 10$$

Ahora se procede a despejar 10 de la ecuación (1)

$$10 = 50 - 2 \cdot 20 \quad (2)$$

Multiplicando 120 por ambos lados de la ecuación (2)

$$120 \cdot 10 = 120 \cdot 50 - 120 \cdot 2 \cdot 20 4$$

$$1200 = (120) \cdot 50 + (-240) \cdot 20 \quad (4)$$

Entonces una solución particular de (*) (verificarlo) puede ser:
x = 120 y *y* = -240

Método de Euler para determinar una solución particular

a. Calcular el máximo común divisor de los coeficientes de *x* y de *y*
$g = MCD\ (50, 20) = 10$
b. Como $g = 10$ divide a 1200, entonces la ecuación tiene solución
c. Para buscar una solución particular, se procederá de la siguiente forma:
   i. Se despeja *y* en términos de *x*

$$y = \frac{1200 - 50x}{20}$$

   ii. Se le asignan valores a *x* hasta encontrar que y sea entera, como se muestra en la siguiente tabla

x	$y = \frac{1200 - 50x}{20}$	y	
x = 1	$y = \frac{1200 - 50 \cdot 1}{20}$	y = 57,5	✘
x = 2	$y = \frac{1200 - 50 \cdot 2}{20}$	y = 55	✓

Entonces una solución particular de (*) (verificarlo) puede ser:
x = 2 y *y* = 55

Nota:
Para obtener la solución particular, si se desea despejar *x* en términos de *y*, y asignarle valores enteros a *x* para obtener *y*, el procedimiento es válido.

Paso 3.
Determinar la solución general de la ecuación $50x + 20y = 1200$
Solución general utilizando la solución particular encontrada con el método de Euclides

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{g}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{g}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120 + \dfrac{20}{10}t \\ y = -240 - \dfrac{50}{10}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120 + 2t \\ y = -240 - 5t \end{cases}, \quad t \in IR$$

Solución general utilizando la solución particular encontrada con el método de Euler

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{g}t \\ y = y_0 - \dfrac{a}{g}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \dfrac{20}{10}t \\ y = 55 - \dfrac{50}{10}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 55 - 5t \end{cases}, \quad t \in IR$$

Paso 4.
Determinar una solución que satisfaga la condición del problema: *Karol en total recibe entre 40 y 44 monedas*

Si se utiliza la solución general obtenida a partir del método de Euclides

$$\begin{aligned} & 40 < x + y < 44 \\ \Rightarrow\ & 40 < 120 + 2t + -240 - 5t < 44 \\ \Rightarrow\ & 40 < -120 - 3t < 44 \\ \Rightarrow\ & 160 < -3t < 164 \\ \Rightarrow\ & \frac{160}{-3} > t > \frac{164}{-3} \\ \Rightarrow\ & -53.3 > t > -54.7 \\ \Rightarrow\ & t = -54 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 120 + 2\cdot(-54) \\ y = -240 - 5\cdot(-54) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 30 \end{cases}, \text{ en efecto } 12 + 30 = 42 \text{ y } 40 < 42 < 44$$

Si se utiliza la solución general obtenida a partir del método de Euler

$$\begin{aligned} & 40 < x + y < 44 \\ \Rightarrow\ & 40 < 2 + 2t + 55 - 5t < 44 \\ \Rightarrow\ & 40 < 57 - 3t < 44 \\ \Rightarrow\ & -17 < -3t < -13 \\ \Rightarrow\ & \frac{-17}{-3} > t > \frac{-13}{-3} \\ \Rightarrow\ & 5.7 > t > 4.3 \\ \Rightarrow\ & t = 5 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 + 2\cdot(5) \\ y = 55 - 5\cdot(5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 30 \end{cases}, \quad \text{en efecto } 12 + 30 = 42 \text{ y } 40 < 42 < 44$$

Paso 5.
Responder el problema: *¿Cuántas monedas de ¢50 y cuántas de ¢20 recibe Karol si en total recibe entre 40 y 44 monedas?*

R/ Karol recibe 12 monedas de ¢50 y 30 monedas de ¢20

Metodología
La actividad se desarrollará de acuerdo con la modalidad de taller, para ello, se organizará una jornada de trabajo con una duración de cuatro horas, la cual consistirá de dos partes.

La primera sesión consistirá en la discusión de conceptos, teoremas, el método de solución de éstas ecuaciones y aplicaciones, en subgrupos para valorar su importancia dentro del proceso de la enseñanza y aprendizaje en primaria o secundaria..

La segunda sesión será para que los participantes realicen sus propuestas didácticas.

Bibliografía:

Murillo T., Manuel, González Arguello José F.(2006) *Teoría de los números*, Editorial Tecnológica de Costa Rica, , Costa Rica.

Pettofrezzo, Anthony J.(1972) *Introducción a la teoría de los números*, Editorial Prentice – Hall Internacional, 1972, España.

Polya, G. (1979). **¿***Cómo plantear y resolver problemas?***.** Editorial Trillas, Mexico, (1ª Edición 1957).

Schoenfeld, A. (1989). *La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas.* En Resnick, L. y Klopfer, L. (1989). Curriculum y Cognición .Buenos Aires: Aique.

Diofanto, la Aritmética y Algunas Ecuaciones Diofánticas, artículo disponible en la dirección: http://www.arrakis.es/~mcj/diofanto.htm#inicio_diofanto

Elementos básicos de programación con PHP

Máster Enrique Vílchez Quesada
Universidad Nacional
Escuela de Matemática-Escuela de Informática
División de Educología

Resumen: PHP es un lenguaje de programación de alto nivel para crear páginas Web dinámicas, una de sus ventajas radica en su gratuidad en comparación con otros lenguajes, cuyo software es necesario comprar para su utilización. Con el presente documento se exponen algunos elementos básicos para iniciar la programación de páginas Web con PHP, el enfoque del documento se dirige a principiantes de diseño Web y no programadores.

Palabras clave: aplicaciones, Web, programación, PHP.

Abstract: PHP is a high-level programming language to create pages Web dynamic, one of his perks consists in his gratuitousness as compared with another languages, whose software is necessary to shop for his utilization. With the present document some basic elements to initiate the programming of pages display Web with PHP themselves, the focus of the document directs to designing beginners Web and no programming.

Key words: applications, Web, programming, PHP.

1. Introducción

PHP es un lenguaje de programación Web, para la creación de páginas dinámicas, a diferencia de otros lenguajes para la Web, PHP es un lenguaje desde el servidor, esto significa que se ejecuta en el servidor donde se encuentran alojadas las páginas Web del sitio.

Una ventaja de este tipo de aplicaciones desde el servidor, es que todas las páginas podrán ser vistas sin ningún problema de configuración, independientemente de la versión o tipo de navegador que el usuario esté utilizando.

El problema fundamental de las aplicaciones que corren desde el browser, es que dependen de las características particulares del navegador en el que se encuentre el usuario, esto puede ocasionar que la computadora local no cuente con los requerimientos mínimos para ver el sitio Web y en consecuencia que éste no pueda ser visitado.

2. Instalación de PHP

Para correr aplicaciones desarrolladas con PHP, es necesario tener instalados los siguientes elementos:

- El servidor Web Apache, éste puede ser descargado en su última versión en la dirección electrónica: http://httpd.apache.org/download.cgi.
- El lenguaje de programación PHP, la última versión de PHP descargable la puede encontrar en la dirección URL: http://www.php.net.
- La base de datos MySQL, ésta puede ser descargada en: http://www.mysql.com/downloads.

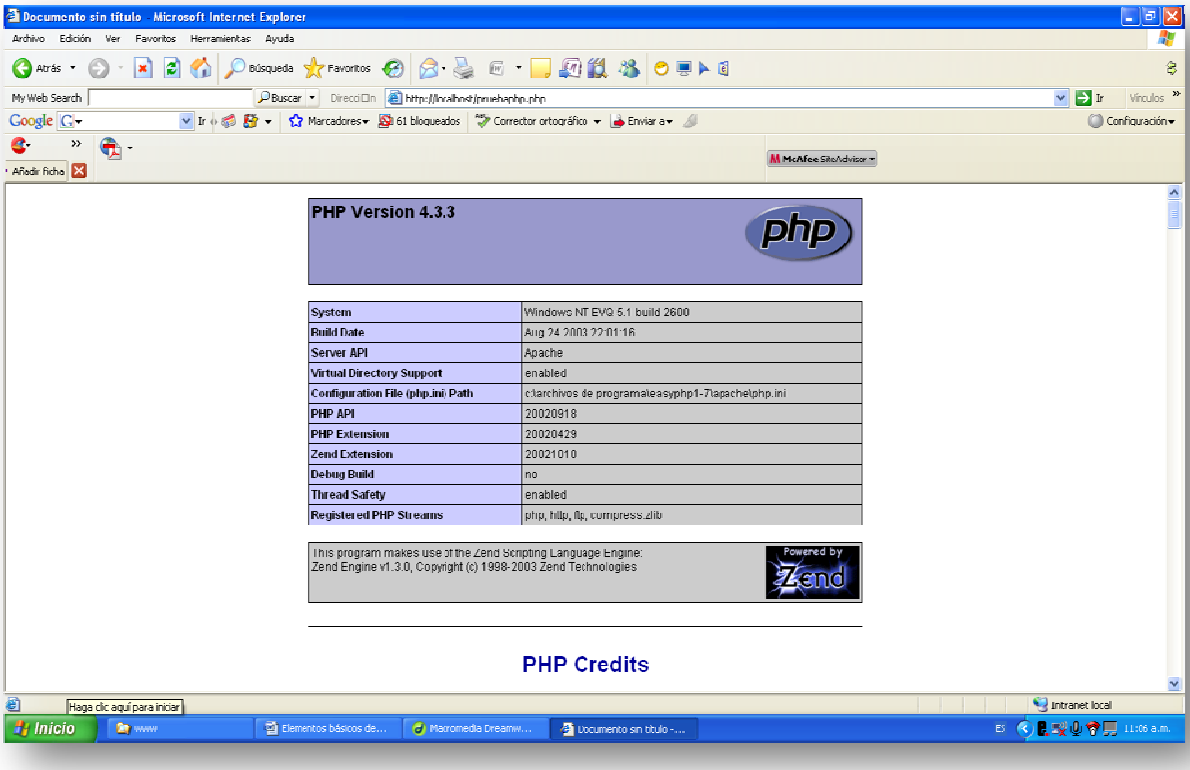
Las tres aplicaciones requieren ser configuradas para trabajar de forma conjunta, en ocasiones si se es un principiante en la materia, lograr la configuración podría resultar un trabajo tedioso, por este motivo, se sugiere instalar otra aplicación denominada EasyPHP, la cual puede ser descargada en la dirección electrónica: http://www.easyphp.org/telechargements.php3. EasyPHP instala de manera conjunta el servidor Apache, el lenguaje de programación PHP y la base de datos MySQL, librando al usuario del peligro de los problemas de configuración, la desventaja principal de esta aplicación es que no instala las últimas versiones de cada uno de estos programas.

3. Prueba de configuración

Después de haber instalado las tres aplicaciones necesarias para programar en PHP, en la carpeta: C:\Archivos de programa\EasyPHP1-7\www encontrará un archivo llamado "index", para realizar una prueba de configuración abra este archivo desde Dreamweaver y añada en <body> la siguiente línea de código:

<? Phpinfo(); ?>

Luego para acceder desde el navegador a las páginas almacenadas en C:\Archivos de programa\EasyPHP1-7\www (carpeta configurada en el servidor Web), se transcribe la siguiente dirección: http://localhost/paginas/pruebaphp.php. Aparecerá en la pantalla:



Que muestra la configuración de PHP, podemos ver los datos de nuestro sistema y del servidor, detalles de la configuración de PHP, del servidor Apache y de MySQL, así como una serie de funciones extras de PHP.

4. Etiquetas HTML

El uso de etiquetas HTML es fundamental cuando se programa en el lenguaje de programación PHP, el manejo de esta etiquetas permitirá tener una mayor fluidez para trabajar con los comandos de programación PHP y para poder leer y entender código reutilizable. A continuación se presentan algunas de las etiquetas más comunes.

Tipo	Etiqueta	Función
Caracteres	**<B>...</B>**	Texto en negrita
	<BIG>...</BIG>	Ampliación del tamaño de los caracteres
	<BLINK>...</BLINK>	Texto parpadeante (únicamente funciona en Netscape)
	<I>...</I>	Texto en itálico
	<FONT color="#XXXXXX"> ...</FONT>	Texto en color donde XXXXXX es un valor hexadecimal
	<FONT size=X>...</FONT>	Tamaño de los caracteres donde X es un valor de 1 a 7
	<SMALL>...</SMALL>	Reducción del tamaño de los caracteres
	_{...}	Texto como subíndice
	^{...}	Texto como exponente
	<U>...</U>	Texto subrayado
Texto	**<!--...-->**	Comentarios ignorados por el navegador
	** **	Texto a la línea
	<CENTER>...</CENTER>	Centra cada elemento comprendido en la etiqueta
	<DIV align=left> ...</DIV>	Alinea el elemento a la izquierda
	<DIV align=right> ...</DIV>	Alinea el elemento a la derecha
	<Hx>...</Hx> **<Hx align=center>...</Hx>**	Título o x tiene un valor de 1 à 7

	<Hx align=left>...</Hx> **<Hx align=right>...</Hx>**	Título centrado Título alineado a la izquierda Titulo alineado a la derecha
	<P>...</P> **<P align=center>...</P>** **<P align=left>...</P>** **<P align=right>...</P>**	Nuevo párrafo Párrafo centrado Párrafo alineado a la izquierda Párrafo alineado a la derecha
Listas	**<UL>** **<LI>** **</UL>**	Lista no numerada Elemento de lista
	<OL> **<LI>** **</OL>**	Lista numerada Elemento de lista
Rayas	**<HR>**	Línea de separación. Raya horizontal
	<HR width="x%">	Anchura de la raya en %
	<HR width=x>	Anchura de la raya en pixeles
	<HR size=x>	Altura de la raya en pixeles
	<HR align=center> **<HR align=left>** **<HR align=right>**	Raya centrada Raya alineada a la izquierda Raya alineada a la derecha
	<HR noshade>	Raya sin efecto de sombreado
Enlaces	**<A href="http://...">...</A>**	Enlace hacia una página Web
	<A href="mailto:...">...</A>	Enlace hacia una dirección Email
	<A name="xyz">...</A>	Definición de una ancla
	<A href="xyz">...</A> **<A href="fichier#xyz">...</A>**	Enlace hacia una ancla
Imágenes	**<IMG scr="xyz.gif">** **<IMG scr="xyz.pjg>**	Inserción de una imagen al formato Gif o Jpg
	<IMG ... width=x height=y>	Puesta a la escala de la imagen en pixeles
	<IMG ... border=x>	Definición del borde de una imagen con un enlace
	<IMG ... alt="votre texte">	Texto alternativo

		cuando la imagen no está mostrada
	<IMG ... align=bottom> **<IMG ... align=middle>** **<IMG ... align=top>** **<IMG ... align=left>** **<IMG ... align=right>**	Alinea la imagen abajo Alinea la imagen en el medio Alinea la imagen arriba Alinea la imagen a la izquierda Alinea la imagen a la derecha
	<IMG ... hspace=x> **<IMG ... vspace=y>**	Espaciamiento horizontal entre la imagen y el texto Espaciamiento vertical entre la imagen y el texto
Tablas	**<TABLE>...</TABLE>**	Definición de una tabla
	<TABLE width="x%">	Anchura de la tabla en %
	<TABLE width=x>	Anchura de la tabla en pixeles
	<TABLE border=x>	Anchura del borde
	<TABLE cellpadding=x>	Espacio entre el borde y el texto
	<TABLE cellspacing=x>	Espesor de la raya entre las celdas
	<TR>...</TR>	Línea de la tabla
	<TD>...</TD>	Celda de la tabla
	<TD bgcolor="#XXXXXX">	Color de una celda de la tabla
	<TD width="x%"> **<TD width=x>**	Anchura de columna en % Anchura de columna en pixeles
	<TD align=center> **<TD align=left>** **<TD align=right>**	Texto centrado en la celda Texto alineado a la izquierda en la celda Texto alineado a la derecha en la celda
	<TD valign=bottom> **<TD valign=middle>** **<TD valign=top>**	Alineación hacia arriba del contenido de la celda Centrado vertical del contenido de una

		celda Alineación hacia el bajo del contenido de la celda
	<TD colspan=x> <TD rowspan=x>	Número de celdas para fusionar horizontalmente Número de celdas para fusionar verticalmente
Marcos	**<FRAMESET>...</FRAMESET>**	Define una estructura de frames
	<FRAMESET rows="x%,y%,...">	División horizontal de la ventana en %
	<FRAMESET cols="x%,y%,...">	División vertical de la ventana en %
	<FRAME src="fichier.htm">	Fichero mostrado en una ventana de frames
	<NOFRAMES>...</NOFRAMES>	Contenido para los browser no previstos para los frames
Páginas HTML	**<HTML>...</HTML>**	Principio y fin de la página Html
	<HEAD>...</HEAD>	Zona de encabezamiento de la página Html
	<TITLE>...</TITLE>	Titulo visualizado por el browser (elemento de HEAD)
	<BODY>...</BODY>	Principio y fin del cuerpo del fichero Html
	<BODY bgcolor="#XXXXXX">	Color del fondo (en hexadecimal)
	<BODY background="xyz.gif">	Imagen del fondo

5. Introducir código PHP

Es importante saber cómo realizar sentencias de código en PHP, existen varias opciones:

```
<?
Código PHP
?>
```

```
<%
Código PHP
```

% >
<?php
Código PHP
?>
<script lenguaje= “php” >
Código

Por otra parte, cualquier sentencia dentro del código de programación PHP siempre finaliza con un punto y coma. Por ejemplo la línea de código:

<? echo ”
”; ?>

indica la inserción de un salto de página.

6. Comentarios dentro del código

Realizar comentarios dentro de un código de programación, sin importar el lenguaje que se utilice, es muy importante pues ayuda a mejorar la legibilidad del código que caracteriza a la aplicación desarrollada, esto puede servir para:

- Permitir que otras personas comprendan lo que se ha hecho.
- Realizar modificaciones futuras al código.

En el lenguaje de programación PHP, es posible realizar comentarios dentro del código de dos formas:

Sintaxis	Función	Ejemplo

/ / Comentario	Añade un comentario en una sola línea	<?
		phpinfo();
		//Configuración del
		//intérprete de PHP
		?>

/ * Comentario * /	Añade un comentario en varias líneas	<? phpinfo(); /* Configuración del intérprete de PHP */ ?>

7. Variables y constantes

El uso de variables es muy importante en cualquier lenguaje de programación, para poder almacenar en la memoria temporal valores que posteriormente se utilizarán para realizar operaciones matemáticas, o bien, operaciones con cadenas de caracteres.

Para declarar o definir una variable dentro del código de programación PHP, se escribe el símbolo de dólar ($), de esta forma la expresión $x, nos indica la definición de una variable llamada “x”. En PHP no es necesario especificar qué tipo de variable se declara (entera, double, string).

El símbolo “=” permite en PHP asignar a una variable un valor específico, “$x=3;” asigna a la variable “x” el valor entero 3, “$x=”3”;”, asigna a “x” una letra; la letra representada por el tres.

PHP distingue entre las letras mayúsculas y las minúsculas, de esta forma las expresiones “$x=3;” y “$X=3;” representan variables distintas. Para mostrar una variable en pantalla se utilizan las opciones “echo($variable);” o “print($variable);” que realizan exactamente la misma función al ser ejecutadas.

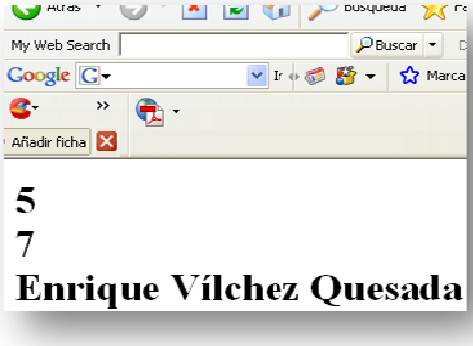
Las constantes a diferencia de las variables almacenan en la memoria temporal un valor fijo, es decir, un valor que no se podrá modificar durante la ejecución de la página. Para definir constantes en PHP se utiliza la instrucción “define”, su sintaxis es la siguiente:

define(“nombre de la variable”, “valor asignado”)

Observe el siguiente ejemplo:

```
<html>
<head>
<title>Ejemplo de variables con PHP</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<?
$a=5; //Valor entero asignado a la variable "a"
$b="7"; //Caracter asignado a la variable "b"
echo"<b><h1>"; //Formato del texto en pantalla en negrita y tipo de encabezado 1
echo($a); //Muestra en pantalla el contenido de la variable "a"
echo"<br>"; //Inserta una nueva línea
echo($b); //Muestra en pantalla el contenido de la variable "b"
define("x","Enrique Vílchez Quesada"); //Definición de una constante "x"
echo"<br>"; //Inserta una nueva línea
echo(x); //Muestra el valor de la constante "x" en pantalla
echo"</b></h1>";
 ?>
<body>
</body>
</html>
```

Esta página PHP imprime en pantalla el valor de contenido de dos variables y una constante. Para observar su funcionamiento, en el browser ejecute http://localhost/paginas/ej_var.php. Lo cual devuelve:



8. Operadores en PHP

Los operadores en un lenguaje de programación se utilizan para realizar operaciones entre variables y/o valores constantes. PHP cuenta con cinco grupos de operadores: aritméticos, de comparación, lógicos, de unión entre cadenas (caracteres) y de asignación.

Tipo de operador	Operador	Operación	Sintaxis
Aritméticos	+	Suma	$x + $y;
	-	Resta	$x - $y;
	*	Multiplicación	$x * $y;
	/	División	$x * $y;
	%	Módulo (residuo de la división)	$x % $y;
	++	Incremento en una unidad	$x++;
	--	Decremento en una unidad	$x--;
Comparación	==	Igual (igual valor)	$x == $y
	===	Idéntico (igual valor y tipo)	$x === $y
	!=	Diferente	$x != $y
	<	Menor que	$x < $y
	<=	Menor o igual que	$x <= $y
	>	Mayor que	$x > $y
	>=	Mayor o igual que	$x >= $y
Lógicos	&&	Y	$x && $y
	AND	Y	$x AND $y
	||	O	$x || $y
	OR	O	$x OR $y
	XOR	O excluyente	$x XOR $y
	!	Negación	!$x
Cadenas	.	Unión	$x . $y;
Asignación	=	Asignar un valor a una variable	$x = 4;

Considere el siguiente ejemplo:

```
<html>
<head>
<title>Ejemplos de operadores</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<?
$x=3;
$y=5;
//Ejemplos de operadores aritméticos
$suma= $x + $y;
$resta= $x - $y;
$multiplicación= $x * $y;
$División= $x / $y;
define("tex", "Resultados:");
```

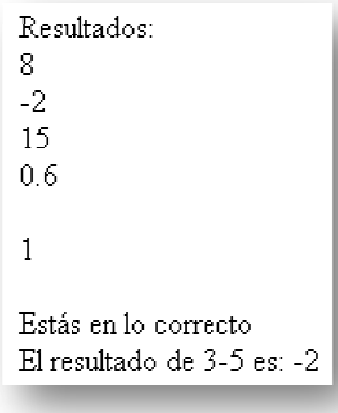
```
echo(tex);
echo "<br>";
echo($suma);
echo "<br>";
echo($resta);
echo "<br>";
echo($multiplicación);
echo "<br>";
echo($División);
echo "<br>";

//Ejemplo de operadores de comparación
echo($x >= $y);
echo "<br>";
echo($x <= $y);
echo "<br>";
echo($x == $y);
echo "<br>";

//Ejemplo de operador lógico
if (($x==3)&&($y==5))
{print("Estás en lo correcto");}

//Ejemplo de unión de cadenas
$cadena= "El resultado de " . $x . "-" . $y . " es: " . $resta;
echo "<br>";
echo($cadena);
?>
</head>
<body>
</body>
</html>
```

Al ejecutar http://localhost/paginas/ej_operadores.php se obtiene en el browser:



9. Estructuras de control en PHP

PHP al igual que cualquier lenguaje de programación, maneja estructuras de control condicionales y de bucle (ciclo), a continuación se resumen en la siguiente tabla:

Tipo	Nombre	Sintaxis
Condicionales	If (si)	<? if (condición) {Sentencias;} ?>
	If Else / Elseif (si, sino)	<? if (condición) {Sentencias;} else(condición) {Sentencias;} ?> O bien; <? if (condición) {Sentencias;} elseif(condición) {Sentencias;} ?>
Ciclo	While (se ejecuta mientras se cumpla una condición)	while (condición) {Sentencias;}
	Do … While (se ejecuta mientras no se cumpla una condición)	do (condición) while {Sentencias;}
	For (se ejecuta una cantidad fija de veces)	for ($i=valor_inicial; $i=valor_final; $i++) {Sentencias;}

Por ejemplo, el siguiente fichero utiliza estructuras de control condicionales para verificar si dadas tres longitudes, con ellas es posible construir un triángulo. En caso afirmativo indica que tipo de triángulo es: rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

```
<html>
<head>
<title>Estructuras de control</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<?
//Se asume que las longitudes están ordenadas de forma creciente
$a=3;
$b=4;
$c=5;

//Ejemplo de la estructura de control condicional If/Else
echo"<b><h1>";
if($a+$b>$c)
        {print("Las medidas corresponden a los lados de un triángulo");
        echo"<br>";
        //Ejemplo de la estructura de control condicional If/Elseif
        if($a*$a+$b*$b==$c*$c)
```

```
            {print("Las medidas corresponden a un triángulo rectángulo");}
        elseif($a*$a+$b*$b>$c*$c){print("Las medidas corresponden a un triángulo acutángulo");}
        if($a*$a+$b*$b<$c*$c)
        {print("Las medidas corresponden a un triángulo obtusángulo");}}
else {print("No corresponden a las medidas de los lados de un triángulo");}
echo"</b></h1>";
?>
<body>
</body>
</html>
```

En el browser corra: http://localhost/paginas/estructuras_cond.php.

La ejecución del siguiente código, muestra en pantalla todos los números naturales del 1 al 9 en orden descendente y además muestra todos los números naturales del 5 al 9 en orden creciente. El código de programación se basa en el uso de estructuras de control de repetición.

```
<html>
<head>
<title>Estructuras de control</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<?
$y=10;
while($y > 1)
{$y--;
echo"<big>"; //Aumenta en cada iteración el tamaño de la fuente
echo"<b>";
print("Número: " . $y); //Imprime en pantalla el número x
echo"<br>"; //Inserta una nueva línea
echo"<hr>";
echo"</b></h1>";} //Inserta una línea horizontal de separación
echo"<br>";
for($i=1; $i<=10; $i++)
{print("Número: " . $i . "<br>");} //Imprime los números enteros del 1 al 9
?>
<body>
</body>
</html>
```

Ejecute en el navegador: http://localhost/paginas/estructuras_repe.php.

10. Funciones en PHP

Una función es un bloque de código que se reutiliza a lo largo de toda una aplicación, con el objetivo de no duplicar código de programación.

PHP permite crear funciones personalizadas e integra otras funciones predeterminadas. En este apartado se explican algunas de ellas.

10.1 Funciones personalizadas

En PHP es posible crear funciones que reciben tantos argumentos como sean necesarios, recurriendo a la siguiente sintaxis:

```
function nombre ($argumento_1, $argumento_2,…,$argumento_n)
{Sentencias;
return $resultado;}
```

Por ejemplo si se desea construir una función que tome tres argumentos y los sume, en PHP se procede de la siguiente manera:

```
<html>
<head>
<title>Ejemplo de funci&oacute;n &quot;Suma&quot;</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<?
function suma($x,$y,$z) //Declaración de la función
{$w=$x+$y+$z;
return $w;}
$q= suma(2,2,2); //Invocación de la función
echo"<b><h1>";
echo($q); //Impresión del resultado de la función
echo"</b></h1>";
?>
<body>
</body>
</html>
```

En el browser ejecute: http://localhost/paginas/fun_suma.php.

10.2 Función chr

La función chr convierte código ASCII a caracteres, recibe un número entre 1 y 255, y lo convierte a su correspondiente carácter de acuerdo con el código ASCII.

Por ejemplo:

```
<html>
<head>
<title>Función chr()</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<body bgcolor= "#303030"> <!-- Añade color de fondo a la página -->
<body text = "#A0A0A0"> <!-- Añade color al texto -->
<body leftmargin = "20"> <!-- Tamaño del margen izquierdo -->
<body topmargin = "20"> <!-- Tamaño del margen superior -->
<font face = "Tahoma"> <!-- Tipo de letra -->
<font size="+3"> <!-- Aumenta el tamaño de font en tres puntos -->
```

```
<?
for($i=1; $i<=255; $i++)
{/* Se incrementa la variable $i desde 1 hasta 255,
para poder representar los caracteres */
print("ASCII: ". $i . " -< caracter: " . chr($i) . "<br>");}
/* El comando chr() convierte el número en su
correspondiente carácter */
?>
</body>
</html>
```

Ejecute en el navegador: http://localhost/paginas/fun_chr.php.

10.3 Función printf y sprintf

Los comandos printf y sprintf tienen la misma función, construir cadenas de texto en función de las instrucciones que se muestran en la siguiente tabla.

Instrucción	Acción
%b	Devuelve entero binario
%d	Devuelve entero decimal
%c	Devuelve carácter ASCII correspondiente
%f	Devuelve el decimal (utiliza signo decimal)
%s	Devuelve una cadena

La sintaxis que utilizan estas funciones es de la forma:

printf(“%d”, $variable); , o bien, sprintf(“%d”, $variable);

Por ejemplo ejecute en el browser: http://localhost/paginas/fun_printf.php, que contiene el siguiente código de programación:

```
<html>
<head>
<title>Funci&oacute;n printf o sprintf</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<body bgcolor= "#303030"> <!-- Añade color de fondo a la página -->
<body text = "#A0A0A0"> <!-- Añade color al texto -->
<body leftmargin = "20"> <!-- Tamaño del margen izquierdo -->
<body topmargin = "20"> <!-- Tamaño del margen superior -->
<font face = "Tahoma"> <!-- Tipo de letra -->
<font size="+3"> <!-- Aumenta el tamaño de font en tres puntos -->
<?
$edad = "25 años"; //Declara la variable edad
printf("%d",$edad); //Devuelve el entero decimal de la variable
echo "<br>";
printf("%b",$edad); //Devuelve el entero binario
?>
</body>
</html>
```

10.4 Función strtolower y srttoupper

Estas funciones toman una cadena de texto y la convierten a letras minúsculas (strtolower) o letras mayúsculas (strtoupper).

Por ejemplo:

```
<html>
<head>
<title>Funciones strtolower y strtoupper</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<body bgcolor= "#303030"> <!-- Añade color de fondo a la página -->
<body text = "#A0A0A0"> <!-- Añade color al texto -->
<body leftmargin = "200"> <!-- Tamaño del margen izquierdo -->
<body topmargin = "200"> <!-- Tamaño del margen superior -->
<font face = "Tahoma"> <!-- Tipo de letra -->
<font size="+3"> <!-- Aumenta el tamaño de font en tres puntos -->
<?
$var = "Pepito";
print "Texto en minúsculas:";
echo "<br>";
echo (strtolower($var)); /* Pone el texto de la variable
"var" en minúscula */
echo "<br>";
echo "<br>";
print "Texto en mayúsculas: ";
echo "<br>";
echo (strtoupper($var)); /* Pone el texto de la variable
"var" en mayúscula */
?>
</body>
</html>
```

Ejecute en el navegador: http://localhost/paginas/fun_str.php.

10.5 Función date

La función date devuelve la fecha actual, o bien, la hora actual de acuerdo con la fecha y/o hora del sistema. Para mostrar en pantalla la fecha y/o hora actual en un formato específico, se utiliza el siguiente código:

Código	Resultado
a	am o pm
A	AM o PM
h	Hora en el formato 1 – 12
H	Hora en el formato 0 – 23
i	Minutos
s	Segundos

J	Día del mes sin ceros
D	Día del mes con ceros
D	Abreviatura del día de la semana en inglés
I	Nombre del día en inglés
Z	Número de día del año, del 1 a 365
M	Número del mes, del 1 al 12
M	Abreviatura del mes en inglés
F	Nombre del mes en inglés
Y	Año con formato de dos dígitos
Y	Año con formato de cuatro dígitos

Veamos el siguiente ejemplo:

```
<html>
<head>
<title>Fecha y hora actual</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<body bgcolor= "#303030">
<body text = "#E5E5E5">
<body leftmargin = "50">
<body topmargin= "50">
<font face="tahoma" size= "2">
<?
echo "Hoy es día" . " " , date("d/m/Y"), " y la hora actual es" . " " , date("h:i:s"), "<br> <br> Bienvenidos a este sitio"; //Fecha con saludo
echo"<br>";
echo"<br>";
echo"<br>";
echo date("d/m/Y"), "----------" . date("h:i"); //Fecha sin saludo
?>
</body>
</html>
```

Observe en el navegador: http://localhost/paginas/fun_date.php.

10.6 Funciones matemáticas en PHP

Las funciones matemáticas en PHP solo manejan valores dentro de los rangos de los tipos long y double de la computadora. En la siguiente tabla se describen las funciones más importantes:

Función	Sintaxis
Valor absoluto	abs($x);
Arco seno (en radianes)	asin($x);

Arco coseno (en radianes)	acos($x);
Arco tangente (en radianes)	atan($x);
Convierte un número entre bases arbitrarias	base_convert($numero, base actual, base a convertir);
Convierte un número binario a decimal	bindec($numero);
Redondea fracciones hacia arriba	ceil($x);
Convierte un número decimal a binario	decbin($numero);
Devuelve el valor de pi	pi(#entero)
Calcula una potencia de “e”	exp($exponente);
Redondea fracciones hacia abajo	floor($numero);
Logaritmo natural	log($numero);
Logaritmo en base 10	log10($numero);
Encuentra el valor máximo	max($x,$y,...);
Encuentra el valor mínimo	min($x,$y,...);
Calcula una potencia	pow($base,$exponente);
Genera un valor aleatorio	rand(valor mínimo, valor máximo);
Redondea un float	round($numero);
Seno	sin($ángulo en radianes);
Coseno	cos($ángulo en radianes);
Tangente	tan($ángulo en radianes);
Raíz cuadrada	sqrt($numero);
Introduce la semilla del generador de números aleatorios	srand((double)microtime()*1000000); $randval = rand();

Estas funciones son de mucha utilidad para desarrollar aplicaciones relacionadas con la enseñanza de la matemática como veremos en la siguiente sección.

11. Ejemplos de Aplicaciones en PHP

A continuación se presentan un conjunto de ejemplos de algunas aplicaciones interesantes desarrolladas utilizando el lenguaje de programación PHP.

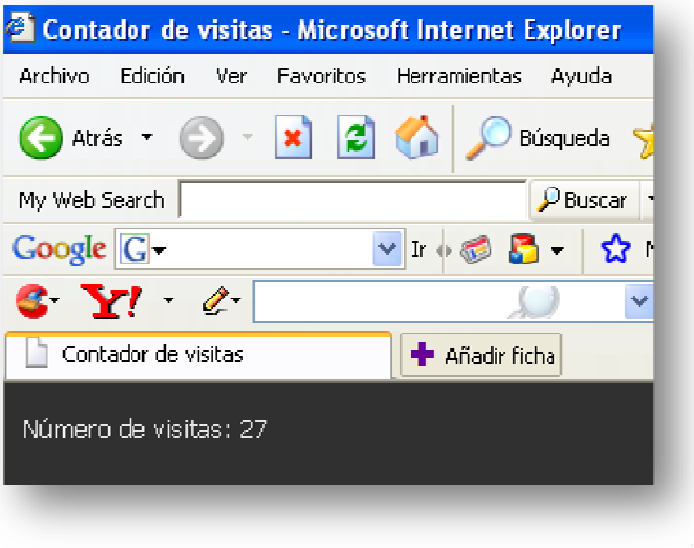
11.1 Contador de visitas

Esta aplicación genera un contador de visitas, para ello utiliza un archivo “.txt” llamado “visitas” con el objetivo de ir almacenando el valor actual del contador de la página. A continuación se muestra el código de programación:

```
<html>
<head>
<title>Contador de visitas</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<body bgcolor= "#303030">
<body text = "#E5E5E5">
<font face="tahoma" size= "2">
<?
```

```
$cuenta = "visitas.txt";
function contador($cuenta)
{$fp=fopen($cuenta,'rw'); //Abre el fichero visitas.txt en modo lectura(r) y escritura(w)
$num= fgets($fp,5);
$num+=1;
print "Número de visitas: ";
echo "$num";
exec("rm-rf $cuenta");
exec("echo $num > $cuenta");}
if (!file_exists($cuenta))
{excec("echo 1 > $cuenta");}
contador($cuenta);
?>
</body>
</html>
```

Al ejecutar en el navegador http://localhost/paginas/contador.php se observa lo siguiente:



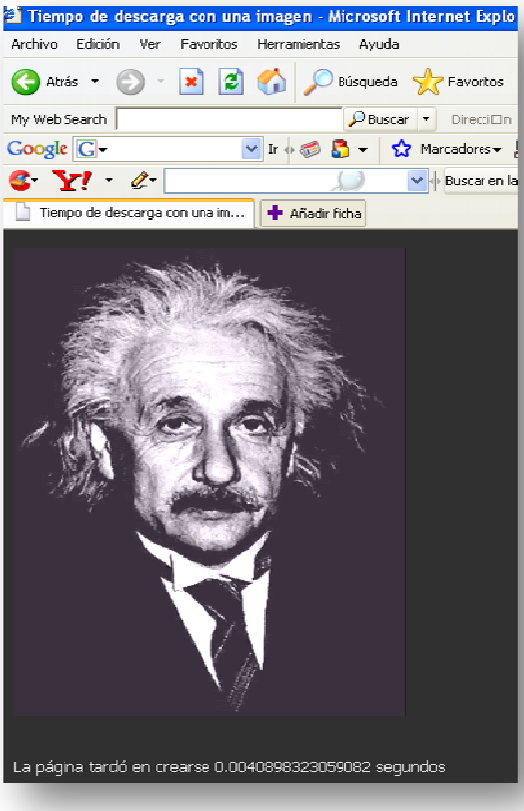
11.2 Tiempo de descarga de una página

Con este ejemplo se ha desarrollado una página que calcula el tiempo de descarga de todo su contenido. La página ejecutada está constituida únicamente por una imagen. El código de programación es el siguiente:

```
<?
//Tiempo inicial de descarga
$tiempo= microtime();
$tiempo= explode(" ", $tiempo);
$tiempo=$tiempo[1]+$tiempo[0];
$tiempoinicial=$tiempo;
?>
<html>
<head>
<title>Tiempo de descarga con una imagen</title>
```

```
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<body bgcolor= "#303030">
<body text = "#E5E5E5">
<font face="tahoma" size= "2">
<img src="../imagenes/Einstein_5.gif" width="308" height="397">
<?
//Tiempo final y total de descarga
echo "<br><br><br>";
$tiempo= microtime();
$tiempo=explode(" ", $tiempo);
$tiempo=$tiempo[1]+$tiempo[0];
$tiempofinal=$tiempo;
$tiempototal=($tiempofinal-$tiempoinicial);
echo "La página tardó en crearse " . $tiempototal . " segundos";
?>
</body>
</html>
```

Para observar la aplicación ejecute http://localhost/paginas/descarga.php, lo cual devuelve:



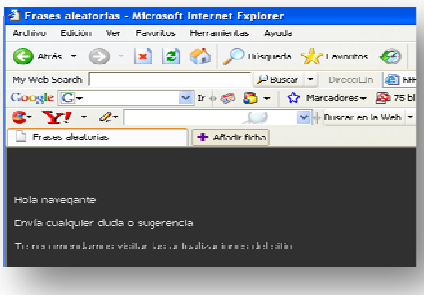
11.3 Generación de un conjunto de frases aleatorias

Esta aplicación inserta frases aleatorias en una página cada vez que se ingrese a ella. La carga de estas frases se realiza utilizando la función de valores aleatorios "rand()". El código se presenta a continuación:

```
<html>
<head>
<title>Frases aleatorias</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
<body bgcolor= "#303030">
<body text = "#E5E5E5">
<font face="tahoma" size= "2">
<body link= "#E5E5E5" vlink="E0E0E0">
<?
echo "<br><br><br>";
//Lista de frases aleatorias
$frases= array(
1=> "Hola navegante",
2=> "Bienvenido a mi Web",
3=> "Gracias por visitarnos",
4=> "Te recomendamos visitar las actualizaciones del sitio",
5=> "Envía cualquier duda o sugerencia",
6=> "No dejes de visitar este sitio",);

//Impresión aleatoria en la pantalla
$aleatorio =rand(1,6); //Rand genera números seudoaleatorios en PHP
echo "$frases[$aleatorio]";
echo "<br><br>";
$aleatorio =rand(1,6);
echo "$frases[$aleatorio]";
echo "<br><br>";
$aleatorio =rand(1,6);
echo "$frases[$aleatorio]";
echo "<br><br>";
?>
</body>
</html>
```

Al ejecutar en el browser http://localhost/paginas/frases.php se observa:



11.4 Recomendar mi sitio Web

La aplicación recomendar mi sitio, recomienda a un amigo o amiga un sitio Web de preferencia. La aplicación utiliza dos páginas php, una para capturar los datos y la otra para enviar la respuesta de los datos. El código de programación de estas dos páginas es el siguiente:

- ✓ **Página de captura**

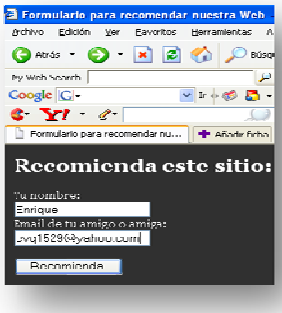
```
<html>
<head>
<title>Formulario para recomendar nuestra Web</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
.Estilo1 {
	font-family: Georgia, "Times New Roman", Times, serif;
	color: #FFFFFF;
}
-->
</style>
</head>
<body bgcolor= "#303030">
<body text = "#E5E5E5">
<span class="Estilo1"><font face="tahoma" size= "2">
<body link= "#E5E5E5" vlink="E0E0E0">
</span>
<form action="recomendar_res.php" method="post" class="Estilo1">
<p>
<h2>Recomienda este sitio:</h2>
</p>
<p>Tu nombre:<br>
<input name="tunombre" type="text" size="20"> <!-- Crea un campo de texto llamado "tunombre" -->
<br>
Email de tu amigo o amiga:<br>
<input name="emailamigo" type="text" size="20"> <!-- Crea un campo de texto llamado "emailamigo" --
>
<br>
<br>
<input name="B1" type="submit" value="Recomienda"> <!-- Crea el botón "Recomienda" -->
</p>
</form>
</body>
</html>
```

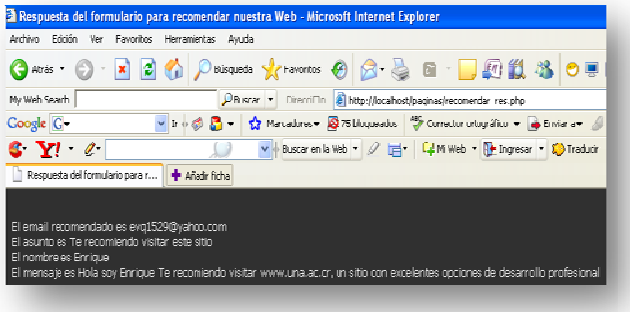
- ✓ **Página de respuesta**

```
<html>
<head>
<title>Respuesta del formulario para recomendar nuestra Web</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
```

```
<!--
.Estilo1 {
	color: #FFFFFF;
	font-family: Georgia, "Times New Roman", Times, serif;
}
-->
</style>
</head>
<body bgcolor= "#303030">
<body text = "#E5E5E5">
<font face="tahoma" size= "2">
<body link= "#E5E5E5" vlink="E0E0E0">
<?php
$emailamigo = $_POST['emailamigo']; //Toma el contenido del input con nombre "emailamigo" en esta variable
$tunombre = $_POST['tunombre']; //Toma el contenido del input con nombre "tunombre" en esta variable
$asunto="Te recomiendo visitar este sitio";
$mensaje="Hola soy ".$tunombre." Te recomiendo visitar www.una.ac.cr, un sitio con excelentes opciones de desarrollo profesional";
echo  "<br>El email recomendado es " . $emailamigo;
echo  "<br>El asunto es ". $asunto;
echo  "<br>El nombre es ".$tunombre;
echo  "<br>El mensaje es ".$mensaje;
?>
</body>
</html>
```

En el navegador al ejecutar http://localhost/paginas/recomendar.php se obtiene:





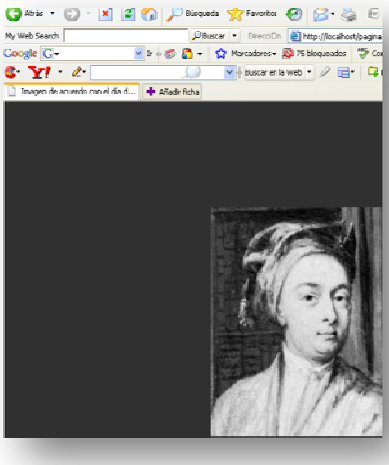
11.5 Imagen de acuerdo al día de la semana

Esta aplicación permite insertar una imagen para cada día de la semana. En el código de programación que se presenta es necesario tener creada una imagen para cada día de la semana en inglés.

```
<html>
<head>
<title>Imagen de acuerdo con el d&iacute;a de la semana</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
</head>
```

```
<body bgcolor= "#303030">
<body text = "#E5E5E5">
<body leftmargin = "300">
<body topmargin= "150">
<font face="tahoma" size= "2">
<?
$fecha = date ("l"); //La "l" almacena en la variable "fecha" el día actual de acuerdo con la fecha del sistema
$fecha = $fecha.".gif";
echo "<img src=\"$fecha\">";
?>
</body>
</html>
```

Al ejecutar en el browser http://localhost/paginas/imagenes.php se observa la página:



11.6 Cálculo de un factorial

La presenta aplicación calcula el factorial de un número natural digitado por el usuario de la página. Utiliza dos páginas php, una para capturar el valor de "n" y la otra para realizar el cálculo y mostrarlo en pantalla.

✓ Página que captura a "n"

```
<html>
<head>
<title>Factorial de un n&uacute;mero</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
.Estilo1 {
	color: #FFFFFF;
	font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
}
body {
```

```
		background-color: #000000;
}
-->
</style>
</head>

<body>
<form method=post action="resultado_factorial.php">
  <h1 class="Estilo1">Digite el n&uacute;mero natural:</h1>
  <p>
    <input  type="text" name="numero">
</p>
  <p>
    <input type="submit" value="Enviar">
  </p>
</form>
</body>
</html>
```

- ✓ **Página que calcula el factorial**

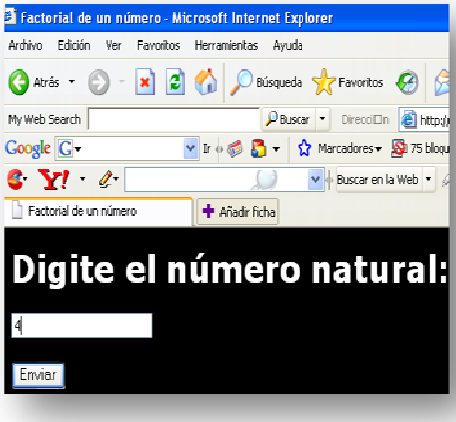
```
<html>
<head>
<title>Resultado del factorial</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body,td,th {
		color: #FFFFFF;
		font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
}
body {
		background-color: #000000;
}
-->
</style></head>

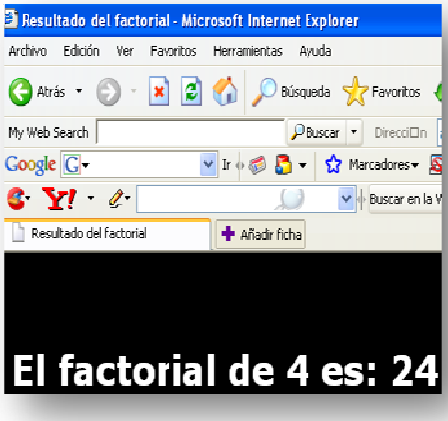
<body>

<h1> </h1>
<?php
$numero = $_POST['numero'];
$factorial=1;
if (($numero==1) OR ($numero==0))
{echo "<h1>";
echo "El factorial de ". $numero . " es: " . $factorial;
echo "</h1>";}
else{for($i=1;$i<=$numero;$i++)
{$factorial=$factorial*$i;}
echo "<h1>";
echo "El factorial de ". $numero . " es: " . $factorial;
echo "</h1>";}
```

```
?>
</body>
</html>
```

En el navegador al correr http://localhost/paginas/factorial.php devuelve:





11.7 Área de un triángulo

La página que se muestra a continuación calcula el área de un triángulo cuyas longitudes de los lados son dadas por el usuario. Para ello utiliza un formulario de captura de datos y otra página que verifica si los datos son correctos por medio de la desigualdad triangular y finalmente calcula el área por la fórmula de Herón.

✓ Página de captura de datos

```
<html>
<head>
<title>&Aacute;rea de un tri&aacute;ngulo</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body,td,th {
	font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
	color: #FFFFFF;
}
body {
	background-color: #000000;
}
-->
</style></head>

<body>
<form name="form1" method="post" action="resultado_area_tri.php">
  <h1>Digite las longitudes de los lados del tri&aacute;ngulo:</h1>
  <p>
    <input name="l1" type="text" id="l1">
    <input name="l2" type="text" id="l2">
    <input name="l3" type="text" id="l3">
```

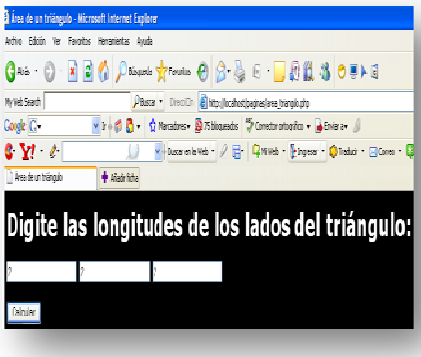
```
 </p>
 <p>
   <input type="submit" name="Submit" value="Calcular">
</p>
</form>
</body>
</html>
```

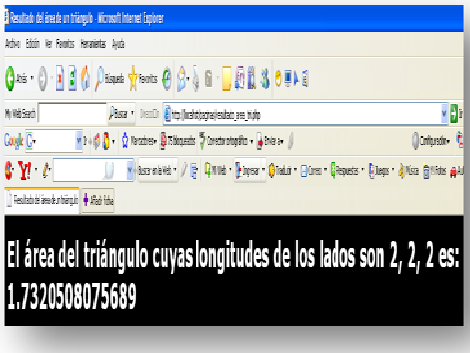
- ✓ **Página de cálculo del área**

```
<html>
<head>
<title>Resultado del &aacute;rea de un tri&aacute;ngulo</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body,td,th {
        font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
        color: #FFFFFF;
}
body {
        background-color: #000000;
}
-->
</style></head>

<body>
<?php
$lado1 = $_POST['l1'];
$lado2 = $_POST['l2'];
$lado3 = $_POST['l3'];
//Verifica que las longitudes dadas por el usuario corresponden a las medidas de los lados de un triángulo y posteriormente se calcula el área
if(($lado1+$lado2>$lado3) AND ($lado2+$lado3>$lado1) AND ($lado1+$lado3>$lado2))
{$s=($lado1+$lado2+$lado3)/2;
$area = sqrt($s*($s-$lado1)*($s-$lado2)*($s-$lado3));
echo "<h1>";
echo "El área del triángulo cuyas longitudes de los lados son ". $lado1 . ", " . $lado2 . ", " . $lado3 . " es: "
. $area;
echo "</h1>";}
else{echo "<h1>";
echo "Los datos no corresponden a las medidas de los lados de un triángulo";
echo "</h1>";}
?>
</body>
</html>
```

En el navegador al ejecutar http://localhost/paginas/area_triangulo se obtiene como respuesta:





11.8 Divisores y suma de los divisores de un número

La aplicación divisores toma un número entero positivo introducido por el usuario y devuelve la lista de todos sus divisores y su suma. Incluye un formulario para capturar el dato del número y otro para desplegar la lista y hallar su suma.

✓ Página que captura a "n"

```
<html>
<head>
<title>Divisores de un n&uacute;mero y su suma</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
.Estilo1 {
	color: #FFFFFF;
	font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
}
body {
	background-color: #000000;
}
-->
</style>
</head>

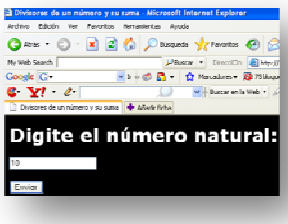
<body>
<form method=post action="lista_divisores.php">
  <h1 class="Estilo1">Digite el n&uacute;mero natural:</h1>
  <p>
    <input  type="text" name="numero">
</p>
  <p>
    <input type="submit" value="Enviar">
  </p>
</form>
</body>
</html>
```

✓ Lista de divisores y su suma

```
<html>
<head>
<title>Lista de los divisores y su suma</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body,td,th {
	color: #FFFFFF;
	font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
}
body {
	background-color: #000000;
}
-->
</style></head>

<body>
<h1> </h1>
<?php
$numero = $_POST['numero'];
$sum = 0;
echo "<h1>";
echo "La lista de todos los divisores de " . $numero . " es: ";
echo "<br>";
echo "</h1>";
for($i=1;$i<=$numero;$i++)
{if(floor($numero/$i)==$numero/$i)
{echo "<h1>";
echo $i;
echo "</h1>";
echo "<br>";
$sum=$sum+$i;}}
echo "<h1>";
echo "La suma de todos los divisores anteriores es: " . $sum;
echo "</h1>";
?>
</body>
</html>
```

Al correr en el browser http://localhost/paginas/divisores se observa en la pantalla lo siguiente:





11.9 Área de un polígono regular

La presente aplicación calcula el área de un polígono regular mediante la fórmula $A = \frac{n \cdot l^2}{4} \cdot \frac{1}{\tan(\pi/n)}$. La aplicación utiliza un formulario para capturar la longitud del lado y la cantidad de lados del polígono y además envía la respuesta del cálculo a una página adicional.

✓ Formulario de captura de datos

```
<html>
<head>
<title>&Aacute;rea de un pol&iacute;gono regular</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
.Estilo1 {
	color: #FFFFFF;
	font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
}
body {
	background-color: #000000;
}
-->
</style>
</head>

<body>
<form method=post action="resultado_area_poli.php">
 <h1 class="Estilo1">Digite la longitud del lado del pol&iacute;gono y la cantidad de lados:</h1>
 <p>
  <input name="l"  type="text" id="l">
</p>
 <p>
  <input name="n" type="text" id="n">
 </p>
 <p>
  <input type="submit" value="Calcular">
 </p>
</form>
</body>
</html>
```

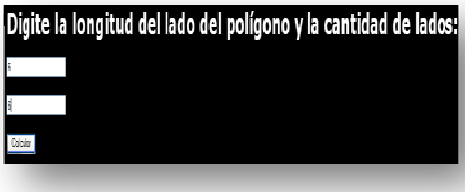
✓ Cálculo del área

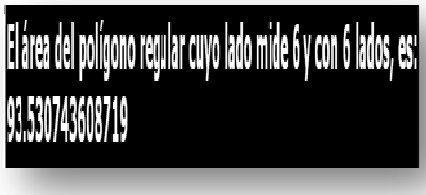
```
<html>
<head>
<title>Resultado del &aacute;rea de un pol&iacute;gono regular</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
<style type="text/css">
<!--
body,td,th {
```

```
        font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
        color: #FFFFFF;
}
body {
        background-color: #000000;
}
-->
</style></head>

<body>
<?php
$l = $_POST['l'];
$n = $_POST['n'];
$area = $n*pow($l,2)/4*1/(tan(pi(2)/$n)); //Calcula el área del polígono
echo "<h1>";
echo "El área del polígono regular cuyo lado mide ". $l . " y con " . $n . " lados, es: " . $area;
echo "</h1>";
?>
</body>
</html>
```

En el navegador al correr http://localhost/paginas/area_poligono.php se obtiene:





11.10 Registro de compras

La aplicación resuelve el siguiente problema: Una persona compra una camisa con un valor de "x" colones, un pantalón en "y" colones y un par de zapatos en "z" colones. El descuento en la tienda "A" es de un 5% para la camisa, un 10% en el pantalón y un 2% en los zapatos. En la tienda "B" el descuento de la camisa es de un 5%, el del pantalón es de un 8% y el de los zapatos es de un 5%. Muestre el total del valor real, el total del descuento y el total de lo que pagó el cliente para cada tienda.

El programa utiliza dos páginas php, la primera captura el costo de cada uno de los artículos y le permite al usuario seleccionar la tienda donde los va a comprar, al oprimir el botón “Calcular costo”, se abre la segunda página que muestra el nombre de la tienda, el valor real que suman los tres artículos, el total del descuento y el pago por la compra. Se adjunta el código de programación:

- ✓ **Página de captura de costos y nombre de la tienda**

```
<html>
<head>
<title>Registro de compras</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1">
```

```
<style type="text/css">
<!--
body,td,th {
	color: #FFFFFF;
	font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
}
body {
	background-color: #000000;
}
-->
</style></head>

<body>

<h1>Regitro de Compras</h1>
<ul>
 <li>Descripci&oacute;n del problema:<br>Unapersona compra una camisa con un valor de &quot;x&quot; colones, un pantal&oacute;n en &quot;y&quot; colones y un par de zapatos en &quot;z&quot; colones. El descuento en la tienda &quot;A&quot; es de un 5% para la camisa, un 10% en el pantal&oacute;n y un 2% en los zapatos. En la tienda &quot;B&quot; el descuento de la camisa es de un 5%, el del pantal&oacute;n es de un 8% y el de los zapatos es de un 5%. Muestre el total del valor real, el total del descuento y el total de lo que pag&oacute; el cliente para cada tienda.</li>
</ul>
<form name="form1" method="post" action="resultado_registro_compras.php">
 <p>Costo de la camisa:
  <input name="c" type="text" id="c">
  <br>
  <br>
 Costo del pantal&oacute;n:
 <input name="p" type="text" id="p">
</p>
 <p>Costo de los zapatos:
  <input name="z" type="text" id="z">
</p>
 <p>Seleccione la tienda:
  <select name="tienda">
	<option value="A">A</option>
	<option value="B">B</option>
  </select>
</p>
 <p>
  <input type="submit" name="Submit" value="Calcular costo">
</p>
</form>
<p>  </p>
<p> </p>
<p> </p>
<p>  </p>
</body>
</html>
```

- ✓ **Página de respuesta**

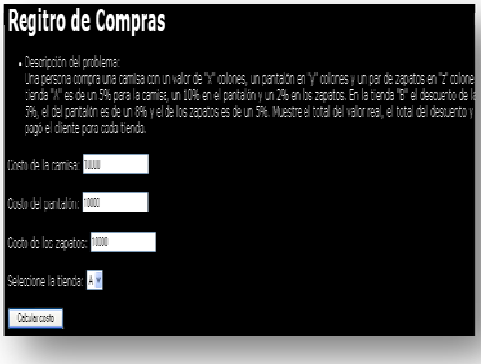
```
<html>
<head>
<title>Resultado del registro de compras</title>
<meta http-equiv="Content-Type" content="text/html; charset=iso-8859-1"><style type="text/css">
<!--
body,td,th {
	color: #FFFFFF;
	font-family: Verdana, Arial, Helvetica, sans-serif;
}
body {
	background-color: #000000;
}
-->
</style></head>
<body>
<?php
$c = $_POST['c'];
$p = $_POST['p'];
$z = $_POST['z'];
$tienda = $_POST['tienda'];

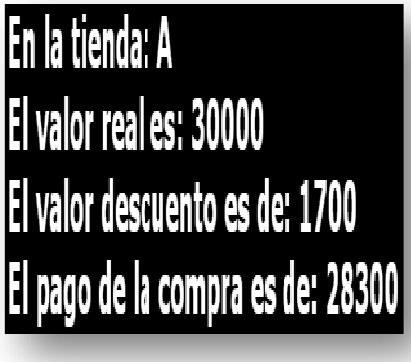
if($tienda=="A")
{$total= $c+$p+$z;
$descuento=$c*0.05+$p*0.1+$z*0.02;
$total_pago=$total-$descuento;
echo "<h1>";
echo "En la tienda: " . $tienda;
echo "<br>";
echo "El valor real es: " . $total;
echo "<br>";
echo "El valor descuento es de: " . $descuento;
echo "<br>";
echo "El pago de la compra es de: " . $total_pago;
echo "</h1>";}

if($tienda=="B")
{$total= $c+$p+$z;
$descuento=$c*0.05+$p*0.08+$z*0.05;
$total_pago=$total-$descuento;
echo "<h1>";
echo "En la tienda: " . $tienda;
echo "<br>";
echo "El valor real es: " . $total;
echo "<br>";
echo "El valor descuento es de: " . $descuento;
echo "<br>";
echo "El pago de la compra es de: " . $total_pago;
echo "</h1>";}
?>
```

```
</body>
</html>
```

Al ejecutar http://localhost/paginas/registro_compras.php el browser muestra en la pantalla:





12. Conclusiones

La programación de páginas dinámicas permite a los diseñadores Web mejorar notablemente la navegación, la organización del contenido y la interactividad con los usuarios de un sitio.

En particular para el desarrollo de sitios Web educativos, el uso de un lenguaje de programación como PHP, permite la creación de portales donde el estudiante no solamente recibe información, sino que interactúa de manera activa en su aprendizaje, sea por medio de prácticas en línea, quices, ejercicios o diversas actividades que el docente planifique y programe.

El objetivo de este documento ha sido iniciar la programación con el lenguaje PHP, sin embargo, el lenguaje ofrece mayores posibilidades trabajando con la base de datos MySQL. Se espera en una segunda entrega de esta propuesta, ofrecer una explicación y desarrollo de algunas aplicaciones que utilicen esta base de datos.

12. Referencias bibliográficas

Pavón, J. (2006). Creación de un Portal con PHP y MySQL. España: Alfaomega.

Aulbach, A. (2001). Manual de PHP. Estados Unidos: Free Software Foundation.

La función cuadrática, el modelo de Van Hiele y tecnología

Héctor Osorio A.[1]

Resumen

El taller está constituido por un conjunto de actividades de aprendizaje para la enseñanza de propiedades y relaciones que se dan en torno al concepto de función cuadrática. Han sido diseñadas utilizando las nuevas tecnologías, específicamente mediante el uso del software matemático DERIVE y fundamentando la aplicación de este recurso en el modelo de razonamiento de Van Hiele. Se propone con ello una metodología activa, en el sentido de promover en el estudiante el hábito de observar, explorar, experimentar e investigar con el objeto de fomentar su habilidad para formular conjeturas, hacer generalizaciones y de esta manera posibilitar el hecho de que construya, descubra o redescubra el conocimiento matemático.

Descripción

Lo relevante de la incorporación de las tecnologías de la información y la comunicación al proceso de enseñanza-aprendizaje es, en nuestra opinión, el hecho de que mediante ellas se pueden diseñar con relativa facilidad actividades de aprendizaje que:

- Fomenten el desarrollo del conocimiento, habilidades, actitudes y hábitos para la investigación.
- Propicien que el alumno se forme en el pensamiento crítico y reflexivo, que desarrolle su creatividad e imaginación.
- Fortalezcan procesos básicos y complejos del pensamiento como la habilidad para observar, analizar y sintetizar, comparar, inferir y elaborar conclusiones.
- Faciliten la elaboración de estrategias cognitivas y metacognitivas para la resolución de problemas.
- Propicien la construcción o reconstrucción del conocimiento por parte del alumno.
- Propicien el trabajo colaborativo y compartido entre los estudiantes.

Las actividades que se presentan en el taller han sido elaboradas teniendo en mente los aspectos señalados.

Algunos autores señalan que es muy importante que el trabajo en el aula de clase fomente la capacidad de generalizar, que se le de al alumno la oportunidad de experimentar y trabajar con confianza con la generalidad tanto como con la particularidad, de ver lo general a través de lo particular y lo particular en lo general en matemática (Papini, 2003). Mason (1996), citado por Papini (2003), afirma que las clases que no están “embebidas” de generalización y conjeturas no son clases de matemática, cualquiera que sea el título que tengan. Al respecto, al elaborar las actividades que se presentan en el taller se consideró la opinión anterior.

En el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, existen numerosos modelos que intentan describir determinadas componentes de los procesos que, globalmente, tienen que ver con el aprendizaje o la enseñanza de la matemática. Entre estos tenemos el modelo de razonamiento matemático de Van Hiele, diseñado por Pierre Van Hiele en 1957. Se han realizado diferentes aportes sobre la validez del modelo, entre ellos
los proyectos de Brooklyn, de Chicago y de Oregon en Estados Unidos (Gutiérrez y Jaime, 1995) y los extensos estudios realizados por sicólogos soviéticos (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997).

El modelo de Van Hiele incluye dos aspectos:

1. Descriptivo, en cuanto que intenta explicar cómo razonan los estudiantes. Esto se hace a través de la definición de cinco “niveles de razonamiento”.

[1] Universidad Autónoma de Chiriquí. Panamá. hosorioa@cwpanama.net

2. Prescriptivo, porque da unas pautas a seguir en la organización de la enseñanza para lograr que los estudiantes progresen en su forma de razonar. Esto se lleva a cabo mediante la consideración de cinco "fases de aprendizaje".

En el primer nivel (reconocimiento) la consideración de los conceptos es global. No se toma en cuenta elementos ni propiedades. La característica fundamental del segundo nivel (análisis) es que los conceptos se entienden y manejan a través de sus elementos. Ello hace posible la identificación y generalización de propiedades como características del concepto en cuestión. Pero esas propiedades se utilizan de manera independientes, sin establecer relaciones entre ellas, o sea, no se tiene en cuenta que unas implican otras. El descubrimiento y la comprobación de propiedades se lleva a cabo mediante experimentación (Gutiérrez y Jaime, 1995).

La característica básica del tercer nivel (clasificación) consiste en el establecimiento de relaciones entre propiedades. El cuarto nivel (deducción formal) está caracterizado por la comprensión y el empleo del razonamiento formal y en el quinto nivel (rigor) es posible manejar diversas geometrías, procedentes de diferentes sistemas axiomáticos.

Para cada una de las cinco "fases de aprendizaje" que propone, Van Hiele indica cómo deben ser las actividades propuestas, la intervención del profesor, para ayudar al estudiante a avanzar desde el nivel que se encuentra hasta el nivel siguiente. La finalidad de la primera fase (información), es la obtención de información recíproca profesor alumno. Por una parte, el profesor averigua qué saben los alumnos sobre el tema que se va a abordar y la forma de razonar que tienen. Por otra parte, los alumnos entran en contacto con el objetivo de ese nivel para ese concepto.

En la segunda fase (orientación dirigida), el profesor dirige a los alumnos para que éstos vayan descubriendo lo que va a constituir la esencia de ese nivel. La dirección por parte del profesor no significa que éste le indique al estudiante cómo resolver los problemas, sino que debe planificar las situaciones que propone a sus alumnos para que ellos logren encontrar la solución.

El objetivo de la tercera fase (explicitación) es que los estudiantes sean conscientes de las características y propiedades aprendidas anteriormente y que consoliden el vocabulario propio del nivel. Las actividades deben hacer que los estudiantes expresen, verbalmente o por escrito, lo que han descubierto anteriormente y se deben fomentar las discusiones entre los estudiantes y diálogos profesor-alumnos (Gutiérrez y Jaime, 1995).

La cuarta fase (orientación libre) está orientada a consolidar los aspectos básicos del nivel. Las actividades deben permitir resolver situaciones nuevas con los conocimientos que se adquirieron previamente. Son adecuadas situaciones abiertas, en las que el estudiante pueda explorar diversas posibilidades, pero siempre utilizando lo que aprendió anteriormente.

La quinta fase (integración) tiene como objetivo establecer y completar la red de relaciones objeto de ese nivel para el concepto que se trabaja. El profesor debe proponer resúmenes de todo lo aprendido.

Además de lo señalado, el modelo de Van Hiele posee algunas propiedades y características que es importante conocer para comprender mejor dicho modelo. Estas son: secuencialidad, especificidad del lenguaje, paso de un nivel al siguiente, globalidad o localidad e instrucción.

En el modelo de Van Hiele, el aprendizaje es comparado a un proceso inductivo. En un nivel n-1 ciertas versiones limitadas de los objetos matemáticos pueden ser estudiadas. Algunas relaciones acerca de los objetos pueden ser explicadas, sin embargo hay otras relaciones que no son accesibles a este nivel y, por tanto, no pueden ser abordadas. En el nivel n se suponen conocidos los conocimientos del nivel n-1 y se

explicitan las relaciones que estaban implícitas en el nivel anterior, aumentándose de esta manera el grado de comprensión de los conocimientos. Así los objetos del nivel n son extensiones del nivel n-1 (Alsina, Burgués y Fortuny, 1997).

Para la realización del taller se requerirá un laboratorio de informática provisto de computadoras con el programa DERIVE, de manera que el participante pueda disponer de una computadora para realizar las actividades programadas. Los participantes podrán reunirse en dos por computadora y formar así grupos de trabajo.

El participante dispondrá de un listado de las actividades, que será provisto por el facilitador, el cual constituye una guía para la realización de todas las actividades que se presentarán en el taller. El desarrollo de estas actividades corresponde a la fase de orientación dirigida asociada al segundo nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele.

Una vez realizadas algunas de las actividades cada grupo formulará una conjetura la cual será el tema central en un momento de dialogo entre los participantes y el facilitador con el objeto de elaborar, por consenso, una sola conjetura. Corresponde este momento a la fase de explicitación asociada al segundo nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele.

Al final se presentarán algunas actividades correspondientes a la fase de orientación libre.

No es condición necesaria, para participar en el taller, conocer el software DERIVE. A medida que se van desarrollando las actividades se irán conociendo y aplicando las instrucciones correspondientes del programa.

El contenido del taller incluirá los siguientes temas:

- Construcción de la gráfica de una función cuadrática.
- Análisis del parámetro “a” de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Análisis del parámetro “c” de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Discriminante de una función cuadrática.
- Ceros de una función cuadrática.
- Función creciente y decreciente.
- Vértice de una parábola. Máximo. Mínimo.
- Inecuaciones cuadráticas.
- Actividades de investigación.

Referencias Bibliográficas

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1997). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. España; Editorial Síntesis.

Arce, C. y Jiménez, L. (1992). *Función Cuadrática, su exploración gráfica con el computador*. San José, Costa Rica.

Gutiérrez, A.y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. México; Grupo Editorial Iberoamérica.

Murillo, M., Badilla, J., Chaves, L., Herrera, D., Morales, Y., Poveda, R., y cols. (2004). *Hacia una Didáctica del Álgebra y las Funciones. Clases tipo Taller*. Heredia, Costa Rica.

Ortega, P. (2002). *Prácticas de Matemáticas I y Matemáticas II con DERIVE-5. M*adrid, España.

Papini, M. (2003). Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(1), p.p. 41- 69.

El Origami y la Geometría

Francisco José Badilla Núñez[1]



La papiroflexia y el aprendizaje de la geometría

La papiroflexia es una tradición nacida en oriente específicamente en Japón a principios de nuestra era. Estaba reservada originalmente a la nobleza y a los samuráis japoneses.

Después de una difusión lenta y gracias a los contactos comerciales, fue introducida en Europa y posteriormente en América, tomando un nuevo impulso en el siglo XIX.

Actualmente se ha comenzado a estudiar más sistemáticamente la papiroflexia como medio de representación de objetos matemáticos, particularmente, objetos geométricos. Por ejemplo se ha estudiado la relación entre la papiroflexia y la topología; la relación entre los poliedros hechos con origami y las geodésicas (estructuras basadas en los diseños de Buckminster Fuller); se han formulado listas de axiomas para la papiroflexia.

La papiroflexia ayuda y realiza conexiones con otras asignaturas, pero su mayor contacto es con la geometría. Si se emplea un método con poca manipulación de objetos y procesos matemáticos, no se puede lograr el objetivo de que el estudiante aprenda correctamente la figura y el concepto; si se le enseña al estudiante sólo a memorizar, los efectos de la enseñanza memorística y repetitiva en los primeros niveles, la consecuencia sería la adquisición de conceptos limitados o erróneos y el desinterés de los estudiantes a mediano y largo plazo. La repetida práctica de solución de problemas (en diferentes escenarios), en los que se utilicen destrezas, conceptos o procesos matemáticos. La meta final de la educación debe ser siempre el impulsar el crecimiento del conocimiento en todos los alumnos, aunque haya grandes diferencias entre los estudiantes en una misma aula, y la paulatina autonomía de los alumnos ante el mundo, un requerimiento básico de la era de la información: ser aprendices continuos.

[1] Instituto Nacional de Aprendizaje, Costa Rica, nunezfran@hotmail.com

Fundamento de la papiroflexia como metodología

La papiroflexia u origami modular es de gran interés por contribuir a adquirir ciertas actitudes y habilidades de forma amena, aparte de aprender geometría. La necesidad de plegar muchas piezas "más o menos iguales" para construir un poliedro potencia, el trabajo en equipo, el reparto de tareas, el hacer un buen trabajo para poder unir las piezas (pliegues bien hechos y no de cualquier manera, acuerdos en la forma de doblar las piezas cuando hay dos posibilidades), visión espacial y la satisfacción de terminar el trabajo y obtener el sólido. Por estas y otras razones la papiroflexia constituye una atractiva forma de acercarse a las matemáticas por su riqueza cultural y su gran valor pedagógico.

En el origami modular existen diferentes tipos de módulos que varían entre sí tanto por el procedimiento de construcción y la forma del trozo de papel inicial, como por el tipo de poliedro que se quiere obtener y por la parte de éste que cada módulo va a constituir principalmente: un vértice, una cara o una arista.
Para impulsar el aprendizaje, las corrientes pedagógicas avanzadas sugieren técnicas de trabajo complementarias, como las siguientes:

El acercamiento a los temas desde diferentes disciplinas. La manipulación y transformación física y virtual de objetos. El establecimiento de conexiones entre el conocimiento previo, los nuevos conceptos y la vida diaria de los estudiantes. El trabajo en grupos que promueva, el debate de ideas, la clarificación de conceptos, el desarrollo de estrategias individuales y colectivas, y la presentación de resultados ante sus compañeros.

El origami modular se basa en la construcción de módulos o unidades (casi siempre iguales) que se pueden ensamblar en cuerpos geométricos o en otras figuras decorativas. Estos módulos poseen solapas y bolsillos, que se usan para ensamblarlos entre sí.

Esta técnica también ofrece la posibilidad de manipular al final un modelo tridimensional, poder hacer medidas en él, aunque tiene la desventaja de que a veces es tedioso hacer muchos módulos o el ensamble resulta un poco laborioso; sin embargo, para una persona perseverante, curiosa y paciente esta desventaja se puede convertir en un reto, mientras que para una persona que se impaciente le puede ayudar a desarrollar algunas actitudes como la paciencia. Además, los módulos pueden hacerse entre todos montándose después el correspondiente poliedro.

Ventajas en la educación:

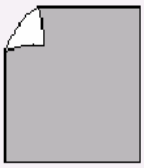
-Utiliza materiales y herramientas relativamente baratas al alcance de todos.
-Proporciona un medio para la manipulación manual de los objetos geométricos.
-Permite un acercamiento a la geometría del espacio (poliedros). Los procesos de construcción son lógicos, eficientes y económicos.

Pero la papiroflexia es un medio, no un fin y cuando se utiliza en el estudio de las matemáticas es importante cuestionarse, estudiar propiedades, observar, analizar y conjeturar, a partir de la manipulación del papel.

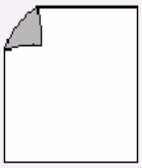
SÍMBOLOS BÁSICOS EN PAPIROFLEXIA

Posición del papel:

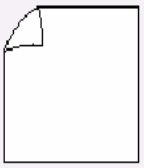
Color arriba.



Color abajo.

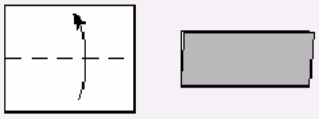
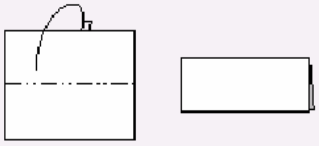
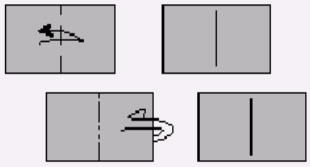
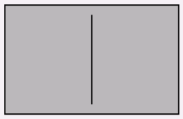
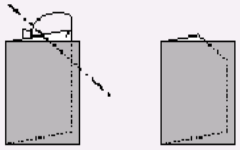


Papel de un solo color.



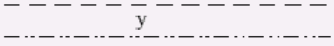
Pliegues y líneas básicas:

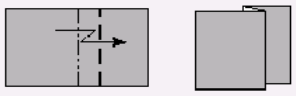
Todos los pliegues tienen una representación gráfica que esta compuesta por un tipo de línea y una flecha asociada a ella, así que simplemente viendo el tipo de flecha o de línea sabremos como debemos doblar.
Esto puede ser muy útil en aquellas zonas del libro donde por su pequeño tamaño no se sepa con seguridad si la línea que aparece es valle o montaña.

Tipo de línea.	*Proceso de plegado.*	*Explicación.*
Pliegue valle. – – – – – –		Consiste en doblar hacia delante, llevando un lado del papel sobre el otro.
Pliegue Monte. —·—·—·—		Consiste en doblar hacia atrás, llevando un lado del papel sobre el otro.
Plegar y desplegar. – – – – – – – – – – – – ó —·—·—·—·—·—·—		Esto en realidad no es un pliegue, son dos que se hacen uno tras otro. Consiste en doblar, bien sea en monte o en valle y acontinuación desdoblar. El resultado que queda es una marca.
Marca. ———————		Las marcas son siempre el resultado de plegar y desplegar algo.
Rayos X. ·····		Este tipo de línea, puede representar pliegues que se están haciendo en alguna capa de nuestro modelo que no podemos ver o bien marcarnos alguna línea del borde de la figura que está oculta.

Pliegues compuestos:

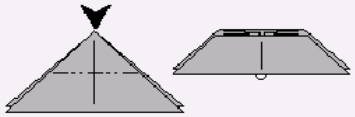
Pliegue escalonado.





Consiste en un pliegue valle inmediatamente seguido por otro en monte. Su flecha asociada es quebrada y apunta en la dirección del valle.

Pliegue hundido.



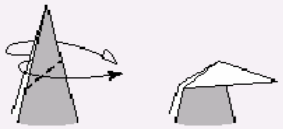
Es una forma de invertir una punta, de forma que al terminar el hundido el modelo quede totalmente plano.

Pliegue hendido.



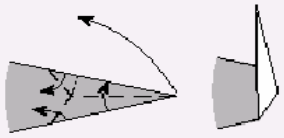
Es un pliegue muy similar al hundido, que generalmente se hace en las puntas para cambiarles la dirección.

Pliegue Vuelto.



Como en el caso anterior este proceso permite cambiear la dirección a una punta, pero en vez de doblar hacia el interior, se hace al exterior.

Pliegue en oreja de conejo.



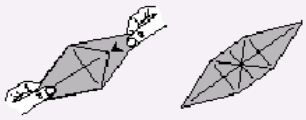
Es un sistema sencillo para "adelgazar" una punta y al mismo tiempo cambiarla de dirección.

Doble oreja de conejo.



Consiste en dos orejas de conejo que se hacen al mismmo tiempo por cada lado de la punta.

Estirar.



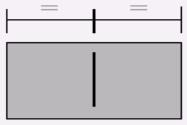
Se coge el modelo por donde indican las manos y se estira hasta obtener el resultado mostrado en el siguiente paso.

Otros Símbolos importantes:

Repetir tantas veces como rayas tenga la flecha.



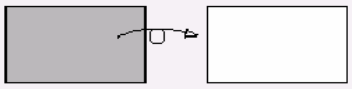
Partes iguales.



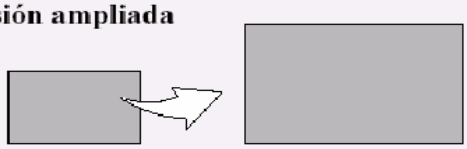
Girar.



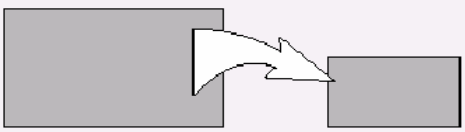
Volver el modelo.



Visión ampliada



Visión disminuida



Objetivo del taller

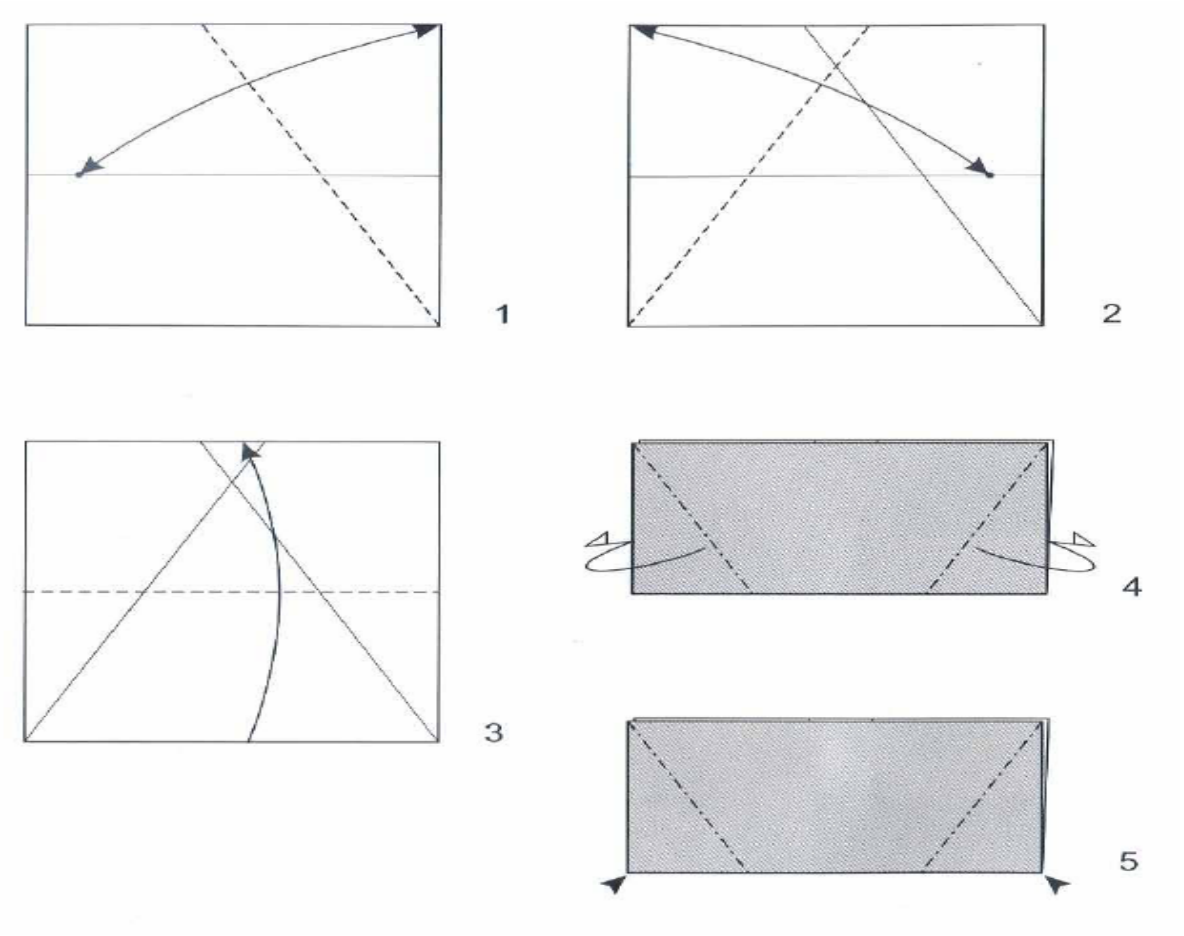
El objetivo del taller es proporcionar a los participantes una herramienta didáctica para el estudio de la Geometría, de una manera accesible y amena, lo cual permite abordar de una manera innovadora este tema.
Introduciremos también un modelo en tres dimensiones realizados a partir de polígonos.

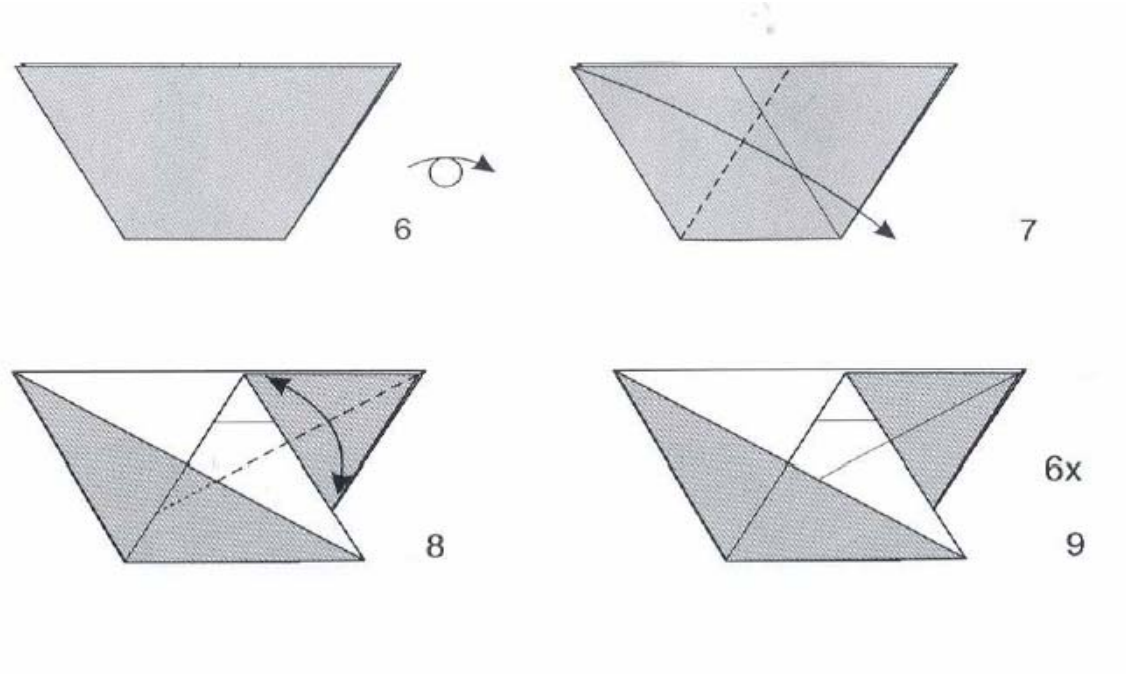
EJERCICIO A DESARROLLAR

Estrella de 6 puntas

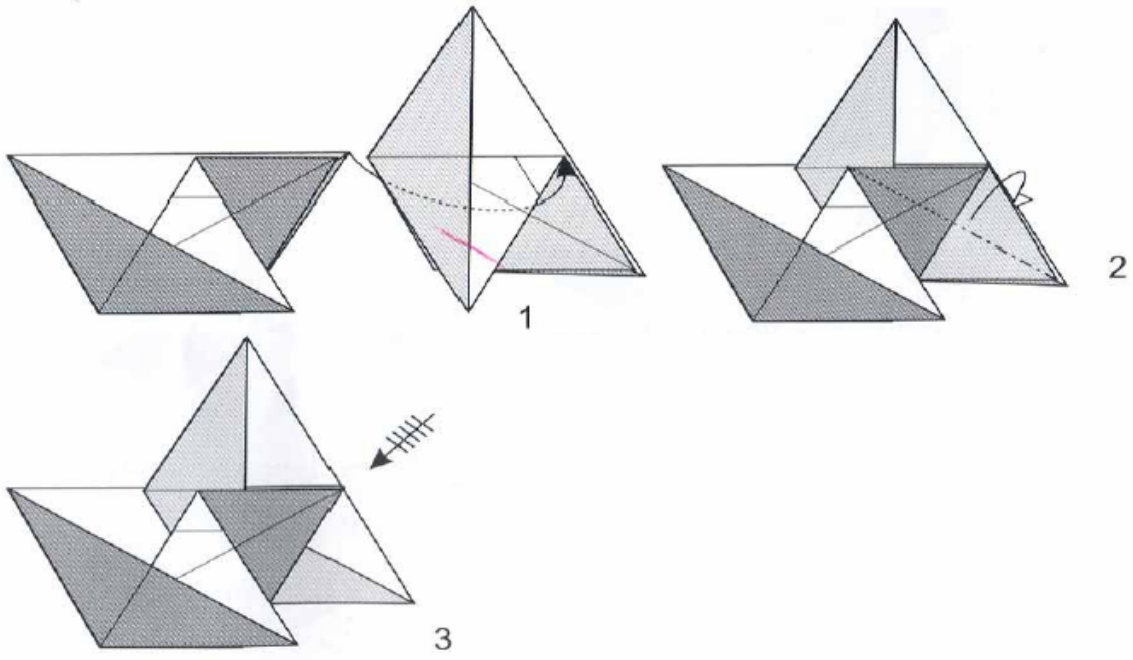
Como aplicación del triángulo equilátero vamos a construir una estrella de seis puntas, con seis módulos de papel cuadrado. Los pasos a dar serán un continuo repaso del triángulo equilátero y sus elementos, de los ángulos de 30º y 60º y del hexágono.

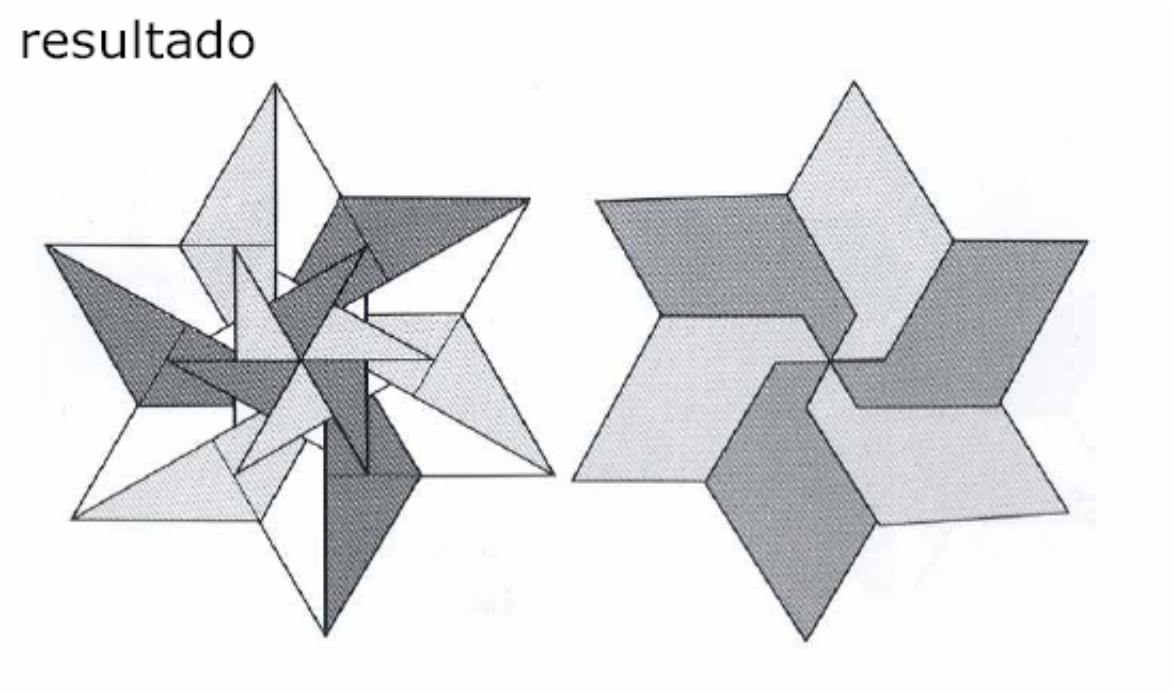
Diagramas del módulo:





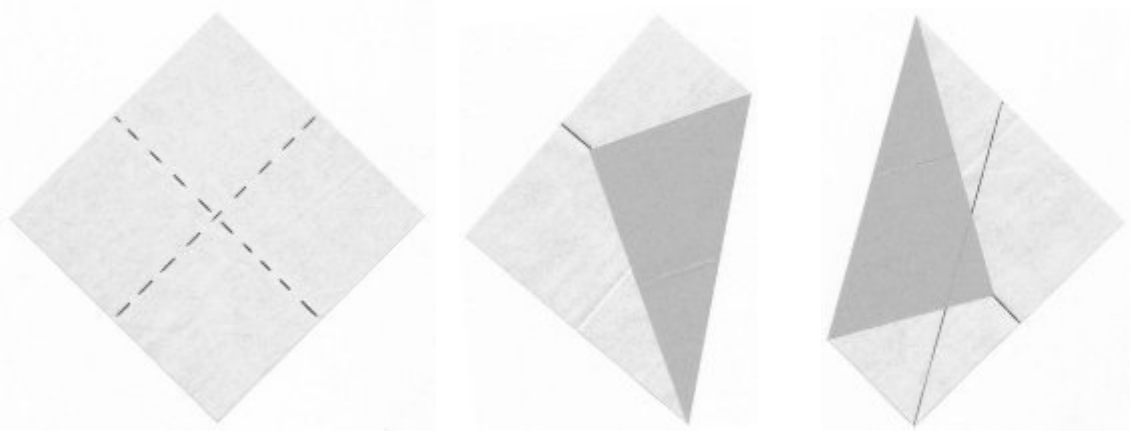
Unión de los módulos:

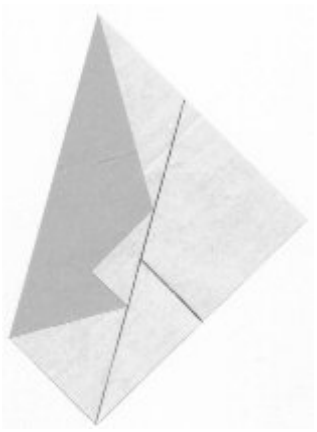


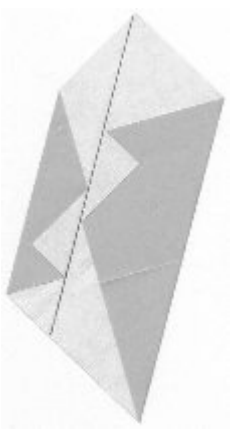


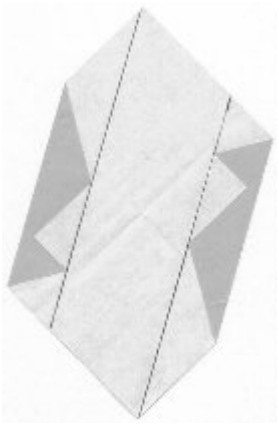
Construcción adicional

Octaedro

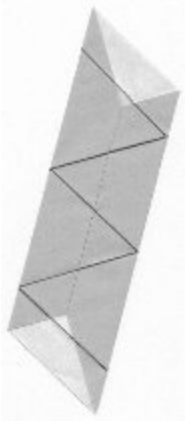


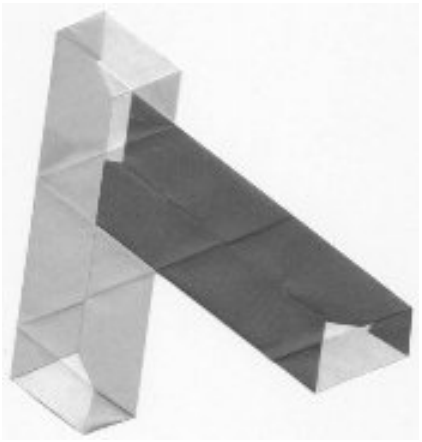




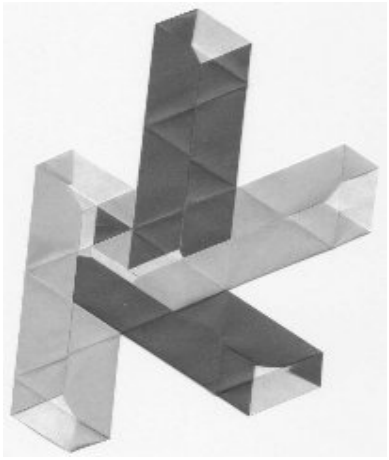




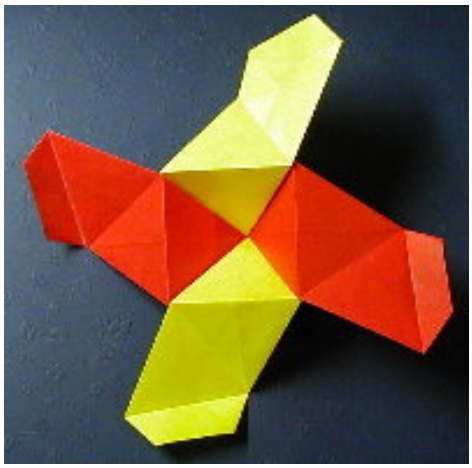










Enseñanza de la Geometría en el Espacio Asistido por Computadoras

Jaime Gutiérrez[1]
Edis Alberto Flores[2]

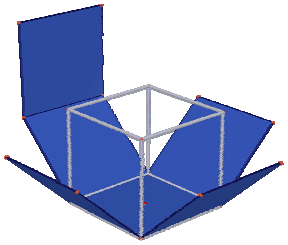
Resumen

El programa Cabri 3D es una herramienta que facilita la construcción de figuras y elementos geométricos sobre un sistema de 3 dimensiones que permite mover, dilatar y rotar el objeto según sea la necesidad del usuario. La manipulación de los comandos del software es bastante amigable. Además tiene otras características que facilita colorear, cambiar las texturas y forma de líneas de los objetos, entre otras.

Objetivos Generales:

1) Capacitar a los participantes en el manejo de las herramientas básicas del software *Cabri 3D*

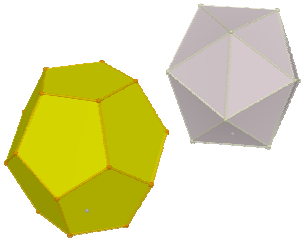
2) Desarrollar construcciones de los elementos de la Geometría del Espacio.



Metodología:

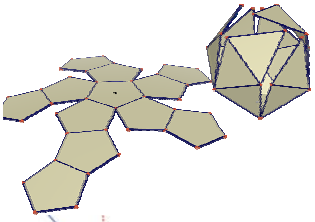
En el desarrollo del seminario se utilizará ordenadores adecuados para la instalación del software, en los cuales cada participante manipulará las herramientas del *Cabri 3D* con la orientación del instructor a través de un sistema de proyección con multimedia, para luego efectuar algunas asignaciones propuestas.

Introducción:



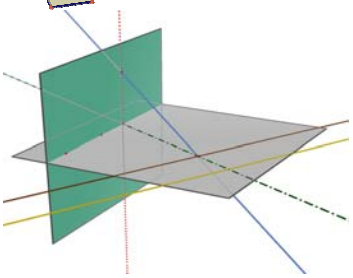
Para los cursos de Geometría del Espacio, nuestra mayor dificultad es la interpretación gráfica de los teoremas y sus trazados, además del tiempo que se debe invertir en la confección de estos dibujos. Otra dificultad que se presenta es visualizar las figuras en diferentes ángulos.

La construcción de figuras geométricas con ayuda del ordenador abre entonces nuevas perspectivas con respecto a las construcciones clásicas que utilizan papel, lápiz, regla y compás. Más de 30 millones de adeptos en todo el mundo utilizan *Cabri Géomètre II* y *Cabri Géomètre II Plus* en ordenadores y en calculadoras gráficas Texas Instruments.



Es nuestro interés instruir a los participantes en el manejo de las herramientas básicas del software *Cabri 3D*, en el cual podrán construir, colorear, rotar y descubrir cualidades que son limitadas en las construcciones manuales de la Geometría en el Espacio.

Con el *Cabri 3D*, se aprende rápidamente a construir, visualizar y manipular en tres dimensiones diversas clases de objetos: rectas, planos, conos, esferas, poliedros, etc. Se puede crear construcciones dinámicas, de la más elemental a la más compleja, así como manipular, modificar y redefinir libremente figuras, facilitando la resolución de los problemas de Geometría en el Espacio.



Bibliografía:

- Sophie y Pierre René de Cotret. **Manual de *Cabri 3D***. Canadá. Última modificación**:** Enero del 2006. Nuevas versiones**:** *www.cabri.com*
- Jaime Gutiérrez y Edis Flores. Apuntes del Curso de Geometría en el espacio de la docencia en Matemática

[1] Universidad de Panamá, Panamá, jgutierrez@matematicas.net
[2] Universidad de Panamá, Panamá, edisf35@yahoo.es

Enseñar Cálculo con Maple

Douglas Meade[1]

Hay muchos modelos para usar Maple en el aula. Los participantes en este taller podrán ver varias maneras en que Maple se puede usar para mejorar un curso. Se compartirán varios tipos distintos de materiales de curso, incluyendo hojas de trabajo suplementarias, "maplets" (applets de Maple) basados en la Web, y textos electrónicos implementados como hojas de trabajo en Maple. Este taller incluirá una demostración de los esfuerzos del presentador por salvar la barrera del lenguaje al traducir (casi) automáticamente los maplets para usuarios de idiomas distintos al Inglés.

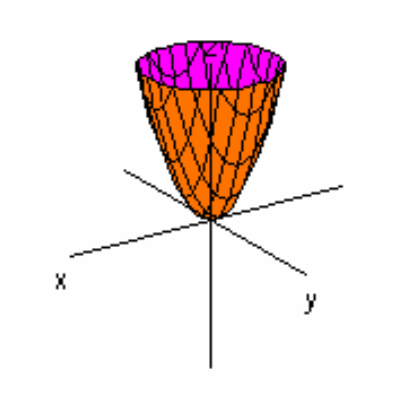
[1] Departament of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, USA, meade@math.sc.edu

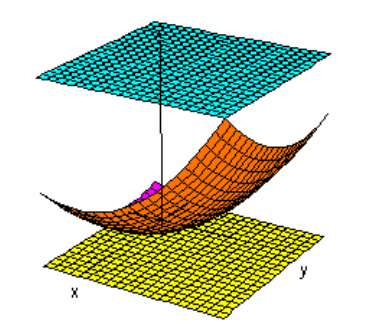
Estudio de Funciones de Dos Variables con el Uso de Derive

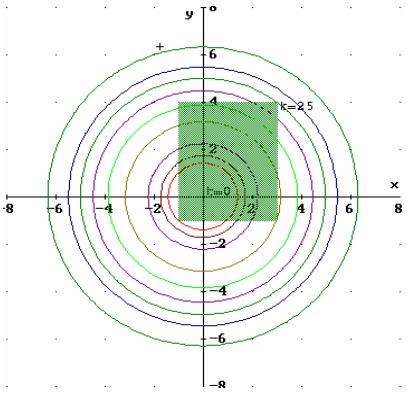
Teresita G. de Ávila [1]

Acceso a las guías del taller:

Introducción







El uso de herramientas tecnológicas en Matemática está cada vez más al alcance de todos. Actualmente existen diversos programas para computadoras que facilitan los procesos de enseñanza y aprendizaje en distintas áreas de la Matemática. La utilización adecuada de esta tecnología depende del docente. Debemos recurrir a ésta con el fin de mejorar las oportunidades de aprendizaje de los alumnos, seleccionando problemas donde se aproveche lo que la tecnología puede hacer eficientemente: graficar y calcular. El docente juega un papel importante en un laboratorio con paquetes matemáticos. Cuando los estudiantes utilizan la computadora, el docente tiene la oportunidad de observar cómo razonan, corregir ideas mal concebidas, y motivarlos a investigar.

Durante los últimos siete años hemos tenido la experiencia de trabajar con el programa Derive en los cursos de Cálculo de las Licenciaturas en Informática, Arquitectura, Estadística, Economía, Docencia de la Matemática y Matemática de la Universidad de Panamá; experiencia que deseamos compartir con colegas y estudiantes.

Objetivos General

El objetivo general de este taller es aprender comandos básicos del programa *Derive* necesarios en el estudio de funciones de dos variables.

[1] Universidad de Panamá, Panamá, teresitag@cableonda.net

Objetivos Específicos

Se pretende que al finalizar este taller, el participante sea capaz de utilizar los comandos del programa *Derive*[2] necesarios para:

- Representar el dominio de funciones de dos variables.
- Obtener la superficie que representa una función de dos variables.
- Estudiar gráficamente la continuidad y la diferenciabilidad de una función en un punto.
- Graficar un mapa de contorno de una función de dos variables.
- Obtener puntos extremos y puntos silla para una función de dos variables.
- Visualizar puntos extremos y puntos silla en la gráfica de una función de dos variables.
- Visualizar puntos extremos y puntos silla en un mapa de contorno de una función de dos variables.
- Obtener los puntos extremos de una función de dos variables restringida a una región cerrada y acotada del plano utilizando un mapa de contorno.

Metodología

La actividad se llevará a cabo en dos sesiones de dos horas de duración cada una en un laboratorio de informática, con una computadora por participante.
Se enseñará el uso de los distintos comandos de *Derive* utilizando un proyector de imágenes (data show).
Se entregará una lista de problemas propuestos para resolver en cada sesión. Las soluciones de los problemas serán guiadas paso a paso, utilizando igualmente el proyector de imágenes.

¿Por qué *Derive*?

Derive es un paquete cuyo uso es muy sencillo. El paquete tiene múltiples comandos para álgebra, matrices, cálculo de una y varias variables, y pantallas de dos y tres dimensiones. Trabaja con coordenadas rectangulares, polares, cilíndricas y esféricas. *Derive* tiene sus limitaciones comparado con otros paquetes como *Mathematica*, por ejemplo. Sin embargo, el tamaño de *Derive* es de apenas 510 bytes con tamaño en disco de 4 kilobytes, y sus funciones son suficientes para los primeros cursos universitarios de Matemática General y Cálculo.

[2] Este programa lo ofrece Texas Instruments. La última versión con que contamos es Derive 6.

Principios elementales para trabajar con Macros en Excel

Máster Enrique Vílchez Quesada
Universidad Nacional
Escuela de Matemática-Escuela de Informática
División de Educología

Resumen: Microsoft Excel es una herramienta muy poderosa, de manera clásica se ha utilizado para la manipulación de datos por medio de funciones, fórmulas, tablas dinámicas, gráficos, entre otras, sin embargo, es también una excelente opción para los programadores del lenguaje Visual Basic, permitiendo a los usuarios desarrollar pequeñas aplicaciones que con esfuerzo e inventiva pueden convertirse en materiales educativos computarizados.

Palabras clave: Excel, Visual Basic, aplicaciones, enseñanza, matemática.

Abstract: Microsoft Excel is a very powerful, classical- manner tool it has been utilized for the manipulation of data by means of functions, formulas, dynamic draw, graphics, among others, however, an excellent option is for the programmers of Visual language also BASIC, permitting the users to develop little applications than with effort and inventiveness they can become educational materials computerized.

Key words: Excel, Visual Basic, applications, teaching, mathematics.

1. Introducción

Microsoft Excel cuenta con un ambiente de programación basado en el lenguaje Visual Basic, denominado “Visual Basic para aplicaciones” (VBA). VBA es un entorno que está conformado por un editor y por el lenguaje de programación propiamente dicho. Mediante el uso de este editor es posible utilizar muchas herramientas de programación propias de Visual Basic para correr aplicaciones personalizadas.

El término “para aplicaciones” hace referencia al hecho de que el lenguaje de programación y las herramientas de desarrollo están integrados con las aplicaciones del Microsoft Office (en este caso, el Microsoft Excel*),* de forma que se puedan desarrollar nuevas funcionalidades y soluciones a la medida, con el uso de estas aplicaciones.

2. Objetos, propiedades y métodos

Cuando se trabaja con macros en Excel, deben tenerse claros ciertos conceptos relacionados con programación orientada a objetos (OOP). Algunos de estos conceptos son: objeto, propiedades y métodos.

- **Objeto:** cuando en la cotidianidad nos referimos a un objeto significa que hablamos de algo más o menos abstracto, que puede tratarse de cualquier cosa, podemos referirnos a objetos tales como auto, silla, casa. En OOP, la generalización (o definición) de un objeto se llama “clase”, de esta forma la clase “auto” seria la representante de todos los coches del mundo, mientras que un objeto auto seria un coche en concreto. De momento, no definiremos ni estudiaremos las clases sino que nos concentraremos en los objetos, tenga en cuenta que cualquier objeto está definido por una clase. Cuando decimos que la clase “auto” representa a todos los coches del mundo, significa que define como es un auto, cualquier auto. Dicho de otra forma y para aproximarnos a la

definición informática, la clase “auto” define algo que tiene cuatro ruedas, un motor, un chasis,…luego, cualquier objeto real de cuatro ruedas, un motor, un chasis,… es un objeto de la clase “auto”.

- **Propiedades:** cualquier objeto tiene características o propiedades como por ejemplo el color, la forma, el peso, las medidas, etc. Estas propiedades se definen en la clase y luego se particularizan en cada objeto. Así, en la clase “auto” se podrían definir las propiedades Color, Ancho y Largo , luego al definir un objeto concreto como auto ya se particularizarían estas propiedades a, por ejemplo, Color = Rojo, Ancho = 2 metros y Largo = 3,5 metros.

- **Métodos:** la mayoría de objetos tienen comportamientos o realizan acciones, por ejemplo, una acción evidente de un objeto auto es el de moverse o lo que es lo mismo, trasladarse de un punto inicial a un punto final. Cualquier proceso que implica una acción o pauta de comportamiento por parte de un objeto se define en su clase, para que luego pueda manifestarse en cualquiera de sus objetos. Así, en la clase “auto” se definirían en el método “mover” todos los procesos necesarios para llevarlo a cabo (los procesos para desplazar el auto de un punto inicial a un punto final), luego cada objeto de la clase “auto” simplemente tendría que invocar este método para trasladarse de un punto inicial a un punto final, cualesquiera que fueran esos puntos.

Desde el punto de vista de algunos de los objetos que nos encontraremos en una hoja de cálculo de Excel, tenemos objetos tales como: *WorkSheet* (objeto hoja de cálculo) o *Range* (objeto casilla o rango de casillas).

Un objeto *Range* está definido por una clase donde se definen sus propiedades, entre ellas están *Value*, que contiene el valor de la casilla , *Column* y *Row* que contienen respectivamente la fila y la columna de la casilla, *Font* que contiene la fuente de los caracteres que muestra la casilla, entre otras.

Range, como objeto, también tiene métodos, recordemos que los métodos sirven para llevar a cabo una acción sobre un objeto. Por ejemplo el método *Activate***,** hace activa una celda determinada, *Clear*, borra el contenido de una celda o rango de celdas, *Copy*, copia el contenido de la celda o rango de celdas en el portapapeles.

3. Programación orientada a objetos versus programación basada en objetos

Hay una sutil diferencia entre las definiciones del título, programación orientada a objetos, significa que el programador trabaja con objetos fabricados por él mismo, es decir, el programador es quien implementa las clases para luego crear objetos a partir de ellas. Cuando se trabaja con una macro en Excel, se utilizan objetos ya definidos por la aplicación (WorkSheets, Range,…) sin implementar ninguno nuevo, por lo que en nuestro caso es más correcto hablar de programación basada en objetos o programación orientada a eventos. Observe que esta es una de las grandes ventajas de la OOP, utilizar objetos definidos por alguien sin tener que conocer nada sobre su implementación, sólo debemos conocer sus propiedades y métodos y utilizarlos de forma correcta.

4. Concepto de Macro

Una macro es un conjunto de instrucciones que sirven para automatizar procesos. Por ejemplo, si realizamos frecuentemente la acción de seleccionar un rango para aplicarle

negrita, cambio de fuente y centrado, en lugar de hacer estas acciones manualmente, se puede elaborar una macro e invocarla para que ejecute los tres procesos automáticamente.

Utilice el archivo denominado “Ejemplo de macro” para grabar una macro con opciones de formato.

5. El editor de VBA

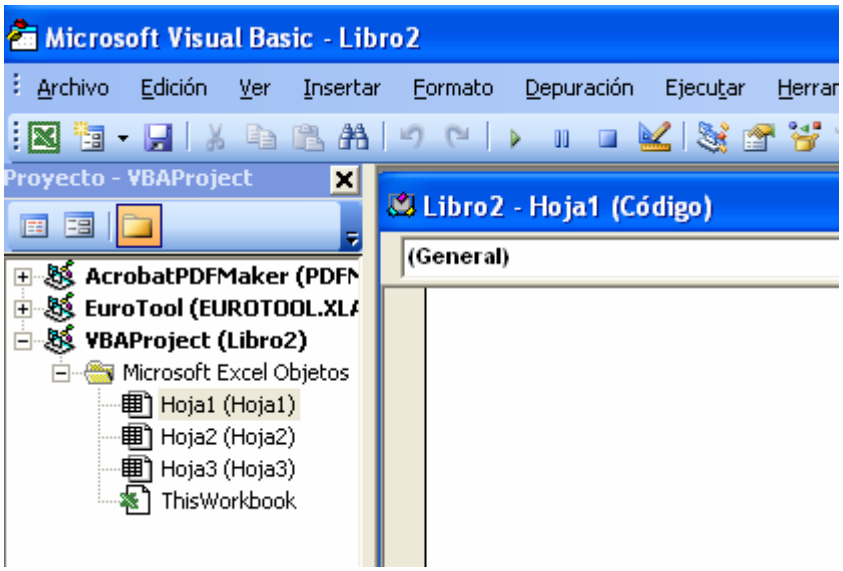
Con el objetivo de facilitar el trabajo con aplicaciones de Visual Basic para Excel es necesario considerar los siguientes pasos iniciales:

- Abra el “Cuadro de controles” en “Herramientas/Personalizar/Cuadro de controles”. El cuadro de controles nos permite tener acceso a una serie de objetos propios de VBA, además de entrar o salir al modo de diseño y al editor de Visual.
- Abra la herramienta de “Visual Basic” en “Herramientas/Personalizar/Visual Basic”
- Baje la seguridad para las macros, en “Herramientas/Macro/Seguridad”, seleccionar “Bajo”.

El editor de VBA se abre al presionar el botón denominado “Ver código” (o bien, Alt+F11, abre-cierra) del cuadro de controles:



y su presentación es la siguiente:



6. Macros y el editor de VBA

El editor de Visual Básic es la aplicación que utilizaremos para construir las macros que interactuaran junto con los libros de trabajo. A continuación se preparará un archivo en

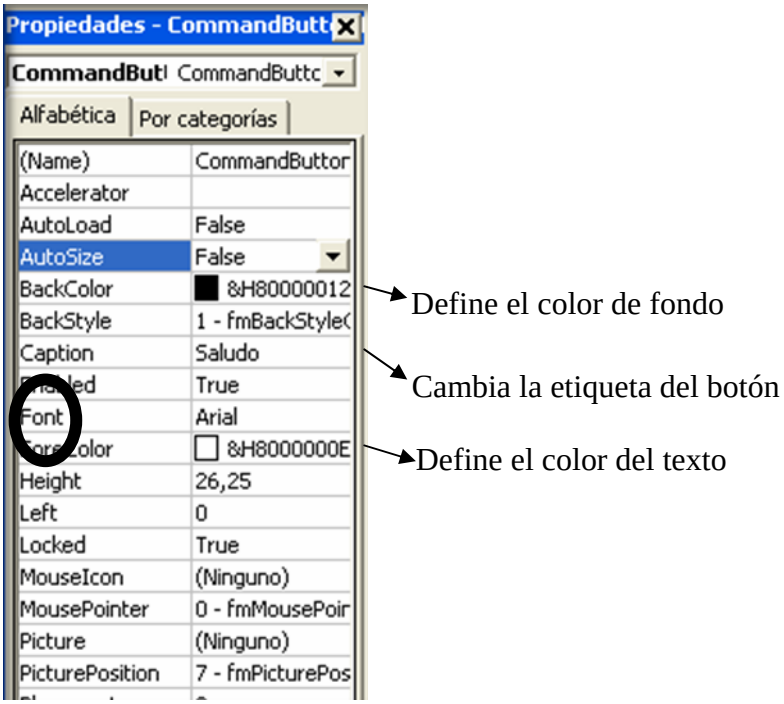
el que escribiremos las primeras instrucciones en Visual Basic. Es importante para ello abrir el cuadro de controles con la finalidad de facilitar todas las tareas.

En principio pensemos en la elaboración de una aplicación que al presionar un botón escriba en la celda A1, la palabra “Hola”.

Para ello mediante el cuadro de controles se colocará un botón en la hoja de cálculo:



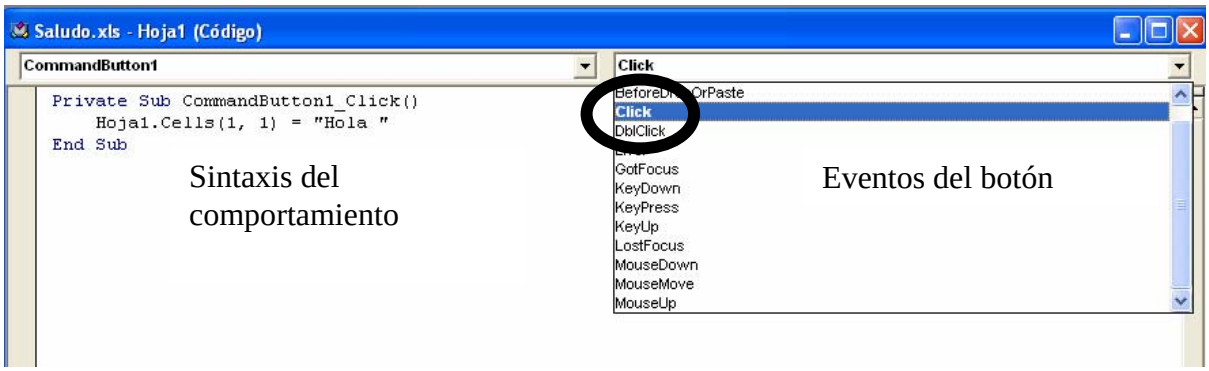
Al dar doble clic sobre el botón se abre el editor de VBA, en el editor se observan el conjunto de propiedades de este objeto (presione F4 para abrir esta ventana):



Todas estas propiedades pertenecen a la clase botón, al colocar otro tipo de objeto en la hoja de cálculo, es posible que algunas de ellas cambien.

Por otra parte, para que el botón tenga un comportamiento es necesario definirlo utilizando el lenguaje de programación de Visual Basic, y los distintos tipos de eventos asociados a una clase.

Volviendo a nuestro ejemplo, el comportamiento “Hola” se establece en el editor de VBA de la siguiente manera:



Las sentencias:

```
Private Sub CommandButton2_Click()
    Range("A1").Value = "Hola "
End Sub
```

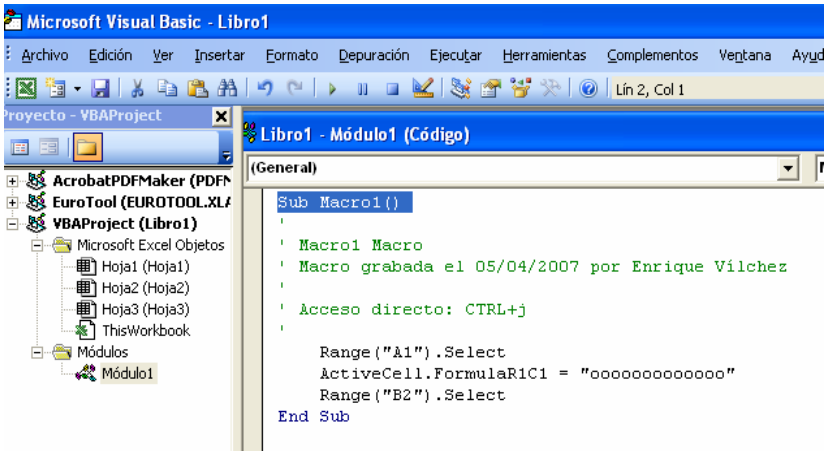
Nos resuelven de la misma forma este ejercicio. Consulte el archivo “Saludo”.

En la sintaxis utilizada por VBA existen ciertos comandos de uso frecuente, estos comandos se resumen en la siguiente tabla:

Comando	Función
Range("A1").Select	Trasladarse a una celda
Activecell.FormulaR1C1="Enrique"	Escribir en una celda
Selection.Font.Bold = True	Letra negrita
Selection.Font.Italic = True	Letra cursiva
Selection.Font.Underline = xlUnderlineStyleSingle	Letra subrayada
With Selection .HorizontalAlignment = xlCenter End With	Centrar texto
With Selection .HorizontalAlignment = xlLeft End With	Alinear a la izquierda
With Selection .HorizontalAlignment = xlRight End With	Alinear a la derecha
With Selection.Font .Name = "AGaramond" End With	Tipo de letra (fuente)
With Selection.Font .Size = 15 End With	Tamaño de letra (tamaño de fuente)
Selection.Copy	Copiar
ActiveSheet.Paste	Pegar
Selection.Cut	Cortar
Selection.EntireRow.Insert	Insertar fila
Selection.EntireRow.Delete	Eliminar fila
Workbooks.Open Filename:="C:\Mis	Abrir un libro

documentos\libro1.xls"

Los comandos anteriores se pueden obtener directamente de Excel grabando una macro y posteriormente abriendo el editor de VBA. Al abrir el editor todos los pasos ejecutados en la macro se han grabado utilizando el lenguaje de programación de Visual Basic, por defecto estos procedimientos se guardan en la carpeta “Módulos”.



Por ejemplo, elabore una macro que en la celda A1 escriba “Hola”, observe el código en el editor y compare con el ejercicio anterior. En este caso, se genera el siguiente código:

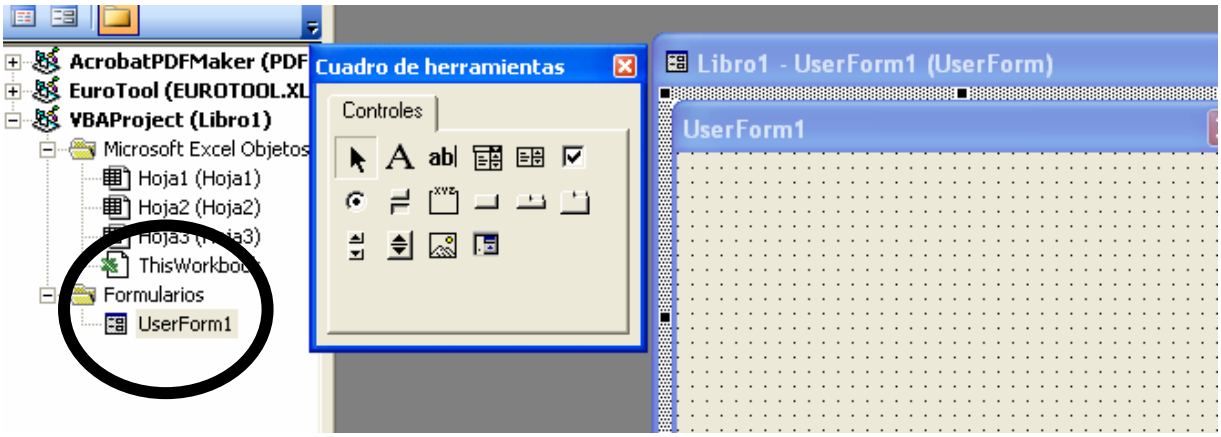
```
Sub Saludo()
    ' Saludo Macro
    ' Macro grabada el 05/04/2007 por Enrique Vílchez
    ' Acceso directo: CTRL+v
      Range("A1").Select
      ActiveCell.FormulaR1C1 = "Hola"
      Range("A2").Select
End Sub
```

¿Qué función desempeña el carácter '? (abra el archivo “Macro para ver el código”).

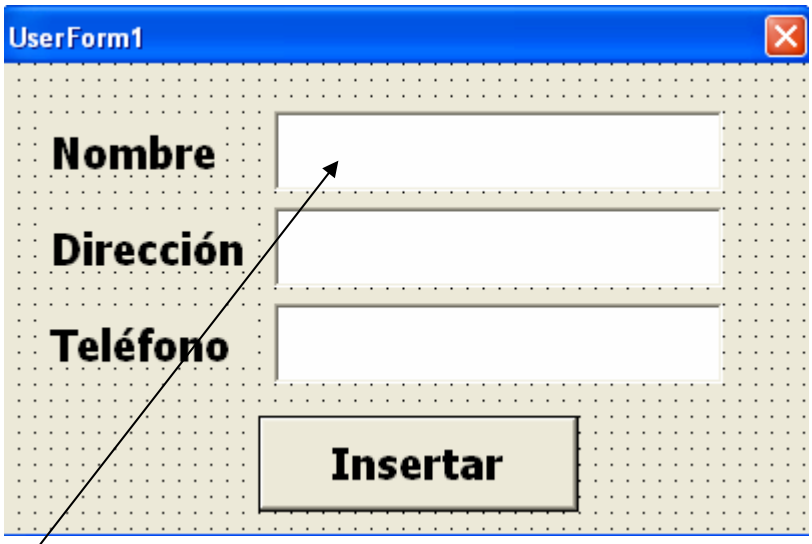
7. Creación de formularios

Un formulario es una ventana que se programa por medio de controles y los cuales a su vez responden a una serie de eventos que se programan utilizando el lenguaje de Visual Basic.

El editor de VBA (Alt+F11) nos permite insertar un formulario mediante el menú “Insertar/UserForm”, el cuál aparecerá en el explorador de proyectos dentro de una carpeta denominada “Formularios”.



Al insertar el formulario se abre el cuadro de herramientas que contiene el conjunto de controles (objetos) que es posible programar. A manera de ejemplo construya el siguiente formulario:



En TextBox1 programe:

```
Private Sub TextBox1_Change()
    Range("A9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox1
End Sub
```

En TextBox2:

```
Private Sub TextBox2_Change()
    Range("B9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox2
End Sub
```

En TextBox3:

```
Private Sub TextBox3_Change()
    Range("C9").Select
```

```
        ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox2
    End Sub
```

Sobre el botón “Insertar” programe:

```
    Private Sub CommandButton1_Click()
        Rem inserta un renglón
        Selection.EntireRow.Insert
        Rem Empty Limpia Los Textbox
        TextBox1 = Empty
        TextBox2 = Empty
        TextBox3 = Empty
        Rem Textbox1.SetFocus Envía el cursor al Textbox1 para volver a capturar los
        datos
        TextBox1.SetFocus
    End Sub
```

El comando “Rem” añade comentarios dentro de los códigos de programación (al igual que '). Un comentario permite aclarar la función que desempeñan las sentencias y mejora la legibilidad del código de programación.

Para ejecutar el formulario se presiona F5, o bien, el “Play” que aparece en la barra de herramientas:



Es posible levantar el formulario desde la hoja de cálculo, añadiendo a un botón el siguiente código:

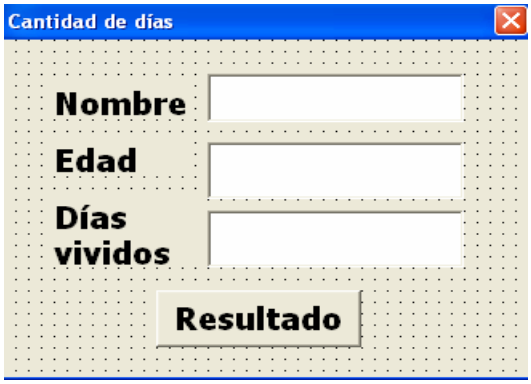
```
Load UserForm1
UserForm1.Show
```

Abra el archivo “Mi primer formulario”.

8. Trabajando con fórmulas dentro de un formulario

Posiblemente la mayor parte de las hojas de cálculo que usted ha utilizado en Excel necesariamente han involucrado el uso de fórmulas. Las fórmulas son un requisito esencial para los usuarios de Excel.

El desarrollo de este apartado se efectuará mediante la explicación de dos ejemplos, para empezar, en el editor de VBA construya el siguiente formulario:



El objetivo de este formulario consiste en generar automáticamente la cantidad de días vividos cuando se inserte la edad del usuario. La programación de los controles del formulario se detalla a continuación:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
    Selection.EntireRow.Insert
    TextBox1 = Empty
    TextBox2 = Empty
    TextBox3 = Empty
    TextBox1.SetFocus
End Sub

Private Sub TextBox1_Change()
    Range("A9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox1
End Sub

Private Sub TextBox2_Change()
    Range("B9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox2
    Rem Aquí se crea la fórmula
    TextBox3 = Val(TextBox2) * 365
    Rem El TextBox3 guardara el total de la multiplicación del TextBox2 por 365
    Rem El Comando Val permite convertir un valor de texto a un valor numérico
    Rem Esto se debe a que los TextBox no son numéricos y debemos de
    convertirlos
End Sub

Private Sub TextBox3_Change()
    Range("C9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox3
End Sub
```

Otro aspecto esencial en la programación de aplicaciones consiste en validar la información que se incluye en un formulario, para ello utilizando Visual Basic se

recurre a un evento denominado “KeyPress”. Al observar el formulario del ejemplo anterior, se concluye que el TextBox1 no debería admitir caracteres numéricos y el TextBox2 caracteres alfabéticos. La programación de estos cuadros de texto en el evento “KeyPress” es la siguiente:

```
Private Sub TextBox1_KeyPress(ByVal KeyAscii As MSForms.ReturnInteger)
   KeyAscii = Asc(UCase(Chr(KeyAscii))) 'Pone todo en mayúscula para minúscula
                                          se usa LCase
   If KeyAscii = 13 Then
     TextBox2.SetFocus 'Manda el cursor al segundo cuadro de texto
   End If
   If KeyAscii <> 32 And KeyAscii <> 8 Then
      If Chr(KeyAscii) < "A" Or Chr(KeyAscii) > "Z" Then
         KeyAscii = 0 'No permite la inclusión de caracteres numéricos, se exceptúa el
                      Delete y el espacio
      End If
   End If
End Sub

Private Sub TextBox2_KeyPress(ByVal KeyAscii As MSForms.ReturnInteger)
   If KeyAscii = 13 Then
     TextBox3.SetFocus 'Manda el cursor al tercer cuadro de texto
   End If
   If KeyAscii <> 45 And KeyAscii <> 8 Then
      If Chr(KeyAscii) < "0" Or Chr(KeyAscii) > "9" Then
         KeyAscii = 0 'No permite la inclusión de caracteres alfabéticos, se exceptúa
                      el Delete y el espacio
      End If
   End If
End Sub
```

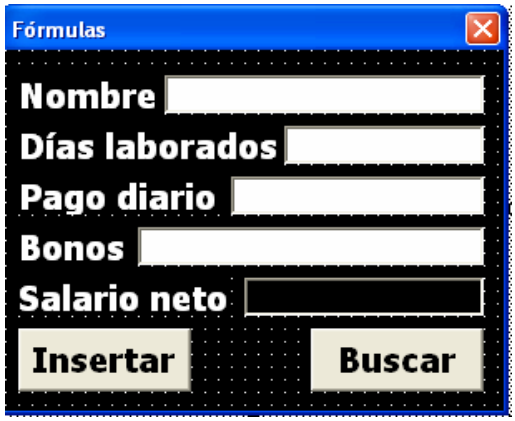
El If es una estructura de control condicional propia del lenguaje de programación VBA, su sintaxis es:

```
If <condiciones>Then
        Sentencias
End If
```

al satisfacerse las condiciones se ejecutan las sentencias que están dentro del If, en caso contrario no se ejecuta ninguna línea de código.

Finalmente en el TextBox3 podemos cambiar la propiedad Enabled por “False”, evitando que el usuario altere el resultado de la fórmula dentro de la caja de texto (en este caso el TextBox cumple una función netamente informativa).

Nuestro segundo ejemplo trabaja mediante un formulario que pregunta al usuario su nombre, la cantidad de días laborados, su salario diario, los bonos recibidos y devuelve como resultado su salario neto, la estructura de este formulario es:



Además de validar cada uno de los campos “TextBox” se debe incluir en el formulario el siguiente código:

```
Private Sub CommandButton1_Click() 'Botón insertar
    Selection.EntireRow.Insert
    TextBox1 = Empty
    TextBox2 = Empty
    TextBox3 = Empty
    TextBox4 = Empty
    TextBox5 = Empty
    TextBox1.SetFocus
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click() 'Botón buscar
    Cells.Find(What:=TextBox1, After:=ActiveCell, LookIn:=xlFormulas, LookAt _
    :=xlPart, SearchOrder:=xlByRows, SearchDirection:=xlNext, MatchCase:= _
    False).Activate

    TextBox1.SetFocus
End Sub

Private Sub TextBox1_Change()
    Range("A9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox1
End Sub

Private Sub TextBox2_Change()
    Range("B9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox2
End Sub

Private Sub TextBox3_Change()
    Range("C9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox3
```

```
End Sub

Private Sub TextBox4_Change()
    Range("D9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox4
    Rem aquí se crea la formula
    TextBox5 = Val(TextBox2) *  Val(TextBox3) + Val(TextBox4)
    Rem el TextBox5 guardara  el total
End Sub

Private Sub TextBox5_Change()
    Range("E9").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox5
End Sub
```

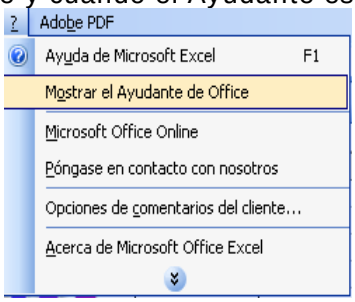
El asistente de Office:



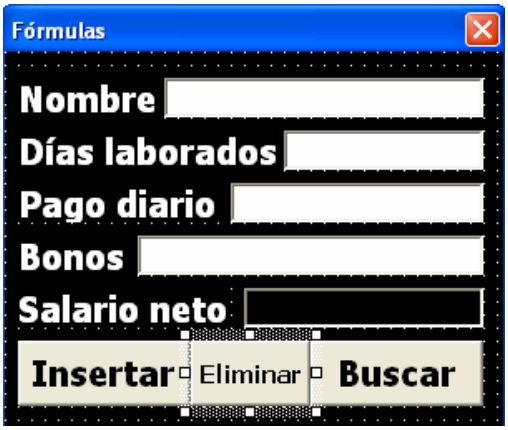
se puede manipular utilizando código de VBA. En la tabla siguiente se resumen algunas de estas opciones:

Comando	Función
Assistant.Assistant.Visible =True	Permite hacer visible (True) o invisible (False) el Asistente
Assistant.Move 430,230	Ubica en Asistente en un lugar de la pantalla
Assistant.Animation=msoAnimationListenToComputer	Permite activar un efecto de animación

El código tiene efecto siempre y cuando el Ayudante esté activo:



Volviendo a nuestro ejemplo, se puede utilizar el Asistente para eliminar un registro de los incluidos por el usuario, en el formulario se debe añadir otro botón denominado “Eliminar”, como se muestra en la figura:



El código de programación en el evento “Clic” de este botón es:

```
With Assistant.NewBalloon
    .Text = "Deseas Borrar este Registro"
    .Button = msoButtonSetYesNo
    .Heading = "Advertencia"
    t = .Show
End With

If  t = -3 Then
    Assistant.Animation = msoAnimationEmptyTrash
    Selection.EntireRow.Delete
End If
```

Lo cual devuelve:

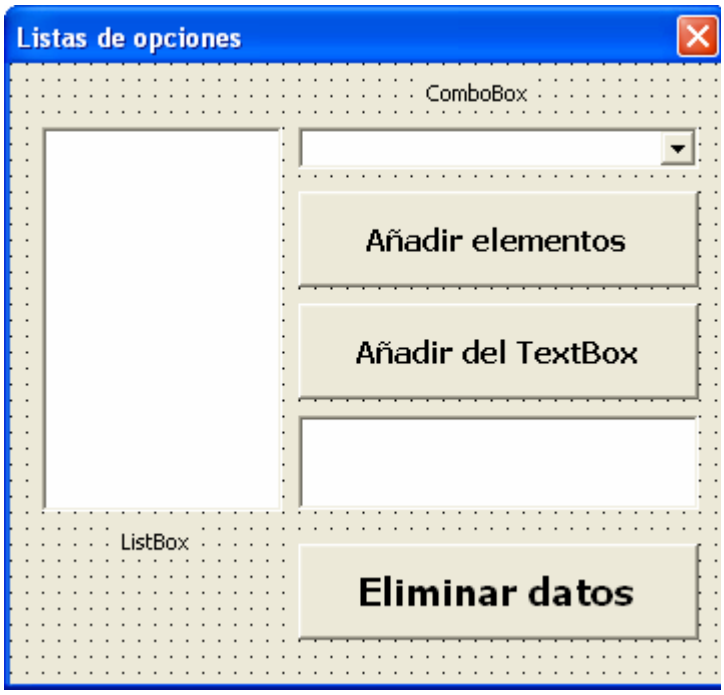


Consulte el archivo “Fórmulas”.

9. Trabajando con los controles ListBox y ComboBox

Los controles ListBox (Cuadro de lista) y ComboBox (Cuadro combinado) crean listas y cuadros de opciones. ListBox presenta al usuario una lista de opciones de forma vertical en una única columna, si el número de elementos excede los que puede contener el cuadro de la lista, aparecen automáticamente barras de desplazamiento en el control. ComboBox combina las características de un cuadro de texto y un cuadro de lista, permite que el usuario seleccione un elemento escribiendo texto en el cuadro de texto, o bien, seleccionándolo de la lista.

Construya en Excel el siguiente formulario:



El objeto ListBox presenta propiedades muy similares al control ComboBox. Algunas de estas propiedades se resumen a continuación:

Propiedad	Sintaxis	Efecto
AddItem	ListBox1.AddItem "Elemento"	Agrega elementos a la lista denominada "ListBox1"
ListIndex	x=ListBox1.ListIndex	Devuelve el índice (posición) del elemento seleccionado
List(Index)	x=ListBox1.List(#1)	Devuelve el elemento seleccionado en el lugar #1
RemoveItem	ListBox1.RemoveItem(0)	Elimina el elemento de la lista denominada

		“ListBox1”, ubicado en la posición 0
ListCount	x=ListBox1.ListCount	Devuelve el total de elementos de la lista denominada “ListBox1”
Selected(Índice)	ListBox1.Selected(1)	Indica mediante un valor lógico (True, False), si el elemento #1 está seleccionado
Str(#)	x=Str(#)	Convierte un valor numérico a string o valor de texto, su función es la inversa de Val. Este comando es muy útil pues algunas de las propiedades anteriores admiten únicamente string.

Todas estas opciones se pueden combinar entre sí, por ejemplo List.RemoveItem(List.ListIndex), elimina el elemento seleccionado.

De esta forma, para programar los botones “Añadir elementos”, “Añadir del TextBox” y “Eliminar datos” en el formulario anterior, se incluye el siguiente código:

```
Private Sub CommandButton1_Click() 'Botón “Añadir elementos”
   ListBox1.AddItem "Karla Rodríguez"
   ListBox1.AddItem "Nancy Cedeño"
   ListBox1.AddItem "Edwin Chaves"

   ComboBox1.AddItem "Enrique Víchez"
   ComboBox1.AddItem "Pedro Borbón"
   ComboBox1.AddItem "Edgar Bogantes"
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click() 'Botón “Añadir del TextBox”
   If TextBox1 = "" Then
      MsgBox ("Datos inválidos") 'Permite evitar al usuario añadir un dato vacío
   Else
      ListBox1.AddItem (TextBox1)
      ComboBox1.AddItem (TextBox1)
   End If
End Sub

Private Sub CommandButton3_Click() 'Botón “Eliminar datos”
   ListBox1.RemoveItem (ListBox1.ListIndex)
```

```
    ComboBox1.RemoveItem (ComboBox1.ListIndex)
End Sub
```

La estructura de control condicional:

```
If <condiciones> Then
    Sentencias
Else
    Sentencias
End If
```

ejecuta las sentencias del If si las condiciones son verdaderas, sino (else), ejecuta las sentencias del Else.

VBA también cuenta con una serie de estructuras de control de repetición. Estas estructuras se emplean para realizar ciclos, con las estructuras condicionales hemos observado que las sentencias se ejecutan una sola vez en el mismo orden en el que aparecen, pero existen rutinas que requieren la repetición de un grupo de instrucciones hasta que se cumplan ciertas condiciones. Las estructuras de repetición más importantes del lenguaje de programación Visual Basic, se detallan en la siguiente tabla:

Estructura de control	Sintaxis	Explicación
While ... Wend	While <condiciones> sentencias Wend	Ejecuta una serie de instrucciones siempre que las condiciones especificada tenga el estado lógico "verdadero"
Do While ... Loop	Do While <condiciones> sentencias Loop	Repite un bloque de instrucciones mientras las condiciones sean verdaderas
For ... Next	For contador=#ini To #fin Sentencias Next contador	Repite un bloque de sentencias el número de veces especificado en "ini" y "fin", el cual corresponde a: fin-ini+1

En nuestro próximo ejemplo se utilizará la estructura de control Do While para añadir elementos a los controles ListBox y ComboBox, mediante datos que aparecen en la hoja de cálculo. Construya el siguiente formulario:



El código que permite programar este botón es:

```
Private Sub CommandButton1_Click()
Range("A2").Select

Do While ActiveCell <> Empty
   ActiveCell.Offset(1, 0).Select
   ListBox1.AddItem ActiveCell
Loop
End Sub
```

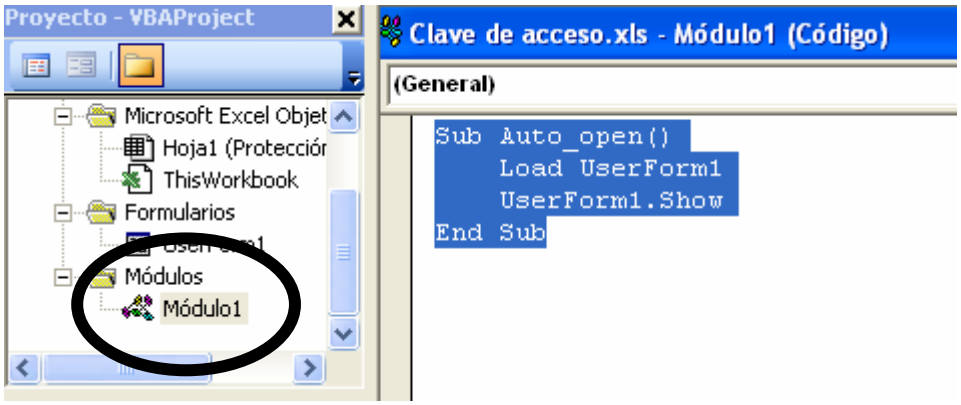
En este código el comando “Range(“A2”).Select” selecciona la celda donde se encuentra el primer dato de la columna a incluir, “ActiveCell <> Empty” verifica que la celda no esté vacía, “ActiveCell.Offset(1,0).Select” baja un reglón (para moverse por las columnas en lugar de las filas se escribe “ActiveCell.Offset(0,1).Select”)y finalmente “ListBox1.AddItem ActiveCell” añade el dato de la celda activa.

Abra el archivo “Listas”.

10. Ejecutar una macro al abrir un archivo de Excel

Ejecutar una macro al abrir un libro de Excel requiere de un procedimiento que llamaremos Auto_open, la idea consiste en que Auto_open ejecute automáticamente lo que se encuentra dentro de él, cuando se abre un archivo de Excel.

Auto_open debe ser insertado en un módulo mediante el editor de VBA (consulte la figura adjunta), y su contenido es el siguiente:



El código adjunto abre un formulario denominado UserForm1. Por ejemplo, suponga que desea bloquear el acceso a una hoja de cálculo por medio de una clave. Para ello se construye el siguiente formulario:



El código para programar el "TextBox" y el botón "Enviar" es:

```
Private Sub TextBox1_KeyPress(ByVal KeyAscii As MSForms.ReturnInteger)
    If KeyAscii <> 45 And KeyAscii <> 8 Then 'Valida el TextBox1
      If Chr(KeyAscii) < "0" Or Chr(KeyAscii) > "9" Then
        KeyAscii = 0
      End If
    End If
End Sub

Private Sub wh_Click()
      Do While Str(TextBox1) <> Str(1212) 'Compara la clave digitada con la
                                          clave correcta
        MsgBox ("Clave incorrecta")
        TextBox1 = Empty
        ActiveSheet.Protect DrawingObjects:=True, Contents:=True,
        Scenarios:=True 'Protege la hoja de cálculo para evitar su edición
        Exit Sub
      Loop
      UserForm1.Hide 'Esconde el formulario
      ActiveSheet.Unprotect 'Desproteje la hoja de cálculo
```

```
End Sub
```

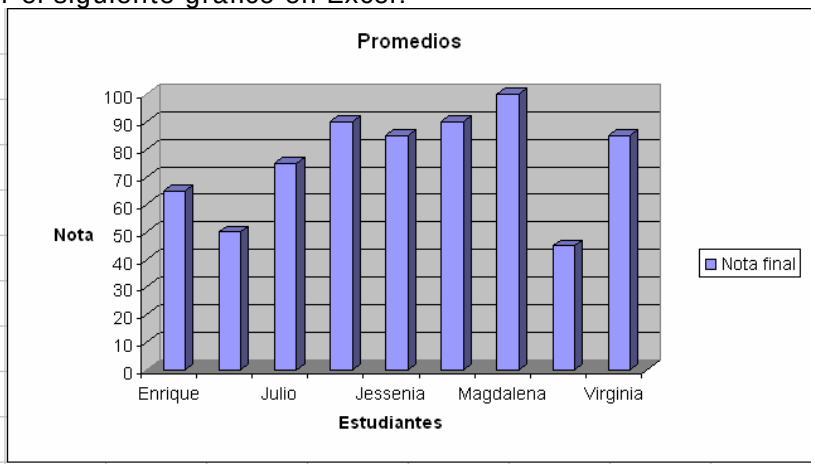
Consulte el archivo “Clave de acceso”.

11. Gráficos con Excel

Las opciones de graficación que proporciona Excel son muy variadas, poder controlar estas prestaciones mediante una macro resulta ser una tarea interesante para el desarrollo de materiales educativos computarizados, en el área de la enseñanza de la matemática.

Grabe una macro para realizar el siguiente gráfico en Excel:

Estudiante	Nota final
Enrique	65
Luis	50
Julio	75
Margarita	90
Jessenia	85
Cristian	90
Magdalena	100
Rosa	45
Virginia	85



Al observar en el editor de VBA el código generado automáticamente, se obtiene:

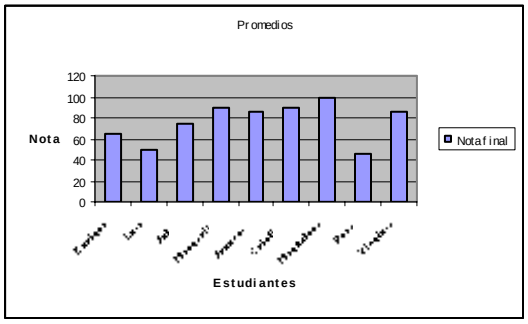
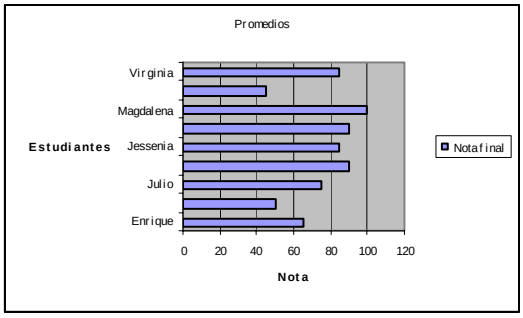
```
Sub Gráfico()
' Gráfico Macro
' Macro grabada el 06/04/2007 por Enrique Vílchez
' Acceso directo: CTRL+g
    Range("A1:B10").Select
    Charts.Add
    ActiveChart.ChartType = xl3DColumnClustered
    ActiveChart.SetSourceData Source:=Sheets("Hoja1").Range("A1:B10"),
PlotBy:= _
        xlColumns
    ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Hoja1"
    With ActiveChart
        .HasTitle = True
        .ChartTitle.Characters.Text = "Promedios"
        .Axes(xlCategory).HasTitle = True
        .Axes(xlCategory).AxisTitle.Characters.Text = "Estudiantes"
        .Axes(xlSeries).HasTitle = False
        .Axes(xlValue).HasTitle = True
        .Axes(xlValue).AxisTitle.Characters.Text = "Nota"
    End With
```

```
End Sub
```

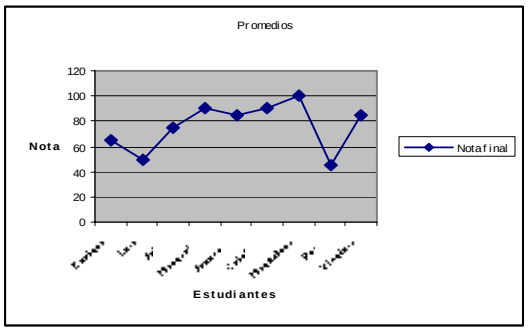
La interpretación de este código es la siguiente:

- Range (“A1:B10”).Select: define el rango de los datos a graficar
- Charts.Add: agrega una gráfica
- ActiveChChart.ChartType = x13DColumnClustered: indica el tipo de gráfica
- ActiveChart.SetSourceData …: indica cómo se acomodan los datos en la gráfica
- ActiveChart.Location …: indica donde se va ubicar la gráfica
- .HasTitle = True: indica la existencia de un título (en caso de no existir el valor lógico es False)
- .ChartTitle.Characters.Text = "Promedios": nombre del título
- .Axes(xlCategory).HasTitle = True: indica la existencia de una etiqueta para el eje “x”
- .Axes(xlCategory).AxisTitle.Characters.Text = "Estudiantes": nombre de la etiqueta del eje “x”

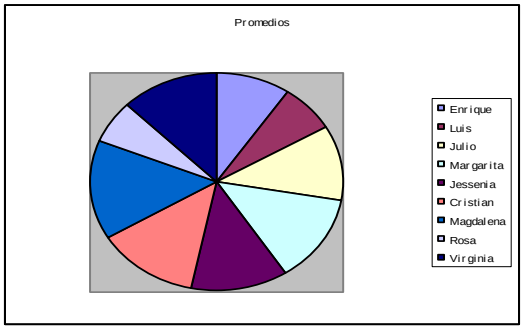
Cada tipo de gráfico que genera Excel tiene su propia sintaxis en el comando “ActiveChChart.ChartType =”. Algunos de estos tipos se muestran en la tabla adjunta:

Tipo	Forma
xlColumnClustered	
xlBarClustered	

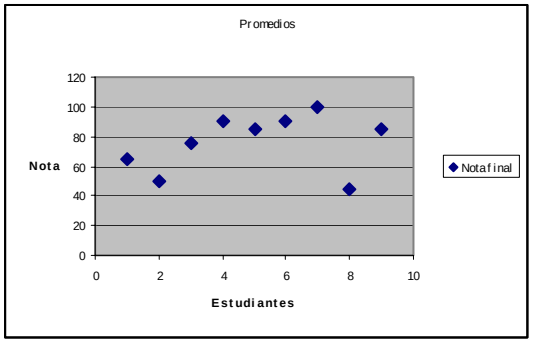
xlLineMarkers



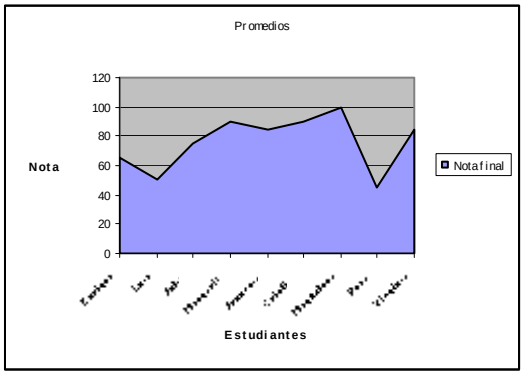
xlPie



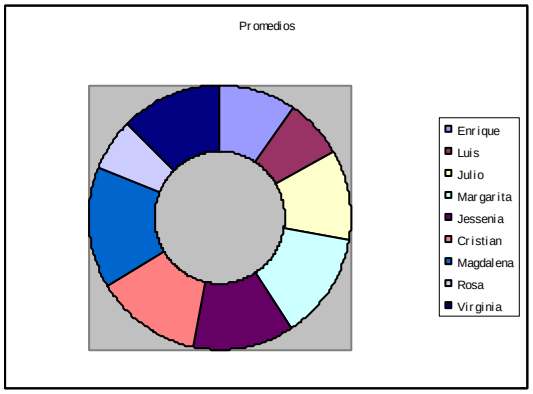
xlXYScatter



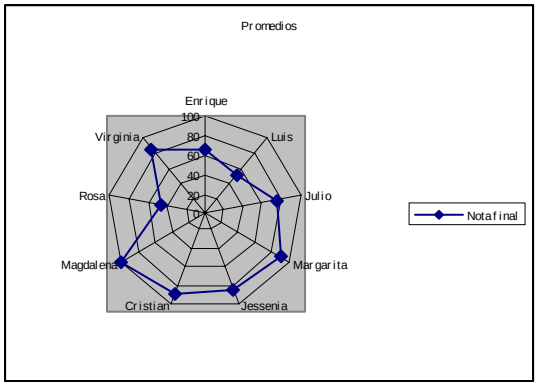
xlAreaStacked



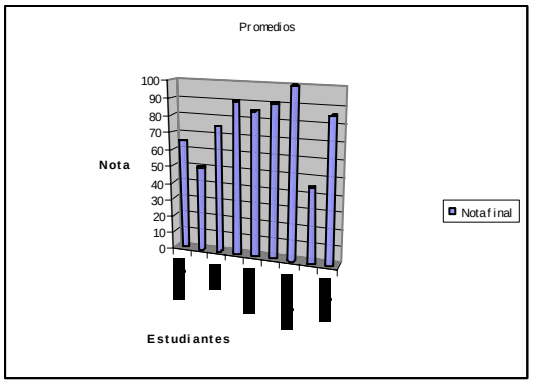
xlDoughnut



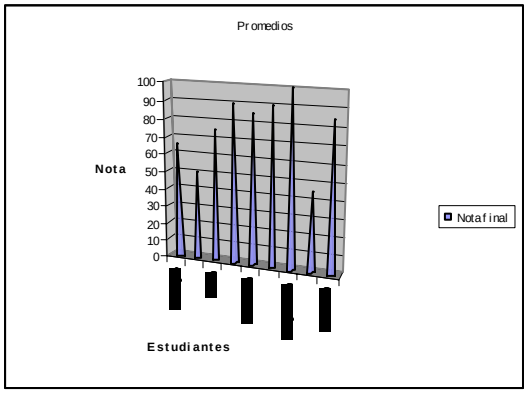
xlRadarMarkers

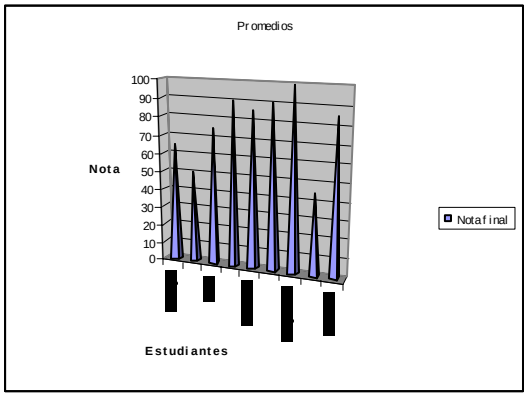


xlCylinderColClustered

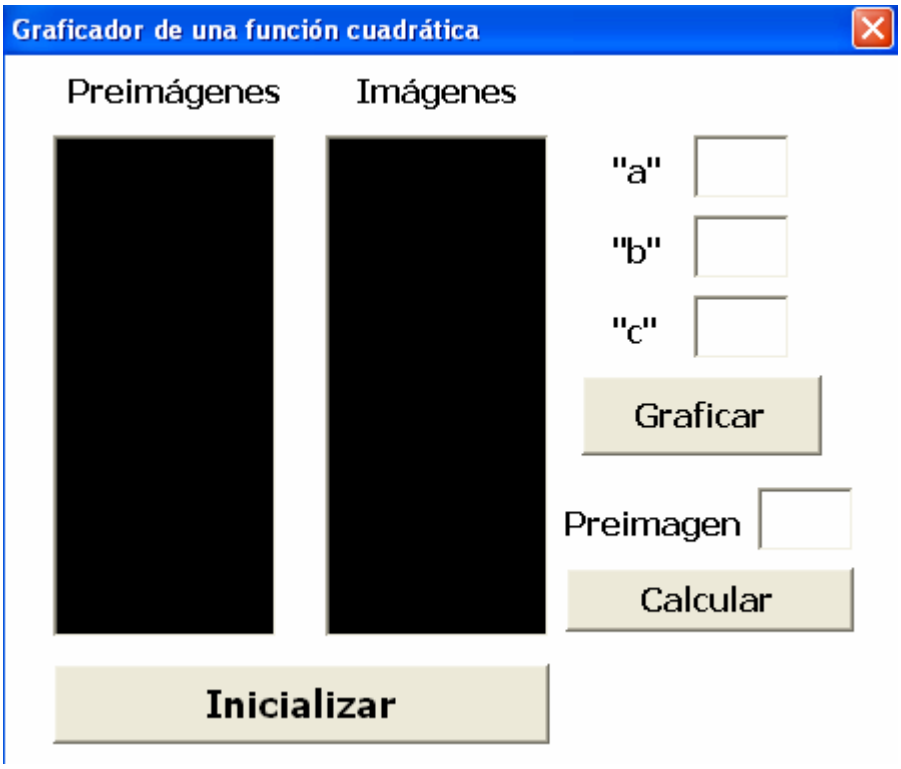


xlConeColClustered



xlPyramidColClustered	

Suponga ahora que se desea realizar un graficador para funciones cuadráticas. El formulario base tiene el siguiente aspecto:



El codigo de programación de este formulario es (estúdielo con cuidado):

```
Private Sub CommandButton1_Click() 'Llena los ListBox con las preimágenes
                                   y las imágenes
   If TextBox4 <> "" Then
      ListBox1.AddItem Str(TextBox4)
      ActiveCell.FormulaR1C1 = TextBox4
      ActiveCell.Offset(0, 1).Select
      x = Val(TextBox1) * Val(TextBox4) ^ 2 + Val(TextBox2) *
Val(TextBox4) + Val(TextBox3)
```

```
        ListBox2.AddItem Str(x)
        ActiveCell.FormulaR1C1 = x
        ActiveCell.Offset(0, -1).Select
        ActiveCell.Offset(1, 0).Select
        TextBox4 = Empty
    Else
        MsgBox ("Digite la preimagen")
    End If
    TextBox4.SetFocus
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click() 'Traza la gráfica de la función bajo el
                                   requisito de diez preimágenes
    If ListBox1.ListCount = 10 Then
        Range("A1:B10").Select
        Charts.Add
        ActiveChart.ChartType = xlXYScatterSmoothNoMarkers
        ActiveChart.SetSourceData
Source:=Sheets("Graficador").Range("A1:B10"), PlotBy:= _
        xlColumns
        ActiveChart.Location Where:=xlLocationAsObject, Name:="Graficador"
        With ActiveChart
            .HasTitle = True
            .ChartTitle.Characters.Text = "Función cuadrática"
            .Axes(xlCategory, xlPrimary).HasTitle = True
            .Axes(xlCategory, xlPrimary).AxisTitle.Characters.Text = "x"
            .Axes(xlValue, xlPrimary).HasTitle = True
            .Axes(xlValue, xlPrimary).AxisTitle.Characters.Text = "y"
        End With
    Else
        MsgBox ("Se requieren diez preimágenes para trazar la gráfica de la
función")
    End If
    UserForm1.Hide
End Sub

Private Sub CommandButton3_Click() 'Inicializa todos los TextBox
    TextBox1 = Empty
    TextBox2 = Empty
    TextBox3 = Empty
    TextBox4 = Empty
End Sub

Private Sub TextBox1_KeyPress(ByVal KeyAscii As MSForms.ReturnInteger)
    If KeyAscii <> 45 And KeyAscii <> 8 Then 'Valida el TextBox1
        If Chr(KeyAscii) < "0" Or Chr(KeyAscii) > "9" Then
```

```
            KeyAscii = 0
        End If
    End If
End Sub

Private Sub TextBox2_KeyPress(ByVal KeyAscii As MSForms.ReturnInteger)
    If KeyAscii <> 45 And KeyAscii <> 8 Then 'Valida el TextBox2
        If Chr(KeyAscii) < "0" Or Chr(KeyAscii) > "9" Then
            KeyAscii = 0
        End If
    End If
End Sub

Private Sub TextBox3_KeyPress(ByVal KeyAscii As MSForms.ReturnInteger)
    If KeyAscii <> 45 And KeyAscii <> 8 Then 'Valida el TextBox3
        If Chr(KeyAscii) < "0" Or Chr(KeyAscii) > "9" Then
            KeyAscii = 0
        End If
    End If
End Sub

Private Sub TextBox4_Change()
    If KeyAscii <> 45 And KeyAscii <> 8 Then 'Valida el TextBox4
        If Chr(KeyAscii) < "0" Or Chr(KeyAscii) > "9" Then
            KeyAscii = 0
        End If
    End If
End Sub

Private Sub UserForm_Activate() 'Inicializa el rango de selección
    Range("A1").Select
End Sub
```

Abra el archivo “Graficador” y realice distintas gráficas.

12. Aplicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática

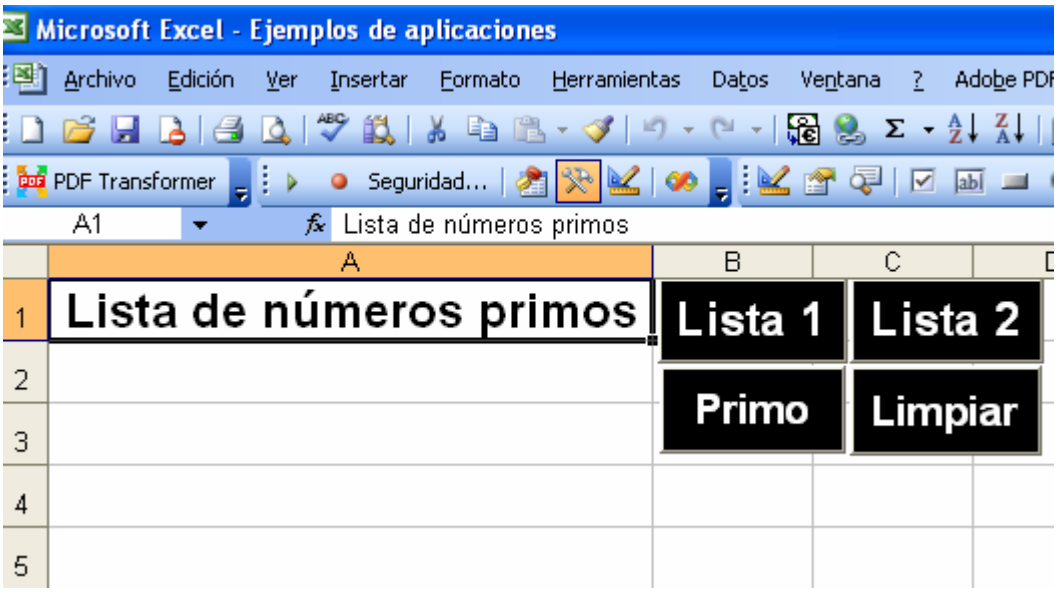
Las macros dotan a los usuarios de Excel, de un conjunto de herramientas de programación que al ser implementadas con objetivos pedagógicos claramente definidos, pueden adaptarse al desarrollo de materiales educativos computarizados (MEC) para la enseñanza y el aprendizaje de axiomas, conceptos y teoremas matemáticos.

En esta sección se presentan tres ejemplos de aplicaciones desarrolladas en VBA, contextualizadas en las áreas de teoría de números, geometría analítica y sucesiones.

12.1 Números primos

El problema a resolver consiste en diseñar un programa que encuentre todos los números primos de 1 a “n” siendo “n” un número entero positivo proporcionado por el usuario y a su vez permita determinar si un número entero dado es primo.

La aplicación desarrollada en el archivo “Ejemplos de aplicaciones” hoja “Primos” utiliza cuatro botones como se observa en la siguiente figura:



Al presionar el botón “Lista 1” se despliega un cuadro de texto que solicita al usuario la inserción de un número entero positivo, posteriormente en la columna “A” se despliega la lista de todos los números primos de 1 al número digitado en el campo de texto.

El botón “Lista 2” genera la misma lista dentro del formulario:



El botón “Primo” solicita la inserción de un número entero positivo e indica si es primo o no.

El botón “Limpiar” borra los datos de la columna “A”.

El código de programación de estos botones se presenta a continuación:

```
Private Sub CommandButton1_Click() 'Levanta el formulario
    Load UserForm1
    UserForm1.Show
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click() 'Averiguar si un número es primo o no
    Dim n As String 'Declara la variable n de tipo cadena
    Dim x As Integer 'Declara la variable x de tipo entera

    n = InputBox("Digete un número entero") 'Solicita al usuario un entero
    x = Val(n) 'Asigna a la variable x el valor numérico de n
    If primo(x) = True Then 'Llama a una función denominada primo que verifica
si x es primo o no, devuelve True o False
        MsgBox ("El número digitado es primo")
    Else
        MsgBox ("El número digitado no es primo")
    End If
End Sub

Private Sub CommandButton3_Click() 'Primera forma de resolución
    Dim n As String
    Dim x As Integer
    Dim Cont As Integer

    n = InputBox("Digete un número entero")
    x = Val(n)
    Cont = 2
    Call Borrar 'Llama una macro grabada llamada borrar, esta macro se ubica en
el módulo #2

    Range("A1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "Lista de números primos"
    For i = 2 To x
        If primo(i) = True Then 'Llama a la función primo
            Hoja1.Cells(Cont, 1) = i 'Añade i a la hoja de cálculo
            Cont = Cont + 1 'Actualiza el contador Cont
        End If
    Next
End Sub
```

```
Private Sub CommandButton4_Click() 'Limpia la hoja
   Call Borrar 'Borra el contenido de la columna "A" llamando a la macro borrar

   Range("A1").Select
   ActiveCell.FormulaR1C1 = "Lista de números primos" 'Añade una etiqueta en
la celda A1
End Sub
```

En este código se utiliza la cláusula “Dim” para declarar variables locales, una variable es un elemento de programa que se utiliza para almacenar valores de datos que pueden cambiar su contenido a lo largo de la ejecución del programa. VBA maneja diferentes tipos de datos, los más comunes se resumen en la siguiente tabla:

Tipo	**Características**
Integer	Una variable de entero con 16 bits con signo
Date	Una variable de tipo fecha
Long	Una variable de entero con 32 bits con signo
Single	Una variable de precisión sencilla y de punto flotante de 32 bits
Double	Una variable de precisión doble y de punto flotante de 32 bits
String * n	Una variable de cadena de longitud fija “n”
String	Una variable de cadena de longitud variable
Char	Una variable de un carácter
Boolean	Una variable lógica (True-False)

Las variables pueden ser declaradas en cualquier punto del entorno del programa o subprograma, pero es recomendable utilizar como punto de declaración el inicio del código.

En el código de programación del botón “Lista 1” se utiliza una función llamada “primo”. En VBA es posible crear nuestras propias funciones, para ello se inserta utilizando el editor de Visual Basic un módulo dentro del cual se escribe:

```
Function Nombre_de_la_función(parámetros) As “Tipo”
        Sentencias
End Function
```

En particular la función “primo” se programa de la siguiente manera:

```
Function primo(x) As Boolean
   Dim i As Integer 'Declara la variable i como del tipo entera

   i = 2 'Inicializa i en dos
```

```
    primo = True
    Do While primo = True And i <= Sqr(x)
      If (x Mod i = 0) Then 'Calcula el residuo de la división entre x e i
        primo = False 'Actualiza el estado del número x
      End If
      i = i + 1 'Incrementa el contador i
    Loop
End Function
```

El comando “Sqr” calcula la raíz cuadrada de “x”, en VBA existen diversas funciones matemáticas que se pueden utilizar directamente, entre ellas se destacan:

Función matemática	**Descripción**
Abs(x)	Devuelve el valor absoluto de “x”
Atn(x)	Devuelve un valor **Double** que contiene el ángulo cuya tangente es el número “x”
Cos(x)	Devuelve un valor **Double** que contiene el coseno del ángulo “x”
Exp(x)	Devuelve un valor **Double** que contiene *e* (base de los logaritmos naturales) elevado a la potencia “x”
Log(x)	Devuelve un valor **Double** que contiene el logaritmo del número “x”. Puede devolver o bien el logaritmo natural (de base *e*) del número “x” o bien el logaritmo del número “x” en una base especificada
Round(x)	Devuelve un valor de tipo **Double** que contiene el número más próximo al valor “x”
Sgn(x)	Devuelve un valor **Integer** que indica el signo de “x”
Sin(x)	Devuelve un valor **Double** que especifica el seno del ángulo “x”
Sqr(x)	Devuelve un valor **Double** que especifica la raíz cuadrada de “x”
Tan(x)	Devuelve un valor **Double** que contiene la tangente del ángulo “x”

Por otra parte, la programación del formulario que se levanta la presionar el botón “Lista 2” es:

```
Private Sub CommandButton1_Click() 'Segunda forma de resolución para generar una lista de números primos
  Dim x As Integer 'Declara la variable x de tipo entera

  ListBox1.Clear 'Limpia la lista
  x = Val(TextBox1)
  If TextBox1 = "" Then 'Verifica que el usuario haya digitado el dato requerido
```

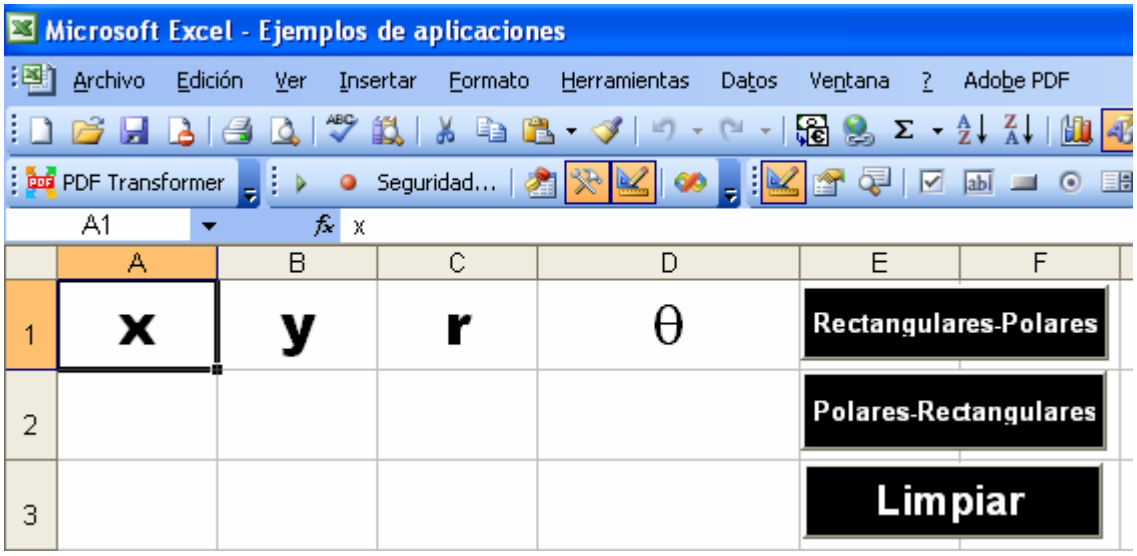
```
        MsgBox ("Digite un número entero en el cuadro de texto")
    Else
        For i = 1 To x
            If primo(i) = True Then 'Verifica que el número i es o no entero
                ListBox1.AddItem (i) 'Añade el número primo a la lista
            End If
        Next
    End If
    TextBox1.SetFocus 'Apunta el cursor al TextBox1
End Sub

Private Sub TextBox1_KeyPress(ByVal KeyAscii As MSForms.ReturnInteger)
'Valida el contenido del TextBox1
    If KeyAscii <> 45 And KeyAscii <> 8 Then
        If Chr(KeyAscii) < "0" Or Chr(KeyAscii) > "9" Then
            KeyAscii = 0 'No permite la inclusión de caracteres alfabéticos, se
exceptúa el Delete y el espacio
        End If
    End If
End Sub
```

12.2 Cambio de coordenadas rectangulares a polares y viceversa

En el archivo “Ejemplos de aplicaciones” hoja “Coordenadas”, se resuelve este problema mediante una hoja de cálculo que pasa coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa.

La hoja de cálculo presenta la siguiente interface:



Al presionar cualquiera de los botones de cambio de coordenadas, se efectúa la conversión de acuerdo a los datos presentes en las columnas “A” y “B” o “C” y “D”, los ángulos se presentan al usuario en grados sexagesimales.

El código de programación es el siguiente:

```
Private Sub CommandButton1_Click() 'Pasar de coordenadas rectangulares a polares
   j = 2
   If Hoja2.Cells(j, 1) <> "" Or Hoja2.Cells(j, 2) <> "" Then 'Verifica que en la hoja existan datos
      Do While Hoja2.Cells(j, 2) <> "" 'Sale del ciclo cuando no hayan datos
         Rem cálculo del r
         x = Hoja2.Cells(j, 1)
         y = Hoja2.Cells(j, 2)
         r = Sqr((x ^ 2) + (y ^ 2)) 'Obtiene la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las coordenadas "x" y "y"
         Hoja2.Cells(j, 3) = r

         Rem cálculo del ángulo
         If x = 0 Then
            Hoja2.Cells(j, 4) = "90" 'Caso en el que la función arco tangente se indefine
         Else
            If x > 0 And y > 0 Then
               Hoja2.Cells(j, 4) = (180 / 3.14159265358979) * Atn(y / x)  'Pasa el ángulo de radianes a grados sexagesimales
            Else
               If x > 0 And y < 0 Then
                  Hoja2.Cells(j, 4) = (180 / 3.14159265358979) * Atn(y / x) + 360 'Pasa el ángulo del cuarto cuadrante como un ángulo positivo en grados sexagesimales
               Else
                  Hoja2.Cells(j, 4) = (180 / 3.14159265358979) * Atn(y / x) + 180 'Hubica el ángulo en el segundo o tercer cuadrante en grados sexagesimales
               End If
            End If
         End If
         j = j + 1
      Loop
   End If
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click() 'Pasar de coordenadas polares a rectangulares
   j = 2
```

```
    If Hoja2.Cells(j, 3) <> "" Or Hoja2.Cells(j, 4) <> "" Then 'Verifica que en la
hoja existan datos
        Do While Hoja2.Cells(j, 4) <> "" 'Sale del ciclo cuando no hayan datos
            r = Hoja2.Cells(j, 3)
            an = Hoja2.Cells(j, 4)

            Rem cálculo de la componente "x"
            x = r * Cos((3.14159265358979 / 180) * an) 'Obtiene la componente "x"
            Hoja2.Cells(j, 1) = x

            Rem cálculo de la componente "y"
            y = r * Sin((3.14159265358979 / 180) * an) 'Obtiene la componente "y"
            Hoja2.Cells(j, 2) = y

            j = j + 1
        Loop
    End If
End Sub

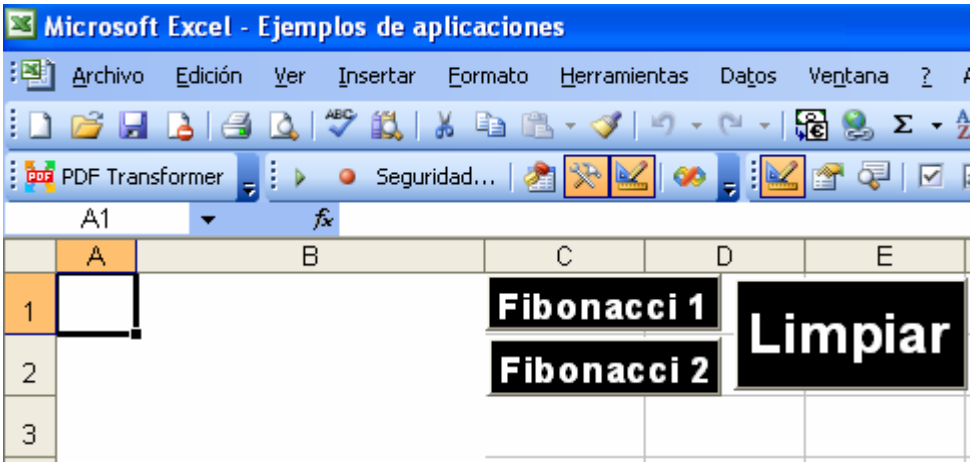
Private Sub CommandButton3_Click() 'Limpia la hoja
    Columns("A:D").Select 'Selecciona las columnas a limpiar
    Selection.ClearContents 'Limpia las columnas
    Range("A1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "x" 'Reasigna la etiqueta de la columna "A"
    Range("B1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "y" 'Reasigna la etiqueta de la columna "B"
    Range("C1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "r" 'Reasigna la etiqueta de la columna "C"
    Range("D1").Select
    ActiveCell.FormulaR1C1 = "q" 'Reasigna la etiqueta de la columna "D"
    Range("A2").Select 'Selecciona la celda "A2"
End Sub
```

12.3 La sucesión de Fibonacci

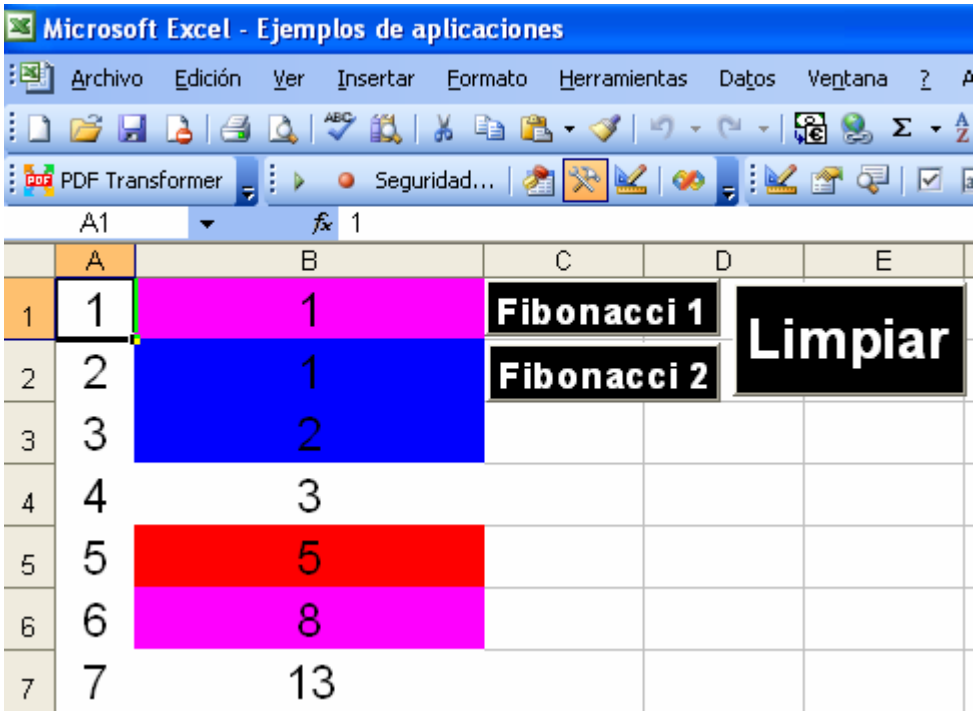
La hoja de cálculo “Fibonacci” genera la sucesión de números de Fibonacci, obtenida por el famoso matemático Leonardo de Pisa (1170-1250). Esta sucesión de números se forma al resolver el siguiente problema: Cuántas parejas de conejos habrán en una granja luego de doce meses, si se coloca inicialmente una pareja y se parte de las siguientes premisas:

- Los conejos alcanzan la madurez sexual a la edad de un mes
- En cuanto alcanzan la madurez sexual los conejos se aparean y siempre resulta preñada la hembra
- El período de gestación de los conejos es de un mes
- Los conejos no mueren
- La hembra siempre da a luz una pareja de conejos de sexos opuestos
- Los conejos tienen una moral y un instinto de variedad genética muy relajados y se aparean entre parientes

La hoja de cálculo “Fibonacci” presenta la siguiente interface:



El botón “Fibonacci 1” genera en la columna “B” los números de Fibonacci de 1 a “n”, siendo “n” un número entero positivo proporcionado por el usuario. El botón “Fibonacci 2” genera la misma lista con un efecto de color de fondo de celda; seudo aleatorio:



El código de programación de los botones es:

```
Private Sub CommandButton1_Click() 'Primera forma de resolución
    Dim n As String
    Dim x As Integer
```

```
    Dim Cont As Integer

    Cont = 1
    n = InputBox("Digite la cantidad de números de Fibonacci de la lista")
    x = Val(n)

    If x = 0 Then 'Valida la ejecución de la recursividad
        MsgBox ("Dato inválido")
    Else
        For i = 1 To x
            Hoja3.Cells(i, 1) = i 'Etiqueta cada uno de los elementos de la sucesión
        Next
        Do While Hoja3.Cells(Cont, 1) <> ""
            If Cont = 1 Or Cont = 2 Then
                Hoja3.Cells(Cont, 2) = 1 'Define las condiciones iniciales
            Else
                Hoja3.Cells(Cont, 2) = Hoja3.Cells(Cont - 1, 2) + Hoja3.Cells(Cont -
2, 2) 'Aplica la recursividad
            End If
            Cont = Cont + 1
        Loop
    End If
End Sub

Private Sub CommandButton2_Click() 'Segunda forma de resolución con la
función Sumando y añadiendo color a las celdas
    Dim n As String
    Dim x As Integer
    Dim Cont As Integer

    Cont = 1
    n = InputBox("Digite la cantidad de números de Fibonacci de la lista")
    x = Val(n)

    If x = 0 Then 'Valida la ejecución de la recursividad
        MsgBox ("Dato inválido")
    Else
        For i = 1 To x
            Hoja3.Cells(i, 1) = i 'Etiqueta cada uno de los elementos de la sucesión
        Next
        Do While Hoja3.Cells(Cont, 1) <> ""
            If Cont = 1 Or Cont = 2 Then
                Hoja3.Cells(Cont, 2) = 1 'Define las condiciones iniciales
                Hoja3.Cells(Cont, 2).Select 'Selecciona la celda
                With Selection.Interior
```

```
                .ColorIndex = Int(Rnd() * 10) 'El comando Int(Rnd() * 10) genera un número entero seudoaleatorio para añadir un color a la celda
                .Pattern = xlSolid
            End With
        Else
            Hoja3.Cells(Cont, 2) = Sumando(Hoja3.Cells(Cont - 1, 2), Hoja3.Cells(Cont - 2, 2)) 'Aplica la recursividad llamando a la función "Fibo"
            Hoja3.Cells(Cont, 2).Select 'Selecciona la celda
            With Selection.Interior
                .ColorIndex = Int(Rnd() * 10) 'El comando Int(Rnd() * 10) genera un número entero seudoaleatorio para añadir un color a la celda
                .Pattern = xlSolid
            End With
        End If
        Cont = Cont + 1
    Loop
  End If
End Sub

Private Sub CommandButton3_Click()
  Columns("A:B").Select 'Selecciona las columnas a limpiar
  With Selection.Interior 'Cambia el color de las celdas seleccionadas a blanco
    .ColorIndex = 2
    .Pattern = xlSolid
  End With
  Selection.ClearContents 'Limpia las columnas
  Range("A1").Select 'Selecciona la celda A1
End Sub
```

La función “Sumando” a la cual se hace referencia en el código, se programa en un módulo como sigue:

```
Function Sumando(x, y) As Integer
  Sumando = x + y
End Function
```

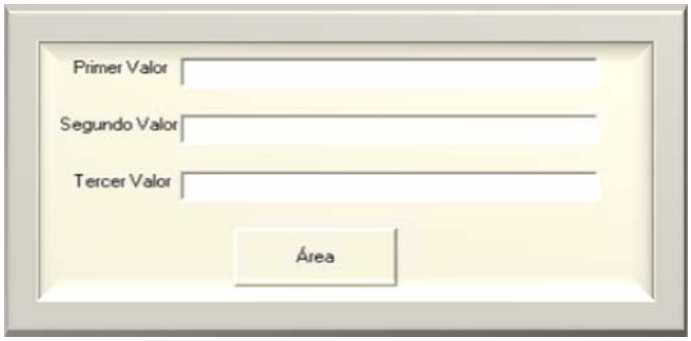
13. Ejercicios

A continuación se presentan una serie de ejercicios de programación, desarrolle cada uno utilizando VBA. Valide los formularios y utilice las celdas de Excel en la resolución de cada problema.

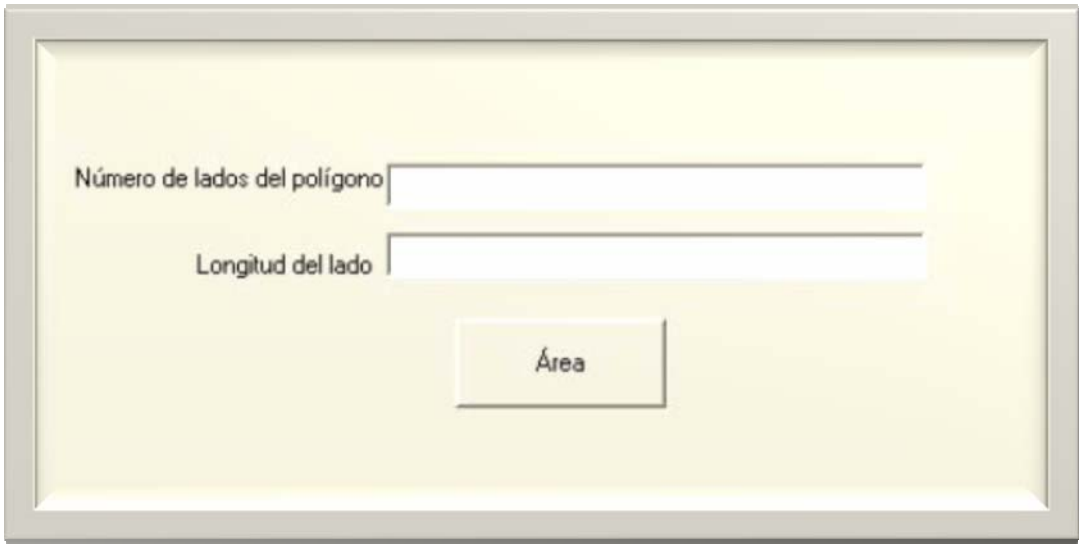
1. Elabore un programa que lea tres números reales positivos y determine si corresponden a la medida de los lados de un triángulo rectángulo. Observe el siguiente formulario:



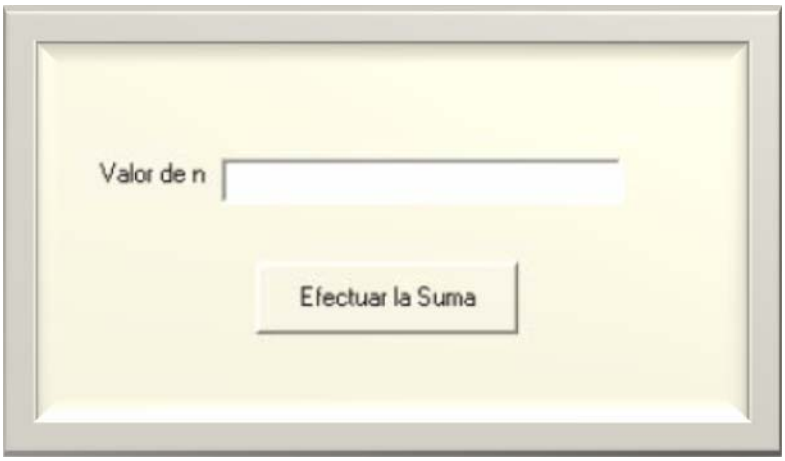
2. Haga un programa que calcule el área de un triángulo utilizando la fórmula de Herón. Un posible formulario para esta aplicación es:



3. Elabore un programa que calcule el área de un polígono regular de *n* lados. Sugerencia: utilice la fórmula $A = \frac{n \cdot l^2}{4} \cdot \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Un posible formulario es:



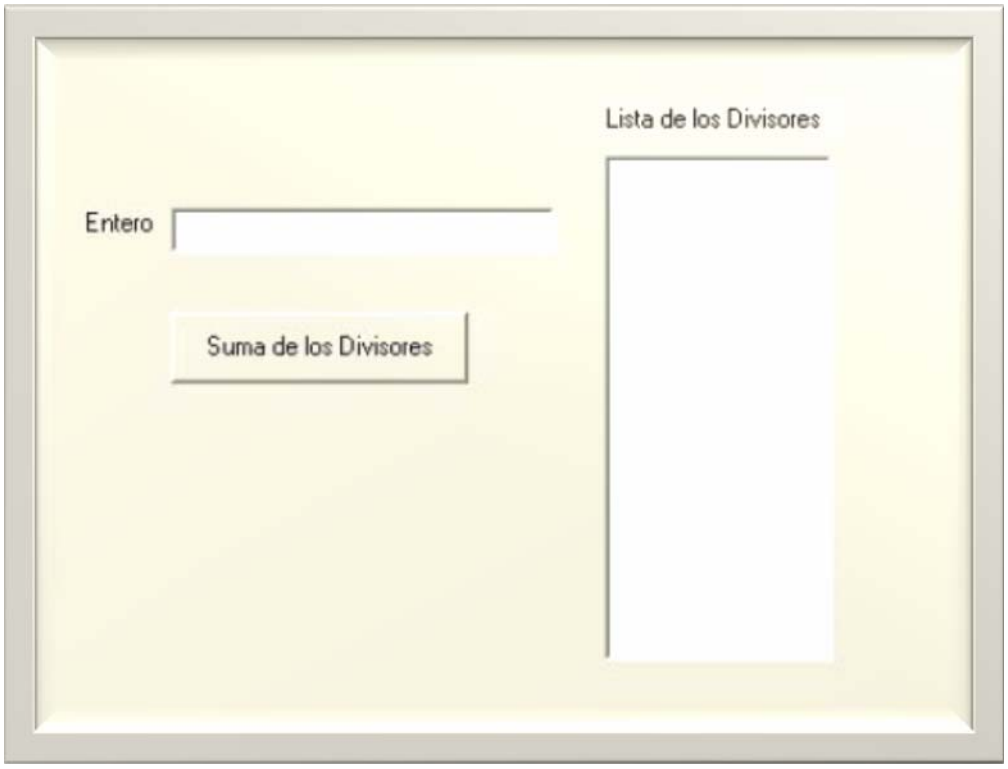
4. Diseñe un programa que calcule la siguiente sumatoria: $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n+1}{}_i$. Para ello se puede utilizar un formulario como el siguiente:



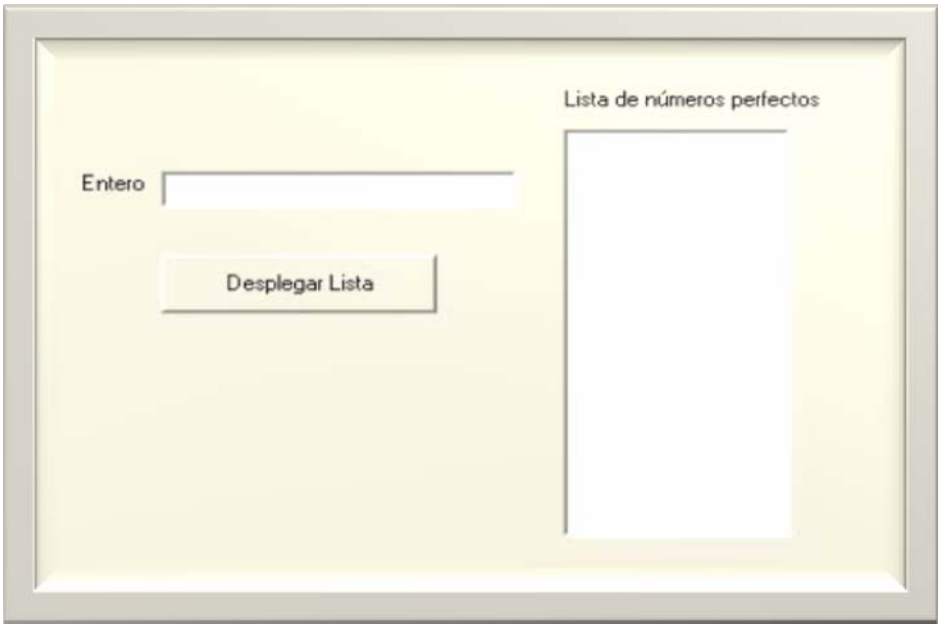
5. Elabore un programa que reciba como entrada el cero o un número natural y devuelva su factorial, es decir:



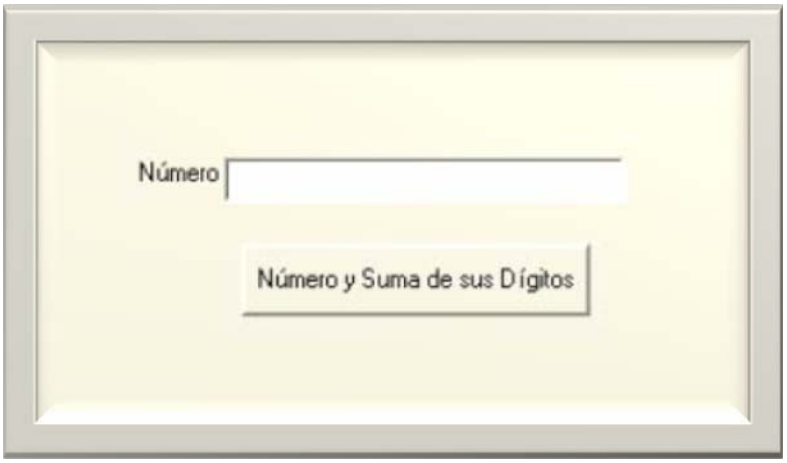
6. Elabore un programa que lea un número entero positivo, determine todos sus divisores y su suma. Un formulario para resolver este problema podría ser:



7. Un número es perfecto si coincide con la suma de todos sus divisores distintos a él, por ejemplo 6 es perfecto, pues $6 = 1 + 2 + 3$. Idee un programa para encontrar todos los números perfectos de uno a *n*. Un posible Form es:



8. Diseñe un programa que lea un número entero positivo, cuente la cantidad de dígitos que lo constituyen y efectúe su suma. Para esta aplicación se puede construir el siguiente formulario:



14. Referencias bibliográficas

Barreras, M. (2005). Matemáticas con Microsoft Excel. México: Alfaomega.

García, J. (2003). Manual de Visual Basic para Excel. España: Universidad Politécnica de Valencia.

Mora, W. y Espinoza, J. (2005). Programación Visual Basic (VBA) para Excel y Análisis Numérico. Costa Rica: Instituto Tecnológico de Costa Rica.

La Variabilidad y las Distribuciones Muestrales con el Uso de Fathom

Greivin Ramírez Arce[1]

Descripción General y Objetivo General

La variabilidad es el corazón de la estadística y una componente fundamental del pensamiento estadístico (Pfannkuh & Wild, 2004; Shaughnessy, 1997; Garfield & Ben-Zvi, 2005; Watson & Kelly, 2002) que está presente en las distribuciones muestrales. Estas son la piedra angular de la inferencia estadística (Lipson, 2002; Chance, delMas & Garfield, 2004), pues se pueden obtener conclusiones significativas de una población con base en la información que proporcionan los datos de una muestra o un conjunto de muestras. En la mayoría de los niveles de enseñanza no se ha dado mucha importancia al estudio de la variabilidad, y las distribuciones muestrales han sido abarcadas mediante un enfoque deductivo basado en la teoría de la probabilidad (Watson et al., 2003; Walpole et al., 1998). En la literatura de educación estadística (Shaughnessy, 1997; Chance et al., 2004) con frecuencia se sugiere la utilización de simulación computacional como alternativa para abordar la problemática del aprendizaje de estos temas. Por ello se propone un taller cuyo objetivo es realizar actividades-problema sobre variabilidad y distribuciones muestrales con datos reales, mediante el uso de Fathom (Finzer, et al., 2002). Dicho software pertenece a una categoría moderna de estadística dinámica, y se desarrolló con propósitos exclusivamente de enseñanza.

Palabras Claves: Variabilidad, pensamiento estadístico, distribuciones muestrales, inferencia estadística, estadística dinámica.

Un demo de Fathom 2 se puede bajar de la página http://www.keypress.com/x5656.xml

Referencias Bibliográficas

- Chance,B., delMas, R. & Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (eds), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 295-323). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

- Finzer, W., Erickson, T. & Binker, J. (2002). Fathom Dynamic Statistics Software. Key Curriculum Press Technologies.

- Garfield, J & Ben Z-vi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning about variability. *Statistic Education Research Journal*, 4 (1), 92-99.

- Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. En B. Phillips (Editor). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.* Cape Town South Africa.

- Pfannkuch, M & Wild, C. (2004). Towards and understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp.17-46). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, gramirez@itcr.ac.cr

Introducción a Maple para Cálculo

Douglas Meade[1]

Resumen

Maple es un sistema de álgebra por computadora que puede cambiar la forma en que usted enseña cálculo al enfatizar los conceptos y des-enfatizar las manipulaciones mecánicas. En esta introducción a Maple usted aprenderá cómo usar Maple para graficar funciones, resolver ecuaciones y manipular ecuaciones. Se dará atención específica a la creación de representaciones gráficas de temas fundamentales en el cálculo, incluyendo rectas secantes que convergen a rectas tangentes, y a sumas de Riemann que convergen al área bajo una curva.

[1] Departament of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, USA, meade@math.sc.edu

Introducción para el manejo del software estadístico: Statistical Package for the Social Sciences (SPSS)

Ana Lucía Alfaro A.[1]
Yuri Morales L.[2]

Objetivo: realizar una introducción para el manejo de las herramientas del software SPSS aplicado a la estadística descriptiva.

Población a quien va dirigido: todos los participantes del Congreso.

Conocimientos previos: nociones básicas sobre estadística descriptiva y manejo básico de la computadora.

Resumen

En este taller se introduce a los participantes en el manejo de SPSS como herramienta útil para resumir, organizar y presentar información estadística, entre las que destacan: nociones básicas sobre los objetivos y construcción de una encuesta y la forma de codificar la información, análisis exploratorio de datos y cálculo e interpretación de las medidas de tendencia central y de variabilidad en un conjunto de datos.

Cronograma:

Primera sesión	✓ Análisis de encuesta ✓ Elementos de codificación ✓ Introducción a la estructura del SPSS ✓ Sintaxis. ✓ Construcción de una base de datos con el SPSS (etiquetas, manejo de variables, tipos variables, valores perdidos y remodificación) **primera parte**
Segunda sesión	✓ Construcción de una base de datos con el SPSS (etiquetas, manejo de variables, tipos variables, valores perdidos y remodificación) **segunda parte** ✓ Análisis exploratorio de datos: moda, promedio, mediana, percentiles, desviación estándar.
Tercera sesión	✓ Tabla de distribución de frecuencias. ✓ Representación gráfica. ✓ Tablas de contingencia. ✓ Introducción del SPSS en la Estadística Inferencial

Bibliografía:

Visauta, B. (1997) Análisis estadístico con SPSS para Windows. MCGraw-Hill. Primera edición, Madrid.

Pérez, C. (2001) Técnicas estadísticas con SPSS. Prentice Hall, Primera edición, Madrid.

Gardner, R. (2003) Estadística para psicología usando SPSS para Windows. Prentice Hall, Primera edición, Madrid. México.

[1] aalfar@una.ac.cr Escuela de Matemática, Universidad Nacional
[2] ymorales@una.ac.cr Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Programación de Applets en JAVA para Principiantes

Alexander Borbón Alpízar [1]

Resumen

En este taller se enseñará a programar applets básicos en java, para esto se darán las técnicas esenciales de programación en este lenguaje. El taller no pretende lograr que los participantes se conviertan en unos expertos programadores sino que adquieran los conocimientos básicos de programación; uno de los objetivos del taller es que, al conocer las herramientas elementales, los participantes puedan profundizar por su cuenta y logren crear applets más sofisticados en un futuro. El taller es para principiantes, es decir, se parte del hecho que los participantes no saben programar en JAVA (ni en ningún otro lenguaje); sin embargo, esta condición no es excluyente, si alguien ya tienen conocimientos de programación puede llevar el taller, de hecho, lo aprovechará más; lo principal es tener ganas de aprender o profundizar en este lenguaje de programación.

Objetivos

-Programar applets básicos en java.
-Aprender las técnicas básicas de programación.
-Profundizar en la creación de applets más sofisticados.
-Reutilizar código, clases y applets ya programados por otras personas.

Contenidos

1. Introducción a JAVA.
    a. Instalación de los programas.
    b. El ambiente de trabajo (JCreator).
    c. ¿Qué es un applet?
    d. Compilando un applet.
    e. ¿Cómo ver un applet?
2. Creación de Applets en JAVA.
    a. Estructura básica de un applet.
    b. Programación basada en objetos.
    c. Mi primer applet.
    d. El API de JAVA, una gran ayuda.
    e. Documentación de los programas.
3. Tipos de datos primitivos.
4. Agregando elementos al applet.
    a. Interfaz gráfica.
    b. Administradores de diseño.
5. Agregando funcionalidad al applet.
    a. Escuchadores de eventos.
    b. Estructuras de control.
        i. Estructuras de selección.
        ii. Estructuras de repetición.
        iii. Estructura de selección múltiple.
6. Manejos de excepciones.
7. Gráficos.
    a. Contextos gráficos y objetos gráficos.
    b. Dibujos de figuras.

Requisitos

Conocimiento básico de Windows: saber cómo instalar programas, comprimir archivos, usar el bloc de notas, elemento básicos de Internet Explorer (botones, etiquetas, barras de desplazamiento), etc.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, aborbon@itcr.ac.cr

Creación de aplicaciones para la enseñanza primaria y secundaria en JClic

Calderón Arce Cindy [1]
Chacón Segura Denia Vanesa [2]

Descripción

JClic permite crear aplicaciones útiles, que contribuyen con la enseñanza tanto en primaria como en secundaria, las cuales pueden servir de apoyo para el estudio o el fortalecimiento de algún contenido.

En el taller se expondrá los diferentes componentes de JClic y sus principales funciones. Además, se enseñará a utilizar, manipular y crear nuevas actividades que contribuyan al proceso de enseñanza y aprendizaje por medio del uso de la computadora.

Se expondrán algunas maneras de crear, organizar y manipular paquetes que incluyan una o más actividades, construidas en forma individual, con el fin de elaborar pequeños programas o proyectos dinámicos para los estudiantes.

Los participantes pondrán implementar objetos multimedia dentro de cada una de las actividades que planifiquen, tales como: imagen, animaciones, sonidos entre otros.

La meta será la elaboración de un paquete que contenga todas o la mayoría de las actividades que el programa ofrece, incluyendo las opciones multimedia que este nos brinda. Al final, se expondrán los proyectos elaborados por los participantes y cada uno de ellos deberá venir acompañado por una propuesta didáctica y metodológica que se ajuste a las necesidades tanto de los estudiantes como de los docentes.

[1]Estudiante del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, kldroon_13@hotmail.com
[2] Estudiante del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, vane9192@hotmail.com

Las fracciones

Rebeca Arce

Resumen

El presente taller repasa conceptos y busca estrategias metodológicas sobre la enseñanza de las fracciones, por medio del análisis de sus diversas representaciones de las fracciones y la utilización de materiales para ayudar a propiciar aprendizajes significativos.

Se pretende que cada participante: identifique las diferentes formas de expresar las fracciones e interrelacionarlas, conozca el sofware educativo A PEDAZZITOS para el aprendizaje de las fracciones y encuentre un espacio de intercambio sobre experiencias didácticas en el aprendizaje de este tema. Se abarcarán los temas: la fracción como relación del entero con cada una de sus partes, la fracción como una parte de un conjunto de objetos, razones, proporciones, porcentajes y fracciones equivalentes entre otros.

Contenidos

1 Presentación **2**

2 La fracción como relación del entero con cada uno de sus partes **4**

3 La fracción como una parte de un conjunto de objetos **9**

4 Razones y proporciones: **10**
4.1 Razón 10
4.2 Proporciones 12
4.2.1 Proporcionalidad: 14
4.2.2 **Directamente proporcional** 16
4.2.3 Inversamente proporcional 17

5 Porcentajes **18**

6 Varias representaciones de una misma fracción **20**

7 Fracciones equivalentes: **22**

8 Utilización de software educativo **23**
8.1 Algunos conceptos 23

9 Bibliografía: **23**

1 Presentación

Uno de los propósitos de la educación en la escuela primaria es lograr que el niño construya los conomientos matemáticos a partir de sus experiencias concretas, esto depende en buena medida del diseño de actividades didácticas realizadas por el docente. Para que el educador pueda propiciar un ambiente donde se desarrollen aprendizajes significativos es necesario que ponga en juego sus saberes, se actualice, conozca diversas técnicas educativas y confronte sus experiencias y reflexiones con otros docentes. También es importante la concepción de educación y enseñanza que posea el docente.
La teoría de Vygotsky invita a atender a la construcción del conocimiento como una actividad conjunta, donde el educador es un guía que proporciona herramientas para que el docente construya o reconstruya su objeto de estudio. Este tipo de aprendizaje se realiza por medio del andamiaje. Para Bruner mencionado por Mercer, "el andamiaje describe una clase particular de apoyo cognitivo que un adulto puede proporcionar atraves del diálogo, de manera que el niño pueda dar sentido más fácil a su tarea, pero para lograr la construcción conjunta del conocimiento, se requiere indagar en los diversos temas educativos y las competencias que se pueden generar en cada uno de los contenidos que abordan los Programas de Educación Matemática". Además se necesita identificar los conocimientos previos que requieren los estudiantes y los problemas cognitivos que puede implicar el aprendizaje de cada tema. Es importante señalar que el aprendizaje en las aulas depende del docente, quien es el guía del proceso de aprendizaje, entonces cabe preguntarse ¿Cuál es el dominio del educador en los diversos temas?.

En torno al tema de fracciones, este se desarrolla en la enseñanza primaria en los niveles 3^o,4^o,5^o y 6^o y en secundaria con el nombre de racionales. Éstas se utilizan para dividir, repartir, comparar diversas cantidades, abordar los conceptos de razón y proporción, los cuales son utilizados en la representación de diversos contextos tan diversos como las unidades del Sistema Métrico Decimal(SMD)(medio kilo, tres cuartos de litro, etc), periodos temporales(un cuarto, media hora, etc), situaciones de reparto, descuento(la tercera parte de la ganancia). Además las fracciones se utilizan para representar cantidades relativas y estas contribuyen al análisis de un conjunto de datos, en las tres formas siguientes como indica Gómez Barrantes:

a) Resumiendo algún aspecto o dimensión de los datos.
b) Expresando alguna relación entre dos o más números.
c) Facilitando la comparación entre ese grupo y otro grupo de datos similares.

El presente material estudia la enseñanza de las fracciones desde diversas funciones de las mismas y sirve como base para la discusión de problemas de aprendizaje de las fracciones, por eso a manera de sugerencia didáctica recordamos a L Strefaland, 1984 mencionado por Clemente Domingo, el cual indica:

"Lo importante es que los propios niños costruyan las operaciones con fracciones, lo que debe basarse en las propias actividades del alumno como estimación, desarrollo del sentido del orden y tamaño,..."

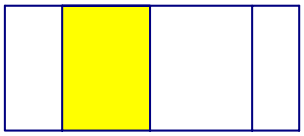
En Costa Rïca no se realizan pruebas que permitan determinar el conocimiento de los docentes sobre la enseñanza de las fracciones, pero la experiencia en otros países como México donde se realiza un examen de actualización, en el 2003, se encontró que el 54,26% de docentes no aprobó el tema de las

fracciones, esto revela que existen deficiencia de los docentes en este tema. Aunque no conozcamos el dominio de los maestros y profesores en Costa Rica, esta problemática despierta el interés por analizar la enseñanza de las fracciones, por eso es importante que los docentes se capaciten y abrir espacios de estudio de discusión sobre la enseñanza-aprendizaje de las mismas.

2 La fracción como relación del entero con cada uno de sus partes

Ejemplo 1 *Si tengo un queque divido en 8 pedazos iguales. ¿Cuál es el número de personas que podrían facilmente compartir igualmente la torta y cuántos pedazos come cada una?*

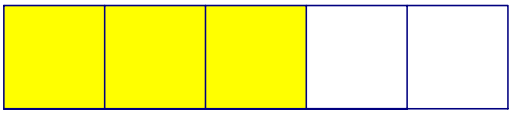
Ejemplo 2 *¿La parte sombreada representa un cuarto de la siguiente figura?*



Al observar la figura se recuerda que para indicar un cuarto de la unidad debe estar dividida en partes con igual magnitud. Por lo tanto,

La fracción indica la relación de la unidad con una de sus partes, siempre que se encuentre que una magnitud cabe exactamente un número entero de veces en la unidad y en la parte. Es decir la parte y el todo se pueden subdividir en partes de igual magnitud.

Ejemplo 3 *En la figura*

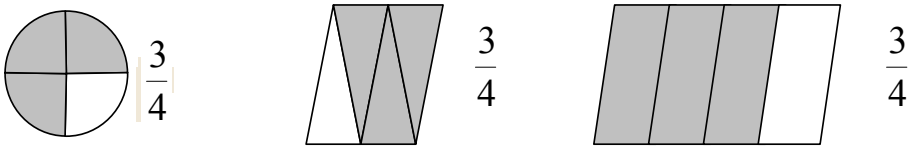


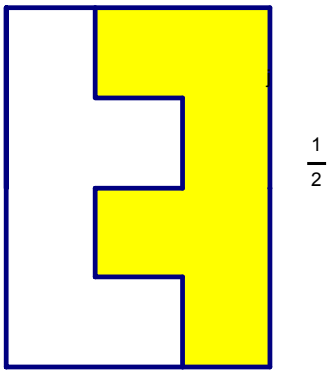
La unidad está divida en 5 partes de igual magnitud y la parte en tres partes de igual magnitud.

Ejemplo 4 *Note que hay una cantidad que cabe 5 veces en la unidad y 3 veces en la parte sombreada. Por lo tanto* $\frac{3}{5}$ *establece la relación entre la unidad y la parte sombreada.*

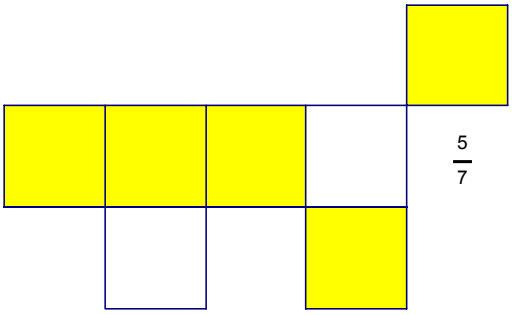
En general, la unidad suele ser constituida por diferentes figuras geométricas planas, donde lo que se compara son el área de la unidad y el área de la parte.

Ejemplo 5 *Note que*

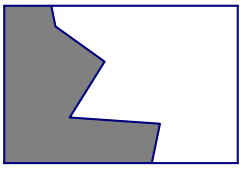




Ejemplo 6 *Pero las figuras no sólo tienen que ser convexas pueden ser cóncavas.*

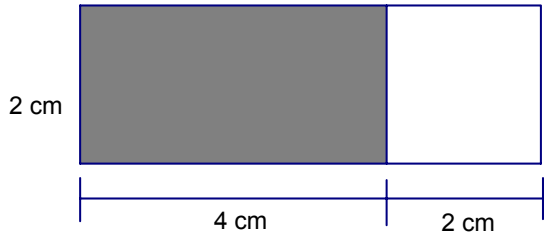


Ejemplo 7 *En la figura*



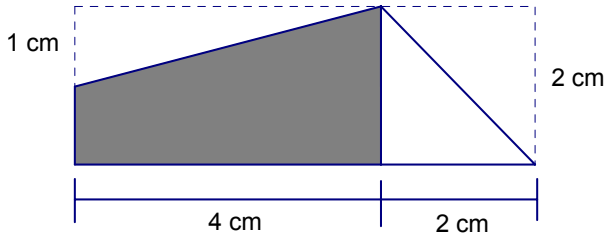
no es tan fácil hallar una cantidad que cabe exactamente un número entero de veces en la unidad y en la parte. Por lo tanto, no es simple obtener una fracción que establezca la relación entre la unidad y la parte sombreada.
Si conocieramos las áreas se podría establecer una relación entre la unidad y la parte.

Ejemplo 8 *Considere la figura*



El área de la unidad es $2 \cdot 6 = 12$ *y el área de parte sombreada es* $2 \cdot 4 = 8$. *Note que* 4 *cabe 3 veces en el área de la unidad y también cabe 2 veces en el área de la parte sombreada. Así la relaciòn entre la unidad y la parte sombreada esta dada por* $\frac{2}{3}$.

Ejemplo 9 *Considere la figura*



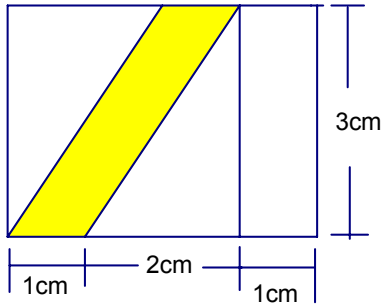
Note que la unidad esta forma por un trapecio y un triángulo de áreas

$$\text{Área del trapecio:} \quad \frac{1+2}{2} \cdot 4 = 6 \ cm^2$$

$$\text{Área del triángulo:} \quad \frac{2 \cdot 2}{2} = 2 \ cm^2$$

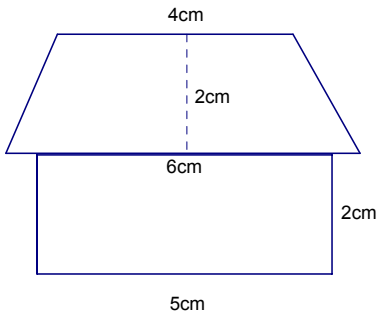
Por lo tanto el área de la unidad es $8 \ cm^2$ *y el área de parte sombreada es* $6 \ cm^2$. *Note que* 2 *cabe 4 veces en el área de la unidad y también cabe 3 veces en el área de la parte sombreada. Así la relación entre la unidad y la parte sombreada esta dada por* $\frac{3}{4}$.

Ejemplo 10 *¿Qué fracción representa la parte sombreada con respecto a toda la figura?*



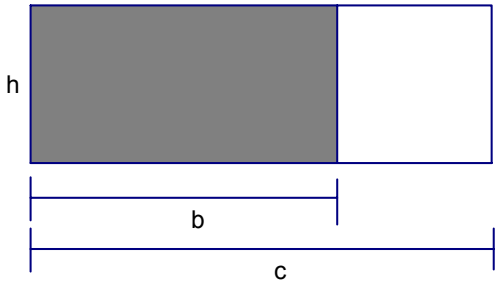
Para responder correctamente a la pregunta,se debe calcular el área de cada figura. Note que el área de los triángulos, el romboide y el rectángulo es 3 cm^2*.Por lo tanto la figura está divida en cuatro partes de igual área. Así la fracción que represente el área sombreada es:* $\frac{1}{4}$.

Ejemplo 11 *La figura puede ser concava. En el dibujo de la casa adjunta a qué proporción corresponde el techo?*



¿Por qué solo figuras planas? La fracciones puede ser utilizadas para comparar segmentos y sólidos.
Un resultado interesante es que si la unidad y la parte están representadas por rectángulos de igual altura entonces la fracción que representa su relación, representa también

la relación entre sus bases:



Note que

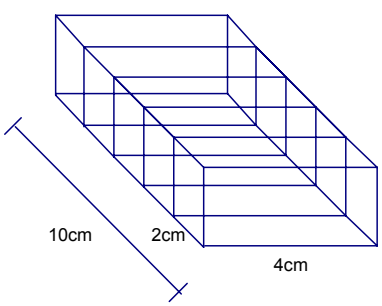
$$\begin{aligned} \text{Área de la unidad:} \quad & ch\ cm^2 \\ \text{Área de la parte sombreada:} \quad & bh\ cm^2 \end{aligned}$$

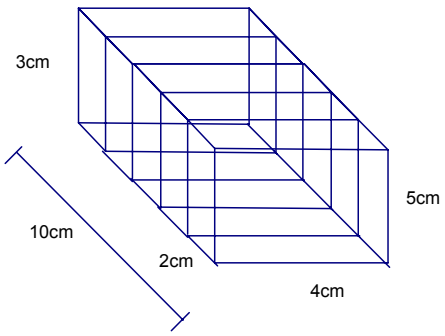
Note que la cantidad h cabe c veces en el área de la unidad y también cabe b veces en el área de la parte sombreada. Por lo tanto la relación entre la unidad y la parte sombreada esta dada por $\frac{b}{c}$. Es decir se pasa de una relación de áreas a una relación de segmentos.

Ejemplo 12 *El volumen de la parte es* $2cm \cdot 4cm \cdot 3cm$ *(Largo, ancho, altura respectivamente)y el volumen de la figura es* $10cm \cdot 4cm \cdot 3cm$.
Entonces la relación entre sus volumenes es:

$$\frac{2\ cm \cdot 4\ cm \cdot 3\ cm}{10\ cm \cdot 4\ cm \cdot 3\ cm.} = \frac{2\ cm}{10\ cm} = \frac{1}{5}$$

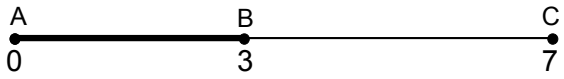
.





La relación se da entre el largo o bien la base del rectángulo.

Ejemplo 13 *¿Qué fracción representa la parte pintada con respecto a toda la figura?*

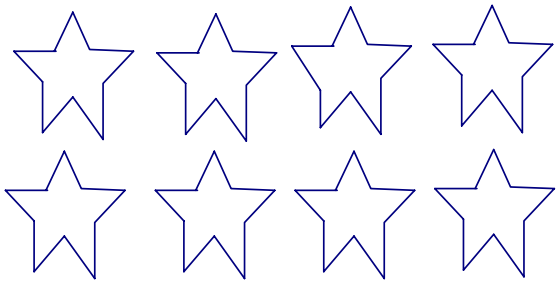


Es decir se pintó $\frac{3}{7}$ del segmento.
La magnitud 1 cabe 3 veces $\overline{AB}$ y 7 veces en el segmento $\overline{BC}$.

3 La fracción como una parte de un conjunto de objetos

Ejemplo 14 *Si tengo un paquete de seis bebidas y quito una. ¿Entonces como se puede interpretar esto en forma de fracción?*
Esto quiere decir que se tomo una de seis bebidas y se representa como $\frac{1}{6}$.
Entonces:
¿Qué representa el 6 ?
¿Qué representa el 1?
¿Cómo se representa la parte de bebidas que queda?

Ejemplo 15 *Represente la siguiente fracción:* $\frac{2}{4}$ *de* 8 *estrellas*



Se divide en cuatro grupos, a cada grupo le corresponde dos estrellas. Entonces $\frac{2}{4}$de estrellas son 4 estrellas.
Algunos libros de texto que se encuentran en el mercado representan estas fracciones con conjuntos de objetos idénticos, lo cual puede hacer pensar a los estudiantes que ellos no pueden tomar una fracción de los objetos si estos no son iguales.

El Programa de Estudio del Ministerio de Educación 4 y 6 grado vigente, en las generalidades se presenta ejemplos donde se toman partes de conjuntos con figuras de la misma clase pero de diferente tamaño y forma.

Ejemplo 16 *Si la unidad está compuestas por 6 plantas, cuantas plantas forman dos tercios de ellas.*

El conjunto se debe dividir en tres partes iguales, cada parte contienen dos unidades. Entonces dos partes contienen 4 unidades.



Ejemplo 17 *Determine la parte de un conjunto de alumnos de una clase de tercer grado que tienen 10 o más años.*

Ejemplo 18 *De la canasta de frutas en la soda, que parte de las frutas representan las manzanas.*

4 Razones y proporciones:

4.1 Razón

La razón es un instrumento para comparar e interpretar relaciones entre dos o más datos.
Según Díaz Moreno: Una razón es una manera de comparar dos magnitudes. Es una comparación por división de dos números o de las medidas de dos cantidades.

Ejemplo 19 *Luis tiene en la finca 9 vacas y 6 gallinas.*

Si se compara la cantidad de vacas entre la cantidad de gallinas, se obtiene que por cada 3 vacas, hay 2 gallinas.
$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$



Entonces la razón entre la cantidad de vacas y la cantidad de gallinas que tiene Luis es $\frac{3 \text{ vacas}}{2 \text{ gallinas}}$ y esta indica que por cada 3 vacas hay 2 gallinas.
¿Cómo logra el educando saber que por cada 3 vacas, hay dos gallinas?.
Se deben hacer grupos de igual cantidad de vacas y gallinas.

Así pues, la razón contiene la relación de los tamaños entre dos cantidades, pero pierde la información sobre las magnitudes originales de las cantidades.

Sí solamente se conoce que por cada tres vacas hay 2 gallinas, no se podría saber exactamente la cantidad de vacas y gallinas que tiene Luis en total, pues habría infinita cantidad de posibilidades:

Vacas	3	6	9	12	15	18...
Gallinas	2	4	6	8	6	12...

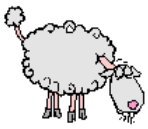
Ejemplo 20 *La finca de Don Juan en el volcán Turrialba,la razón enre el número de perros y ovejas es 2:3, si hay 10 animales.¿Cuántas ovejas hay?*












Según Gomez Barrantes: Una razón es la relación entre dos números positivos. Por ejemplo, si tenemos los números a y b y dividimos a entre b, obtenemos la razón $\frac{a}{b}$ la que dice cuántas veces cabe b en a. El término a recibe el nombre de antecedente y el término b de consecuente.
Los números que se relacionan pueden ser cantidad de una misma clase de objetos o de clases de objetos distintas.

Ejemplo 21 *La fracción* $\frac{1}{4}$ *indica* 4 *cabe un cuarto en 1.*

Ejemplo 22 *Si tengo 4 litros y los vacio en un recipiente de 1 litro. Solo cabe la cuarta parte de los cuartos litros.*

Ejemplo 23 *La fracción* $\frac{1}{2}$ *indica que* 2 *cabe su mitad en 1.*

Ejemplo 24 *La fracción* $\frac{5}{2}$ *indica que* 2 *cabe 2,5 veces en 5.¿Cuántas veces está el 2 en el 5?*

Ejemplo 25 *En un aula hay 32 alumnos 20 son niñas. La parte de niñas corresponde a* $\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$, *lo cual indica que por cada 8 niños hay 5 niñas.*

Ejemplo 26 *Un automóvil recorre 152 km en 2 hora. La razón del número de kilometros a número de horas* $\frac{152}{2}$,*es decir 76 km por hora.*

4.2 Proporciones

Al respecto indica D'Alambert según Díaz Montero: Tal como se comparan dos magnitudes resultando una razón, se comparan dos razones donde resulta una proporción.

Entonces en una proporción intervienen dos razones. Si ambas representan un mismo valor la igualdad de ellas se llama proporción. Es decir , una proporción es la igualdad entre dos razones. El valor se llama constante de proporcionalidad
.
Las proporciones permiten resolver una gran variedad de problemas.

Ejemplo 27 *La proporciòn*

$$\frac{32}{20} = \frac{16}{10}$$

se suele expresar $32 : 20 :: 16 : 10$

Al primero y cuarto término de una proporción se llama "extremos" y al segundo y tercero se les llama "medios".
De una proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se pueden formar 8 proporciones distintas.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \qquad a = \frac{c \cdot b}{d}$$

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \qquad b = \frac{a \cdot d}{c}$$

Una proporción es pues, la igualdad entre dos razones.

Ejemplo 28 *Se tienen 4 barras de pan a 700 colones*

$$\frac{4}{700} = \frac{1}{175}$$

y 8 barras de pan a 1400 colones

$$\frac{8}{1400} = \frac{1}{175}$$

Las propociones se pueden escribir

$$4 : 700 :: 8 : 1400 \quad o \quad \frac{4}{700} = \frac{8}{1400}$$

Se acostumbra a llamar regla de tres, ya que hay tres términos de una proporción de una proporción y se calcula el cuarto término, si se desconoce una cantidad por ejemplo $x : 20 :: 16 : 10$ esta se obtiene multiplicando 20 por 16 y dividiendolo entre 10.
Similarmente si $32 : x :: 16 : 10$ esta se obtiene multiplicando 32 por 10 y dividiendolo entre 16.

Realmente lo que se realiza son ecuaciones pero el concepto hasta en la escuela no se desarrolla.

4.2.1 Proporcionalidad:

Si dos razones son iguales entonces las magnitudes que las definen se dicen proporcionales. Es posible identificar cuando dos series de números son proporcionales cuando se mantienen la misma constante al dividir el antecesor entre el consecuente.

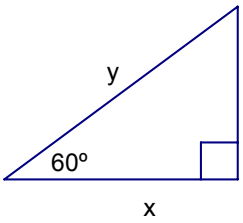
Ejemplo 29 *En las series:*

L	4	8	12	16
S	36	72	108	144

Al dividir cualquier cantidad L con su respectiva cantidad de S, se obtiene que la constante de proporcionalidad será siempre:$0,\overline{1}$.

Dos variables asociadas a un fenómeno son proporcionales si por cada dos fenómenos particulares los valores de las variables forman una proporción.

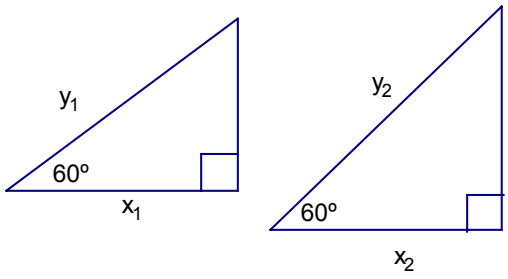
Ejemplo 30 *Considere el triángulo rectángulo 30º y 60º.*



Considere las variables:

x : *cateto adyacente de 60º*
y : *hipotenusa.*

¿Son "x" y "y" proporcionales? Veamos 2 casos: Con regla y transportador o el software Geometra se construyen dos triángulos rectángulos 30º y 60º particulares:



Note que $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$. *Entonces las medidas de los lados en ambos triángulos son proporcionales.*

Ejemplo 31 *Si Luis recoge tres canastas de café en 4 horas, si mantiene la misma proporción.¿Cuántas canastas recoge en 8 horas?*

Ejemplo 32 *Si María siembra 15 plantas en 2 horas, si mantiene al misma proporción.¿Cuántas plantas siembra en media hora?*

Ejemplo 33 *Carmen y José compraron un bingo en la escuela entre los dos, este costaba 700 colones y José dio 300 colones, para jugar el número 27. ¿Cómo ganaron decidieron repartirse el premio de acuerdo a la cantidad de dinero que cada uno había apartado. Si les dieron como premio 72 000 colones?.¿Cuánto dinero debe recibir cada uno?*

Solución:

Paso1: *Se suman las partes proporcionales:* $700 + 300 = 1000$
Paso 2: *Se divide la cantidad por repartir entre la suma de las partes*
$7200 \div 1000 = 72$
Paso 3: *Se multiplica el cociente obtenido por cada una de las partes proporcionales.*
$72 \cdot 700 = 50\ 400 \quad \Longrightarrow \quad 72 \cdot 300 = 21600$

Entonces a Carmen le corresponde 50400 *colones y a José* 21600.*Por regla de tres se resuelve de la siguiente manera:*

$$1000 : 72000 :: 700 : x \quad \Longrightarrow \quad \frac{1000}{72000} = \frac{700}{x}$$

La proporcionalidad entre las figuras obliga a la proporcionalidad entre las medidas entonces existe una reproducciones -ampliaciones o reducciones- la "escala de reproducción" es la constante de proporcionalidad deseada.

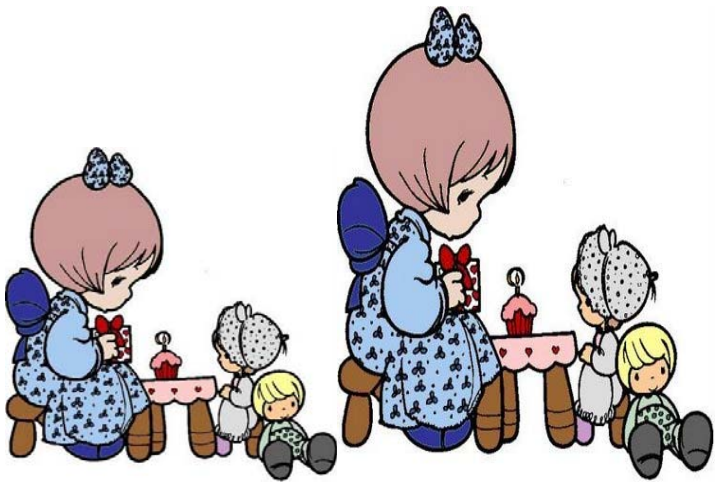
Ejemplo 34 *Al amplificar o simplificar una fotografía se obtiene una proporción.*



Ejemplo 35 *Observemos la foto tiene dimensión de 3:4, se se cambia 3:5.¿Qué sucede con la proporción?*



Ejemplo 36 *¿Qué sucede si la foto tiene las medidas de 3 cm por 4cm y se cambia a 6 por 5 cm?*



Ejemplo 37 *Si se tiene una foto de 3 cm de ancho y 4 cm de alto, y se aumenta 3cm y 4cm respectivamente, entonces se podría decir que hay proporcionalidad.*
Se pueden realizar variaciones de una fotografia para que los alumnos verifiquen si existe una proporcionalidad.

4.2.2 Directamente proporcional

Se dice que dos cantidades a y b son proporcionales, varían en razón directa o son directamente proporcionales, cuando al multiplicar o dividir a por un número n , también se debe multiplicar b por n, para mantener la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}$$

Tal sucede cuando consideramos magnitudes como el precio y la longitud; el trabajo realizado y el tiempo; la longitud del camino recorrido y el tiempo; el peso y el precio de la mercancía.

lápices	Colones
3	36
12	n

Se multiplica 36 por 4, observemos ya que 12 indica que se compra cuatro veces tres lapices.
En cado una de las cantidades directamente proporcionales, el número que resulta de dividir cada antecedente por el consecuente respectivo es una constante y se llama constante de proporcionalidad.

$$\frac{3}{12} = \frac{36}{144} = 0,25$$

4.2.3 Inversamente proporcional

Se dice que dos cantidades a y b varían en razón inversa o son "inversamente proporcionales ", cuando al multiplicar a por un número n se debe dividir b por n (o cuando al dividir a por un número n se debe multiplicar b por n, para mantener la proporción

$$\frac{a}{b \cdot n} = \frac{a \div n}{b} \quad o \quad \frac{a}{b \div n} = \frac{a \cdot n}{b}$$

Un automóvil con una velocidad de 70km por hora tarde 8 hora en recorrer cierta distancia.
¿Cuánto tardaría en recorrer la misma distancia si se desplazará a una velocidad de 140 km por hora?.
a=70
b=8
140=70·2
luego n=2

Es obvio que si se duplica la velocidad se tarda la mitad del tiempo en hacer el mismo recorrido es decir 4 horas..

km/h	horas
70	8
140	4

$$\frac{70}{8} = \frac{140}{x}$$

En las cantidades inversamente proporcionales, **la constante de proporcionalidad** es el producto de cada par de medidas correspondientes de distinta magnitud.

Del ejemplo anterior sería:
$70 \cdot 8 = 560$
$140 \cdot 4 = 560$

Resumen Al comparar dos magnitudes obtenemos una razón. Si al comparar la razón de dos magnitudes con otras dos correspondientes, se obtiene la misma razón decimos que las magnitudes son proporcionales.
Si dos razones son iguales entonces las magnitudes que las definen se dicen que son proporcionales
La razón $2:4$ es igual que la razón $5:10$ entonces decimos que $2:4::5:10$ entonces $2:4$y $5:10$ son proporcionales.
La proporcionalidad entre figuras obliga a la proporcionalidad entre las medidas de cada figura.

5 Porcentajes

Un porcentaje es una razón de la forma $p:100$ y se denota $p\%$.
Una razón $a:b$ pueden expresarse como un porcentaje $p\%$ si la razón $a:b$ es proporcional al porcentaje, es decir si

$$a:b::p:100.$$

Ejemplo 38 *Un estudio establece que* 6 *de cada* 10 *niños de una localidad no se lavan las manos antes de comer. ¿Qué porcentaje de los niños no se lavan las manos antes de comer?*

$$6:10::p:100.$$

de donde $p=(6\times 100)\div 10=60$. *R/* 60%

Ejemplo 39 *El* 68% *de los estudiantes de una escuela tiene un perro de mascota. Si en la escuela hay* 225 *estudiantes, ¿cuántos tienen un perro como mascota?*

$$a:225::68:100.$$

de donde $a=(225\times 68)\div 100=153$. *Hay* 153 *niños que tiene mascota.*

Ejemplo 40 *El* 75% *de los estudiantes de una escuela han tenido diarrea debido a que no siguen las normas de higiene. Proporcionalmente de cada* 20 *niños, ¿cuántos niños han tenido diarrea?*

$$a:20::75:100$$

de donde $a=(20\times 75)\div 100=15$. *R/ Se tiene que* 15 *de cada* 20 *han tenido diarrea.*

Ejemplo 41 *Después del recreo para merendar, el director detecto que de* 90 *niños,* 60 *no se lavaron los dientes. Aproximadamente, ¿qué porcentaje no se lavo los dientes?*

$$60:90::p:100$$

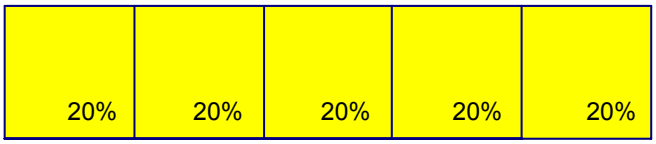
de donde $a=(60\times 100)\div 90=6000\div 90=600\div 9$, *realizando la división el cociente es 66 y el residuo es* 6. *Es decir, aproximadamente el* 66% *no se lavó los dientes*

A) Concepto e interpretación:

¿Qué significa el 25%?
Por ciento viene del latín "per centum" que significa "cada cien".
Cuando decimos que el número de varones que estudian en la UNED es el 25 por ciento del total de estudiantes, queremos expresar que de cada 100 estudiantes de la UNED, 25 son varones.
O sea que la razón del número de estudiantes en la UNED al número total de estudiantes es $\frac{25}{100}$ o lo que es lo mismo 25:100.Se acostumbran las razones que corresponden a un porcentaje mediante el símbolo %.
Problemas de porcentaje:
A-Si se da el porcentaje, el total y se pide una parte del total.
El 30% de los estudiantes no viven en los alrededores del colegio,si son 1500 estudiantes.¿Cuántos estudiantes no viven en los alrededores del colegio?

$$\frac{30}{100}\cdot 1500=\frac{30}{100}\cdot\frac{1500}{1}=\frac{30}{100}\cdot\frac{15}{1}\cdot\frac{100}{1}=\frac{30}{1}\cdot\frac{15}{1}\cdot\frac{100}{100}=\frac{30}{1}\cdot\frac{15}{1}\cdot 1=450$$

B-Se da el porcentaje, una parte del total y se pide el total.
Si 20% de los estudiantes son hijos de padres divorciados. Si son 500 estudiantes hijos de padres divorciados.¿Cuántos estudiantes son?
$\frac{20}{100}x=500$



C- Si se da la parte y la razón y se pide el total.

Si $\frac{2}{5}$ son 200 alumnos. ¿Cuántos alumnos son en total?
D-Se da el total, la razón y se pide el porcentaje.

Si son 500 estudiantes y $\frac{4}{5}$, les gusta comer chocolate. ¿Qué porcentaje le gusta comer chocolate?
$\frac{4}{5}=0,8=0,80=\frac{80}{100}=80\%$

E-Si se da el total, la parte y se pide el porcentaje.
De un embarque de 200 quintales de camarón se devolvieron 80 quintales.¿Qué porcentaje de camarones se devolvió?

$$\frac{80}{200}\cdot 100=\frac{8000}{200}=\frac{80}{200}=\frac{40}{100}=40\%$$

6 Varias representaciones de una misma fracción

Al revisar el Programa del Ministerio de Educación de Primaria vigente se encuentran las siguientes interrelaciones de representación de una misma cantidad.
En cuarto grado indica:

Objetivos	Contenido
Aplicar el concepto de fracción	Números expresados
decimal, en la solución de	en notación fraccionaria
problemas	y en notación decimal.

En quinto grado se indica:

Objetivo	Contenido	Procedimientos.
Interpretar diversas informaciones	Concepto de	Identificar las situaciones del
desde el concepto y representación de	fracción impropia	entorno que puedan moderlar
fracciones impropias.		con fracciones impropias.
		Elaboración del concepto de
		fracción impropia, a partir de
		divisiones, en partes iguales
		de varias unidades, utilizando
		material concreto y gráfico.

Aplicar las diversas formas de expresar	Problemas cuya	Identificación de realidades del
un número en la solución de problemas	resolución conlleva	entorno en las cuales intervienen
	la equivalencia de	diversas formas de representar
	las diversas notaciones.	fracciones.
		Resolución de problemas que
		requieran la interpretación de
		números fraccionarios, desde sus
		diferentes notaciones.

En sexto grado se indica:

Objetivo	Contenido	Procedimiento
Aplicar el concepto de tanto por ciento,	Tanto por ciento:	Utilización de diferentes estrategias
en la solución de ejercicios y problemas,	concepto escritura	que permitan transformar un tanto
este mismo como procedimiento indica	en notación decimal	por ciento escrito, en notación decimal
	y fraccionaria.	a notación fraccionaria y vicersa.

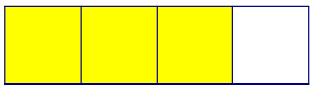
Se observa que el Programa de Educación de primaria indica las interrelaciones de fracción impropia, mixta, y decimal pero no indica especificamente la interrelación entre las siguientes notaciones según si es una fracción propia o impropia:

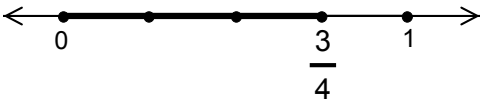
Caso I: Fracción impropia en: fracción mixta, representación gráfica, representación en la recta numérica, representación decimal, representación con denominador 100 y porcentaje, como parte integral del conocimiento de las distintas notaciones de una cantidad.

Ejemplo 42

Gráfica *Recta numérica* *Porcentaje*

$\frac{3}{4}$





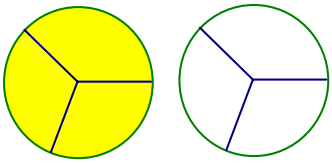
$$\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{75}{100} = 75\%$$

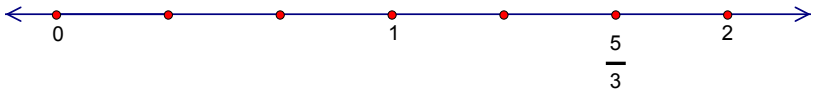
Caso II: En el caso de la fracción propia en representación gráfica,representación en la recta numérica, representación decimal, representación con denominador 100 y porcentaje.

Ejemplo 43

Gráfica *Recta numérica*

$\frac{5}{3}$





Fracción mixta

$$1\frac{2}{3}$$

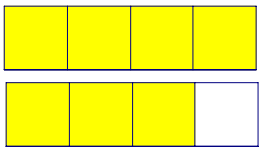
Expansión decimal y fracción con denominador 100

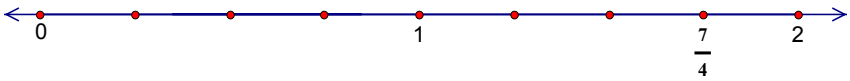
$$1\frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 5 \div 3 = 1,67 = \frac{167}{100}$$

Ejemplo 44

Gráfica *Recta numérica*

$\frac{7}{4}$





Fracción mixta

$$1\frac{3}{4}$$

Porcentaje:

Expansión decimal y fracción con denominador 100

$$1\frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1,75 = \frac{175}{100}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = 75\% + 100\% = 175\%$$

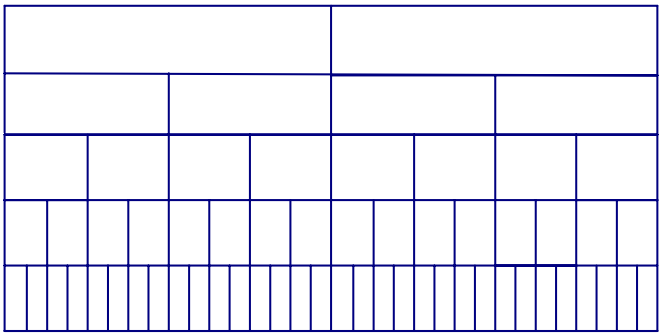
Ejemplo 45 *Si el precio de la zanahoria era de 100 colones y subió un 25% de su precio.*

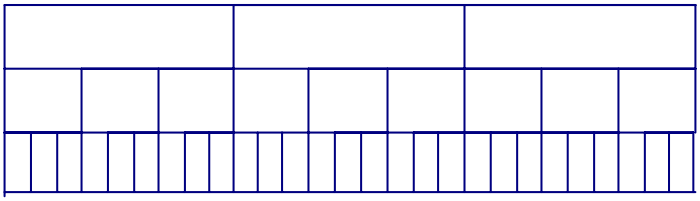
¿Por el dinero que antes compraba un kilogramo ahora cuánto puedo comprar?
Con el dinero que se gasta ahora comprando un kilo, ¿ cuántos kilogramos me daban antes?

Un número posee varias interpretaciones como anteriormente se indica, pero en notación fraccionaria existe infinidad de representaciones de una misma cantidad, recordemos el concepto de fracciones equivalentes. Es decir "nombres diferentes para una misma cantidad."Fracciones equivalentes:

7 Fracciones equivalentes:

¿Qué son fracciones equivalentes, cuando dos o más fracciones son equivalentes?.
Lo primero que el educando debe comprender es la representación gráfica de este concepto.





Entonces se concluye que dos fracciones son equivalentes si possen la misma magnitud, es decir consiste en proporciones que indican la misma cantidad.
Las fracciones equivalentes se obtienen por medio de la amplificación o simplificación.
En la práctica educativa los educandos pueden manipular material concreto para estudiar el concepto de fracciones equivalente por medio del doblado de papel o por medio de la comparación de recortes de tiras de diferentes tamaño.
Se pueden realizar por ejemplo comparando cuántos pedacitos de cierta medida caben en la unidad.

Ejemplo 46 *Se necesitan 4 cuartos para completar una unidad o similarmente* 5 *quintos o 6 sextos, etcétera.*

Si dos o más fracciones representan la misma cantidad se puede decir que está corresponde a la clase de equivalencia.

Ejemplo 47 $\frac{1}{2},=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=0,5$ *entonces* $\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\ldots\right\}$ *a lo cual se asocia* $(1\div 2=0,5)$

Las fracciones equivalentes se obtienen por medio de la amplificación o simplifación de fracciones.
Si una fracción no se puede simplicar se dice que está en su mínima expresión y se llama canónica.

8 Utilización de software educativo

Talvez en Costa Rica no es tan fácil la utilización de la computadora en las clases de matemática, pero es importante hacer esfuerzos como pedir prestado el laboratorio de computación o que el docente adquiere una computadora que le ayude a ilustrar, mostrar y si es posible poner a practicar a los educandos diversos programas educativos que ayudaran a adquirir, reforzar sus conocimientos.Como indica los Lineamientos Curriculares, Nuevas Tecnologías y Currículo de matemáticas(1999,pág 17), se plantea:
"Para que la educación matemática responda a las necesidades actuales y del futuro, debe dar cavida ahora a las herramientas tecnológicas y hacer grandes esfuerzos para buscar la mejor manera de utilizarlas".
Para el aprendizaje de las fracciones se puede utilizar el software libre pedazzitos, el cual se puede ser una herramienta para el docente en sus explicaciones, o puede ser utilizado por el educando.
El software pedazitos tiene diversas funciones, este revisa las operaciones y presenta su representación gráfica.
1- Amplifica y simplifica:Realiza la multiplicación y división.
2-Suma y resta fracciones.

8.1 Algunos conceptos

Fracciones unitarias: Son las que tienen el numerador y el denominador iguales.
Fracciones propias: Son las que tiene el denominador mayor que el numerador.
Fracciones impropias: Son las que tienen el numerador mayor que el denominador.
Fracciones homogéneas: Es el grupo de fracciones que tienen el mismo denominador.
Fracciones heterogéneas: Es el conjunto de fracciones que tienen distinto denominador.

9 Bibliografía:

Gómez Barrantes, Miguel. Elementos de estadística descriptiva 9 .reimpr. de 3.ed. San José, C.R:EUNED,2003. 564p.
Huete de Guevara.(2002) El conjunto de los números racionales .San José, Costa Rica , Editorial EUNED. pp 468
Jiménez E y Pérez I(1993) Elsa.Matemáticas 5. Educación Primaria por Editorial Santillana, S.A de C.V.
Pérez Espinoza Marta Elena, 4º Año. Educación Primaria. Matemática.Ediciones RH.
De León Humberto Jaime(1998), Procedimientos de niños de Primaria en la Solución de Problemas de reparto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Distrito Federal de México.pp. 5-28
Rodríguez A(1998). Fracciones: II y III ciclos Educación General Básica, San José, Costa Rica, Editorial de la Universidad de Costa Rica. pp 116.
Víquez M, Arias R y Alfredo J.(2000) Matemática 5 año. San José. Costa Rica. Editorial EUNED.
Mercer N. La construcción guiada del conocimiento. Barcelona, Buenos Aires, México. Editorial PAIDÓS.

LaTeX, como herramienta para elaborar nuestros propios materiales

Manuel Murillo Tsijli [1]
Filander A. Sequeira Chavarría [2]

Objetivo General

Brindar a los participantes los conceptos básicos del software de edición matemática LaTeX.

Objetivos Específicos

1. Conocer acerca de la instalación y requerimientos básicos del programa LaTeX.
2. Realizar materiales didácticos con contenido matemático en LaTeX (exámenes, folletos, libros, entre otros).
3. Conocer algunos programas que hacen más sencillo el trabajo con LaTeX.

Descripción

El programa LaTeX, consiste en un programa para editar materiales que posean contenido matemático, desde pequeños reportes hasta libros publicados. Este es uno de los editores más usados en textos matemáticos debido a la gran variedad de símbolos matemáticos y tipografías.

Uno de los grandes inconvenientes que las personas se encuentran al intentar aprender a usar LaTeX, es la instalación del programa y su configuración, y por supuesto el uso de los comandos, ya que LaTeX no muestra herramientas de edición como el editor de ecuaciones de Microsoft Word, sino que todo es lineal, por ejemplo para digitar la fracción $\frac{3}{5}$, en LaTeX se escribe \frac{3}{5}, sin embargo esto hace que la edición del texto se lleve acabo con mayor velocidad.

Con este taller esperamos capacitar a los profesores de matemáticas, para que aprendan este programa y pueden desarrollar sus materiales con mayor facilidad y alta calidad.

1 Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, mmurillo@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, Estudiante, filan07@hotmail.com

Los conjuntos numéricos: construcción y enseñanza

Sanabria Brenes Geovanny[1]

1. Objetivos generales

a. Que el participante conozca las principales construcciones formales de los conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

b. Que el participante utilice las construcciones de los conjuntos numéricos para establecer propuestas que ayuden a mejorar la enseñanza de estos conjuntos en secundaria.

2. Contenidos

I. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{N}$.

(a) Preliminares: estructuras algebraicas, relaciones de orden.

(b) Los axiomas de Peano

(c) Propiedades de la estructura $(\mathbb{N},+,\cdot,\leq)$:
- i. Operaciones en $\mathbb{N}$.
- ii. Orden en los números naturales
- iii. Principio del buen orden.
- iv. El axioma de extremo superior en $\mathbb{N}$

(d) Reflexiones sobre la enseñanza de los números naturales.

II. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{Z}$

(a) Preliminares: Relaciones de equivalencia, isomorfismos.

(b) Definición de $\mathbb{Z}$

(c) Propiedades de la estructura $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$:
- i. Operaciones en $\mathbb{Z}$.
- ii. Orden en $\mathbb{Z}$
- iii. El axioma de extremo superior en $\mathbb{Z}$

(d) Inserción de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.

(e) Reflexiones sobre la enseñanza de los números enteros.

III. CONSTRUCCIÓN DE $\mathbb{Q}$

(a) Definición de $\mathbb{Q}$

(b) Propiedades de la estructura de campo $(\mathbb{Q},+,\cdot,\leq)$:
- i. Operaciones en $\mathbb{Q}$.
- ii. Orden en $\mathbb{Q}$

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, gsanabria@itcr.ac.cr

iii. Axioma de extremo superior no se cumple en $\mathbb{Q}$

(c) Inserción de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$.

(d) Reflexiones sobre la enseñanza de los números racionales.

IV. CONSTRUCCIÓN DE IR UTILIZANDO CORTADURAS DE DEDEKIND

(a) Definición de $\mathbb{R}$

(b) Propiedades de la estructura de campo $(\mathbb{R},+, \cdot, \leq)$:
i. Operaciones en $\mathbb{R}$.
ii. Orden en $\mathbb{R}$
iii. Axioma de extremo superior en $\mathbb{R}$

(c) Inserción de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

(d) ¿Cómo se construyen los números reales utilizando sucesiones de Cauchy?

3. BIBLIOGRAFIA

a. Barrantes, Hugo. Introducción a la Matemática, Editorial de la Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica, 2002.

b. Duarte, Asdrúbal & Cambronero, Santiago. Conjuntos Numéricos. En prensa.

c. Grassmann, W. & Tremblay, J.P. Matemática Discreta y Lógica, Prentice Hall, Madrid, 1996.

d. Murillo, M. Una introducción a la matemática discreta, Editorial Tecnológica, 2004.

e. Suppes, Patrick. Teoría Axiomática de Conjuntos, Editorial Norma. Cali. 1968.

f. Rubin, Herman. Equivalents of the Axiom of Choise, North. Amsterdam. 1970.

Mapas conceptuales multimediales

Jorge Monge Fallas [1]

Descripción del taller

El objetivo del taller es conocer la teoría sobre la cuál se basa la elaboración de mapas conceptuales, las diferentes aplicaciones sobre las cuales estos pueden ser utilizados. Por otro lado se inducirá el uso de Cmap Tools desarrollado por el Institute for Human Machine and Cognition especialmente para la elaboración de mapas conceptuales. En este instituto trabajan tanto Alberto Cañas como Joseph Novak.

Con esta herramienta y el conocimiento de la elaboración de mapas conceptuales, nos centraremos en la realización de mapas conceptuales como herramienta para la administración de recursos multimediales, que enriquecerá un mapa conceptual de un tópico de interés. Es decir utilizaremos mapas conceptuales para administrar multimedios.

Objetivos Generales

1. Conocer la teoría sobre la cual se basa la elaboración de mapas conceptuales.
2. Utilizar en forma eficiente la herramienta Cmap Tools para la elaboración de mapas conceptuales.
3. Elaborar un mapa conceptual multimedial de un tema de interés.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica, jomonge@itcr.ac.cr

Principios Básicos de Graficación: Su aplicación en la Solución de Inecuaciones

Angela E. Torres R.[1]

Resumen

El objetivo esencial del taller es entregar al participante un conjunto mínimo representativo del bagaje cultural matemático que requiere para cursos superiores en lo que se refiere a graficación. Con la intención intrínseca de que conlleve a la aprehensión de los mecanismos indispensables para afrontar situaciones de orden similar en futuras oportunidades.
La manera como se enfocan los ejercicios puede diferir de la presentación usual que ellos tienen en algunos textos básicos que cubren el tópico de graficación, en este caso se hace hincapié en la presentación didáctica de los mismos, a partir de una exposición sistemática con niveles de dificultad que avanzan en forma gradual.
La aspiración es contribuir en la formación de los estudiantes y futuros docentes, al exponerles la resolución de ejercicios bajo una óptica no tradicional, permitiéndoles crear un ambiente más dinámico en el proceso de aprendizaje del tópico específico tratado en él. Ahora bien, con el objeto de tomar el mayor provecho de este compendio se requiere de una plataforma básica en el manejo adecuado de expresiones algebraicas y conocimientos teóricos sobre funciones.
El objetivo final se centra en la aplicación de los principios de graficación en situaciones que lleven intrínsecos mecanismos conducentes a la resolución de inecuaciones, tales como la obtención del dominio de una función, que se desarrolla en el taller a partir de criterios gráficos y analíticos, permitiendo establecer una adecuada comparación de la efectividad de ambos procedimientos. Al tiempo que se abren las puertas para la incorporación de herramientas como el Maple o Matlab y la consecuente verificación de resultados con un sustento teórico sólido.

Guías

Introducción a la Graficación de Funciones

Una vez establecidos los principios de graficación, y conocida la forma básica de las gráficas de los principales tipos de funciones, se desarrollan a continuación algunos ejemplos donde se exhibe la aplicación de esos criterios.

Ejemplo:

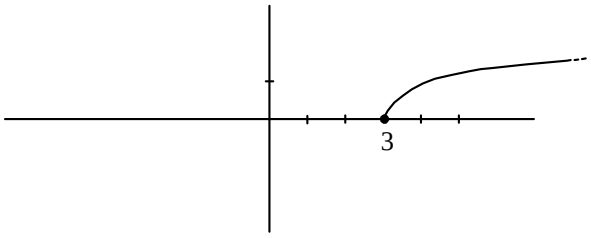
A partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ trazar la gráfica de:

1) $y = \sqrt{x-3}$

Se observa que el argumento de la raíz cuadrada ahora es x - 3, esto indica que la gráfica se obtendrá realizando una traslación horizontal.

El dominio de esta función corresponde a los valores de x que satisfacen la condición $x-3 \geq 0$, es decir, $x \geq 3$. Así la gráfica será:

[1] Universidad Nacional Experimental del Táchira. Táchira – Venezuela. angtruiz@hotmail.com



2) $y = \sqrt{x} - 2$

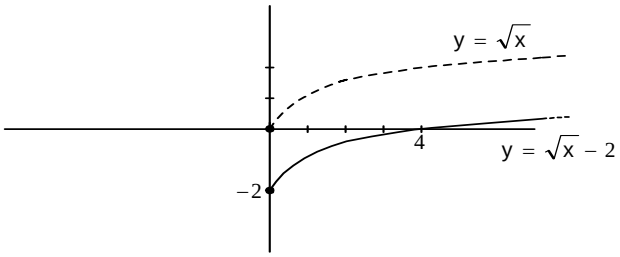
En este caso el argumento de la función original no ha sido afectado.
Podemos considerar la función dada de la siguiente manera:

$y = \sqrt{x} - 2$

Gráfica original ya conocida.

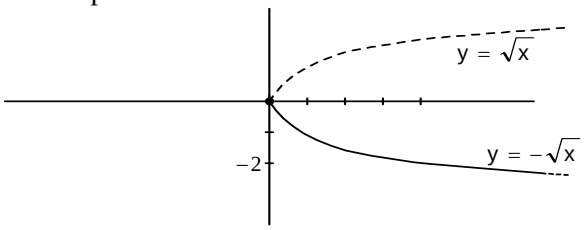
De allí se desprende que se debe realizar una traslación vertical, por lo que la gráfica de $y = \sqrt{x}$ se trasladará 2 unidades hacia abajo.

Así obtendremos:



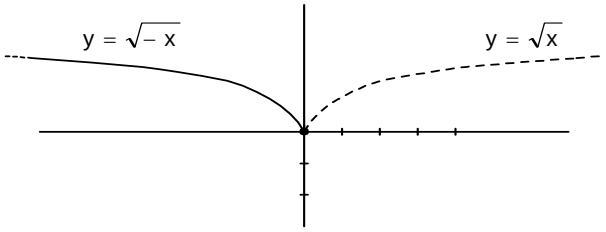
3) $y = -\sqrt{x}$

La función $y = \sqrt{x}$ es afectada previamente por un signo negativo, esto hace que ocurra una reflexión. Entonces la gráfica solicitada corresponde a:



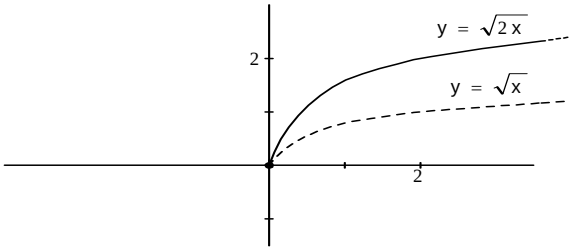
4) $y = \sqrt{-x}$

La presencia del signo negativo afectando el argumento obliga a estudiar el dominio de la función. Entonces se analiza cuales valores de x cumplen la condición $-x \geq 0$. Esto permite concluir que el dominio es $(-\infty, 0]$, pues solo los números negativos al ser afectados por el signo menos convierten la parte subradical en un término positivo. De manera que la gráfica corresponde a:



5) $y = \sqrt{2x}$

El dominio de la función corresponde a aquellos valores de x tales que $2x \geq 0,$ es decir $x \geq 0$.



Se aprecia que la altura ha variado, ocurriendo una ampliación. Analíticamente el efecto de ampliación puede determinarse considerando $y = \sqrt{2x}$ como:

$y = \sqrt{2}\left(\sqrt{x}\right)$ → *gráfica ya conocida.*

expresión que tiene la forma $y = c\sqrt{x}$, con c > 1, de donde se desprende que en efecto ocurre una ampliación.

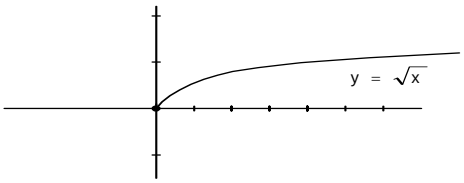
Nota:

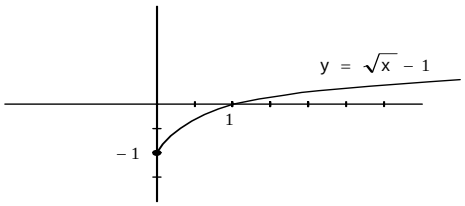
En general, para la función $f(x) = \sqrt[n]{x}$, con n par se cumple que:

i. La función $f(x) = \sqrt[n]{x} + c$, con c > 0 representa una traslación vertical (hacia arriba) y esta última sólo afectará el rango de la función original.
ii. La función $f(x) = \sqrt[n]{x} - c$, con c > 0 representa una traslación vertical (hacia abajo), afectando el rango de la función original.
iii. La función $f(x) = \sqrt[n]{x + c}$, con c > 0 representa una traslación horizontal (a la izquierda), en consecuencia se ve afectado el dominio de la función original.
iv. La función $f(x) = \sqrt[n]{x - c}$, con c > 0 representa una traslación horizontal (a la derecha), afectando el dominio de la función original.
v. La función $f(x) = -\sqrt[n]{x}$ corresponde a una reflexión, de manera que se afecta el rango.
vi. La función $f(x) = \sqrt[n]{-x}$ presenta un dominio diferente al de $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Su gráfica se obtiene trazando simétricamente con respecto al eje y la curva correspondiente a $y = \sqrt{x}$.
vii. La función $y = c\sqrt[n]{x}$, con c > 1, corresponde a una ampliación de la función original.
viii. La función de $y = c\sqrt[n]{x}$, con 0 < c < 1, corresponde a una compresión de la función original.

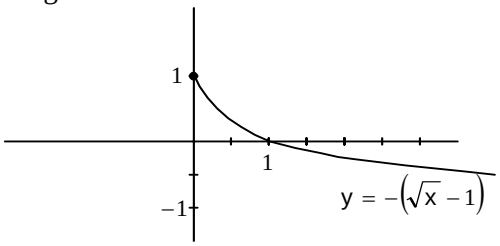
Para diferenciar el efecto de un valor absoluto respecto a una reflexión consideremos las gráficas de $y = -\left(\sqrt{x} - 1\right)$ y $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$

En primer lugar, para obtener la gráfica de $y = -\left(\sqrt{x} - 1\right)$ verificamos que transformación ha sufrido la gráfica de $y = \sqrt{x}$. Entonces, a partir de la gráfica original hallamos la correspondiente a $y = \sqrt{x} - 1$.

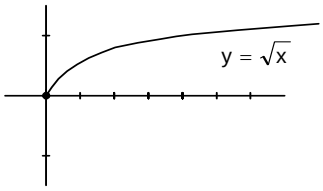


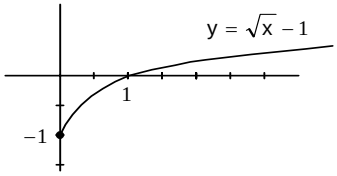


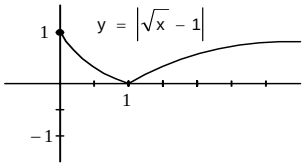
Ahora obtenemos la reflexión de la gráfica anterior:



Procediendo de forma similar se obtendrá la gráfica de $y = \left|\sqrt{x} - 1\right|$. La siguiente secuencia de gráficas permite visualizar el análisis.







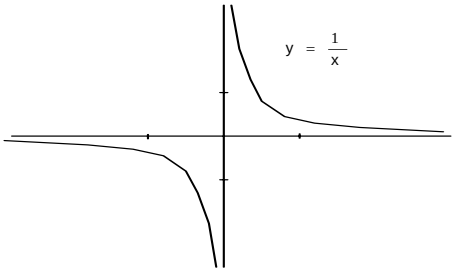
Como pudo observarse la reflexión cambia simultáneamente las partes de la gráfica que se encuentran por encima y por debajo del eje x. Mientras que el valor absoluto solo afecta aquella parte de la gráfica que se encuentra por debajo de la horizontal, esto último se deriva de la definición de Valor Absoluto.

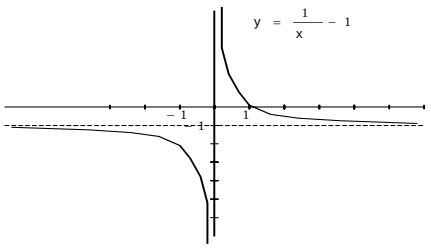
Ejemplo:

A partir de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ trazar la gráfica de:

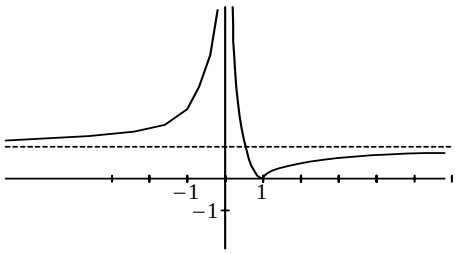
1) $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$

Se debe realizar inicialmente una traslación vertical y luego se considerará el valor absoluto. Así tendremos.





Siendo la gráfica final



En esta última gráfica se observa que solo se afectó la parte de la curva que se hallaba por debajo del eje *X*, además la asíntota horizontal ahora es y = 1.

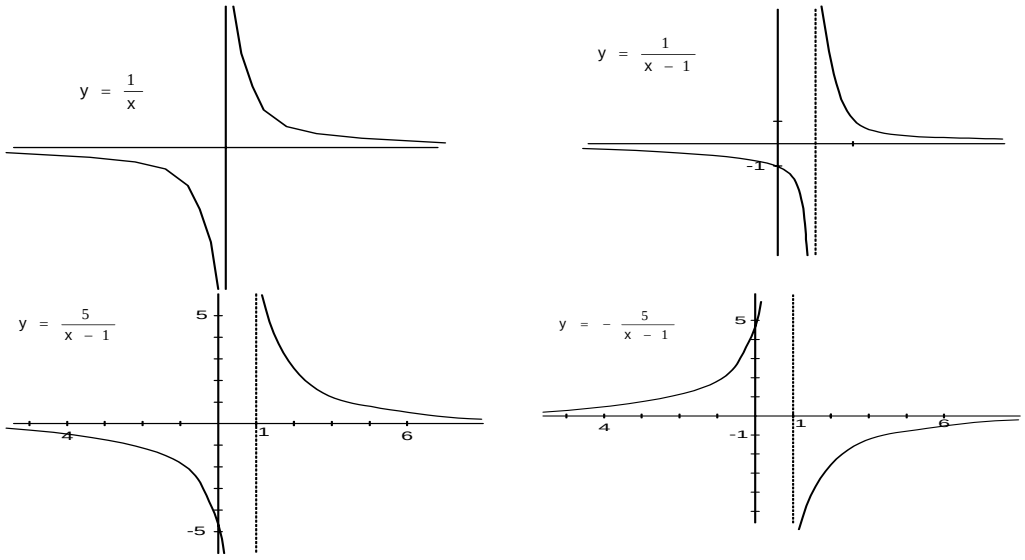
2) $y = 2 - \frac{5}{x-1}$

En primer lugar se observa que x = 1 es asíntota vertical para la función $y = \frac{5}{x-1}$, adicionalmente esta última puede representarse como: $y = 5\frac{1}{x-1}$

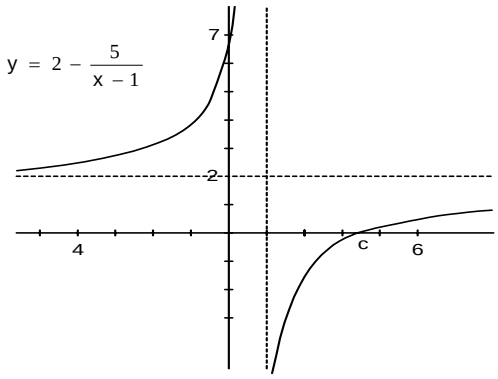
Por lo que se produce una ampliación de la gráfica $y = \frac{1}{x-1}$

Luego se analiza el efecto del signo menos, que en este caso representa una reflexión; y por último el valor que acompaña a $y = -\frac{5}{x-1}$ ocasiona una traslación vertical, desplazándose la curva 2 unidades hacia arriba.

La secuencia de gráficas obtenidas de acuerdo al análisis anterior es:



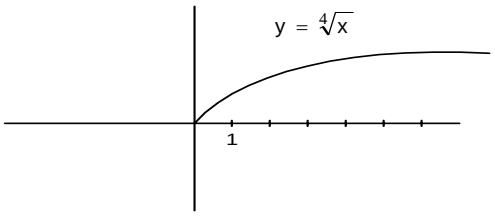
y por último



donde c = $\frac{7}{2}$

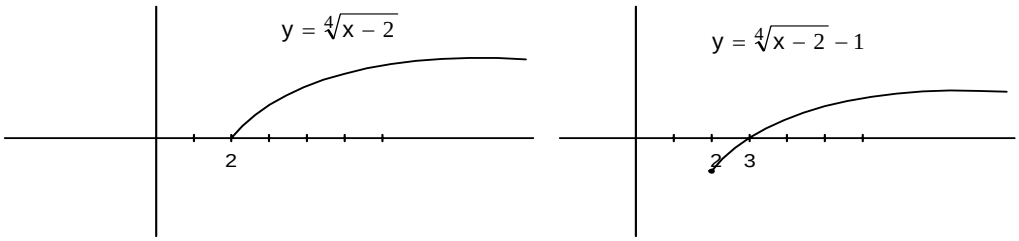
2) y = $\sqrt[4]{x-2}$ -1

Tomamos como referencia la gráfica de $y = \sqrt[4]{x}$, la cual por corresponder a una raíz de índice par tiene la forma



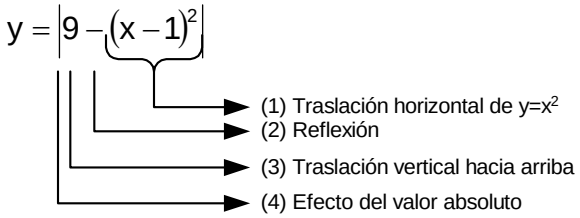
A partir de ella graficamos $y = \sqrt[4]{x-2}$ y por último se efectúa el desplazamiento vertical, trasladando la gráfica 1 unidad hacia abajo.

Así obtenemos:

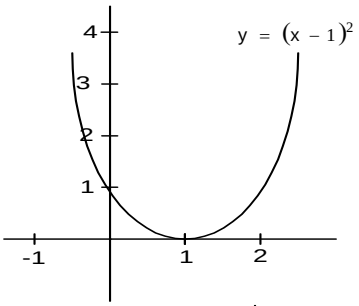


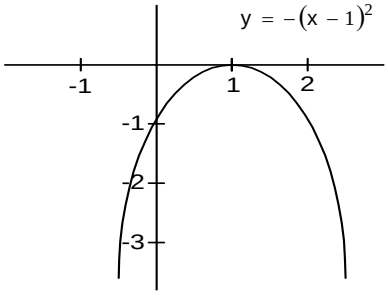
3) $y = \left|9-(x-1)^2\right|$

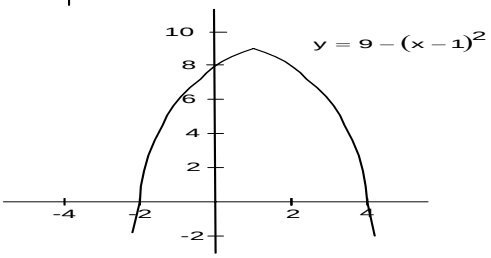
El orden en el cual se deben analizar las transformaciones sufridas por la función $y = x^2$ se representa a continuación

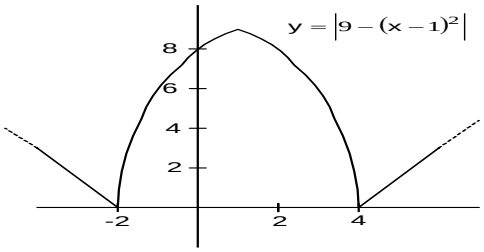


Procediendo en ese orden obtenemos



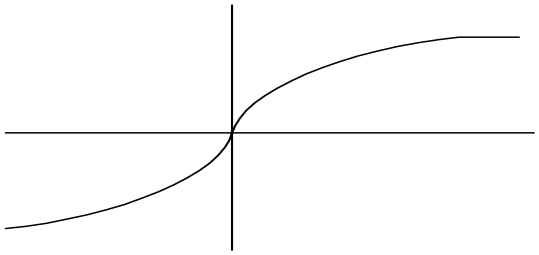






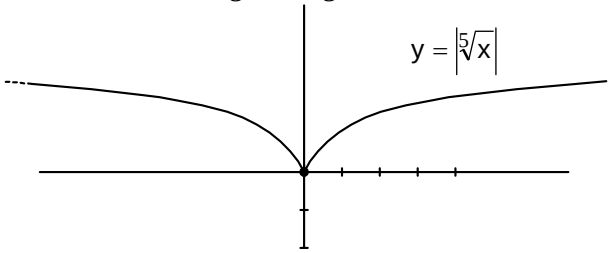
4) $y = 2\left|\sqrt[5]{x}\right| - 1$

En primer lugar se tiene que $y = \sqrt[5]{x}$ presenta la forma:

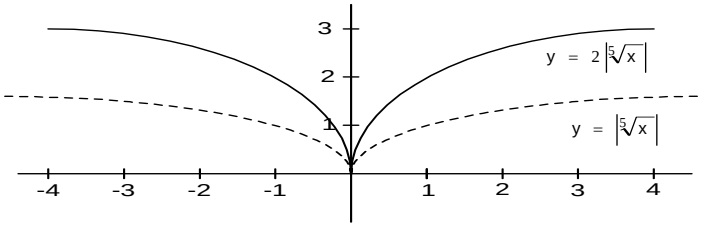


Por ser una raíz de índice impar.

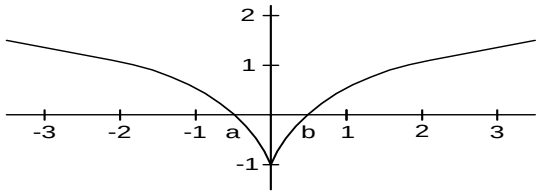
Al considerar el valor absoluto obtenemos la siguiente gráfica:



En $y = 2\left|\sqrt[5]{x}\right|$ se presenta una ampliación, por ser de la forma $y = c\left|\sqrt[5]{x}\right|$, con c >1. De manera que la altura varía como se aprecia en la figura:



Ahora, solo resta efectuar el desplazamiento vertical hacia abajo al considerar $y = 2\left|\sqrt[5]{x}\right| - 1$. La gráfica final es:



Los puntos de corte con el eje x, señalados en la gráfica con las letras a y b se determinan resolviendo la ecuación:

$2\left|\sqrt[5]{x}\right| - 1 = 0$ al despejar se obtiene $\left|\sqrt[5]{x}\right| = \frac{1}{2}$

Aplicando la definición de valor absoluto y tomando en cuenta que $|x| = a$ si y solo si x = *a* ó x = -*a*, se tiene que:

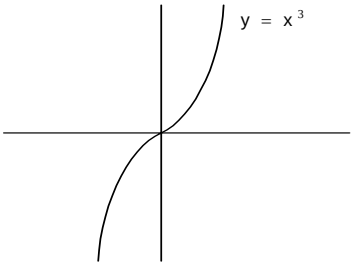
$$\sqrt[5]{x} = \frac{1}{2} \quad \text{ó} \quad \sqrt[5]{x} = -\frac{1}{2}$$

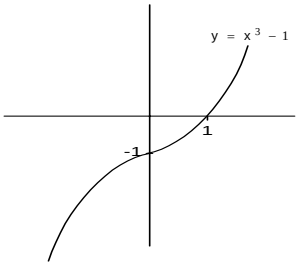
$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \quad \text{ó} \quad x = \left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

x = 0,03125 ó x = -0,03125

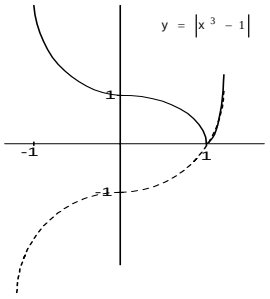
5) $y = \left|x^3 - 1\right|$

Debemos partir de la gráfica de la función potencia $y = x^n$, con n impar, para luego efectuar el desplazamiento vertical y por último considerar el efecto del valor absoluto.
Obtenemos la siguiente secuencia de gráficas:





y finalmente



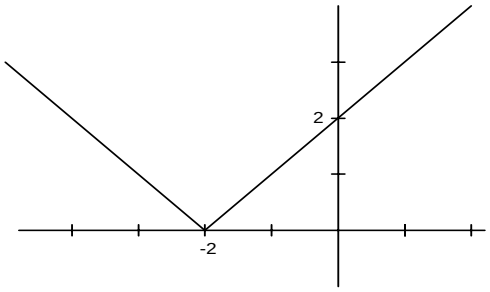
Determinación del Dominio de una Función a partir de Criterios Gráficos

Generalmente se acostumbra hallar el dominio de una función a partir de métodos analíticos, los cuales aunque precisos pueden llevar implícitas dificultades algebraicas. A continuación se encontrará el dominio de algunas funciones estudiando gráficamente el argumento, para determinar para qué valores de x dichas funciones están definidas.

Ejemplo:

1) $y = \sqrt{\log|x+2|}$

Consideraremos inicialmente la gráfica de $y = |x+2|$



Al aplicarle el logaritmo a las alturas correspondientes a esta última gráfica debemos resaltar dos aspectos:

i. Para x = -2 no es posible obtener el valor de $\log|x+2|$ ya que en ese punto $|x+2| = 0$.

ii. En segundo lugar se observa que existen dos puntos en la gráfica de $y = |x+2|$ que tienen altura 1, entonces para esos puntos se tendrá que el valor alcanzado por $y = \log|x+2|$ será cero. Estos puntos pueden hallarse resolviendo la ecuación $|x+2| = 1$, la cual arroja como resultado:

$x + 2 = 1$ ó $x + 2 = -1$

es decir, $x = -1$ ó $x = -3$

Adicionalmente, para $x \in (-3,-2)$ y $x \in (-2,-1)$ se tiene que la altura de $y = |x+2|$ está comprendida en el intervalo (0, 1), de manera que el logaritmo arrojará valores negativos.

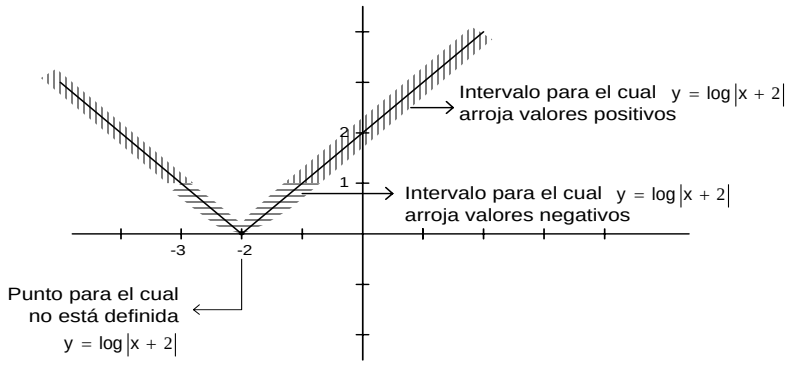
Resumiendo tenemos,

Intervalo para el cual $y = \log|x+2|$ arroja valores positivos: $(-\infty,-3) \cup (-1,+\infty)$

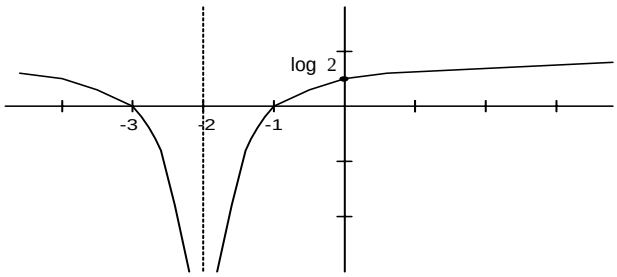
Intervalo para el cual $y = \log|x+2|$ arroja valores negativos: $(-3,-2) \cup (-2,-1)$

Puntos donde $y = \log|x+2|$ alcanza altura cero: $x = -3$ y $x = -1$

Puntos donde $y = \log|x+2|$ no está definida: $x = -2$



Tomando en consideración lo anterior se tiene que la gráfica de $y = \log|x+2|$ es:

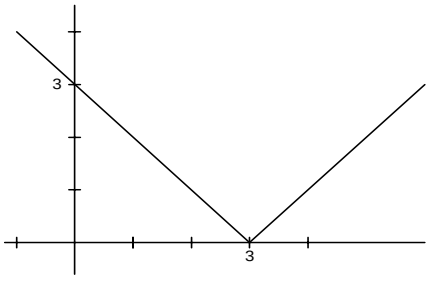


Observando esta última gráfica se puede concluir que $y = \sqrt{\log|x+2|}$ está definida para $(-\infty,-3] \cup [-1,+\infty)$.

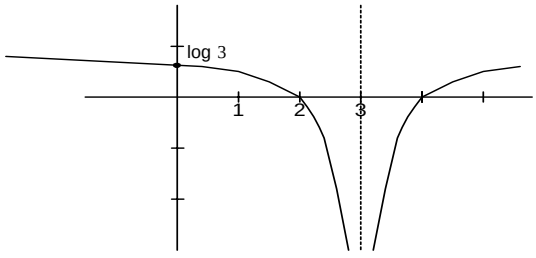
2) $y = \sqrt{\log|x-3|-1}$

Obtendremos en primer lugar la gráfica de $y = \log|x-3|$, a partir de la de $y = |x-3|$, así tenemos:

$y = |x-3|$



$y = \log|x-3|$



Como ahora se debe desplazar hacia abajo una unidad esta última gráfica, conviene determinar los puntos de corte. Estos se hallan resolviendo:

$\log|x-3|-1=0$, esto es

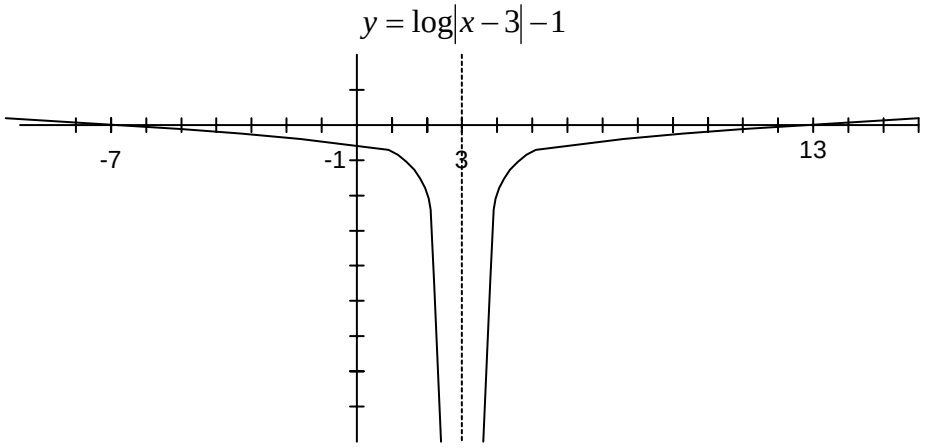
$\log|x-3|=1$, aplicando propiedades de logaritmos se tiene

$|x-3|=10$

de donde $|x-3|=10$ ó $|x-3|=-10$

$x=13$ ó $x=-7$

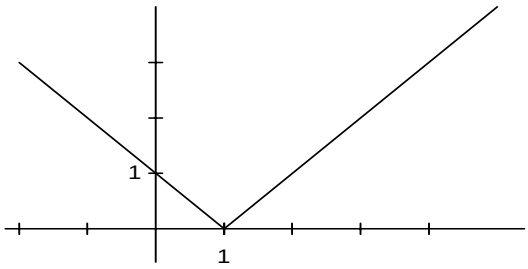
De manera que tendremos la siguiente gráfica:



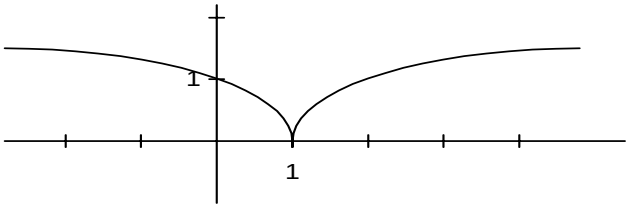
y en ella podemos observar que $y=\sqrt{\log|x-3|-1}$ está definida para $(-\infty,-7]\cup[13,+\infty)$.

3) $y=\sqrt{\sqrt{|x-1|}-1}$

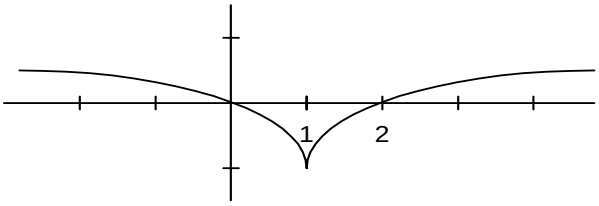
En este caso determinaremos el dominio a partir de la gráfica de la parte subradical. Iniciamos el estudio plasmando la gráfica de $y=|x-1|$:



A partir de ella obtenemos la gráfica de $y=\sqrt{|x-1|}$



Al desplazar una unidad hacia abajo obtenemos la gráfica de $y=\sqrt{|x-1|}-1$



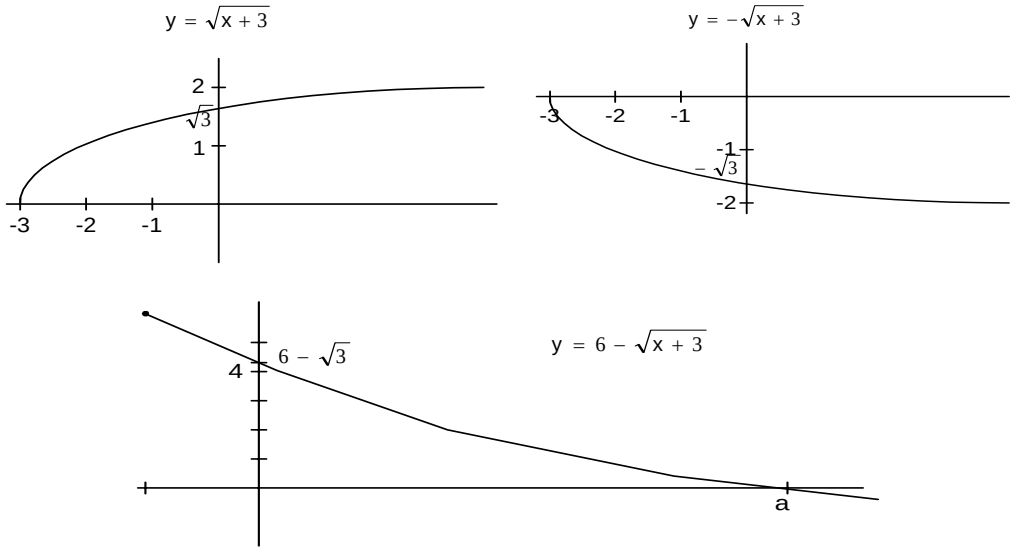
Entonces, podemos concluir que el dominio de $y = \sqrt{\sqrt{|x-1|}-1}$ es $(-\infty,0] \cup [2,+\infty)$

4) $y = \dfrac{x^3 - 4x + 6}{\sqrt{6-\sqrt{x+3}}}$

Para la expresión ubicada en el numerador no encontramos valores para los cuales la misma no esté definida, pues se trata de una función polinómica.

Ahora, en el denominador se debe establecer el dominio del radical planteado, debiendo posteriormente excluirse el valor para el cual $\sqrt{6-\sqrt{x+3}} = 0$

Se realizará el análisis gráfico de la manera siguiente



El punto “a” puede hallarse resolviendo la ecuación:

$$6 - \sqrt{x+3} = 0$$
$$de\ donde\ 6 = \sqrt{x+3}$$
$$por\ lo\ que\ 36 = x+3$$
$$y\ entonces\ x = 33$$

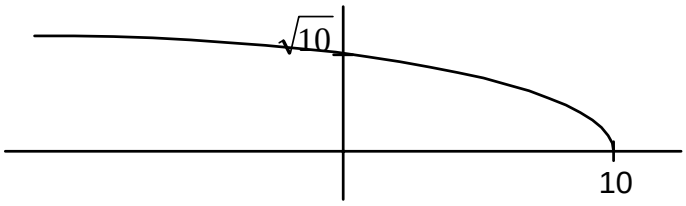
Esto indica que $y = \sqrt{6-\sqrt{x+3}}$ estará definida en el intervalo $[-3,33]$.

Sin embargo, por encontrarse esta expresión en el denominador debemos excluir los valores de x que la anulen, es decir, excluiremos a x = 33. Por lo que el dominio de $y = \dfrac{x^3 - 4x + 6}{\sqrt{6 - \sqrt{x+3}}}$ es $[-3,33)$.

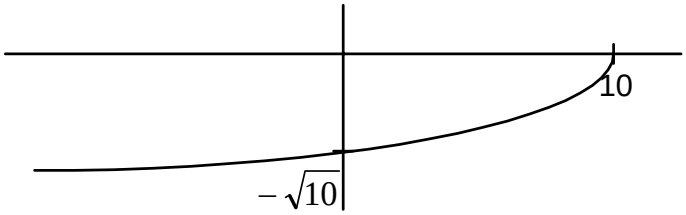
5) $y = \dfrac{\sqrt{3 - \sqrt{10 - x}}}{2x\sqrt{25 - x^2}}$

En primera instancia se analizará el dominio del numerador, para ello consideraremos la siguiente secuencia de gráficas:

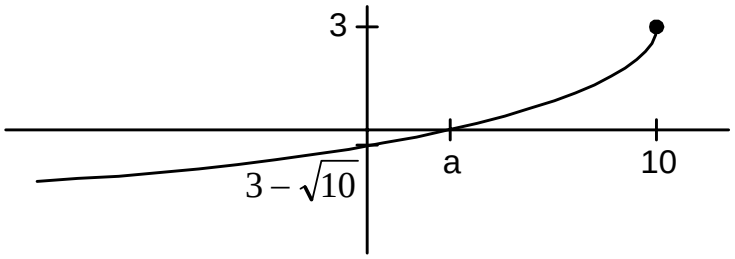
$y = \sqrt{10 - x}$



$y = -\sqrt{10 - x}$

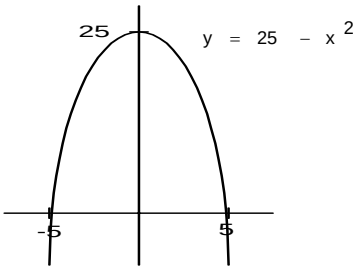


$y = 3 - \sqrt{10 - x}$



De manera que $y = \sqrt{3 - \sqrt{10 - x}}$ estará definida para los valores de x pertenecientes al intervalo [*a*, 10], donde "*a*" se obtiene al resolver la ecuación $3 - \sqrt{10 - x} = 0$ la cual da como resultado *x* = 1.

Para el denominador consideraremos inicialmente el dominio de $y = \sqrt{25 - x^2}$, este puede ser hallado gráficamente:



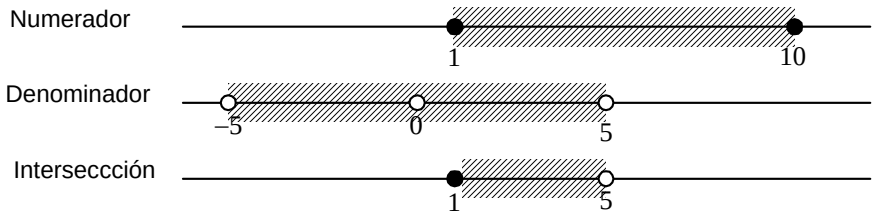
Allí observamos que $y = \sqrt{25 - x^2}$ esta definida para los valores de x tales que $x \in [-5,5]$. Sin embargo, debemos excluir los valores que anulen la expresión que aparece en el denominador. Estudiamos entonces cuando $2x\sqrt{25 - x^2} = 0$.

Esto se cumple cuando

$x = 0$
$x = 5$
$x = -5$

Por tanto, excluyendo estos valores se tiene que el dominio del denominador es $(-5,0) \cup (0,5)$

Ahora procedemos a intersectar los dominios parciales:



Por lo que el dominio solicitado es [1, 5)

Resolución de inecuaciones a partir de los principios básicos de Graficación

Una vez reconocidos los principios básicos de graficación, es factible proceder a resolver inecuaciones como las que se muestran a continuación, para posteriormente introducir el manejo de herramientas como Maple y Matlab, teniendo un sustento teórico sólido que permita verificar los resultados o detectar errores en el manejo de las instrucciones correspondientes.

Ejemplo: Encuentre la solución de:

1) $\left\lvert \frac{6}{(x-4)^3} - 2 \right\rvert \leq 5$	2) $\log(\lvert 5x - 3 \rvert) \leq -2$
3) $\left\lvert \frac{2}{(2x-3)^4} - 5 \right\rvert - 8 \geq -2$	4) $1 \leq \lvert x^2 - 5x + 10 \rvert \leq 6$

Resolución de Problemas en la Enseñanza de la Matemática

Mario Marín Sánchez[1]
Geisel Alpízar Brenes[2]
Geovanni Sanabria Brenes[3]

Resumen

La resolución de problemas es una excelente alternativa para orientar los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática. Desde Polya con su obra "How to Solve it" hasta la actualidad con los trabajos de Miguel de Guzmán, Schoenfeld y Kilpatrick entre otros, se ha difundido esta estrategia metodológica.

En este taller revisaremos alguna bibliografía al respecto y realizaremos prácticas y reflexiones sobre el tema en especial pensando en como orientar a niños y jóvenes en la exploración de la matemática a nivel de primaria y secundaria.

Objetivos

- Promover la resolución de problemas como metodología de trabajo en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.
- Propiciar escenarios para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en los cuales se fortalezcan destrezas de razonamiento abstracto.

Metodología de Trabajo

Sesión #1

Para iniciar nuestro taller queremos conocer la concepción que tienen los participantes acerca de la Resolución de Problemas como medio para desarrollar en los estudiantes esquemas de razonamiento útiles en matemática y otras áreas de reconocimiento.

Actividad 1: Caracterizar lo que entiende el profesor como problema y como ejercicio, estableciendo las diferencias entre ambos. Para esta actividad los profesores recibirán una ficha y en forma individual.

Actividad 2: Con la caracterización hecha por los y las profesoras se realiza una lluvia de ideas buscando un consenso grupal sobre la importancia de esta metodología.

Actividad 3: Presentar una caracterización estandarizada sobre estrategias para la resolución de problemas.

Actividad 4: Resolver algunos problemas en los cuales no medien conocimientos matemáticos avanzados.

[1]Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática, mmarin@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática, galpizar@itcr.ac.cr
[3] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática, gsanabria@itcr.ac.cr

La idea de las siguientes sesiones es trabajar problemas en áreas específicas como: Geometría y Teoría de Números.

Sesión #2

Actividad 1: Los participantes identificarán algunos resultados básicos en triángulos que sirvan como base para resolver y construir problemas.

Actividad 2: Presentar algunas técnicas elementales para hacer frente a los problemas de geometría.

Actividad 3: Resolver algunos problemas geométricos del calendario CIEMAC 2008.

Actividad 4: Los participantes elaborarán algunos problemas.

Sesión #3

Actividad 1: Los participantes identificarán algunos resultados básicos de la Teoría de Números que sirvan como base para resolver y construir problemas.

Actividad 2: Presentar un resumen de algunos temas de Teoría de Números: divisibilidad, residuos y teorema de Fermat.

Actividad 3: Resolver algunos problemas del calendario CIEMAC 2008.

Actividad 4: Los participantes propondrán algunos problemas que involucren divisibilidad.

Software libre
Herramientas en la enseñanza

Omar De la O Vargas[1]
Luís Andrés Ortiz Hernández[2]
Carlos Guillén Pérez[3]

Resumen:

Además de ahorrarle dinero, el software libre es una de las mejores opciones en funcionalidad, calidad y accesibilidad, ya que atiende las críticas más frecuentes que ofrecen los usuarios y están en constante revisión y perfeccionamiento; por tal motivo se ofrece este taller, que busca dar a conocer y utilizar dichas herramientas y más específicamente aquellas que se aplicarán en la enseñanza de la matemática.

Bibliografía:

- La Nación, Martes 18 de septiembre de 2007, página 16, Pablo Fonseca Q, Programas Gratuitas Ahorran dinero y atacan la piratería.
- www.geogebra.org, página oficial, 16 de septiembre de 2007.
- www.ubuntu.com, Linux Comunity (Linus Tolvards), agostos de 2007
- http://www.pnte.cfnavarra.es/~iesozizu/departamentos/matematicas/recursos/infos/index3.html, autor desconocido, educacion@pnte.cfnavarra.es, 21 de septiembre de 2007.
- http://recursos.pnte.cfnavarra.es/%7Emsadaall/geogebra/index.htm, Manuel Sada Allo, 16 de septiembre de 2007.

Objetivo General:

Justificar el empleo del software libre en la vida cotidiana y en especial en la enseñanza de la matemática.

Objetivos Específicos:

1. Describir los aspectos más sobresalientes de algunos programas de uso gratuito
2. Utilizar algunas muestras de software libre aplicables en la enseñanza de la matemática.

Fecha en la que se generó el proyecto: Septiembre de 2007.

Descripción:

1. Se abordará la importancia del uso de programas gratuitos desde el punto de vista práctico, funcional y competitivo.
2. Se ejemplificará con algunas aplicaciones gratuitas enfocadas al área de la enseñanza de la matemática.
3. Utilizar la hoja de cálculo de OpenOffice para desarrollar un registro electrónico de notas y realizar algunos gráficos.

[1] Estudiante del Instituto Tecnológico de Costa Rica, omar0721@gmail.com
[2] Estudiante del Instituto Tecnológico de Costa Rica hoy200319234@gmail.com
[3] Estudiante del Instituto Tecnológico de Costa Rica cguillenp@gmail.com

4. Se utilizará el Geogebra para el estudio de la geometría euclidia de forma dinámica.
5. Se aplicarán las herramientas que ofrece el Geogebra para realizar un breve estudio de funciones reales de variable real.
6. Durante el cierre del taller se le mostrará a los asistentes algunos otros programas de uso gratuito tales como AVG, JClic,WinPlot, Poly, entre otros, que estarán incluidos en el CD que se regalará.

APÉNDICE

Requerimientos:

1. Un laboratorio con a lo sumo 20 computadoras
2. 1 Proyector multimedia
3. Software a utilizar:
    - Microsoft Windows XP
    - Geogebra 3.0
    - Open Office 2.3

Otros:

- AVG, Gnuplot,….
- Todos los programas a utilizar serán aportados por los exponentes del taller

Condiciones:

Los asistentes del taller deben tener conocimientos de :

1. Manejo básico del ambiente Windows
2. Preferiblemente que tengan conocimiento de la teoría de funciones y de geometría euclidiana.
3. Familiarizados con alguna hoja de cálculo como Microsoft Excel (No es un requisito del todo obligatorio)

Material requerido:

1. Fotocopias de las guías que se van a utilizar
2. CD para copiar los programas que se van a entregar a los asistentes

Workshops for teachers of mathematics in secondary schools

J. F. Ogilvie[1].

Geometry

Using the graphical facilities of *Maple* processor for symbolic computation, we classify plane triangles, and illustrate some properties of significant points, lines and circles related to a chosen triangle. We recall quadrangles of seven types, classified according to their shapes.

We show some properties of regular polyhedrons based on their graphic representations, and introduce alternative processors for symbolic computation.

Trigonometry

Using the graphical facilities of *Maple* processor for symbolic computation, we distinguish various circular and hyperbolic trigonometric functions. We employ the algebraic facilities to confirm some identities.

Probability

An understanding, and therefore the teaching, of probability involves mathematical, philosophical, psychological and pedagogical issues inherent to this topic. We demonstrate the use of graphical facilities of *Maple* processor for symbolic computation with the generation of random numbers to investigate the law of large numbers and other aspects of probability that have relevance to common problems, including flipping of coins, drawing of cards, the weather forecast and the taxi problem.

Taller para profesores de matemáticas de Enseñanza Media

Geometría

Usando las facilidades gráficas del programa Maple para el cálculo simbólico, se clasificarán triángulos planos y se ilustrarán algunas propiedades de puntos importantes, además de líneas y círculos relacionados con el triángulo seleccionado. Además, se trabajará con cuadriláteros de siete tipos, clasificados de acuerdo con su forma. También se mostrarán algunas propiedades de poliedros regulares basados en su representación gráfica y se introducirán programas alternativos para cálculos simbólicos.

Trigonometría

Usando las facilidades gráficas del programa Maple para el cálculo simbólico se distinguirán varias funciones trigonométricas circulares e hiperbólicas. Se usarán también las facilidades algebraicas para verificar algunas identidades.

Probabilidad

Comprender y luego enseñar probabilidad, requiere elementos filosóficos, psicológicos y pedagógicos inherentes a este tema. Se mostrarán las facilidades del programa Maple para el cálculo simbólico con la generación de números aleatorios para investigar las leyes de los grandes números y otros aspectos de la probabilidad que tienen relevancia con problemas cotidianos como el lanzamiento de monedas, selección de cartas, el pronóstico del tiempo y el problema del taxi.

[1] Universidad de Costa Rica. Escuela de Química, ogilvie@cecm.sfu.ca

Uso de Derive en el Estudio de Cálculo Integral

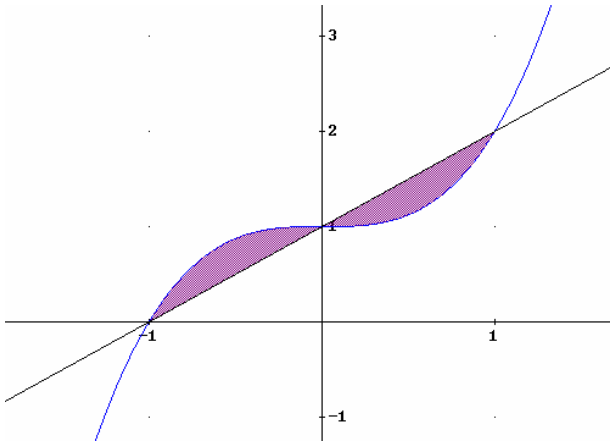
Dilcia A. de Arosemena[1]

Resumen

En este taller compartiremos con los participantes las facilidades que ofrece Derive como apoyo a la enseñanza y el aprendizaje de algunos conceptos del cálculo integral, así como algunas de las aplicaciones.

El Cálculo Integral presenta muchas dificultades para los estudiantes, especialmente en lo relativo al trazado de curvas, a la representación de regiones planas y el planteamiento de integrales que permitan calcular el área de una región dada.

En la búsqueda de soluciones para resolver limitaciones que, como éstas, enfrentan los estudiantes, la enseñanza de la matemática ha sufrido transformaciones, principalmente en las metodologías que se utilizan. Algunas se apoyan en programas de computadora que permiten al estudiante tener un papel más participativo en su aprendizaje ya que éste tiene que analizar situaciones aplicando conceptos ya adquiridos, validar sus supuestos en el laboratorio y además hasta plantear generalizaciones de acuerdo a los resultados obtenidos.

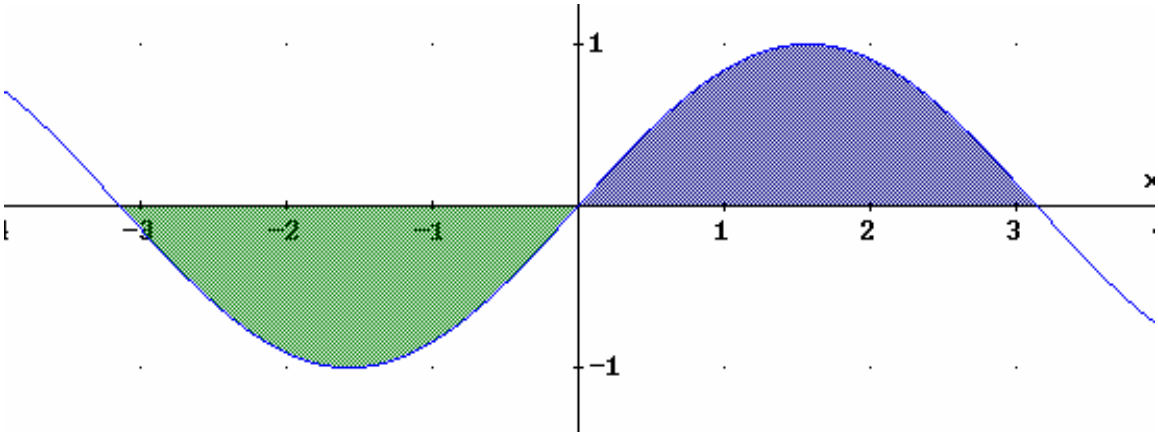


Hemos utilizado el programa *Derive 5* como apoyo en la enseñanza del cálculo integral. *Derive* es un asistente de matemática, fácil de usar que permite el procesamiento de expresiones, de ecuaciones y de funciones, entre otras. Este programa es un recurso didáctico cuyos comandos e instrucciones no exigen un lenguaje elaborado ni utiliza indicaciones difíciles de interpretar. Además tiene una ventana de ayuda bastante amplia a la que puedes tener acceso las veces y el tiempo que desees.

Es importante indicar a los estudiantes que este programa, como cualquier otro, es una herramienta que permite resolver gran cantidad de problemas, pero que un programa de computadora no razona como lo hace un ser humano. Pueden presentarse errores y debemos estar conscientes de ello y en capacidad para detectarlos.

La práctica de apoyarnos en un programa como *Derive* para que los estudiantes aprendan y utilicen conceptos del cálculo integral les permite profundizar y aplicar conceptos ya aprendidos, interpretar gráficas y desarrollar destrezas, así como responder a cuestionamientos que ellos mismos se formulen.

[1] Universidad de Panamá, Panamá, dilaro_12@hotmail.com



Hemos propuesto este taller con el propósito de compartir con los participantes del mismo las facilidades que ofrece *Derive c*omo apoyo en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral, así como la experiencia adquirida en el uso de este recurso.

Practicaremos algunos comandos básicos que nos permitan realizar operaciones, hacer gráficas, seleccionar el rango, resolver ecuaciones, etc.

Nuestra participación incluye tres aspectos: ofrecer a los participantes indicaciones generales sobre el uso de *Derive 5* necesarios en el desarrollo de temas de cálculo integral, así como ejemplos de aplicación de dichas instrucciones. Luego, trabajaremos en el cálculo de integrales y cómo representar regiones entre curvas. Finalmente, veremos algunas aplicaciones tales como el cálculo de áreas de regiones planas, así como la resolución de problemas de valor inicial.

Metodología

En este taller trabajaremos en dos sesiones de dos horas cada una. Es recomendable la disponibilidad de una computadora para cada participante y una para la facilitadora, así como un proyector multimedia.

Referencias Bibliográficas:

- Ávila, Teresita de y Dilcia de Arosemena. 2007. Guías de Laboratorio- Mat. 212 a.
- Ávila, Teresita de y Dilcia de Arosemena. 2007. Guía para utilizar *Derive 5* en Cálculo Integral.
- Haeussler, E. y R. Paul. 2003. Matemáticas para Administración y Economía. Décima edición. Pearson Educación de México, S. A. de C. V. México.
- Purcell, E., D. Varberg y S. Rigdon. 2001. Cálculo. Octava edición. Pearson Educación de México, S. A. de C. V. México.
- http://www.unalmed.edu.co/~curmat/alineal/Manual/DERIVE5_M-00.htm

Utilización de software libre para la graficación de funciones

Federico Mora[1]
Jorge Arroyo[2]

Descripción:

Esta actividad consiste en la realización de un taller sobre el uso de los software libres Winplot, Graphmatica y GEONExT como herramienta didáctica para enseñanza de las funciones.

Los objetivos son los siguientes:

- Motivar a los y las docentes a utilizar e implementar software matemáticos libres para su quehacer en la enseñanza de la matemática.
- Conocer el manejo básico de los software Winplot, Graphmatica y GEONExT.
- Utilizar los software libres como herramienta para la enseñanza de las funciones.
- Realizar guías didácticas para la enseñanza de funciones con el uso de los software libres Winplot, Graphmaticay GEONExT.

Metodología

El taller se desarrolla en tres etapas. En la primera se presentan las características de los software libres, sus ventajas y limitaciones. En la segunda parte se desarrolla una guía de trabajo con la orientación de los ponentes sobre el manejo básico de los software libres Winplot, Graphmaticay GEONExT. La etapa final consiste en la elaboración de una guía didáctica para la implementación de software en la enseñanza de las funciones.

[1] Universidad Nacional, Universidad de Costa Rica, Costa Rica, fmora_16@yahoo.com
[2] Universidad Nacional, Costa Rica

PONENCIAS

Curso de especialización en estrategias para la Enseñanza de la Matemática: Una aplicación innovadora de TIC'S en la formación y actualización de docentes de cuarto, quinto y sexto grado de E.B.G.

Luis Roberto Moreno Chandler[1]

Resumen

A mediados del año académico 2 003, Santillanadocentes propone a las autoridades educativas tres cursos de capacitación – actualización docente utilizando TIC´S, a saber, ***Curso de Ética****, dirigido a directivos;* ***Curso de Comprensión Lectora,*** *dirigido a maestros; y* ***Curso de Especialización en Estrategias Metodológicas para la Enseñanza de la Matemática****, dirigido a maestros de cuarto, quinto y sexto grado de E.B.G.*

Luego de un arduo proceso administrativo, en noviembre de 2003 se inicia la ejecución del proyecto (Primera Edición del Curso) que culminó en junio de 2004. La Segunda Edición del Curso se realizó de noviembre de 2005 a junio de 2006.

En esta breve exposición describiremos las generalidades del ***Curso de Especialización en Estrategias Metodológicas para la Enseñanza de la Matemática*** *enfatizando los aspectos relativos a las TIC´S.*

GENERALIDADES

I OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO

1. Por medio de este curso se pretende favorecer el dominio de las diferentes estrategias metodológicas para enseñar matemática en primaria.
2. El curso tiene como finalidad favorecer el empleo cotidiano en el aula de recursos procedimientos y estrategias para promover el aprendizajes significativos en sus alumnos y posibilitar una mejor calidad de enseñanza.

II ORGANIZACIONES RESPONSABLES:

Santillanadocentes, Ministerio de Educación (Panamá), UNESCO y Universidad de Educación a Distancia de Panamá - UNIEDPA.

III TUTORES / ASESORES:

Licenciado Luis Solano y Magíster Luis Roberto Moreno (Coordinador).

IV MODALIDAD DE TRABAJO:

Modalidad en línea, Modalidad a distancia y Tutorías presénciales.

V MATERIALES:

Módulo 0: Guía de utilización; Módulo 1: Los números y sus relaciones; Módulo 2: Geometría; Módulo 3: Medición; Boletines "El Estratégico" y CD con la programación particular por región.

[1] Universidad de Panamá & Comité de Atención e Investigación en Didáctica y Diferencias en el Aprendizaje de la Matemática de Panamá. Correo – e: luisro25@hotmail.com

VI CONTENIDOS ABORDADOS EN LOS MATERIALES:

GUÍA DE UTILIZACIÓN

Presentación general

1. La formación en SantillanaDocentes
   - Modalidades de aprendizaje.
   - Organización de los cursos.
   - Evaluación y acreditación.
   - La acción de asesoría.
   - Entornos de aprendizaje: campus virtual.
2. El curso de Estrategias metodológicas para la enseñanza de las matemática en cuarto, quinto y sexto grados de básica.
   - Definición y conceptualización de estrategias de enseñanza y aprendizaje.
   - Objetivos generales del curso.
   - Estructura.
   - Metodología y recomendaciones.
   - Técnica de estudio
   - Calendario del curso.
   - Plan de trabajo.
3. Características de los alumnos de cuarto, quinto y sexto grado.
   - Desarrollo cognoscitivo del pensamiento.
   - Desarrollo socio afectivo.
   - Desarrollo psicomotor.

MÓDULO 1: LOS NÚMEROS Y SUS RELACIONES

Presentación

Objetivo del módulo: Conocer diversas estrategias de enseñanza para favorecer el aprendizaje de sus alumnos en los ejes relativos a los números naturales, fraccionarios, decimales, sus relaciones y operaciones.

Mapa conceptual de módulo

UNIDAD 1: Los números naturales y sus operaciones.
UNIDAD 2: Los números fraccionarios (racionales positivos y el cero).
UNIDAD 3: Los números decimales (racionales en forma decimal).
UNIDAD 4: Fracciones de longitud: séptimos y novenos. Introducción a las fracciones mixtas.
UNIDAD 5: Porcentajes.
UNIDAD 6: Recopilación de información de diferentes fuentes y organización de la información.

Referencias bibliográficas
Referencias a Internet
Glosario
Caso práctico 1

MÓDULO 2: GEOMETRÍA

Presentación

Objetivo del módulo: Conocer diversas estrategias de enseñanza para favorecer el aprendizaje dl estudiantado en los ejes relativos a los geometría.

Mapa conceptual de módulo

UNIDAD 7: Utilización de ejes coordenados cartesianos para buscar seres y objetos.
UNIDAD 8: Uso de instrumentos para trazar figuras a partir de ejes de simetría, líneas paralelas y perpendiculares.
UNIDAD 9: Clasificación de figuras geométricas según la igualdad de ángulos y lados, paralelismo, perpendicularidad y sistema.
UNIDAD 10: Uso de fórmulas para resolver problemas de cálculo de áreas y perímetros de las diferentes figuras.
UNIDAD 11: Cálculo de áreas y volúmenes.
Referencias bibliográficas
Glosario
Caso práctico 2

MÓDULO 3: MEDICIÓN

Presentación

Objetivo del módulo: Conocer diversas estrategias de enseñanza para favorecer el aprendizaje de sus alumnos en los ejes relativos a la medición y el tratamiento de la información.

Mapa conceptual de módulo

UNIDAD 12: Historia de la medición: Sistema Métrico Decimal.
UNIDAD 13: Unidades de medida de longitud y superficie. Hectáreas. Problemas.
UNIDAD 14: El kilómetro cuadrado como unidad para expresar la superficie de grandes extensiones.
UNIDAD 15: Unidad de medida de peso. Toneladas. Problemas.
UNIDAD 16: Uso de medidas de tiempo: Línea de tiempo y recta numérica.
UNIDAD 17: Problemas con medidas de longitud, capacidad, peso y tiempo utilizando instrumentos.
Referencias bibliográficas
Glosario
Caso práctico 3
Proyecto final

VII RECURSOS:

Institucionales: Laboratorios de informática con acceso a Internet y procesador de texto Microsoft Office, en cada una de las regiones educativas, para las sesiones presénciales. Personales: Computadora con acceso a Internet y procesador de texto Microsoft Word, para los participantes.

VIII POBLACIÓN ATENDIDA:

Primera Edición: Grupo de 160 maestros de cuarto, quinto y sexto grado de Educación Básica General, de 11 Regiones Educativas. ***Segunda Edición:*** Grupo de docentes / directivos de cuarto, quinto y sexto grado de Educación Básica General.

IX PERIODO DE EJECUCIÓN:

Primera Edición: Noviembre de 2003 a junio de 2 004. ***Segunda Edición:*** Noviembre de 2005 a junio de 2006.

X EVALUACIÓN Y ACREDITACIÓN:

Para la evaluación y acreditación se tomaran en consideración los siguientes aspectos: Asistencia a las cuatro sesiones presénciales; Entrega de las evaluaciones para el docente – participante y/o evaluación sobre la puesta en práctica de las estrategias, de cada unidad; Entrega del portafolio personal y Proyecto final.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CORTIGLIA, Mónica (2003): *Curso de Especialización en Estrategias Metodológicas para la Enseñanza de la Matemática. Módulo 2.* Panamá: Editorial Santillana. pp. 68.

CORTIGLIA, Mónica (2003): *Curso de Especialización en Estrategias Metodológicas para la Enseñanza de la Matemática. Módulo 3.* Panamá: Editorial Santillana. pp. 73.

MONTESANO DE TALAVERA, Marisa (2003): *Curso de Especialización en Estrategias Metodológicas para la Enseñanza de la Matemática. Guía de utilización.* Panamá: Editorial Santillana. pp. 24.

MONTESANO DE TALAVERA, Marisa (2003): *Curso de Especialización en Estrategias Metodológicas para la Enseñanza de la Matemática. Módulo 1.* Panamá: Editorial Santillana. pp. 92.

CURSO: RECURSOS DIDÁCTICOS PARA EL APRENDIZAJE UNA EXPERIENCIA EN LA VIRTUALIDAD

COURSE: DIDACTIC RESOURCES FOR THE LEARNING
A EXPERIENCE IN THE VIRTUALITY

Enrique Vílchez Quesada[1]
Gaby Ulate Solís[2]

Resumen: *el aprendizaje virtual en los últimos años está representando un importante enfoque educativo con sus propias particularidades, tanto en el rol de los agentes participantes como en el ambiente de aprendizaje. La virtualidad se ha incorporado en los escenarios de las instituciones educativas como una respuesta a las exigencias y necesidades de las nuevas generaciones, que requieren la formación de una serie de competencias para desenvolverse en una sociedad globalizada en cuanto a la información y a los medios de comunicación. En la Universidad Nacional (UNA) de Costa Rica, estos procesos de cambio permanente han llevado a la consolidación de un Programa denominado "UNA Virtual", cuyo principal objetivo ha consistido en difundir el uso y capacitar a los docentes universitarios en la utilización de tecnologías para la formación a través de Internet. Ante estas iniciativas, se llevó a cabo con el presente proyecto de investigación, una experiencia única en la División de Educología de la UNA, diseñando e implementando un curso de grado llamado "Recursos Didácticos para el Aprendizaje", que por sus características curriculares resultó idóneo para estudiar la virtualidad en un contexto presencial. Además de ello la experiencia ha permitido dar continuidad al proceso en proyección al año 2008, institucionalizando el curso en las nueve carreras para las cuáles es impartido. Con el presente artículo se publican los principales resultados obtenidos en tres dimensiones: la virtualidad en la presenciabilidad en el contexto particular de la División de Educología de la Universidad Nacional de Costa Rica, conjeturas de las creencias de los docentes y estudiantes en cuanto a las ventajas y desventajas de un modelo educativo virtual y evaluación de las actividades, materiales y estructura del curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal.*

Palabras claves: *aprendizaje, docencia, educación, enseñanza, investigación, virtualidad, bimodal, recursos didácticos.*

Abstract: *virtual learning of late years is representing an important educational focus with its of one's own particularities, so much in the role of participating factors like in the learning environment. virtuality has incorporated at the institutional scenarios educational like an answer to the requirements and needs of new generations, that they require the formation of series of competitions stops to get around in a society globalizada as to the information and to the means of communication. At the University Nacional (UNA) of Costa Rica, these permanent change processes they have taken to the consolidation of Program named A Virtual, whose principal objective has consisted in spreading out use and to capacitate the teaching university students in the utilization of technologies for the formation through Internet. Elk these initiatives, he accomplished herewith fact-finding project, an only experience in Educología's Division of one, designing and implementing a course of grade called Recursos Didácticos for the Learning, than for his characteristic curriculares it proved to be suitable in order to go into the virtuality in an eyewitness context. In addition to it experience has permitted giving continuity to the process in projection a year 2008, institutionalizing the course in the nine racing for them he is which ones given. The principal aftermath obtained in three dimensions get into print with the present article: The virtuality in the presenciabilidad in the particular context of Educología's Division of the University Nacional of Costa Rica, guesswork of beliefs of the teachers and students as to the perks and disadvantages of educational virtual model and evaluation of activities, materials and Recursos Didácticos structures of the course for the hushed Learning a focus bimodal.*

Key words: *learning, teaching, education, teaching, investigation, virtuality, bimodal, didactic resources.*

[1] *Máster en Tecnología e Informática Educativa y Licenciado en Enseñanza de la Matemática, Profesor de la Escuela de Matemática, Escuela de Informática y de la División de Educología del Centro de Investigación y Docencia de la Universidad Nacional, Costa Rica. Correo electrónico: evilchez@una.ac.cr*

[2] *Licenciada en Artes Plásticas y Docencia, Profesora de la División de Educología, Universidad Nacional, Costa Rica. Correo electrónico: gabyulate@hotmail.com*

I. INTRODUCCIÓN

La Universidad Nacional es una institución estatal de enseñanza superior en Costa Rica, que desde su fundación ha promovido soluciones a los problemas sociales tomando como base la investigación, la extensión y la formación de profesionales comprometidos con las necesidades socio económicas del país.

Estas necesidades en un contexto de continuos avances científicos y tecnológicos, a obligado a la UNA a replantear sus modelos educativos y pedagógicos, en congruencia con una sociedad donde el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC´s) son parte de los requerimientos para ostentar una vinculación exitosa con el mercado laboral y el desarrollo profesional.

El uso de este tipo de tecnologías hace algunos años era interpretado como una incorporación curricular de alfabetización informática, hoy en día estas concepciones han sido superadas, reconociendo el hecho de que la mera utilización de un programa informático no mejora la calidad de la educación. Lo importante radica en la forma en cómo se incorporan el uso de las TIC's a los procesos de enseñanza y aprendizaje, redimensionando su uso en espectros de aplicación no solamente informáticos, sino también, pedagógicos.

En este sentido el surgimiento de distintas plataformas de educación virtual (inclusive sin ningún coste económico, como por ejemplo Moodle), han abierto nuevas posibilidades y ofertas educativas en muchas universidades del mundo entero y en algunas pocas de nuestro de país. Estos avances tecnológicos han dado cabida a la generación de otro tipo de comunidades unidas por el deseo de la autoformación y la socioconstrucción de los aprendizajes. Estas comunidades de aprendizaje virtual, emergidas con un norte de un aprendizaje significativo, están convirtiéndose en ejemplares modelos, que han puesto en un justo cuestionamiento a las instituciones de enseñanza superior.

El presente proyecto de investigación representa una respuesta a algunas de estas interrogantes y el reconocimiento humilde de buscar estrategias de solución a largo plazo y de forma continua, para consolidar en el contexto de la División de Educología de la Universidad Nacional, nuevos objetos de estudio relacionados con las creencias, ventajas y desventajas de un modelo educativo basado en la virtualidad, además de la búsqueda de una transformación curricular de un curso (Recursos Didácticos para el Aprendizaje) que puede favorecer el desarrollo de competencias para un aprendizaje autónomo y una utilización adecuada de tecnologías de la información y la comunicación, elementos de formación necesarios e indispensables, para cualquier futuro docente e investigador en el área educativa.

II. JUSTIFICACIÓN

El concepto de "Universidad" desde hace algunos años en nuestro país y fuera de él, esta sufriendo importantes cambios dirigidos hacia la competitividad, la formación profesional y el liderazgo como puntos claves para el desarrollo. Estos cambios se han acelerado todavía más, a partir de los informes de diversas organizaciones de carácter internacional, que han venido evidenciado la brecha de conocimiento, acceso a la información y acceso a los medios de comunicación masiva que aquejan a la mayor parte de los países en América Latina y el Caribe. Según el Banco Mundial por ejemplo, en esta región únicamente del 2% al 3% de la población tiene acceso a Internet, en comparación con países como Canada y Estados Unidos donde el acceso asciende a un 40% (Lozada y Paldao, 2003).

Las Naciones Unidas han reconocido desde hace varios años, que los adelantos tecnológicos de los países amplían las oportunidades de la población para enriquecerse y contribuir con ello al desarrollo de las economías, claro esta, estos supuestos índices de crecimiento social, dependen principalmente de las posiblidades de capacitación de los recursos humanos en el desarrollo de habilidades y competencias específicas, para la búsqueda del conocimiento, la gestión de la información y la forma en cómo las tecnologías contribuyen con la optimización de estos procesos. La "Universidad" a este respecto, tiene el deber moral y ético de desempeñar una tarea esencial en la estabilización de los derechos humanos y en particular el derecho que tienen las personas de tener acceso a la información y saber utilizar los medios que posibilitan capacidades masivas de comunicación en los países en vías de desarrollo.

Los sistemas educativos y sobre todo los que caracterizan a la educación superior deben orientarse al uso progresivo de las más modernas y diversificadas tecnologías de la información. Muchos países de América Latina y el Caribe lo han entendido y como consecuencia de estos enfoques, han vendido utilizando una nueva modalidad de enseñanza y aprendizaje denominada *"aprendizaje virtual"*, como complemento de la formación presencial tradicional y de la enseñanza a distancia.

"El aprendizaje virtual reemplaza las limitaciones de los salones de clases comunes facilitándose así una educación continua. Implica la enseñanza a distancia caracterizada por una separación física entre profesorado y alumnado (sin excluir encuentros físicos puntuales), predominando una comunicación de doble vía asíncrona donde se usa preferentemente Internet como medio de comunicación y de distribución del conocimiento, de tal manera que el alumnado es el centro de una formación independiente y flexible, al tener que gestionar su propio aprendizaje, generalmente con ayuda de tutores externos" (Vílchez, 2006). Este tipo de experiencias de enseñanza y

aprendizaje en una universidad predominantemente presencial, como la UNA, presenta muy diversos obstáculos y dificultades que se hacen transparentes en la práctica educativa, donde si el docente y discentes no logran encontrar los espacios adecuados para conciliar estas divergencias, podrían ocasionar efectos muy negativos y el convencimiento pleno de valorar los enfoques tradicionales como los únicamente efectivos (lo cual contradeciría la misión institucional de la Universidad Nacional de Costa Rica).

El aprendizaje virtual utiliza medios tecnológicos y estrategias pedagógicas para la creación de ambientes de enseñanza y aprendizaje más interactivos. Los medios tecnológicos en los que se basa el aula virtual, se denominan *"plataformas de aprendizaje virtual"*. Una plataforma de aprendizaje virtual, es una herramienta que combina hardware y software ofreciendo todas las prestaciones necesarias para la formación en línea. En la Universidad Nacional de Costa Rica por razones tanto académicas como económicas, la plataforma de educación virtual que ofrece el Programa UNA Virtual es *"Moodle"*. Moodle si bien es cierto es una excelente opción de código abierto, todavía requiere convertirse en una plataforma más robusta, integrando aspectos técnicos y de mediación pedagógica que faciliten la labor docente. Parte de los aspectos que se investigaron con este proyecto, se enfocaron a encontrar en el Moodle de UNA Virtual, debilidades y fortalezas que puedan retroalimentar la excelente y pionera labor que actualmente realiza el equipo técnico e investigador de este Programa.

El uso de la red Internet favorece la preparación de profesionales acorde con las tendencias actuales en cuanto a la incorporación de tecnologías en su proceso formativo y esto es consecuente con la misión que actualmente tiene la Universidad Nacional. La UNA ha iniciado desde hace algunos años la inclusión de tecnologías de informática en el currículo de las diferentes carreras, reconociendo en ellas herramientas esenciales que requieren todos los y las profesionales para vincularse exitosamente al mercado laboral. A este respecto la rectoría de la UNA reconoce en el ámbito universitario a la Maestría en Administración de la Tecnología (MATI), la Maestría en Tecnología e Informática Educativa (MATIE), la Maestría Salud Integral y Movimiento Humano (MSIMHU), el Centro Internacional en Política Económica y Desarrollo Sostenible (CINPE), la Maestría en Desarrollo Rural y la Maestría en Museología como pioneras en el aprendizaje virtual, razón por la cual se hace imprescindible realizar otros esfuerzos institucionales, que incorporen el uso de las TIC's en espacios educativos virtuales o bimodales que se centralicen en cursos de grado, además de los de posgrado.

El presente proyecto de investigación asumió esta responsabilidad, generando un proceso integral de diseño e implementación de un curso de grado compartido por diversas unidades académicas del campus universitario. La actividad académica aquí descrita, desarrolla un proceso de

planificación serio, para favorecer un cambio curricular dentro un curso de servicio de la División de Educología (Recursos Didácticos para el Aprendizaje), ofrecido a catorce unidades académicas dentro de la Universidad, hacia la búsqueda de un nuevo sistema educativo basado en el uso de redes de comunicación e información. El presente proyecto de investigación consistió en desarrollar el curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal (combinando la virtualidad con la presenciabilidad) para las carreras de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual, como inicio de un conjunto de experiencias que durante el año próximo (2008) se espera poner en práctica en la totalidad de las 14 carreras involucradas. Se eligió el curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje para tal efecto, principalmente por ser un curso cuya orientación se fundamenta en el hacer del aula y donde los talleres que integran esta dinámica tienen características intrínsecas compatibles para ser desarrollados satisfactoriamente en una plataforma de aprendizaje virtual.

Con este proyecto hemos iniciado un proceso de innovación educativa en el marco del desarrollo de las tecnologías relacionadas con el aprendizaje virtual, en el contexto particular de la División de Educología de la UNA. A futuro no solamente se espera hacer expansiva la experiencia a otras unidades académicas a través del curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje, sino también, abordar nuevos focos de investigación relacionados con la virtualidad en la presenciabilidad y la apertura de una oferta de servicios a la comunidad costarricense e internacional interesada en estas temáticas.

III. OBJETIVOS

3.1 OBJETIVO GENERAL

Proponer el curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque de aprendizaje bimodal, para las carreras de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual.

3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Diseñar materiales educativos para desarrollar el curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje, de forma virtual y presencial en las carreras de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual.
2. Aplicar los materiales educativos diseñados para el desarrollo del curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje, de forma virtual y presencial, en las carreras de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual.

3. Diseñar las experiencias de evaluación cualitativa y cuantitativa del curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje, en el contexto del aprendizaje virtual para las carreras de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual.
4. Organizar los foros de discusión que integrarán el curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje en la virtualidad, en las carreras de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual.
5. Utilizar una plataforma de aprendizaje virtual para crear el curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje, en las carreras de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual.
6. Desarrollar el curso Recursos Didácticos para el Aprendizaje en una plataforma de educación virtual, mediante la participación de dos grupos pilotos, uno de la carrera Enseñanza de la Matemática y el otro de la carrera Arte y Comunicación Visual.
7. Aplicar una prueba piloto a los grupos de trabajo, evaluando las actividades, materiales y estructura del curso bimodal diseñado, inicialmente para las carreras de Enseñanza de la Matemática y Arte y Comunicación Visual.
8. Establecer en el contexto de la División de Educología, un estudio de casos para determinar las ventajas y desventajas que posee un modelo educativo basado en la virtualidad, en contraposición, con el modelo educativo tradicional presencial.

IV. MARCO TEÓRICO

4.1 La Didáctica y los Recursos Didácticos

La didáctica es la ciencia de la educación que tiene como objeto la instrucción; estudia el proceso de enseñanza aprendizaje y posee características de un sistema teórico, porque en él participan un conjunto de componentes internos que se relacionan entre sí (conceptos, categorías, leyes, etc.). Investiga, experimenta y crea teorías sobre cómo enseñar, cómo el docente debe "actuar en la enseñanza" para alcanzar determinadas metas en el alumno, tiene como base principal el diálogo interactivo de la biología, la psicología y la filosofía.

La didáctica está representada por el conjunto de técnicas y estrategias metodológicas que le explican al docente cómo realizar la acción de enseñar, por lo cual se nutre en sentido práctico de las demás ciencias de la educación, para lograrlo con eficacia. El conocimiento de cómo el discente aprende y desarrolla sus capacidades lo explica la teoría psicológica, mientras que la teoría didáctica deduce de la psicología qué elementos intervienen y cómo se ordenan para producir determinados resultados, al igual que otras ciencias, informa, comunica y retroalimenta al educador en el quehacer de su aula, por lo tanto la didáctica puede ser considerada por sus

aspectos generales y particulares, por eso se habla de la didáctica general y la didáctica específica. La general está dedicada al estudio de todos los principios y técnicas válidas para la enseñanza del contenido de cualquier disciplina, no es una receta o un listado de técnicas sino es un concepto más allá de ser un simple instrumento metodológico, como tradicionalmente se concibió.

La didáctica especifica es la que se dirige a considerar técnicas o estrategias para la enseñanza y aprendizaje de los contenidos particulares de cada asignatura o disciplina; por ejemplo en la didáctica de la Matemática o la didáctica de las Artes y Comunicación visual, se estudia, explica y aplica ciertos principios de la didáctica general al campo o al aula, con su propia particularidad de las técnicas o estrategias.

También se habla de otras didácticas que se dirigen a otros campos como: la Didáctica de la Educación Especial, la Educación Pre-Escolar o la Didáctica de la Educación Superior, entre otras.

Desde 1974 se consideró como "material didáctico" o "recurso didáctico" todo aquel que abarcaba el material impreso, pizarras, audio y fotos. Actualmente estos materiales o recursos se han ampliado principalmente por los avances tecnológicos, lo cual ha suscitado que muchos educadores se resistan a apreciar su utilidad y eficacia para elevar la calidad de la educación. Un claro ejemplo lo constituye el uso de materiales audiovisuales en el aula, no hay duda de la existencia de un cierto temor por parte de los profesores y profesoras hacia este tipo de medios. Según Calderón en su libro *Didáctica de Hoy Concepciones y Aplicaciones* los profesores y las profesoras normalmente se oponen pues califican al material audiovisual de: "*falto de vida, de calor",* y le achacan que: *"no permiten el "contacto humano"; olvidando que; los materiales audiovisuales, incluso la televisión, no son otra cosa que una consecuencia del libro ilustrado, e inclusive los programas de las computadoras son una continuación del cuaderno de tareas y las explicaciones de los docentes"* (2002 : 36).

Los recursos didácticos o medios didácticos educativos en conclusión, son todos aquellos "materiales" que brindan de una u otro forma soporte a los objetivos, contenidos, actividades y estímulos motivadores. Rossi y Biddle citados por Ferrandez, Sarramona y Tarin (1988) utilizan dos divisiones para clasificarlos; los recursos tradicionales e innovadores.

La primera comprende el mobiliario y su distribución en el aula, la pizarra, textos, pizarra de velcror (franelógrafo), rotafolio, fichas, todo tipo de carteles, materiales de juego didáctico, proyector de láminas opacas, el retroproyector, fotos, audio como casettes, discos compactos y videos.

En la otra categoría encontramos las computadoras, el video bin o cañón de proyección, pizarras digitales, programas educativos/multimediales y más recientemente las plataformas de aprendizaje virtual.

4.2 Procesos de Enseñanza y Aprendizaje en el Paradigma de la Virtualidad

La reciente transformación educativa de las instituciones de enseñanza en la educación superior, ha estado impulsada principalmente por la incorporación de las tecnologías de formación a través de Internet y lo que actualmente se denomina *"aprendizaje virtual"*.

El paradigma de la virtualidad conceptualizando este término como el conjunto de formas de entender y proceder (Senior, 2005) el fenómeno educativo en un ambiente de aprendizaje basado en el uso de plataformas de teleformación (entornos de aprendizaje virtual), es uno de los temas más importantes en el ámbito de la educación a distancia y más recientemente de la educación presencial que lo combina con el aula tradicional. Formalmente aún sabemos muy poco sobre este tema y los procesos promovidos en los diversos contextos de enseñanza y aprendizaje virtuales, no apuntan a apostar un mejoramiento cuantitativo de los resultados del proceso de evaluación de los aprendizajes.

La transición a la virtualidad ha sido justificada no por sus aportes en el mejoramiento de los resultados obtenidos por los y las alumnas en su rendimiento escolar, sino más bien, por el mejoramiento integral que aparentemente la virtualidad puede otorgar al proceso de enseñanza y aprendizaje, por un lado al ser un sistema de enseñanza que promueve el aprendizaje autónomo y el aprendizaje colaborativo, y por otro al facilitar el uso de herramientas tecnológicas con capacidades de múltiples representaciones conceptuales. Con relación a este último aspecto, Néstor Fernández Sánchez en su artículo *Estrategias de Enseñanza para Favorecer el Aprendizaje Significativo* señala: *"Una de las mejores opciones es la aplicación de las tecnologías de la Información y la Comunicación pues ello permite agregar imágenes y sonido, entre otros elementos, a las ideas"* (2006 : 12).

Los sistemas educativos tradicionales presenciales y a distancia, poco a poco han ido evolucionando hacia la búsqueda de nuevas formas para desarrollar los procesos de enseñanza y aprendizaje en función de las necesidades cognitivas, profesionales, geográficas y temporales de los participantes. Actualmente las universidades no pueden sustentar sus decisiones curriculares, en una visión que aísle las necesidades espaciales y de tiempo de un nuevo tipo de estudiante al servicio de una sociedad que demanda una rápida inserción al mercado laboral. Lo anterior propone un importante pero difícil reto en las instituciones de enseñanza superior; crear sistemas

de formación universitaria de calidad que respeten la diversidad de aprendizajes, estilos de aprendizaje, de culturas, etária y social propias de un contexto educativo complejo. Frente a este reto la ecuación virtual tiene mucho que ofrecer, Greg Kearsley en su artículo *El Profesor Virtual: Un Caso de Estudio Personal* señala: *"El beneficio más evidente de la educación virtual reside en que brinda a estudiantes y profesores mucho más tiempo y flexibilidad en términos de plazos y desplazamientos"*, además afirma: *"He llegado a la conclusión de que el aprendizaje virtual incrementa la capacidad de pensamiento crítico y las habilidades para resolver problemas prácticos de los estudiantes"* (2006 : 7).

Otro importante factor que puede facilitar el aprendizaje virtual, es el desarrollo de competencias para una educación continua. Décadas atrás existía una idea bastante generalizada respecto a la formación que una persona adquiría en la Universidad; esta se efectuaba *una única vez en la vida* para garantizar un buen empleo y cierta estabilidad económica. Hoy en día tal acepción resulta ser prácticamente imposible, la vertiginosa competitividad y la constante aparición de formas mutables de empleo ha obligado a las personas a buscar una capacitación y formación continuas. El problema radica en el desarrollo de las habilidades para la búsqueda y administración actualizada de la información, ¿la universidad actual prepara a los y las estudiantes para ello?, la respuesta es un desafío y depende en gran medida de la oferta educativa que las instituciones de enseñanza están ofreciendo basadas en el paradigma del uso de las nuevas tecnologías y los entornos de aprendizaje virtual.

4.3 El Aula Virtual como Ambiente de Enseñanza y Aprendizaje

El aprendizaje virtual en muchas de sus componentes presenta similitudes muy próximas con los procesos de interacción y socialización que implica el aprendizaje presencial, sin embargo, existe una diferencia muy significativa; el ambiente de enseñanza y aprendizaje. En el aprendizaje en línea este ambiente se encuentra condicionado por el uso de una herramienta tecnológica que provee el espacio físico para socializar los aprendizajes y ofrecer una prestación diversa de servicios de comunicación y administración educativa. La mayor parte de plataformas de aprendizaje virtual cuentan con las siguientes opciones:

- **Inicio**: le permite al estudiante volver a la página principal del curso.
- **Calificaciones**: proporciona una herramienta automatizada para dar seguimiento continuo a los avances académicos del estudiante. La retroalimentación del proceso evaluativo que normalmente posibilita es tanto cualitativa como cuantitativa.

- **Mensajería o correo electrónico**: le permite al alumno acceder a un listado de todos los participantes y del tutor del curso, contando con un servicio de mensajería interno para comunicarse directamente con el profesor tutor y los compañeros y compañeras inscritos.
- **Calendario de eventos**: aparecen publicados todos los eventos asociados al curso.
- **Foro de discusión**: aparecen publicados por módulo todos los temas de discusión asociados al curso en la unidad de tiempo que utiliza el tutor (generalmente la semana). Es una herramienta de comunicación asincrónica, es decir, la comunicación no ocurre en tiempo real.
- **Chat**: es un espacio que permite establecer de modo on-line una conversación con otros participantes del curso. Es una herramienta de comunicación sincrónica, es decir, en tiempo real.
- **Recursos y enlaces de interés**: es una herramienta que permite presentar enlaces con temáticas relacionadas al curso. En algunas plataformas de teleformación, los recursos son ordenados en forma alfabética.
- **Glosario o wiki**: incorpora y organiza las definiciones de los principales conceptos asociados al curso.
- **Ayuda**: presenta una serie de explicaciones y ejemplos para utilizar el aula virtual.

Dependiendo de la plataforma de aprendizaje virtual que se utilice, las opciones anteriores podrían tomar nombres distintos, o bien, no estar disponibles. En general toda plataforma de teleformación complementa el uso de herramientas de comunicación asincrónica (como los foros) con herramientas de comunicación sincrónica (como el Chat).

Un ambiente de enseñanza y aprendizaje virtual, no solamente debe responder a la perspectiva tecnológica, pues ninguna herramienta de teleformación existente hasta la fecha, puede por sí sola construir el espacio humano y de interacción cognitiva que permite a los y las participantes aprender, de esta forma es necesario integrar dos perspectivas más: la disciplinar relacionada con las unidades temáticas del curso y la pedagógica cuyo diseño depende de la habilidad y experiencia del tutor (o profesor) virtual.

Ante la perspectiva pedagógica que podría resultar la más difícil de desarrollar para un tutor neófito en la materia, algunos autores coinciden en comparar el aula presencial con el aula virtual en las primeras semanas de un curso; en un inicio los alumnos tienden a tener una interacción muy individualista y poco a poco sus aportes se van incorporando en una dinámica de aula donde prevalece en le mejor de los casos la socioconstrucción de los aprendizajes. A este respecto en el documento de la Dra. Mónica Luque *Formación en Tutoría Virtual Bloque II*, se señala: *"auque no se han realizado todavía investigaciones que permitan entregar resultados sistematizados, nuestras observaciones nos han posibilitado reconocer que este proceso (en el aula virtual) es*

individual al inicio de la experiencia y luego, paulatinamente, se va abriendo a espacios socioconstructivos" (2007 : 3).

Estas u otras premisas han llevado a algunos autores a considerar de forma prematura que el aprendizaje virtual favorece por sí solo el desarrollo de un aprendizaje autónomo, cuando en realidad el logro de la autonomía no es una tarea tan fácil de cumplir y no solamente está en función de la modalidad educativa en la cuál el estudiante está inscrito. Hemos de suponer que la educación a distancia, en mucho podría contribuir con el desarrollo de habilidades metacognitivas propiciando experiencias de aprendizaje donde el alumno logra aprender y reaprender resolviendo, en gran parte por su cuenta, conflictos y obstáculos. Pese a ello, no consideramos el logro de comportamientos autónomos como una característica intrínseca de los ambientes virtuales de aprendizaje, en el documento de la Dra. Mónica Luque *Formación en Tutoría Virtual Bloque II*, se plantea en este sentido lo siguiente: *"el logro de la autonomía es una dimensión compleja que no llega a ser consolidada (en el aula virtual) más que en un pequeño porcentaje, menor a 10% en cada aula"* (2007 : 3).

Respecto a las similitudes del proceso de aprendizaje en un aula presencial y en otra virtual, es muy importante confirmar que en ambas, se fundamenta en las mismas actividades cognitivas: la lectura, la escritura y el pensamiento, aunque no todo conocimiento puede ser enseñado de forma satelital.

4.4 Rol de los Agentes Participantes en la Virtualidad

El rol de los participantes (profesores y alumnos) de un curso virtual sufre una serie de modificaciones en cuanto al enfoque pedagógico que se recomienda utilizar en este tipo de contextos de enseñanza y aprendizaje. Se espera que el docente también llamado *"tutor virtual"* diseñe y facilite un conjunto de experiencias de aprendizaje que le permitan al alumno apropiarse de manera colectiva de cada uno de los ejes de temáticos del curso, por otra parte, del alumno se espera contar con una actitud de compromiso ante su permanencia constante en el aula virtual y su nivel de interacción y responsabilidad para cada una de las actividades de clase designadas. El docente entonces en este modelo educativo, se convierte en un *facilitador*, que a nuestro juicio desempeña una función próxima a la de un *"moderador del proceso"*, es decir, minimizando sus aportaciones personales y juicios de valor, crea espacios de comunicación abierta que les exige a los y las estudiantes tener una mayor autonomía sobre lo que aprenden.

La tutoría virtual es uno de los aspectos principales que se conjugan en esta modalidad educativa. El apoyo tutorial dota a los participantes de una serie de posibilidades que les permiten aprender a

gestionar sus propios procesos de aprendizaje, desarrollando capacidades para un aprendizaje autónomo. A este respecto el tutor virtual debe convertirse en un facilitador que retroalimenta constantemente a sus educandos, resolviendo problemas, consultas, orientando, motivando y evaluando los alcances de los participantes y del proceso pedagógico empleado en general. La tutoría virtual debe asegurar a los participantes un apoyo y acompañamiento permanentes durante la vigencia de un curso con estas características, a tal punto, que es recomendable un tiempo de respuesta a las consultas y/o comentarios en un plazo no mayor a veinticuatro horas. El tutor virtual en conclusión es quien apoya, guía y evalúa a los estudiantes en un curso en línea, mediante un conjunto de actividades propuestas en función de las posibilidades tecnológicas de la plataforma de educación virtual disponible y del fortalecimiento de un ambiente de aprendizaje colaborativo.

De acuerdo al documento *Guía Metodológica del Tutor* de la Universidad Sergio Arboleda, las funciones o roles de un tutor virtual se podrían resumir en los siguientes:

- Conocer el nivel cognitivo y las características socio afectivas de los participantes.
- Brindar orientación y apoyo permanente.
- Motivar a los participantes.
- Dar seguimiento a todas las actividades propuestas resolviendo dudas y/o conflictos.
- Retroalimentar los avances cognitivos de los alumnos mediante alguna herramienta que posibilite una evaluación cualitativa y/o cuantitativa.
- Dar seguimiento al nivel de participación de los estudiantes dentro del aula virtual para de esta forma, retroalimentar a los alumnos y evitar bajas en el curso.
- Seleccionar y diseñar materiales didácticos aptos para el aprendizaje en línea.
- Desarrollar habilidades en el uso del lenguaje escrito, garantizando así claridad en la redacción de las consignas.
- Preparar las actividades didácticas semanales favoreciendo el aprendizaje colaborativo.

Sandra Ascencio citada por Vílchez (2006), define el perfil que debe poseer todo educador virtual:

- Debe ser una persona interesada en las posibilidades de las nuevas tecnologías.
- Con voluntad de aprendizaje, reciclaje, superación continua y con ganas de enseñar.
- Capaz de plantear nuevas formas de enseñar en la interacción del conocimiento.
- Debe ofrecer mayor tiempo para reflexionar y las clases virtuales deberán ser concretas y eficaces.
- No enfatiza en el papel de emisor, sino de tutor en el proceso de enseñanza.
- Se dedica a orientar y enseñar de modo personalizado.
- Se ajusta al ritmo de aprendizaje de cada estudiante.

- Se actualiza y cambia constantemente los contenidos y los materiales.
- Transforma los libros, apuntes, revistas a un formato de red digital.
- Aprovecha al máximo las posibilidades de la red (foros, email, bibliotecas virtuales, videoconferencias, entre otras).
- Tiene proyecciones y actualización de conocimientos continuos y permanentes.

En cuanto al estudiante, a partir de la mediación pedagógica del docente en el aula virtual, éste irá desarrollando en un proceso paulatino y continuo habilidades relacionadas con el aprendizaje autónomo y significativo, siempre y cuando exista un compromiso previo para dedicar el tiempo suficiente y realizar todas las actividades propuestas en el curso. En algunas instituciones de enseñanza superior que ofrecen este tipo de ofertas educativas, se garantiza el aprovechamiento efectivo de un curso virtual, obligando al estudiante a aceptar un *"contrato"* de usuario del aula virtual, que contempla entre otras cosas: la cantidad de horas que debe dedicar al curso, requerimientos técnicos para poder matricular el curso y el nivel de compromiso y responsabilidad moral necesarios para su inscripción.

4.5 PAUTAS PARA UNA BUENA COMUNICACIÓN

La comunicación es uno de los elementos esenciales en cualquier proceso de enseñanza y aprendizaje, y en particular, los procesos de comunicación que se desarrollan en la virtualidad difieren de aquellos generados a partir de las relaciones cara a cara. Lameiro y Sánchez opinan que en Internet las personas desarrollan una personalidad distinta a la que tienen normalmente en las interrelaciones presenciales, estos autores citan: *"toda persona que interactúa en el ciberespacio desarrolla una nueva personalidad que puede diferir desde un grado mínimo a un grado máximo con su personalidad del espacio habitual de su experiencia cotidiana"* (1998 : 4).

Estas variantes conductuales parecen indicar que la Red es un medio liberador de condicionantes sociales o individuales haciendo que la persona se vuelva "invisible" y por tanto, que ésta tome actitudes o realice acciones que nunca llevaría a cabo en otro tipo de ambiente social. Patricia Wallace en su libro *The Psychology of the Internet* apunta: *"una de la primeras sorpresas para quienes investigan el comportamiento en línea fue cuán desinhibida se vuelve en ocasiones la gente y cómo su temperamento puede estallar con más facilidad al interactuar con otros"* (1999 : 8).

La pérdida de protocolos de interacción social sin ningún tipo de control puede ocasionar en un aula virtual resultados muy negativos. En un aula virtual lo importante no radica en construir listas de comportamientos aceptables o inaceptables, sino en poner énfasis acerca de las pautas que

debe regir una comunicación adecuada entre todos los y las participantes. A este respecto en Internet existe un grupo denominado *Netiquette* que desde hace algunos años se ha ocupado de esta temática, algunas de las pautas recomendadas por este grupo son las siguientes:

- Es necesario siempre mantener el sentido común hacia la búsqueda de los buenos modales, la cortesía, la tolerancia y el respeto, nunca debe prevalecer la ira o el enojo.
- Todo lo que se escriba en el aula virtual debe hacerse como si el o la compañera de grupo estuviese presente.
- Es importante mantener los mensajes personales en privado y publicar únicamente aquellos que son de interés colectivo.
- Las comunicaciones deben ser breves, concretas y bien redactadas.
- Los íconos emocionales son una buena ayuda para transmitir emociones.
- En las comunicaciones debe respetarse los derechos de autor e incluir las fuentes bibliográficas pertinentes.
- El uso de mayúsculas se interpreta en Internet como un grito.
- Las críticas y conflictos deben ser tratados en privado, nunca de manera pública. Solamente las felicitaciones y reconocimientos se hacen públicos.

4.6 La frustración del Estudiante en Línea

La frustración es una de las razones principales por las cuales los discentes hacen abandono de un curso en línea. Una de las tareas más importantes tanto del tutor como de la institución que patrocina un curso virtual, radica en minimizar la frustración de los y las estudiantes y los efectos negativos que puede generar la virtualidad.

Algunas de las causas que frustran a los estudiantes en línea se circunscriben en tres dimensiones de impacto: el mismo estudiante, el docente y la institución patrocinadora. Federico Borges en su artículo *La Frustración del estudiante en Línea* señala para estos actores las siguientes causas:

- El mismo estudiante:
    - No disponer de suficiente tiempo para cumplir con las actividades del curso.
    - Matricular un curso que no responde a las expectativas iniciales.
    - No tener estrategias y destrezas adecuadas para la formación en línea.
    - No dar un buen cumplimiento a las actividades.
    - Desconocer los mecanismos de ayuda ofrecidos por el docente o la institución.

- El docente:
    - No haber sido nunca estudiante en línea (podría ocasionar decisiones descontextualizadas).
    - No dar respuestas al alumno en línea o dar respuestas tardías.
    - Tener poca presencia en el aula virtual.
    - Mostrar poca claridad en las consignas (indicaciones) de trabajo.
    - Ser muy rígido en un entorno flexible.
    - No abrir espacios de acercamiento humano.
    - Sobrecargar al estudiante.
    - Propiciar pocos espacios para el trabajo colaborativo.
- La institución:
    - Ofrecer una ayuda técnica deficiente.
    - No ofrecer capacitación previa tanto a los tutores virtuales como a los y las estudiantes.
    - No tener organizados los cursos.
    - No tomar en cuenta el perfil del estudiante que ingresa a la institución.
    - Establecer trámites administrativos complicados.

Atender estas necesidades a tiempo y tomar las medidas preventivas adecuadas, son aspectos fundamentales para quienes vislumbramos en el aprendizaje virtual, una excelente oportunidad de crecimiento humano, académico y profesional. Ignorar esta problemática implica un mal ejercicio de la virtualidad y por tanto, difundir una percepción equivocada de la formación en línea.

4.7 Las Comunidades de Aprendizaje Virtual: Su Enfoque Pedagógico

Otro elemento esencial que ha aparecido en el escenario del aprendizaje virtual, es el movimiento y la creciente consolidación de comunidades de aprendizaje. Una comunidad de aprendizaje virtual es conceptualizada como una sociedad en la red, donde el aprendizaje es el resultado del diálogo y la participación conjunta de todos sus miembros. Este tipo de comunidades en una sociedad caracterizada por el uso masivo de la tecnología y de la información, responde a las necesidades de las nuevas generaciones que han concebido en la educación tradicional una brecha muy significativa entre sus estilos de aprendizaje y formas de comunicación, con los procesos habituales de interacción en la Escuela. A este respecto Antonia Lozano Díaz en su artículo *Comunidades de Aprendizaje en red: diseño de un proyecto de entorno colaborativo*, plantea: *"el movimiento de Comunidades de Aprendizaje surge como reactivo social ante la incapacidad de la educación formal para responder a las nuevas y emergentes necesidades de las generaciones actuales y venideras"* (2005 : 1).

En esta concepción el aprendizaje es el resultado de las interacciones entre las personas y el proceso que éstas realizan para socializar sus aportes y estimular la co-construcción del conocimiento, es decir, la socio construcción de los saberes. A este tipo de aprendizaje se le denomina "aprendizaje colaborativo".

El aprendizaje colaborativo sustituye la idea de considerar al aprendiz como un sujeto aislado, por el contrario reconoce que a partir de sus relaciones cognitivas con otros, promueve el logro de un nivel formativo mayor. Begoña Gros Salvat en su artículo *La Construcción del Conocimiento en la Red: Límites y Posibilidades*, señala: *"El aprendizaje supone la participación en una comunidad y deja de ser considerado como la adquisición de conocimientos por individuos para ser reconocido como un proceso de participación social. Este proceso se denomina participación periférica legítima, puesto que el nuevo participante, que se mueve de la periferia de la comunidad hacia el centro, llegará a ser más activo y a estar más comprometido con la cultura y, por ello, asumirá una nueva identidad"* (2005 : 3).

La mediación pedagógica de la tutoría virtual, debe promover el establecimiento de una comunidad de aprendizaje donde mediante el desarrollo de habilidades de socialización en línea (pautas de comunicación), el alumno pueda discutir, reflexionar y tomar decisiones sobre lo que aprende. Este tipo de ambiente de aprendizaje es creado, construido, no emerge por generación espontánea, supone la selección y planificación de actividades por parte del tutor, que favorecen el trabajo en equipos, además de la producción individual, Berta Rotstein, Ana María Scassa, Carmen Saíz y Ana María Simesen en su artículo *El Trabajo Colaborativo en Entornos Virtuales de Aprendizaje*, apuntan: *"la cooperación en los contextos educativos virtuales es construida; no es algo que se da naturalmente, tiene que producirse en el conjunto de actividades de aprendizaje que realizan o pueden realizar los alumnos, y las relaciones sociales que se establecen en el aula virtual"* (2006 : 40).

Según Rosmery Hernández en su artículo *Ambientes Colaborativos Virtuales de Aprendizaje*, algunas características del aprendizaje colaborativo son:

- Los estudiantes deben trabajar en equipo para lograr un objetivo común.
- Los miembros de cada grupo organizan sus actividades internas y valoran sus propios avances.
- Se somete a discusión y negociación los aportes individuales para consolidar un único material de aprendizaje.
- Se establece un intercambio de información y puntos de vista.

- Los alumnos desarrollan habilidades para resolver discrepancias de grupo y tomar decisiones conjuntas.

El aprendizaje colaborativo promueve el desarrollo de lo que hemos convenido en llamar una *"exteligencia cultural"* (en reemplazo del término inteligencia), es decir, un conjunto de saberes colectivos que dentro de un núcleo social desempeñan una importante influencia sobre el comportamiento de grupo y la búsqueda común de objetivos. La apropiación de este tipo de aprendizaje en un aula virtual es lenta tanto por parte del estudiante como por parte del tutor y solo la experiencia del ejercicio de la tutoría virtual perfecciona su adecuada aplicación.

4.8 LA VIRTUALIDAD EN LA PRESENCIABILIDAD

La virtualidad en un contexto de enseñanza y aprendizaje a distancia, logra justificarse socialmente como una modalidad educativa que permite en el mejor de los casos, optimizar los procesos educativos entre los participantes de un curso, facilitando una comunicación multidireccional y el acceso a diferentes experiencias de aprendizaje y materiales didácticos.

En la presenciabilidad al existir un contacto físico entre el docente y los participantes, la virtualidad suele ser un fenómeno más difícil de asimilar. La separación física y el uso de medios informáticos para el desarrollo de los procesos de comunicación, presupone la adquisición previa de ciertas habilidades y actitudes en el aula tradicional, que le permitan al alumno lidiar con las exigencias cognitivas y psicológicas de un aprendizaje autónomo, ahora bien, ¿Las instituciones de enseñanza y en particular las universidades, preparan al alumno a asumir este reto?, la respuesta es afirmativa si el aula presencial se constituye en una fuente de experiencias de enseñanza y aprendizaje, donde el alumno logra aprender a aprender, da un significado especial a lo que aprende y utiliza tecnologías de información y comunicación en los procesos de aprehensión. Los docentes universitarios tienen una gran responsabilidad a este respecto, pues ellos son a fin de cuentas, quienes promueven o no el autoaprendizaje. María Cristina López en su artículo *Impacto de las TIC en la Universidad*, opina: *"ellos (los docentes) son los que deben respetar la curiosidad, desarrollar la autonomía, fomentar el rigor intelectual y crear las condiciones necesarias para el éxito de la enseñanza formal y la educación permanente"* (2006 : 44).

Otro problema aparente de la virtualidad en la presenciabilidad, se reside en la resistencia mostrada por algunos estudiantes matriculados de manera obligatoria, en cursos con un enfoque bimodal. Usualmente en estos contextos de enseñaza y aprendizaje algunos participantes se sienten *"obligados"* a cumplir con las actividades planificadas en la plataforma de aprendizaje virtual, juzgando el tiempo y esfuerzo invertido como un impedimento para aprovechar más las

clases presenciales, este es un nuevo objeto de estudio y poco se ha investigado hasta la fecha. Analía Chiecher, Danilo Donolo y María Cristina Rinaudo, respaldan la idea de permitir a los estudiantes escoger el contexto de aprendizaje (presencial o virtual) con el cuál ellos se sientan más cómodos y aptos, para garantizar así el máximo aprovechamiento del quehacer educativo. En su artículo *Aprender en Contextos Virtuales por Opción u Obligación* presentan los resultados de su investigación, estos autores señalan: *"los resultados informan que aquellos estudiantes que voluntariamente decidieron cursar virtualmente, regulan mejor los recursos del ambiente (especialmente el tiempo, el ambiente, el esfuerzo y las interacciones con sus pares)"*, así mismo concluyen: *"los resultados hallados hacen presuponer que la mejor alternativa es dejar que cada alumno elija libremente, conforme a sus posibilidades y habilidades, en qué contexto prefiere aprender"* (2006 : 21).

La virtualidad en la presenciabilidad por tanto (inclusive ésta bien gestionada), puede ser considerada por los y las estudiantes como una amenaza y un obstáculo en su proceso de aprendizaje, ¿Cómo podemos comprender esta diversidad?, ¿Quiénes son los responsables?, ¿Existen dificultades interpersonales que pueden ocasionar un bloqueo en el desarrollo de competencias metacognitivas en la virtualidad? Estas u otras interrogantes en las próximas décadas tendrán una mayor aproximación de respuesta, por ahora, existen múltiples caminos de resolución y ninguno de ellos parece indicar cuál es el más óptimo.

V. RESULTADOS, ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN

En esta sección se explica la fundamentación metodológica mediante la cual se llevó a cabo la investigación. La exposición de las ideas se organizó dividiendo el apartado en las siguientes secciones: definición de la información requerida, recolección de la información, tratamiento para analizar la información obtenida y finalmente presentación de los resultados del análisis de los datos.

5.1 INFORMACIÓN REQUERIDA

La actividad de investigación realizada con este trabajo, englobó principalmente tres etapas: el diseño del curso bimodal, su implementación y un análisis evaluativo.

En la etapa de diseño se utilizó el enfoque pedagógico señalado en la sección 4.7, basado en un ambiente de aprendizaje colaborativo, para diseñar los materiales educativos, las experiencias de evaluación cualitativa y cuantitativa del curso y, crear y organizar los foros de discusión que definieron todas las actividades del curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje"* en la virtualidad.

La etapa de implementación se fundamentó en impartir el curso diseñado a dos grupos; uno en el área de la Enseñanza de la Matemática y el otro en el área de la Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual. El objetivo principal se centró en aplicar una prueba piloto a los estudiantes de ambas carreras, con la finalidad de depurar las actividades del curso y los materiales académicos seleccionados y elaborados, y realizar un análisis comparativo entre la enseñanza virtual y la presencial tomando como base la perspectiva de los estudiantes al identificar ventajas y desventajas de estos dos modelos educativos.

La información requerida en el análisis que se realizó con la presente investigación fue: la experiencia informática de los participantes en cuanto al uso de Internet y su experiencia en el aprendizaje virtual, la evaluación y recomendaciones de los y las estudiantes con lo que respecta a los materiales y las actividades desarrolladas en el curso y finalmente las ventajas y desventajas en la presenciabilidad que posee un modelo educativo virtual de acuerdo a la percepción de los alumnos involucrados en este proceso.

5.2 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN

La información obtenida como producto de esta investigación, se recopiló mediante un cuestionario aplicado por parte los investigares a un grupo de treinta y tres estudiantes: veintitrés en el área de la Enseñanza de la Matemática y diez en el área de la Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual. El cuestionario fue aplicado a la muestra al finalizar el curso "*Recursos Didácticos para el Aprendizaje"* durante el I ciclo lectivo del año 2007.

Es importante aclarar, que se eligieron estos dos grupos interdisciplinarios utilizando como criterio de selección, la formación académica de las personas responsables de esta investigación. La profesora Gaby Ulate Solís colaboró como docente para la carrera de Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual, mientras que el profesor Enrique Vílchez Quesada colaboró como docente para la carrera de Enseñanza de la Matemática.

El cuestionario aplicado a estos treinta y tres estudiantes fue elaborado con la ayuda del Doctor Edwin Cháves Esquivel estadístico y académico de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica. El aporte de Cháves para la elaboración del instrumento fue indispensable y se fundamentó en una minuciosa revisión del cuestionario, para garantizar la efectiva recolección de la información y su factibilidad de análisis estadístico posterior. Edwin Cháves Esquivel es Magíster en Estadística graduado de la Universidad de Costa Rica y Doctor en Ciencias de la Educación de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica, actualmente es el Director de la

Escuela de Matemática de la Universidad Nacional y es un investigador y docente muy reconocido tanto a nivel nacional como internacional.

5.3 TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN

Para realizar el análisis de los datos se separaron las preguntas del cuestionario en dos grupos, el primero constituido por las preguntas de selección única, en su mayoría con cinco posibles opciones de respuesta. El segundo grupo formado por las preguntas abiertas del instrumento, donde se crearon categorías para su análisis. La división se fundamentó principalmente en las dificultades de análisis estadístico, que presenta una pregunta abierta en comparación con una cerrada.

Los cuestionarios fueron aplicados directamente por los investigadores y se tomaron en consideración las siguientes variables generales:

- Características de la población.
- Experiencia de los participantes en la utilización de la Red Internet y de plataformas de aprendizaje virtual.
- Evaluación y recomendaciones respecto a las actividades, materiales y estructura del curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal"*.
- Percepción de los y las estudiantes del curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal"*, sobre las ventajas y desventajas que posee un modelo educativo basado en la virtualidad.

De estas variables generales se obtuvieron sesenta variables específicas a partir de las preguntas cerradas del cuestionario y se analizaron utilizando el software estadístico SPSS 13.0. Se les solicitó a los participantes indicar en el instrumento una aproximación de sus percepciones bajo dos escalas de medición (dependiendo de la pregunta): *"Muy frecuentemente"* (1), *"Frecuentemente"* (2), *"Medianamente"* (3), *"Pocas veces"* (4) o *"Nunca"* (5) y la escala *"Muy de acuerdo"* (1), *"De acuerdo"* (2), *"Medianamente de acuerdo"* (3), *"En desacuerdo"* (4) o *"Muy en desacuerdo"* (5). El presente estudio se fundamentó en el uso de estadística descriptiva (por el tamaño de la muestra), recurriendo a medidas de tendencia central como el promedio y la moda (el dato que más se repite), a una medida de dispersión denominada desviación estándar y al uso de porcentajes.

5.4 Presentación de los Resultados del Análisis

5.4.1 Descripción de la Población

La población a la cuál se aplicó el instrumento de esta investigación, se caracterizó por los siguientes aspectos:

- El 54.5% de la población estaba compuesto por hombres y el 45.5% por mujeres, todos ellos y ellas residentes en el área metropolitana.
- Las edades de los participantes oscilaron entre los 18 y 28 años, es decir, la población de alumnos encuestados fue relativamente joven.
- El rango de los niveles en los cuáles se encontraban los y las estudiantes participantes oscilaron del segundo nivel al cuarto nivel. La razón de ello obedece a encontrarse el curso de *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje"* en el segundo nivel de la maya curricular de la carrera Enseñanza de la Matemática y en el tercer nivel para el caso de la carrera Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual.
- El 90.9% de los y las estudiantes encuestados, tenían una jornada de estudios de tiempo completo y el 9.1% restante, de un medio tiempo.

5.4.2 Experiencia de los Participantes en la Utilización de la Red Internet y de Plataformas de Aprendizaje Virtual

Los resultados de la muestra indicaron que los participantes tenían un nivel de experiencia medio en la utilización de la Red Internet para apoyar procesos educativos, un bajo nivel en la utilización de Internet como un recurso para realizar compras o transacciones y un nivel casi nulo en la utilización de plataformas de aprendizaje virtual (únicamente tres estudiantes indicaron haber utilizado Moodle en ciclos anteriores).

En la siguiente tabla se resume el porcentaje de respuesta de los y las estudiantes participantes del cuestionario:

Tabla 1: Experiencia del usuario en la utilización de la Red Internet

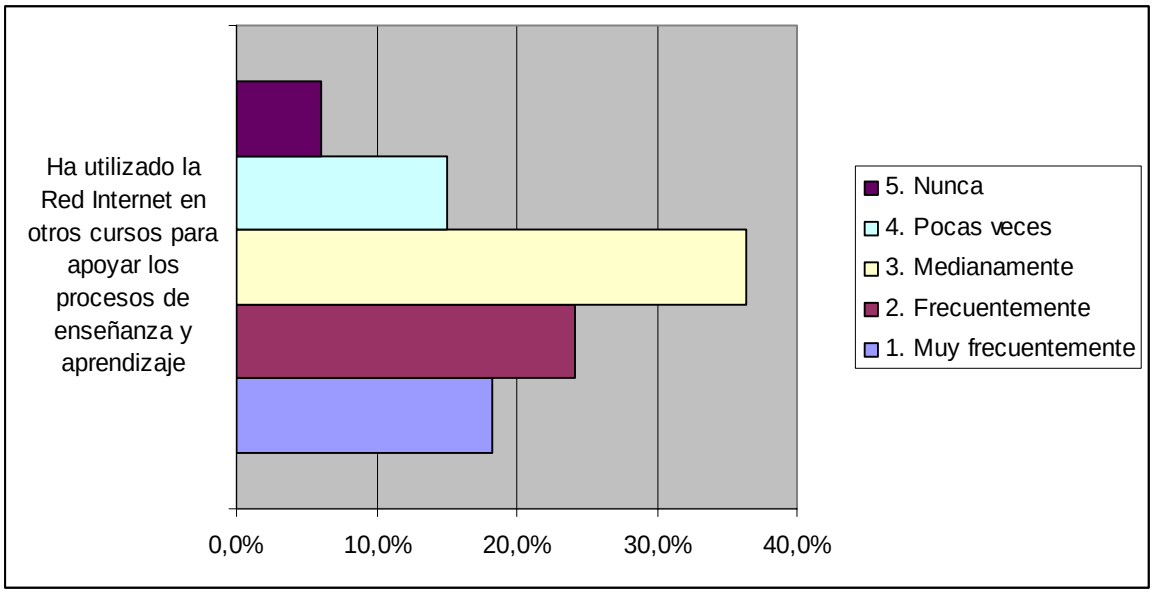
Experiencia del usuario en la utilización de la red Internet	1. Muy frecuentemente	2. Frecuentemente	3. Medianamente	4. Pocas veces	5. Nunca
1. Ha utilizado sitios Web para realizar compras o transacciones bancarias.	0%	0%	0%	12,1%	87,9%
2. Ha utilizado la Red Internet en otros cursos para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje.	18,2%	24,2%	36,4%	15,1%	6,1%
3. Ha utilizado sitios Web educativos en otros cursos para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje.	12,1%	12,1%	42,4%	24,2%	9,2%

Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

Estos resultados evidencian que los y las estudiantes participantes, en su mayoría, no contaban con las competencias deseables esperadas en el inicio de un curso virtual, que como se señaló en la sección 4.8, ocasiona serios problemas psicológicos y cognitivos al alumno cuanto tiene que lidiar con las exigencias de un aprendizaje autónomo. Es necesario entonces, tanto en la carrera de Enseñanza de la Matemática como en la carrera de Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual, integrar en los cursos de primer y segundo nivel experiencias de aprendizaje donde el alumno aprenda a aprender en la presenciabilidad y aprenda a utilizar desde una perspectiva educativa, ciertas tecnologías de información y comunicación.

El siguiente gráfico muestra la tendencia de los y las estudiantes en cuanto al uso de Internet para desarrollar procesos educativos:

Gráfico 1: Tendencia del uso de Internet para desarrollar procesos educativos



Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

En el gráfico se observa un bajo nivel de uso de la Red, aspecto que ocasionó tal y como lo apuntó la investigación de Analía Chiecher, Danilo Donolo y María Cristina Rinaudo (ver sección 4.8), que algunos alumnos participantes de este proyecto de investigación, asumieran el reto de la virtualidad como un obstáculo negativo y con una actitud de mucha resistencia.

5.4.3 Evaluación y Recomendaciones Respecto a las Actividades, Materiales y Estructura del Curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un Enfoque Bimodal"*

Con el propósito de evaluar el diseño general del curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal"* se dividieron los puntos de interés en tres aspectos: la evaluación de las actividades desarrolladas durante el curso, la evaluación de los materiales diseñados para el curso y la evaluación de la estructura general del curso. En los siguientes apartados se presentan los resultados obtenidos a este respecto.

5.4.3.1 Evaluación de las Actividades Desarrolladas Durante el Curso

Las actividades desarrolladas durante el curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal"* se basaron en: talleres de elaboración de material didáctico, una exposición grupal de la búsqueda de un recurso tradicional o un recurso innovador para la especialidad con un tema asignado por el docente, tres comprobaciones de lectura (una de ellas en línea), un proyecto

de propuesta de un recurso didáctico tradicional, un proyecto de propuesta de un recurso innovador, un informe sobre la visita a una videoconferencia, participación en foros de discusión y una exposición interdisciplinaria de un subgrupo de la carrera Enseñanza de la Matemática al grupo de Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual y viceversa (a esta exposición se le llamó *"exposición al grupo alterno"*).

Los talleres consistieron en la elaboración y utilización de distintos materiales y recursos didácticos tanto tradicionales como innovadores, en un ambiente de clase donde predominó el trabajo en equipo.

La exposición sobre un recurso didáctico para la enseñanza de la especialidad, se fundamentó en la búsqueda de un recurso distinto para la enseñanza y el aprendizaje de un tema dentro de la disciplina de estudio, de forma creativa cada subgrupo puso en práctica el uso del recurso con sus demás compañeros mediante una actividad o conjunto de actividades que así lo requerían, integradas dentro de un planeamiento didáctico.

Se realizaron tres comprobaciones de lectura, una de ellas en línea utilizando la plataforma de teleformación Moodle y el software HotPotates.

En subgrupos de 4 estudiantes desarrollaron dos proyectos de elaboración de material didáctico: uno centrado en la utilización de recursos tradicionales y otro en el diseño de un sitio Web educativo utilizando los programas: Adobe Photoshop y Macromedia Dreamweaver. El proyecto tradicional se expuso de manera virtual utilizando el Chat de la plataforma Moodle, donde se sometió a debate y discusión socioconstructiva cada uno de los trabajos.

Se solicitó a los estudiantes asistir a una videoconferencia programada por la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica y a partir de esta experiencia escribir un informe mediante una guía de observación entregada por los docentes.

Los foros de discusión en línea se evaluaron utilizando los siguientes criterios: cantidad y puntualidad de las participaciones (se designó como mínimo dos participaciones por alumno, la primera el día lunes o martes y la segunda el día jueves o viernes), calidad de las participaciones (en términos de consistencia y profundidad a las temáticas del curso) y trabajo colaborativo (las intervenciones no debían ser aisladas promoviendo discusiones respetuosas y críticas, de acuerdo con las pautas de comunicación señaladas en la sección 4.5).

Finalmente, para integrar a los dos grupos participantes del proyecto en una comunidad de aprendizaje virtual (como se explicó en la sección 4.7), se estableció la iniciativa de planificar un conjunto de exposiciones cruzadas de subgrupos del grupo de la carrera de Enseñanza de la Matemática al grupo de la carrera de Artes y Comunicación Visual y viceversa. El objetivo fue tratar temas comunes al curso bajo un enfoque de estudiantes de una distinta área disciplinaria. La exposición fue evaluada por el profesor del otro curso, en mutuo acuerdo con el profesor oficial y los estudiantes del subgrupo.

La siguiente tabla presenta un resumen porcentual de las frecuencias de respuesta de los y las estudiantes ante el cuestionario aplicado:

Tabla 2: Evaluación de las actividades desarrolladas durante el curso

Evaluación de las actividades desarrolladas durante el curso	1. Muy de acuerdo	2.De acuerdo	3. Medianamente de acuerdo	4.En desacuerdo	5.Muy en desacuerdo
1. Las actividades desarrolladas en el curso contribuyeron a profundizar las temáticas designadas durante cada semana.	9,1%	42,4%	39,4%	3%	6,1%
2. Las actividades desarrolladas no mejoraron su comprensión de cada tema.	0%	9,1%	36,4%	36,4%	18,1%
3. Las actividades tuvieron siempre relación con las temáticas a abordar en cada semana.	21,2%	60,6%	15,2%	3%	0%
4. Las actividades no aumentaron su motivación hacia el curso.	6,1%	12,1%	27,3%	39,4%	15,1%
5. Los talleres (presenciales y virtuales) de desarrollo de material didáctico, le permitieron aprender a planificar y diseñar material didáctico para apoyar su futura labor docente.	27,3%	24,2%	42,4%	0%	6,1%
6. Los talleres (presenciales y virtuales) de desarrollo de material didáctico, no le permitieron comprender mejor la teoría.	0%	15,2%	33,3%	36,4%	15,1%
7. Los talleres (presenciales y virtuales) de desarrollo de	30,3%	45,5%	24,2%	0%	0%

material didáctico, le permitieron desarrollar su creatividad e inventiva.					
8. Las preguntas generadoras de los foros de discusión no siempre guardaron relación con las temáticas de la semana.	3%	0%	27,3%	54,5%	15,2%
9. Las preguntas generadoras de los foros de discusión siempre fueron claras.	33,3%	33,3%	33,3%	0%	0%
10. Los comentarios y preguntas realizados por el profesor y la profesora del curso en los foros de discusión, no siempre ayudaron a orientar y mejorar la discusión en línea.	6,1%	6,1%	36,4%	33,3%	18,1%
11. Las exposiciones de búsqueda de un recurso tradicional e innovador, le permitieron investigar y profundizar la utilización de otros recursos didácticos no contemplados dentro del programa del curso.	27,2%	45,5%	18,2%	9,1%	0%
12. Las exposiciones de búsqueda de un recurso tradicional e innovador, no siempre brindaron un aporte complementario a las temáticas de la semana.	0%	12,1%	27,3%	45,5%	15,1%
13. Las exposiciones al grupo alterno (Artes-Matemática y viceversa) ampliaron su visión de las aplicaciones educativas que tienen los recursos didácticos.	30,3%	36,4%	18,2%	12,1%	3%
14. Las exposiciones al grupo alterno le permitieron analizar y reflexionar de una forma interdisciplinaria, su futuro quehacer educativo en una institución de enseñanza-aprendizaje.	30,3%	36,4%	18,2%	12,1%	3%

15. Los proyectos tradicionales e innovadores no brindaron un espacio para aplicar la teoría del curso de una manera directa.	6,1%	9,1%	30,3%	42,4%	12,1%
16. Los proyectos tradicionales e innovadores brindaron un espacio de análisis, reflexión e inventiva, para el diseño y desarrollo de recursos didácticos.	33,3%	33,3%	30,3%	3,1%	0%

Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

Esta tabla nos permite concluir que los y las estudiantes participantes percibieron de manera positiva los siguientes aspectos:

- Las actividades desarrolladas mejoraron la comprensión de cada tema: se obtuvo un 91% de aprobación en el rango *"Muy de acuerdo"* -*"Medianamente de acuerdo"*.
- Las actividades tuvieron siempre relación con el trabajo semanal: 81.4% de los y las estudiantes manifestaron su opinión en el rango *"Muy de acuerdo"* -*"De acuerdo"*.
- Las actividades aumentaron la motivación: un 81.9% consideró estar *"Muy de acuerdo"*, *"De acuerdo"* y *"Medianamente de acuerdo"*, con una media muestral de 2.54 y una desviación estándar de 1.19, es decir, los datos no estaban tan distribuidos y por ende la media resultó ser confiable indicando una tendencia de respuesta tipo 2: *"De acuerdo"*.
- Los talleres de desarrollo de material didáctico ayudaron a comprender mejor la teoría: se obtuvo una media de 2.48, una moda 2 y una desviación estándar de 0.9 lo cual apunta a una alta frecuencia de respuesta: *"De acuerdo"*.
- Los talleres permitieron desarrollar creatividad e inventiva: hay una concentración de respuesta de un 75.8% en el rango *"Muy de acuerdo"*-*"De acuerdo"*.
- Las preguntas de los foros de discusión guardaron relación con las temáticas de la semana y siempre fueron claras: se presentó un porcentaje de respuesta *"Muy de acuerdo"*-*"De acuerdo"* de un 69.7% y de un 66.6% respectivamente. Sí se señaló por parte de algunos estudiantes la necesidad de cambiar la monotonía de las consignas de los foros, lo cuál arrojó un resultado muy importante para modificar algunas de ellas, en la propuesta final del curso que se impartirá el próximo año a siete unidades académicas más.
- Las exposiciones de búsqueda de un recurso tradicional e innovador permitieron investigar y profundizar la utilización de otros recursos didácticos y brindaron un aporte complementario a las temáticas del curso: un 72.8% y un 60.7 respectivamente opinaron que sí en el rango *"Muy*

de acuerdo"-"De acuerdo", se respalda una visión positiva en este sentido pues el porcentaje restante se concentra en *"Medianamente de acuerdo"*.

- Las exposiciones al grupo alterno ampliaron su visión de las aplicaciones educativas que tienen los recursos didácticos y, permitieron analizar y reflexionar de una manera interdisciplinaria el quehacer educativo en una institución de enseñanza: las percepciones de los y las estudiantes fueron muy positivas, en ambos casos únicamente el 15.1% manifestó estar *"En desacuerdo"* o *"Muy en desacuerdo"*. Es importante señalar que la mayor dificultad presentada por los alumnos, en consistencia con las respuestas a las preguntas abiertas del instrumento, consistió en tener que asistir fuera de su horario de clase presencial a presentar una exposición al otro grupo.
- Los proyectos tradicionales e innovadores brindaron un espacio de análisis, reflexión e inventiva: la moda de las respuestas (2 = *"De acuerdo"*), la media muestral de 2.03 con una desviación estándar aproximadamente 1, indicaron favorables los resultados.

Además su percepción negativa se centró en los siguientes puntos:

- Las actividades desarrolladas contribuyeron a profundizar las temáticas del curso: hay una concentración importante de estudiantes que señalaron estar *"Medianamente de acuerdo"* (39.4%), sin embargo, al observar la moda se obtuvo una alta frecuencia de respuesta tipo 2: *"De acuerdo"*. Al analizar las preguntas abiertas del instrumento, se observa una categoría relacionada con la cantidad excesiva de trabajo que les demandó semanalmente a los alumnos realizar las actividades propuestas, lo cuál fue considerado por nosotros como investigadores, modificando el cronograma del curso que se utilizará durante el próximo año para impartirlo.
- Los talleres de elaboración de material didáctico permitieron aprender a planificar y diseñar materiales didácticos: se obtuvo una concentración importante de respuesta en el *"Medianamente de acuerdo"* con un 42.4%, esto pues al analizar las preguntas abiertas del instrumento, algunos estudiantes señalaron la necesidad de no enfatizar tanto en la elaboración o utilización de recursos innovadores y concentrar más esfuerzos en los recursos tradicionales.
- Los comentarios y preguntas realizadas por los profesores ayudaron a orientar y mejorar las discusiones en línea: un 48.6% de los participantes respondieron negativamente a esta pregunta, como investigadores reconocemos que al contar con un grupo grande de 45 estudiantes matriculados, no fue nada fácil la moderación de estas discusiones, además de haber abusado de su uso en cada una de las semanas de duración del curso. Este aspecto también nos permitió realizar ajustes a su propuesta final.
- Los proyectos tradicionales e innovadores brindaron un espacio para aplicar la teoría del curso: en un 45.5% las respuestas se concentraron en un rango entre *"Medianamente de acuerdo"* y *"Muy en desacuerdo"*, pese a no ser un porcentaje tan alto, en las respuestas a las preguntas

abiertas 60% de los estudiantes coincidieron en sentir un vacío cognitivo sobre todo en cuanto al proyecto tradicional y, al uso y elaboración de ciertos recursos tradicionales, aspecto a mejorar durante la segunda implementación de este curso el próximo año. Reflexionando objetivamente, como investigadores hemos tenido que reconocer que en esta primera experiencia, nuestro énfasis se centró en el uso de recursos didácticos que implicaban nuevas tecnología de información y comunicación.

5.4.3.2 EVALUACIÓN DE LOS MATERIALES DISEÑADOS PARA EL CURSO

El diseño e implementación del curso *"Recursos didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal"* hizo patente el desarrollo y selección de diversos materiales requeridos para trabajar con los y las estudiantes en la plataforma de aprendizaje virtual Moodle (lo anterior es un elemento esencial dentro de la tutoría virtual, como se explicó en detalle en la sección 4.4). De esta forma se digitalizaron lecturas, se elaboraron tutoriales, se construyeron materiales educativos computarizados (MEC) en formato de CD ROM y se eligieron enlaces de interés para las áreas temáticas del curso. Estos materiales se sometieron a una evaluación a partir del cuestionario aplicado a los participantes de la muestra y sus resultados se presentan en la tabla dada a continuación:

Tabla 3: Evaluación de los materiales diseñados para el curso

Evaluación de los materiales diseñados para el curso	1. Muy de acuerdo	2.De acuerdo	3. Medianamente de acuerdo	4.En desacuerdo	5.Muy en desacuerdo
1. Las lecturas asignadas durante el curso contribuyeron a profundizar las temáticas.	12,1%	36,4%	36,4%	15,1%	0%
2. Las lecturas no mejoraron su comprensión de cada tema.	3%	18,2%	27,3%	36,4%	15,1%
3. Las lecturas tuvieron siempre relación con las temáticas a abordar en cada semana.	24,2%	48,5%	21,2%	6,1%	0%
4. Las lecturas con elementos auxiliares, tales cómo: imágenes, animaciones o vínculos, aumentaron su motivación hacia los temas del curso.	36,4%	24,2%	36,4%	3%	0%
5. Los tutoriales entregados (Moodle, Photoshop, Dreamweaver) no le permitieron aprender las	3%	12,1%	27,3%	42,4%	15,2%

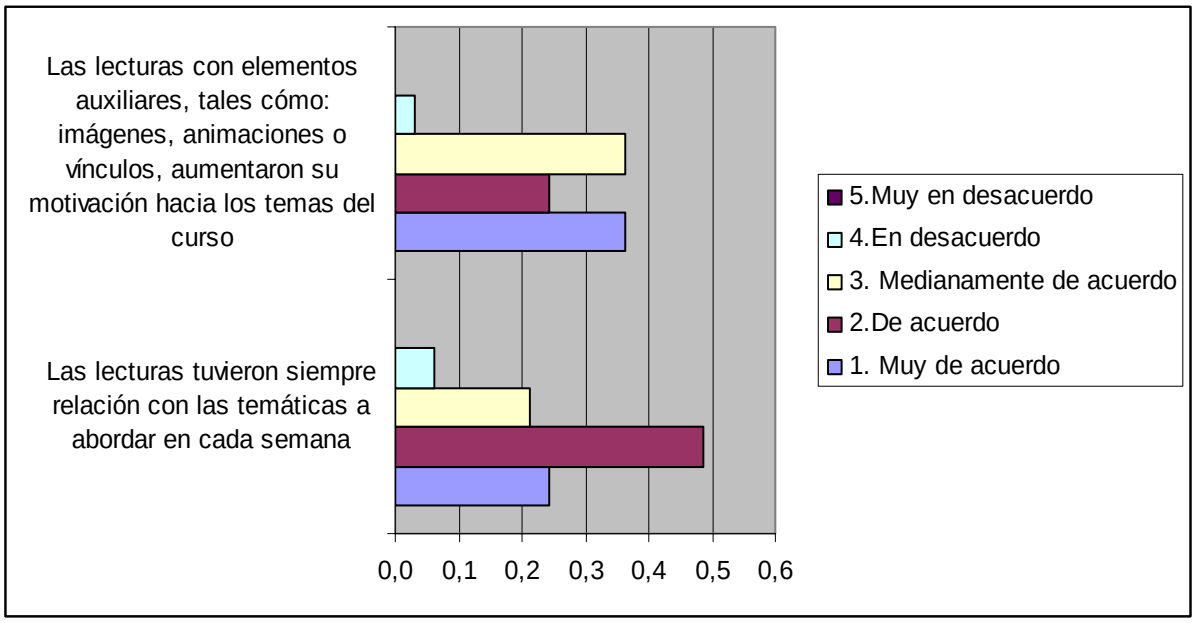
temáticas del curso de forma efectiva, ordenada y guiada.					
6. Los CD's entregados como material de apoyo (software, imágenes, lecturas …) le fueron de utilidad.	48,5%	39,4%	12,1%	0%	0%
7. Los ejemplos proporcionados (proyectos, afiches, sitios …) no contribuyeron con su labor en las distintas actividades programadas.	9,1%	3%	24,2%	45,5%	18,2%

Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

Del análisis de esta información se rescata:

- Con respecto a las lecturas:
  - Un 51.6% de los alumnos apoyó someramente la idea de que las lecturas contribuyeran en la profundización de las temáticas del curso y un 48.5% que éstas no mejoraron la comprensión de cada tema, parte de las razones expuestas por los alumnos curiosamente se circunscriben en reconocer que al no existir una comprobación de lectura en muchas de las semanas, las lecturas no eran aprovechadas adecuadamente. Inclusive algunos estudiantes recomendaron en próximas ediciones del curso hacer más comprobaciones. Este resultado respalda las conclusiones expuestas en el apartado 5.4.2, donde nos encontramos con un tipo de estudiante con poca autonomía en la gestión de su propio conocimiento y no apto en cuanto a su nivel de compromiso con sus responsabilidades no presenciales, que como se señaló en la sección 4.4, dedicar el tiempo suficiente y realizar todas las actividades propuestas en un curso virtual, se presupone como uno de los roles más importantes que debe asumir un estudiante en línea. Por ende, concluimos que es necesario en la presenciabilidad generar un protocolo que implique al estudiante a realizar sus actividades no presenciales, como por ejemplo la firma de un contrato al iniciar el curso.
  - Existe un consenso positivo en cuanto a la relación de las lecturas con las temáticas semanales y al aumento de la motivación en las lecturas con elementos auxiliares tales como: imágenes, animaciones y vínculos. El siguiente gráfico lo describe:

Gráfico 2: Aspectos positivos de las lecturas



Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

- Con respecto a los tutoriales: el 15.1% de los participantes manifestaron estar inconformes con estas ayudas didácticas, de tal manera que tuvieron una buena aceptación.
- Con respecto a los MEC: 88% de los alumnos expresaron que les resultaron de utilidad como materiales de apoyo.
- Con relación a los enlaces (link): únicamente el 12.1% de los estudiantes consideraron que no contribuyeron con su labor en las distintas actividades programadas.

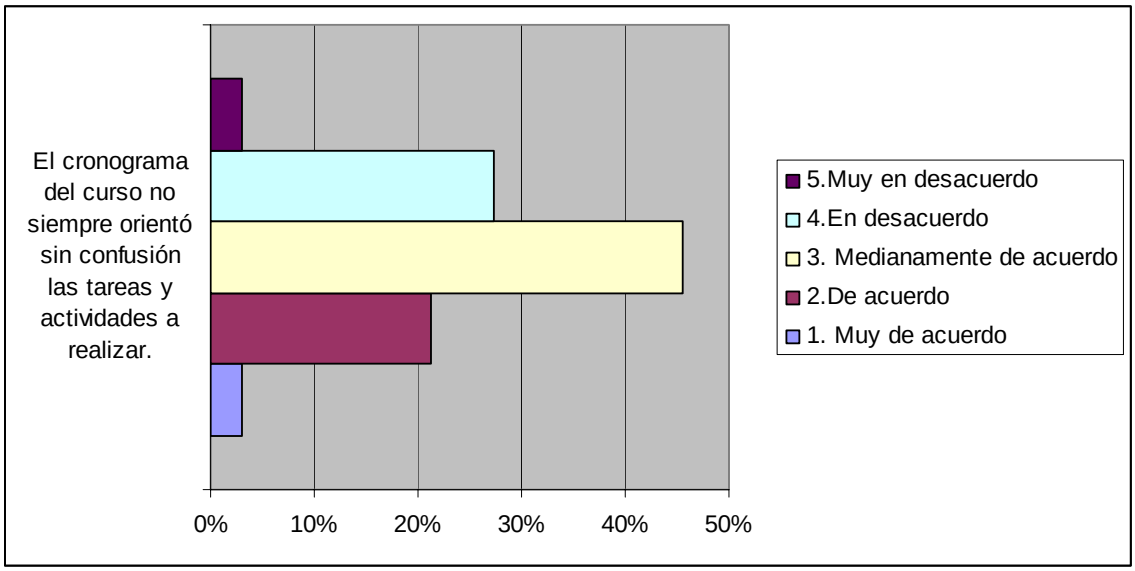
5.4.3.3 Evaluación de la Estructura del Curso

Otra variable a considerar en cuanto al análisis del curso fue la evaluación de su estructura y para ello se consideraron los siguientes aspectos: su desarrollo, el cronograma como definición de las actividades a realizar semanalmente, la distribución del trabajo por equipos, las tablas de cotejo para evaluar el desempeño realizado por los y las estudiantes en cada una de las tareas asignadas (para un detalle de ellas consulte la sección 5.4.3.1) y finalmente los objetivos alcanzados.

Un 6% de los estudiantes participantes del cuestionario opinaron que el curso no se desarrolló de una forma clara y ordenada, la media muestral de 2.27 con una desviación estándar de 0.87, denotó una concentración de las respuestas alrededor de la media, es decir, la mayor parte de los y las estudiantes opinaron lo contrario.

En cuanto al cronograma del curso las opiniones no fueron muy favorables, la moda tres indicó que la mayor parte de los alumnos concibieron el cronograma como un medio poco orientador de las actividades a realizar durante cada semana. Las razones de ello las hicieron explícitas los participantes en las preguntas abiertas del cuestionario, donde se destacó la fuerte presencia de una categoría relacionada con la carga excesiva de trabajo semanal. En nuestra práctica como docentes corroboramos estas percepciones, dado que durante el curso tuvimos que irrespetar los plazos iniciales, pues el tiempo no alcanzaba. Este aspecto fue uno de los primeros que al finalizar el curso depuramos y corregimos en el programa inicial. El siguiente gráfico destaca la tendencia de las respuestas a esta interrogante:

Gráfico 3: Cronograma de actividades como un medio orientador



Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

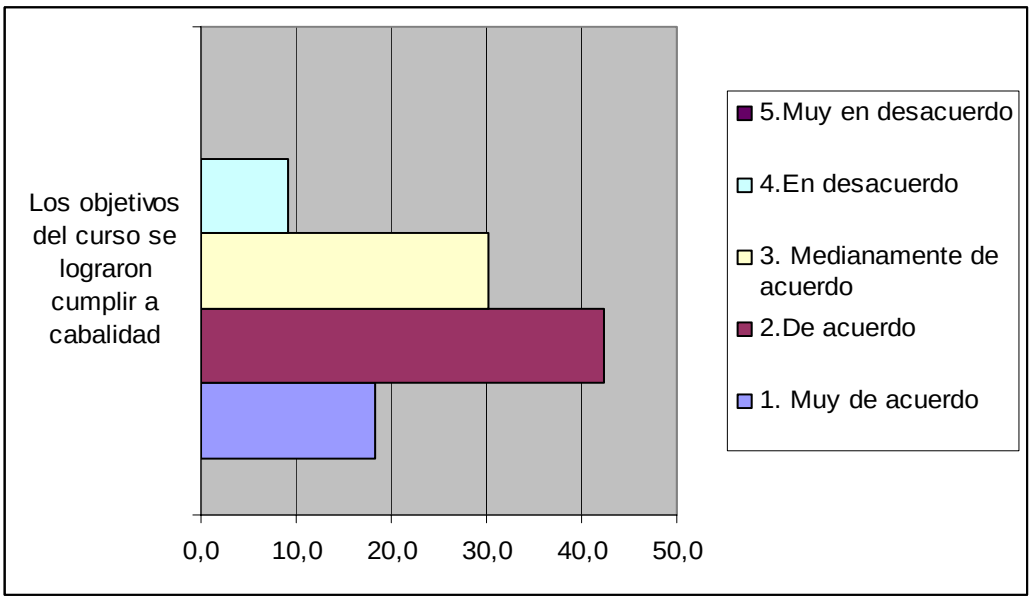
Aquí se observa como los porcentajes de respuesta *"Muy de acuerdo"* y *"De acuerdo"* no alcanzan ni un 30% de las percepciones totales.

Respecto a la distribución de las tareas por semana a cada subgrupo de trabajo, los resultados fueron muy positivos, alcanzando un porcentaje de aprobación de un 87.9%, podría esto parecer contradictorio con el resultado mostrado anteriormente, sin embargo, la percepción de los alumnos se focalizó en considerar justa la distribución, al comparar la carga asignada a los otros equipos de trabajo en cada grupo.

En cuanto a la efectividad de las tablas de cotejo para definir los criterios de evaluación con claridad de cada una de las tareas asignadas durante el curso, los resultados indicaron un 48.5% de inconformidad, esto nos obligó como docentes a realizar una nueva revisión de estas tablas y mejorar su contenido evaluativo.

Finalmente, la muestra arrojó un resultado de un 90.6% de satisfacción respecto al logro de los objetivos propuestos en el programa del curso, el siguiente gráfico demuestra lo anterior:

Gráfico 4: Los objetivos del curso se lograron cumplir a cabalidad



Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

Se observa en esta representación que la mayor parte de los y las estudiantes opinaron estar *"Muy de acuerdo"*, *"De acuerdo"* y *"Medianamente de acuerdo"* con el logro cabal de los objetivos del curso, además no hay ningún estudiante que haya manifestado estar *"Muy en desacuerdo"*. Este resultado, a pesar de todas las limitaciones y/o desventajas señaladas por los y las estudiantes, demuestra una buena efectividad del curso en su estructura y en las experiencias de aprendizaje diseñadas e implementadas.

5.4.4 Percepción de los y las Estudiantes del Curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un Enfoque Bimodal"*, sobre las Ventajas y Desventajas que posee un Modelo Educativo Basado en la Virtualidad

Las ventajas y desventajas de un modelo educativo bimodal en el contexto de la División de Educología de la Universidad Nacional, se lograron identificar en la muestra, cuestionando las percepciones existentes con relación ha: el mejoramiento de los procesos de la enseñanza y el aprendizaje, la utilización de la plataforma Moodle y las carencias de capacitación e infraestructura institucional. En las siguientes secciones se explicarán los resultados obtenidos.

5.4.4.1 Experiencia en términos del Mejoramiento de los Procesos de la Enseñanza y el Aprendizaje

La tabla 4 resume las frecuencias de respuesta en cada uno de los aspectos considerados para estudiar el mejoramiento sentido por los y las estudiantes, en los procesos de formación académica del curso.

Tabla 4: Experiencia en términos del mejoramiento de los procesos formativos

De su experiencia en términos del mejoramiento de los procesos de la enseñanza y el aprendizaje	1. Muy de acuerdo	2.De acuerdo	3. Medianamente de acuerdo	4.En desacuerdo	5.Muy en desacuerdo
1. La motivación hacia la materia aumentó de manera parcial o total gracias a la utilización de la plataforma Moodle.	9,1%	24,2%	39,4%	15,2%	12,1%
2. Moodle no facilitó el aprendizaje de las distintas temáticas del curso.	12,1%	12,1%	42,4%	18,2%	15,2%
3. Su rendimiento académico mejoró con el apoyo de la plataforma.	12,1%	18,2%	54,5%	9,1%	6,1%
4. La utilización de la plataforma le permitió ser parte de una comunidad de aprendizaje en línea.	21,2%	36,4%	36,4%	3%	3%
5. Los materiales colgados en la plataforma (lecturas, presentaciones, ejemplos, prácticas) no facilitaron los	3%	9,1%	42,4%	30,3%	15,2%

procesos de enseñanza y aprendizaje.					
6. Los foros de discusión le permitieron contar con un espacio para desarrollar sus propias ideas e investigar más sobre las temáticas de cada semana.	21,2%	39,4%	27,3%	9,1%	3%
7. Las sesiones de Chat no facilitaron la comunicación entre todos los participantes del curso.	9,1%	27,3%	36,4%	21,1%	6,1%
8. La comprobación en línea se mostró como un medio complementario de evaluación adecuado.	42,4%	24,2%	27,3%	0%	6,1%
9. Los enlaces externos no contribuyeron a complementar de manera efectiva las temáticas del curso.	3%	3%	45,5%	39,4%	9,1%
10. No llevaría otro curso bajo esta modalidad virtual.	12,1%	12,1%	45,5%	12,1%	18,2%

Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

Esta información evidencia:

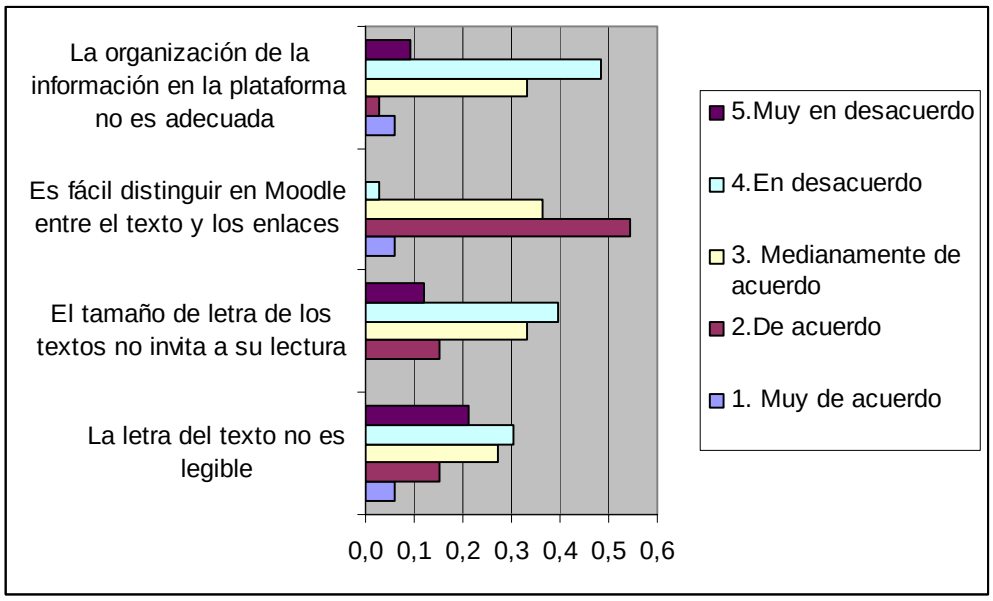
- Hubo un aumento parcial de la motivación gracias a la utilización de la plataforma Moodle, las percepciones positivas alcanzaron un 33.3% mientras que las negativas un 27.3%. Los y las estudiantes en las preguntas abiertas del instrumento, mantuvieron una tendencia fuerte a reconocer en ella un recurso didáctico innovador pero de difícil acceso (al no contar muchos con su propia computadora) y de lenta comunicación. Estos elementos como se mencionó en la sección 4.6, pueden ocasionar serios problemas de frustración a los y las estudiantes haciéndolos tener una perspectiva errada de las verdaderas bondades y limitaciones del aprendizaje a través de Internet.
- Los alumnos consideraron en un 33.4% que Moodle facilitó el aprendizaje de las distintas temáticas del curso, en este sentido, una de las razones principales encontradas (dado este bajo porcentaje) fue la falta de capacitación recibida por los y las estudiantes en la utilización de la plataforma. Este aspecto muestra una gran debilidad, pues la plataforma debió ser lo suficientemente intuitiva y transparente como para que el alumno se integrara con rapidez al aula virtual durante las primeras semanas del curso.

- Existe una percepción relativamente favorable (30.3% a favor y 15.2 en contra) sobre el mejoramiento del rendimiento académico gracias al apoyo de la plataforma, este resultado era algo predecible pues como se describió en la sección 4.2, el aprendizaje virtual no parece favorecer directamente las notas de los y las estudiantes.
- Un 57.4% de los participantes manifestaron apoyar la idea de haber formado parte de una comunidad de aprendizaje virtual, este elemento se vio nutrido gracias a interdisciplinariedad del curso en línea, donde los estudiantes de ambas carreras (Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual) compartieron sus puntos de vista y sus investigaciones de clase.
- Con relación a los materiales de clase y las discusiones desarrolladas en los foros, la percepción de los alumnos fue positiva, con un 12.1% de opiniones en contra en ambos casos. Este hecho respalda las ideas planteadas en la sección 5.4.3 sobre la efectividad del curso en cuanto a los materiales diseñados y su estructura.
- Un 6.1% de los y las estudiantes opinaron que las comprobaciones en línea no son un medio adecuado para evaluar los aprendizajes, el resultado nos sorprendió pues muestra una visión muy positiva de este medio complementario de evaluación y por tanto se podrá seguir utilizando el próximo año.
- Se muestra una alta concentración de alumnos que consideraron los enlaces externos que se hicieron disponibles para el curso, como un material que brindó muy poca colaboración complementaria a las temáticas. El instrumento mostró que esta percepción era muy razonable, dado que la mayor parte de los y las estudiantes tenían muchas limitaciones para estar conectados con frecuencia en el aula virtual.
- El Chat no fue valorado por los participantes como un medio de comunicación efectivo, teniendo una aprobación de un 27.3%. Las razones explícitas de los y las estudiantes en la encuesta se centran en:
    - El Chat de Moodle en la Universidad Nacional de Costa Rica, tiene una velocidad de respuesta muy lenta en condiciones normales de trabajo, tanto de ancho de banda como de hardware.
    - El Chat saca sin ninguna razón aparente al usuario.
    - Se realizaron algunas sesiones de Chat con muchos participantes, diluyendo el aprendizaje en una lluvia de ideas y planteamientos poco coordinados.
- Un 24.2% de los alumnos participantes indicaron que no llevarían otro curso bajo la modalidad virtual, un 45.5% manifestó una posición intermedia y un 30.3% sí lo llevarían. Estos resultados son favorables dado que la mayor parte de los alumnos nunca habían experimentado una modalidad de enseñanza y aprendizaje como ésta y, no contaban con las competencias requeridas para enfrentar el paradigma de la virtualidad, además de sus limitaciones de acceso al aula virtual.

5.4.4.2 EXPERIENCIA UTILIZANDO LA PLATAFORMA MOODLE

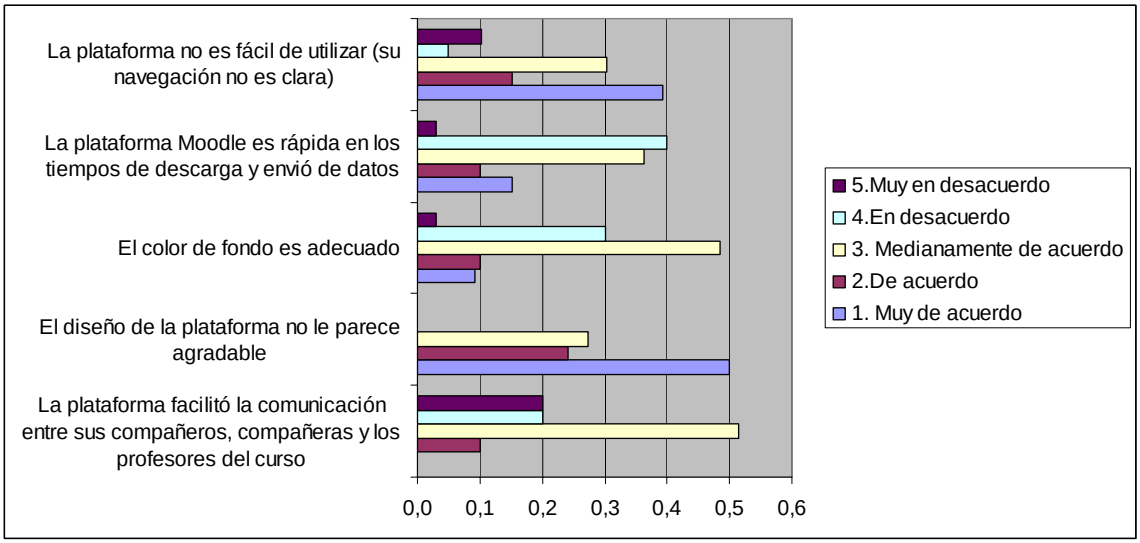
El análisis de la utilización de la plataforma Moodle de la Universidad Nacional de Costa Rica, discriminó fortalezas y debilidades a juicio de los mismos estudiantes. Los siguientes gráficos muestran las frecuencias de respuesta:

Gráfico 5: Fortalezas de Moodle en la UNA



Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

Gráfico 6: Debilidades de Moodle en la UNA



Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

A continuación se sintetizan estos resultados:

- Percepción de los y las estudiantes sobre las fortalezas de Moodle:
    - La organización de la información en la plataforma es adecuada.
    - La letra del texto es legible y su tamaño invita a la lectura.
    - Es fácil distinguir entre el texto y los enlaces.
- Percepción de los y las estudiantes sobre las debilidades de Moodle:
    - No facilita la comunicación horizontal (alumno-profesor) y vertical (alumno-alumno).
    - El diseño de la plataforma no es agradable.
    - El color de fondo no es adecuado.
    - La plataforma no es rápida en los tiempos de descarga.
    - La plataforma no es fácil de utilizar.

5.4.4.3 Experiencia en Términos de las Carencias que se Vivenciaron Durante el Curso

Las carencias vivenciadas por los y las estudiantes durante el curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal"*, se analizaron en términos de las siguientes variables: laboratorios adecuadamente equipados, infraestructura institucional para tener acceso al aula virtual fuera del horario de clase y capacitación en el uso de la plataforma Moodle.

La siguiente tabla muestra el valor mínimo y máximo seleccionado por los alumnos y, la media y la desviación estándar de los datos muestrales:

Tabla 5: Estadísticos descriptivos

	Mínimo	Máximo	Media	Desv. típ.
Carencia de un laboratorio adecuadamente equipado	1	5	2,4848	1,30195
Carencia de un espacio dentro de la universidad para utilizar la plataforma	1	5	2,7273	1,15306
Carencia de capacitación para aprovechar más las potencialidades que brinda la plataforma Moodle	1	5	2,7273	1,17985

Fuente: Cuestionario aplicado al grupo de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual

Estos cálculos estadísticos descriptivos nos permiten concluir que:

- Hay una fuerte tendencia a considerar que no se presentó la carencia de un laboratorio debidamente equipado, efectivamente así fue con el grupo de la carrera Enseñanza de la Matemática, pero no ocurrió lo mismo con el grupo de Artes y Comunicación Visual, esto explica la variabilidad en la distribución de los datos.
- Respecto a la carencia de un espacio dentro de la Universidad para utilizar la plataforma Moodle y aprovechar más las posibilidades que ésta ofrece, hay una alta concentración en las opciones de respuesta *"Muy de acuerdo"*, *"De acuerdo"* y *"Medianamente de acuerdo"*, esto demuestra una deficiencia en la infraestructura universitaria que creemos será solventada única y exclusivamente con el transcurso del tiempo. La carencia manifestada por los y las estudiantes respecto a recibir capacitación en la utilización de Moodle, es un elemento que consideraremos con más cuidado durante la experiencia de implementación del próximo año, pese a ello, se puso a disposición de los alumnos durante el I ciclo 2007 un tutorial de Moodle desarrollado por el programa de UNA Virtual, sin embargo, notamos que estos esfuerzos no fueron suficientes.

En el cuestionario fueron identificadas una serie de categorías en las preguntas abiertas realizadas a los participantes, que nos permitieron como investigadores identificar ventajas y desventajas en el contexto de la División de Educología de la Universidad Nacional, sobre un enfoque educativo basado parcialmente en la virtualidad. Estas ventajas y desventajas se mencionan a continuación:

Percepción de los participantes sobre las ventajas de la virtualidad:

- Accesibilidad a los materiales del curso en cualquier momento y hora, rompiendo con las barreras espacio-temporales.
- Mayor libertad para administrar las tareas y el tiempo.
- No hay que desplazarse para llevar a cabo los trabajos.
- Facilita la comunicación con el docente.
- Ayuda a superar el temor hacia la tecnología.
- Los materiales de clase en línea permiten ahorrar costos al no tener que incurrir en gastos de fotocopias.
- La información se actualiza y cambia con mayor facilidad (únicamente sustituyendo enlaces o subiendo nuevos materiales).
- Obliga al estudiante a tener una mayor participación sobre lo que aprende, al no existir una persona que esté indicando constantemente lo que hay que hacer.
- El uso de este tipo de herramientas tecnológicas, actualiza la visión de los y las estudiantes a circunscribir su labor educativa en otro ámbito; la educación a distancia.
- Los foros permiten discusiones abiertas, menos estresantes y más reflexivas.

- Se aprende a buscar e investigar apropiadamente en Internet.

De las ventajas señaladas por los alumnos, es posible rescatar una débil presencia de una conciencia colectiva sobre la importancia del aprendizaje virtual en el desarrollo de las competencias señaladas en la sección 4.2, lo cuál demuestra que en la Universidad Nacional de Costa Rica, la transición a la virtualidad como un elemento potenciador del aprendizaje autónomo y colaborativo está aún incipiente.

Percepción de los participantes sobre las desventajas de la virtualidad:

- El aprendizaje virtual es un elemento de apoyo, pero no es necesario. Inclusive una de las opiniones expuestas en el instrumento señala: *"Me parece una perdida de tiempo, no es necesario para nuestro futuro"*.
- No todos los y las estudiantes tienen fácil acceso a una computadora con conexión a Internet y en la Universidad se hace muy incómodo conseguir estos recursos.
- La virtualidad es algo propio de la educación a distancia no de una Universidad presencial (como lo es la Universidad Nacional de Costa Rica).
- Ciertos contenidos son difíciles de aprender de forma virtual.
- Se dificulta *"controlar"* si el alumno cumple o no con su trabajo.
- Al ser una experiencia nueva genera indisposición pues trae complicaciones.
- No a todos les gusta o se les facilita aprender de esta forma.
- Las fallas técnicas (electricidad, el sistema) dificultan la eficiencia del proceso.
- No hay contacto humano, es inanimado no se ven reacciones ni gestos.
- Se tiene que ser "muy ordenado" si no se es responsable se pierde con facilidad el curso.
- El costo del equipo requerido para estar conectado al aula virtual es muy alto.
- Se dificulta la aclaración de dudas pues no siempre se interpretan bien las cosas. A este respecto un estudiante señaló: *"lo presencial nunca será superado"*.
- Es necesaria la capacitación sobre el uso del entorno (Moodle).
- Un curso virtual puede tener mayor deserción.

Las percepciones anteriores arrojaron una serie de informaciones divergentes que de manera estructurada nos han permitido perfilar una serie de creencias en el contexto particular de la División de Educología de la Universidad Nacional de Costa Rica; respecto al tema del aprendizaje virtual y al uso de tecnologías de la información y comunicación. Estas creencias nos parecen fundamentales pues de ellas emergen nuevos objetos de estudio, que esperamos abordar el próximo año con la extensión de esta propuesta a una muestra de aproximadamente doscientos cincuenta estudiantes. Algunas de ellas son:

- Creencia 1: en la virtualidad cuesta más la comunicación y en la mayoría de los casos esta comunicación es mala.
- Creencia 2: a los y las estudiantes les gusta trabajar de forma grupal y esto favorece la implementación de un modelo pedagógico basado en comunidades de aprendizaje virtual.
- Creencia 3: en el aprendizaje virtual el y la estudiante pueden cometer fraude más fácilmente.
- Creencia 4: los medios de comunicación asincrónicos dificultan el proceso comunicativo.
- Creencia 5: un medio de comunicación sincrónico es dinámico, un medio de comunicación asincrónico es estático.
- Creencia 6: lo virtual compite con lo presencial.
- Creencia 7: el alumno sabe utilizar la computadora y además de ello disfruta esta actividad.
- Creencia 8: al utilizar nuevas tecnologías de la información y comunicación y, enseñar sus usos y aplicaciones, se prepara para el futuro; no para el presente.
- Creencia 9: los y las estudiantes no le temen a la tecnología.

VI. CONCLUSIONES

El aprendizaje virtual en la Universidad Nacional de Costa Rica, es un paradigma educativo que ha emergido en el campus universitario, como una nueva propuesta educativa que aún no ha sido posible integrar en el currículo de muchas de las carreras que se imparten, entre ellas las carreras de Enseñanza de la Matemática y Enseñanza de las Artes y Comunicación Visual.

El proceso de transición de una universidad presencial a otra que complemente de forma efectiva el uso de entornos de aprendizaje virtual, requiere de una formación previa que a juicio de los participantes de esta investigación, la Universidad Nacional en este momento; no les está proporcionando. Lo anterior impone un importante reto en los enfoques pedagógicos que se utilizan en las aulas presenciales, haciéndose indispensable promover experiencias de aprendizaje donde el alumno aprenda a aprender y aprenda a utilizar desde una perspectiva educativa, ciertas tecnologías de la información y comunicación. Esta investigación ha evidenciado un divorcio entre las metodologías de aprendizaje del aula presencial en la Universidad Nacional de Costa Rica, con las competencias que el alumno universitario necesita para desarrollar habilidades de autoaprendizaje, gestión del conocimiento y trabajo en equipos, requeridas para asumir con éxito el reto de la virtualidad.

La Universidad Nacional debe invertir además, mayores recursos para institucionalizar la virtualidad en el entorno físico universitario, equipando laboratorios y ofreciendo la posibilidad al alumno, de contar con un espacio dentro del campus para realizar sus actividades virtuales.

Respecto al curso *"Recursos Didácticos para el Aprendizaje bajo un enfoque bimodal"*, su diseño presenta coherencia en estructura, materiales y actividades, a raíz de este trabajo fue posible identificar áreas en las cuáles se ha mejorado para su próxima edición, tales como: el cronograma (descargando algunas semanas con excesivo trabajo asignado), énfasis en la elaboración de recursos tradicionales, foros con distintos tipos de consignas (es decir, actividades, para evitar la rutina y el abuso de ciertas estrategias didácticas), mayor cantidad de comprobaciones de lectura (presenciales y en línea), sesiones de Chat con menor cantidad de estudiantes, reestructuración de las tablas de cotejo para las evaluaciones y protocolos bien definidos, entre ellos la firma de un contrato moral al inicio del curso, implicando al alumno en un nivel de compromiso adecuado ante el cumplimiento de las tareas y responsabilidades no presenciales.

En cuanto al entorno de aprendizaje virtual Moodle, la plataforma no es lo suficientemente intuitiva, por tanto se requiere de una capacitación previa y dirigida por un instructor para su utilización efectiva. Por otra parte, el Chat es una de las herramientas que parece tener mayores dificultades técnicas, lo cuál se espera sea remediado poco a poco por el programa UNA Virtual. En conclusión, las principales debilidades de Moodle se centran en: el diseño gráfico, la usabilidad de la plataforma y los tiempos de descarga.

Otro elemento esencial de este proyecto, ha sido la identificación de nuevos objetos de estudio, cuyo abordaje investigativo iniciará el próximo año y se espera dar continuidad de una manera evolucionada en los tres años siguientes.

En principio hemos obtenido resultados puntuales sobre el mejoramiento de la tutoría virtual en el contexto de la División de Educología de la Universidad Nacional y continuaremos con este trabajo estudiando mitos, creencias y verdades colectivas hacia la búsqueda de una mejor comprensión de este fenómeno.

VII. REFERENCIAS

Borges, F. (2005). La Frustración del Estudiante en Línea. [En línea]. **<http://www.uoc.edu/digithum/7/dt/esp/borges.pdf>** [2007, julio 20].

Calderón, K. (2002). La Didáctica de Hoy Concepciones y Aplicaciones. Costa Rica: UNED.

Chiecher, A., Donolo, D. y Rinaudo, M. (2006). Aprender en contextos virtuales por opción u obligación. Revista Cognición, *1*(6), 10-24.

Duart, J. y Sangrà, A. (2000) Aprender en la virtualidad. España: Gedisa.

Ferrandez, A., Sarramona, J. y Tarin. L. (1988). Tecnología Didáctica. Barcelona: CEAC.

Fernández, N. (2006). Estrategias de Enseñanza para Favorecer el Aprendizaje Significativo. Revista Cognición, *1*(6), 12-28.

Global Campus. (2004). Guía Metodológica del Tutor. Colombia: Universidad Sergio Arboleda.

Gros, B. (2005). La construcción del conocimiento en la red: límites y posibilidades. [En línea]. **<http://www.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_05/n5_art_gros.htm>** [2007, agosto 23].

Grupo Borinquen. (1998). Nettiquete. [En línea]. **<http://www.borinquen.org/netique.html>** [2007, julio 30].

Hernández, R. (2004). Ambientes Colaborativos Virtuales de Aprendizaje. Costa Rica: UNA Virtual.

Kearsley, G. (1998). El Profesor Virtual: Un Caso de Estudio Personal. [En línea]. **<http://pignc-ispi.com/articles/distance/kearsley-virtualprofessor.htm>** [2007, agosto 22].

Lameiro, M. y Sánchez, R. (1998). Vículos e Internet. [En línea]. **<http://www.geocities.com/athens/acropolis/5912/vinculo.htm>** [2007, agosto 20].

López, M. (2006). Impacto de las TIC en la Universidad. Revista Cognición, *1*(3), 39-55.

Lozada, C. y Paldao, C. (2003). El adelanto tecnológico al servicio del Potencial Humano: "El Portal Educativo de las Américas". OEA.

Lozano, D. (2005). Comunidades de aprendizaje en red: diseño de un proyecto de entorno colaborativo. [En línea].
<http://www.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_05/n5_art_lozano.htm> [2007, julio 20].

Luque, M. (2007). Formación en Tutoría Virtual Bloque II. Estados Unidos: Portal Educativo de las Américas.

Rotstein, B., Scassa, A., Saíz, C. y Simesen, A. (2006). El Trabajo Colaborativo en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Revista Cognición, *1*(7), 38-45.

Senior, F. (2005). Nuevos Paradigmas para la Educación en Línea. Revista Cognición, *1*(1), 12-27.

Vílchez, E. (2006). E-learning un Nuevo Concepto Educativo Educativo. Memorias del V Festival de Matemática, *1*(1), 276-285.

Wallace, P. (1999). The Psychology of the Internet. New York: Cambridge University Press.

El desarrollo de nociones de variabilidad estadística en profesores de secundaria con apoyo de actividades de simulación.

Jaime García[1]
Ernesto Sánchez[2]

Resumen

La enseñanza de la Estadística ha cobrado gran auge en los últimos años, esto debido a su importancia en la formación general de los estudiantes (Batanero, Godino, Green, Colmes & Vallecillos, 2006).

La importancia de investigar sobre la comprensión de la variabilidad estadística en los estudiantes ha sido fuertemente impulsada en los últimos 10 años; Shaughnessy (1997) fue el pionero en considerar éste concepto como un problema de investigación educativa. Asimismo, destacó una vertiente para la investigación en educación estadística cuando se preguntó "¿Dónde está la investigación [educativa] sobre variabilidad?".

La presente investigación tiene como temática describir la manera en que seis profesores de secundaria modifican sus nociones de variabilidad estadística. Cabe señalar que para este trabajo se consideró la labor de seis profesores y, el seguimiento de los cambios se dio a través de actividades en las que resolvieron un diagnóstico y exploraron situaciones-problema en el contexto de distribuciones empíricas (distribución uniforme y binomial). Además dichas actividades fueron diseñadas para llevarse a cabo con un software educativo de estadística (Probability Explorer y Fathom).

Palabras clave: Variabilidad estadística; Estructura; Herramientas Tecnológicas.

Planteamiento del problema

Hasta el momento, los estudios educativos sobre la variabilidad estadística (Reading & Shaughnessy, 2004; Watson, Kelly, Callingham, Shaughnessy, 2003) han tenido como objetivo, caracterizar la manera en que los estudiantes perciben la variabilidad estadística; sin embargo, no hay suficientes investigaciones que aborden el problema de su comprensión y de cómo superar las nociones erróneas detectadas sobre dicho tema. De hecho, se han hecho pocos estudios semejantes con profesores a los ya realizados con estudiantes. Con base en lo anterior se percibe que hace falta explorar las posibilidades que ofrecen las nuevas herramientas tecnológicas (Probability Explorer, Fathom) para crear situaciones conflictivas en las que se comparen predicciones con resultados de simulaciones.

Ahora bien, el objetivo principal del presente trabajo es observar y describir la manera en que modifican los profesores de secundaria sus nociones de variabilidad estadística después de realizar actividades dentro de un contexto de distribuciones empíricas apoyadas con un software educativo de estadística (Probability Explorer, Fathom). A manera de hipótesis se supone un modelo de tres etapas de evolución del pensamiento de la noción intuitiva de la variabilidad estadística en situaciones-problema dentro de un contexto de distribuciones empíricas (distribución uniforme y binomial). En la primera etapa, los profesores de secundaria comienzan a percibir intuitivamente la variabilidad estadística frente a una distribución de datos centrándose en la estructura de los datos (uni-estructural), enseguida se centran en la dispersión (uni-estructural), después tratan de integrar ambas componentes pero sin relacionarlas de manera conveniente (multi-estructural), y por ultimo, en una etapa posterior, las coordinan estableciendo una relación conveniente entre ellas (relacional).

Con base en la hipótesis anterior y el objetivo general de observar la manera en que los profesores de secundaria modifican sus nociones de variabilidad estadística, se establecen las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué nivel de percepción de la variabilidad estadística tienen los profesores de secundaria frente a distribuciones de datos generados por situaciones de azar en las que subyacen distribuciones básicas (distribución uniforme y binomial)? ¿De qué manera se modifican sus nociones sobre variabilidad

[1] Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav, México.
[2] DME, Cinvestav, México., EPO No. 92, Edo. de México.

estadística, en distribuciones empíricas (uniformes y binomiales), con el uso de la tecnología? Para contestarnos estas interrogantes, se retomaron algunas preguntas del cuestionario de exploración elaborado por Hernández (2005), diseñando con ellas 5 actividades guiadas para llevarse a cabo con un software educativo de estadística (Probality Explorer, Fathom).

Marco Teórico

El modelo de Clasificación utilizado en esta investigación, para explorar y analizar las nociones sobre Variabilidad Estadística en profesores de secundaria, se basa en el modelo Multimodal y la taxonomía SOLO desarrollados por Biggs y Collis (1991). Estos autores postulan cuatro niveles de pensamiento para clasificar conductas y razonamientos de los estudiantes: pre-estructural, respuestas fuera de contexto o hacen referencia a sus experiencias; uni-estructural, respuestas donde se centran en la estructura o variabilidad de los datos (de manera excluyente); multi-estructural, respuestas donde se integran ambas componentes pero sin relacionarlas de manera conveniente; y relacional, respuestas donde coordinan ambas componentes estableciendo una relación conveniente entre ellas. Se establece el término Estructura para indicar la tendencia central del conjunto de datos o distribución que se este analizando; y el término Variabilidad para indicar la manifestación de cambio de una entidad o fenómeno que se observa, es decir, lo que esta variando. La estadística se preocupa por diferenciar los diferentes tipos de variabilidad que conforman el cambio que manifiesta un fenómeno; a grosso modo, se puede distinguir la variabilidad que obedece leyes definidas o funcionales, es decir, que obedece a una estructura; y la variabilidad caótica, desordenada e impredecible, es decir, aleatoria. La *variación* es una medida de la variabilidad que integra tanto la aleatoriedad como la estructura.

Los términos Estructura y Variabilidad también se utilizan para definir ciertas etapas de los niveles Uni-Estructural y Multi-Estructural del modelo, que corresponden justamente a la identificación de estos aspectos por parte de los profesores: etapa de estructura, basan sus respuestas en conceptos probabilísticos o estadísticos dan como respuestas valores concretos, particularmente el valor esperado en las preguntas de probabilidad y el caso ideal en las preguntas sobre distribución; etapa de variabilidad, consideran que cualquier cosa puede pasar debido al azar, por lo que dan intervalos que van del máximo al mínimo o una parte que incluye valores extremos; etapa de Estructura-Variabilidad, toman en cuenta la parte de Estructura para determinar un valor particular, y considerando la variabilidad, sus respuestas incluyen intervalos alrededor del valor esperado, o valores únicos cercanos a él; etapa relacional, toman en cuenta la parte de Estructura y la parte de la Variabilidad para dar un intervalo alrededor del valor esperado, pero además dan una medida de probabilidad o confianza.

Metodología

Participantes. Los sujetos de este estudio fueron seis profesores de secundaria de escuelas públicas del Estado de México, con larga experiencia en la docencia, inscritos en la Maestria en Educación, Especialidad en Matemáticas, Cinvestav. En la siguiente tabla se muestran algunas características básicas de los participantes, quienes se identificarán con pseudónimos.

Alumno-docente	Años dentro del sistema educativo	Años impartiendo matemáticas	Grado en el que imparte clase	Grado Académico
Alonso	14	2	2do. y 3ro.	Maestro en Educación
Genaro	14	2	2do. y 3ro.	Ingeniero Geólogo
Gimeno	6	2	3ro.	Maestro Normalista
Lorenzo	8	1	1ro.	Ingeniero Civil
Mónica	11	11	1ro.	Lic. en Administración
Weber	11	11	1ro.	Ing. en Comunicación y Electrónica

En cuestionamientos personales se obtuvo la información que sólo el profesor Alonso imparte el temario completo correspondiente a los bloques de Presentación y Tratamiento de la Información y Probabilidad

del Programa Oficial de la Secretaría de Educación Publica (SEP) de México; mientras que el profesor Genaro imparte parcialmente el temario, y los demás no alcanzan a impartirlo.

Instrumentos. Cinco cuestionarios diagnósticos, cinco actividades guiadas para trabajar con software (2 de Probability Explorer y 3 de Fathom); cuatro cuestionarios posteriores en los que se confrontaban los resultados finales de la actividad guiada y el cuestionario diagnóstico; un protocolo de una entrevista final. Por las limitaciones de espacio, en este informe sólo se expondrán y comentarán las partes de cada actividad concernientes al problema del lanzamiento de 60 veces un dado, el cual se presenta enseguida:

Actividad A (Fragmento)
Imagina que lanzas 60 veces un dado. Llena la siguiente tabla escribiendo cuantas veces crees que saldrá cada número.

Cara del dado	**Num. de veces**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	**60**

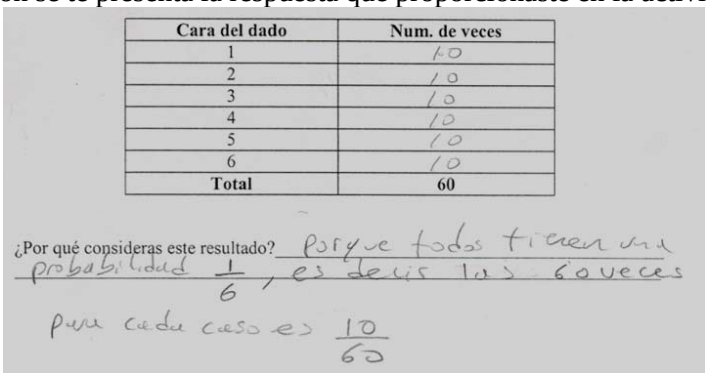
¿Por qué consideras este resultado?_____

Como se mencionó anteriormente, los cuestionarios posteriores confrontaban lo que los profesores respondían en el cuestionario previo y lo que obtenían en la actividad, elaborándose después de respondido el cuestionario y realizada la actividad; por ejemplo, el siguiente es el primer cuestionario posterior de Alonso:

Cuestionario posterior Actividad A de Genaro

Recuerda el problema: *Imagina que lanzas 60 veces un dado. Llena la siguiente tabla escribiendo cuantas veces crees que saldrá cada número.*

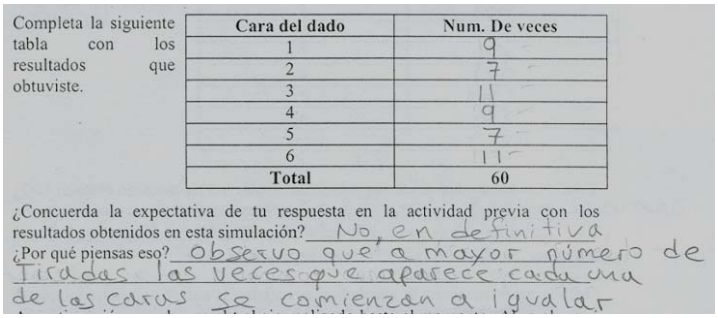
- A continuación se te presenta la respuesta que proporcionaste en la actividad previa.



Cara del dado	Num. de veces
1	10
2	10
3	10
4	10
5	10
6	10
Total	60

¿Por qué consideras este resultado? porque todos tienen una probabilidad $\frac{1}{6}$, es decir los 60 veces para cada caso es $\frac{10}{60}$

- Ahora, se te muestra la respuesta que obtuviste con la simulación en el Probability Explorer.



Completa la siguiente tabla con los resultados que obtuviste.

Cara del dado	Num. De veces
1	9
2	7
3	11
4	9
5	7
6	11
Total	60

¿Concuerda la expectativa de tu respuesta en la actividad previa con los resultados obtenidos en esta simulación? No, en definitiva

¿Por qué piensas eso? observo que a mayor número de Tiradas las veces que aparece cada una de las caras se comienzan a igualar

- ¿Por qué no concuerdan tus resultados de la actividad previa con los obtenidos en la simulación?_____

- Si te volviera a solicitar que llenaras de nuevo la tabla, ¿Qué contestarías?

(Tabla para ser llenada)

- ¿Por qué consideras este resultado?_____

Protocolo de la entrevista

El protocolo de la entrevista se diseñó con el objetivo de estudiar el nivel de percepción de la variabilidad estadística que tienen los alumnos-docentes participantes en estudio, frente a distribuciones de datos generados por situaciones de azar en las que subyacen distribuciones básicas. Para ello se considero la siguiente situación.

Se tiene una urna con 3 bolas cada una tiene una letra (A, B y C). Imagina que sacas una bola sin ver, anotas en una tabla la letra que corresponde a la bola y la regresas a la urna. Imagina que repites el experimento 30 veces. Llena la siguiente tabla escribiendo cuántas veces crees que saldrá cada bola.

Bola	**Num. de veces**
A	
B	
C	
Total	**30**

¿Por qué consideras este resultado?_____

¿Cómo consideras el evento de obtener ___ veces la bola A, ___ la bola B, y ___ la bola C?

Imposible	Casi imposible	Muy poco posible
Poco posible	Igualmente posible	Posible
Muy posible	Casi siempre posible	Siempre posible

¿Con qué probabilidad, o nivel de confianza, aproximadamente se obtiene la bola A, B o C dentro del intervalo _____, el cual intuitivamente estás proporcionando?_____

[Se realiza una simulación con Fathom. Se le dan las instrucciones]

¿Cuántas veces se obtuvo cada bola?

(Tabla para ser llenada)

¿Los resultados de la simulación anterior era lo que esperabas? ¿Por qué?_____

[Se dan instrucciones para realizar 1000 repeticiones del experimento y representar en un histograma cuántas veces ocurre el evento particular que el alumno-docente proporcionó en el cuestionario] Se repiten las preguntas del paso anterior.

[Se dan instrucciones para realizar 1000 repeticiones del experimento y representar en un histograma cuántas veces ocurre el evento definido con un intervalo para la frecuencia de cada bola; es decir, se hace otra simulación para estimar la probabilidad de que ocurra un evento definido con un intervalo]

¿Con qué probabilidad (o nivel de confianza) aproximadamente ocurre el evento de obtener entre _____ y _____ veces la bola *A*, la bola *B* y la bola *C*, al extraer 30 veces una bola de una urna que contiene 3 bolas (*A*, *B* y *C*) con repetición?_____

¿Cómo consideras este evento? Marca tu respuesta.

Imposible	Casi imposible	Muy poco posible
Poco posible	Igualmente posible	Posible
Muy posible	Casi siempre posible	Siempre posible

Justifica tu respuesta: _____

Procedimientos. Los anteriores instrumentos se aplicaron en cuatro etapas, las cuales se describen a continuación: 1) Los profesores contestaron el cuestionario previo, cuya finalidad era obtener información acerca de sus nociones sobre variabilidad estadística en distribuciones empíricas. 2) Los profesores desarrollaron una actividad guiada, cuyo objetivo consistía en utilizar el software para resolver las tareas o preguntas del cuestionario mediante simulación estadística. 3) Los profesores contestaron un cuestionario posterior, cuyo propósito era contrastar las respuestas del cuestionario previo con las obtenidas en la actividad guiada, se esperaba crear un conflicto cognitivo que hiciera reflexionar al profesor sobre su comprensión de las nociones involucradas. Debían buscar justificaciones a las diferentes respuestas (antes y después del uso del software) y evaluar la variabilidad estadística. 4) Por último, con el objetivo de obtener información adicional para el análisis de datos, se realizó una entrevista siguiendo el protocolo descrito; la cual fue filmada con una duración aproximada de una hora. Todo lo anterior se hizo en 6 sesiones de 4 horas cada una, incluyendo la entrevista. En cada sesión se aplicó el cuestionario previo y la actividad guiada; el cuestionario posterior de cada actividad se aplicó en la sesión siguiente.

Resultados

En la siguiente tablas se describen las respuestas y razones de los seis profesores a la pregunta de la Actividad A. Se podrá observar que al principio sus respuestas se centran en la estructura de la situación (Tabla 1), es decir, en el hecho de que la distribución que subyace al experimento es uniforme. Durante las sesiones de trabajo, una vez realizadas algunas simulaciones ellos admiten que los resultados van a tener variación (porque así ocurren en la simulación) y lo explican apelando a que son fenómenos de azar (Tabla 2), sin aludir a la estructura. Finalmente, después de haber experimentado, vuelven a hacer una predicción en la que la mayoría prácticamente vuelve a proponer distribuciones uniformes, con leves variaciones (Tabla 3).

Alumno-docente	Secuencia propuesta	Razón
Alonso	10, 10, 10, 10, 10, 10	Porque todos los eventos deben tener la misma probabilidad
Genaro	10, 10, 10, 10, 10, 10	Porque todos tienen una probabilidad de $\frac{1}{6}$, es decir, las 60 veces para cada caso es $\frac{10}{60}$
Gimeno	10, 10, 10, 10, 10, 10	X que tienen la misma probabilidad todos los números
Lorenzo	5, 15, 5, 15, 5, 15	Es mas probable que se repitan con mas constancia una serie de 3 números cualquiera
Mónica	10, 10, 10, 10, 10, 10	Porque cada cara tiene la misma probabilidad
Weber	10, 10, 10, 10, 10, 10	Porque todas las caras para mí tienen la misma probabilidad de suceder.

Tabla 1. Respuestas al previo de la Actividad A

Alumno-docente	Resultado Simulado	¿Concuerdan los resultados obtenidos con lo que habías previsto? ¿Por qué?
Alonso	10, 11, 7, 13, 5, 14	Sí; por que siguen siendo generados aleatoriamente (misma posibilidad de ocurrir)
Genaro	9, 7, 11, 9, 7, 11	No, en definitiva; observo que a mayor número de tiradas las veces que aparece cada una de las caras se comienzan a igualar.
Gimeno	7, 17, 10, 7, 8, 11	Si; sigo pensando que es cuestión de azar ahora el dos sólo aumento 6 veces y no por tener la mayor cantidad. Necesariamente en este ejercicio cayo más veces
Lorenzo	10, 12, 9, 10, 6, 13	Si; Por que se sigue conservando la simulación y son tiros al azar. Ahora aquí predomina el "6"
Mónica	6, 11, 10, 10, 11, 12	No; Las probabilidades para cada cara no son las mismas, pueden cambiar en cada lanzamiento.
Weber	13, 12, 6, 13, 13, 3	No; Debido a que propuse que todos tenían la misma probabilidad sin realizar la actividad, con esto se puede comprobar cual sería una de las posibles respuestas.

Tabla 2. Respuestas durante la Actividad A

Observamos que tres profesores no reconocen que los resultados de la simulación difieren de los previstos, mientras que los otros tres sí lo admiten. La razón que ofrecen los primeros se sustenta en que la experiencia es aleatoria; sin embargo, en su predicción no reflejaron la aleatoriedad. La anterior experiencia los lleva a admitir que una distribución uniforme no es la predicción más conveniente, todos admiten que habrá variación en los resultados. A pesar de ese reconocimiento, los profesores no cuentan con instrumentos que les permitan expresar de forma apropiada la variación ni tampoco a cuantificarla de algún modo. Por ejemplo, después de que han simulado muchas veces la experiencia se les pide que sugieran qué puede ocurrir cuando se lanza 1000 veces el dado, dan las siguientes secuencias:

Alonso	Genaro	Gimeno	Lorenzo	Mónica	Weber
165, 167, 167, 168, 164, 169	164, 166, 165, 167, 168, 170	160, 173, 170, 173, 168, 156	167, 166, 167, 166, 167, 167	180, 170, 160, 170, 160, 160	50, 70, 350, 400, 40, 60
Rango = 5	Rango = 6	Rango = 17	Rango = 1	Rango = 20	Rango = 350

Tabla 3. Respuestas durante la Actividad A

Los profesores Alonso, Genaro y Lorenzo permiten una variación muy estrecha; aunque reconocen que habrá variación suponen que ésta se va reduciendo conforme el número de repeticiones aumenta, de ahí que sugieran distribuciones casi uniformes. En el otro extremo se encuentra Weber quien permite demasiada variación.

Excepto quizá por Weber, quien está más centrado en la variabilidad, los demás profesores oscilan entre la variabilidad y la estructura sin lograr conciliarlas adecuadamente. En efecto, primero sugieren una distribución uniforme porque todas las caras tienen probabilidad 1/6, posteriormente, sugieren que sí esperaban las secuencias desordenadas porque al fin y al cabo son obtenidas al azar. Tres estudiantes no reconocieron un conflicto en esas dos posiciones, precisamente porque están de acuerdo en que hay estructura y también que hay variación, pero no la pueden expresar de manera conjunta; al final hacen un intento, desafortunado, de conciliación proponiendo distribuciones casi uniformes.

Durante las actividades emergieron evidencias que permiten conjeturar dos grandes dificultades que impiden a los maestros avanzar en la construcción de la noción de variación. La primera es la tendencia a creer que las respuestas tienen que ser determinadas; se puede observar que en todas las predicciones que se les piden, los profesores expresan lo que va a ocurrir mediante una secuencia determinada y no dando rangos dentro de los cuales esperar la respuesta. La segunda, es una idea contraria de la ley de los grandes números que supone que hay una convergencia en valores absolutos y no en valores relativos como lo formula realmente dicha ley. Para apoyar tales observaciones incluiremos algunos fragmentos de la entrevista con Genaro, en las que podremos apreciar cómo se manifiestan sus ideas acerca de esos dos puntos.

Se entrevistaron a los seis profesores con base en el protocolo expuesto en la Metodología; de esas entrevistas se han elegido comentar parte de lo ocurrido con Genaro. Se eligió este profesor porque se ubica en un lugar intermedio en lo que respecta a su comprensión de las situaciones estudiadas. Los profesores Mónica y Weber tienen ideas en algunos aspectos más inconsistentes que las de Genaro, mientras que Alonso, Luís y Gimeno comparten las mismas intuiciones pero en algunos casos están más avanzados. Se considera entonces que la manera de pensar de Genaro es representativa del grupo de profesores entrevistados. Durante la entrevista se observa que Genaro no tiene claridad de la diferencia entre eventos singulares y no singulares; le cuesta trabajo entender y manejar explícitamente los eventos no singulares, en particular, el evento sugerido por el entrevistador que se puede expresar como "que las frecuencias estén entre 7 y 12"; expresa algunas ideas erróneas sobre la Ley de los grandes números. Al final, después de mucho trabajo, se comienza a percibir una comprensión y manejo de dicho evento.

Conclusiones

Su primera reacción frente a la experiencia de repetir 60 veces el lanzamiento del dado fue prácticamente determinista al creer en la posibilidad de obtener la secuencia uniforme. La única excepción fue Lorenzo, pero su propuesta formada por 5 y 15 alternados es tan determinista como la distribución uniforme que propusieron los otros. Es decir, asocian el azar sólo a situaciones simples pero no lo saben interpretar en situaciones más complejas y se olvidan de él para caer en situaciones deterministas.

La etapa de confrontación de sus resultados con los de la simulación permite a algunos alumnos-docentes considerar otros aspectos del fenómeno, mediante los conflictos que enfrentan, por ejemplo, Genaro,

Mónica y Weber reconocen la diferencia de la manera en que pensaron que ocurrirían los resultados con lo que realmente ocurrió. Esto los llevó a cuestionar su manera de pensar en el fenómeno. En cambio, Alonso, Lorenzo y Gimeno se las arreglaron para no ver la contradicción, como si al haber propuesto la distribución uniforme hubieran pensado "el resultado será próximo a la distribución uniforme pero no tiene que ser exactamente la uniforme", sin embargo, no lo dijeron así; esta interpretación se deduce de sus respuestas, por ejemplo, A dice que sí es lo que esperaba porque la secuencia es generada aleatoriamente. En cierta forma, Genaro, Mónica y Weber fueron más receptivos al aprendizaje porque son los que tenían intuiciones más ingenuas y menos conocimiento formal. En cambio Alonso, no es receptivo a las diferencias porque, probablemente, ya tenía las intuiciones pero no las supo expresar. Es por eso que Alonso se va ubicando en un nivel multiestructural.

Al final de la actividad A, con relación a su manera de contender con la variación en la situación planteada, se distinguen tres grupos de dos estudiantes cada uno: dos que se devuelven al reconocimiento de la omnipresencia del azar (Mónica y Gimeno), dos que se mantienen defendiendo el dominio de la estructura (Weber y Lorenzo) y dos que tratan de conciliar ambos aspectos recurriendo a otros conceptos estadísticos como el de independencia y tamaño de la muestra (Alonso y Genaro).

En conclusión, el uso de las herramientas tecnológicas crea la posibilidad de que los estudiantes entiendan de manera más profunda el sentido de la variabilidad y de la predicción en estadística. Comprendieron que en estadística no se puede predecir eventos singulares sino que se deben dar intervalos en los que pueden caer los resultados; es decir, los estudiantes lograron relacionar la estructura con la aleatoriedad de los datos.

Referencias

Batanero, C., (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada, España: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada.

Biggs, J. B.; Collis, K. F., (1991). Multimodal learning and the quality if intelligence behavior. H. A. Rowe (ed.). *Intelligence, reconceptualization and measurement*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hernández, G. (2005). Exploración sobre el concepto de variabilidad estadística de alumnos de tercer año de secundaria. Tesis de Maestría, Cinvestav – IPN, D. F., México.

Makar, K. & Canada, D. (2005). Preservice teachers' conceptions of variation. En Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, pp. 273-280. Melbourne: PME.

Reading, C.; Lawrie, L. (2004). Using SOLO to analyze group responses. En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad, (Eds.). *Proceedings of the 28th International Group for Psychology Mathematics Education* (Vol. 3; pp. 193-200). Gergen, Norway: Gergen University College.

Reading, C., & Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Shaughnessy, J. M., (1997), Missed Opportunities in Research on the Teaching and Learning of Data and Chance, en F. Biddulph; K. Carr (eds) *People in Mathematics Education*, Mathematics Education Research Group of Australia, Waikato, New Zeland, Vol. 1, pp. 177 –197.

Watson, Kelly, Callingham, Shaughnessy, (2003). The measurement of school students' understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education Science and Technology*, 34, No. 1, pp. 1 –19.

El teatro como herramienta metodológica en la Enseñanza de la Matemática

Marianela Alpízar Vargas[1]
Grethel Claudio Gutiérrez[2]
Yessenia Rodríguez Alfaro[3]

Resumen

La enseñanza de la matemática, actualmente, afronta uno de los desafíos más importantes en su historia, buscar estrategias que logren capturar el interés de los estudiantes así como grabar en sus memorias los conocimientos básicos de la materia.

Nace por tal motivo, la inquietud y el deseo de contribuir al desarrollo de la enseñanza de la matemática, utilizando al teatro como medio de presentación de contenidos o conceptos matemáticos que puedan ser entendidos o asimilados por los estudiantes con mayor éxito y facilidad, a la vez cambiar la visión y expectativa de los estudiantes frente a la matemática.

Palabras clave:
Teatro, herramienta metodológica, enseñanza de la Matemática**.**

Cuando se piensa en obras de teatro, pueden venir a la memoria obras como *Hamlet* de Shakespeare, *La Casa* por Daniel Gallegos, *Las Fisgonas de Paso Ancho* de Samuel Rovinsky, o bien *Los árboles mueren de pie* por Alejandro Casona. Se presentan imágenes de un escenario, los actores y la escenografía, el fondo musical, o por qué no ir más allá, el nerviosismo de quien cumple, el papel de un personaje en el drama.

El teatro ha sido muy útil para dramatizar situaciones actuales e históricas de la vida cotidiana, para recordar hechos, como la Batalla de Rivas, el Día de la Independencia, y otros que aún quedan guardados en nuestra memoria, o bien para la enseñanza de algunos temas, especialmente, en Estudios Sociales y Español, logrando una gran aceptación por parte del público y de los participantes.
Por otro lado, si se piensa en matemática, vienen a la mente números, símbolos, fórmulas, cálculos, figuras, libros, etc. Es difícil percibir a la enseñanza de la matemática de una forma creativa, divertida o fácil, al contrario, muchos ven a la matemática como una ciencia aburrida, difícil y con una enseñanza magistral que no pasa de la utilización de la pizarra o de un libro.

Si se intentaran unir el teatro con la matemática, difícilmente, se podría imaginar algo coherente, incluso se pensaría que no tienen relación alguna. En el mejor de los casos surgiría la pregunta si sería posible escenificar conceptos matemáticos de modo que la puesta en escena sea divertida, apasionante o atractiva. Pues, para Muñoz y.

Muñoz y Roldán (2005), mencionan que al igual que cuando Shakespeare escribió Hamlet, hubo que esperar a que un actor le infundiese vida para hacer llegar al público las esencias de su personalidad desde un escenario, así ellos tuvieron que seleccionar conceptos matemáticos que se iban a utilizar como personajes totalmente fuera de lo cotidiano, como los logaritmos, las asíntotas o las potencias y darles vida humana. De esta forma han encontrado un nuevo canal de comunicación que no desvirtúa los personajes pero los hace más atractivos y emocionantes que cuando están confinados y amordazados en la estática bidimensionalidad de las hojas de los libros de texto o de las pantallas de las computadoras.
En países como España, Italia, Portugal, Estados Unidos, Brasil y Argentina, se han escenificando a matemáticos importantes en la historia y sus descubrimientos, y también a elementos matemáticos, donde los actores han sido los mismos estudiantes de secundaria y universidad, o actores de profesión Muñoz y

[1] Universidad Nacional, Costa Rica; malvacr@yahoo.com
[2] Liceo de Belén. Estudiante Universidad Nacional, Costa Rica; greclaudio@costarricense.cr
[3] Colegio Ambientalista El Roble. Estudiante Universidad Nacional, Costa Rica; yesserzr@gmail.com-

Roldán (2005). Sin embargo, en Costa Rica se conoce muy poco o nada sobre obras de teatro con temas referidos a matemática.

Ruiz, Alfaro, y Gamboa (2003), afirman: "lograr que los estudiantes den sentido a las matemáticas, se familiaricen con ellas y encuentren interés en ellas, se logra utilizando escaleras y andamios pedagógicos y didácticos apropiados, capaces de motivar, entusiasmar y provocar satisfacción con las matemáticas" (p. 291).

El teatro puede ser una de esas escaleras que acerque a los estudiantes a un mundo matemático lleno de vida, de sentimientos y acciones, donde se logren identificar con las situaciones de los personajes, y en el que se puede aprender no solo sobre matemática sino también sobre valores y relaciones sociales, alejando así, la idea de una matemática aburrida, difícil y sin relación con la vida cotidiana.

La Educación

Indudablemente, el sistema educativo juega un papel importante en el fortalecimiento del nivel cultural de un pueblo. Es por ello que es necesario que todos los involucrados en dicho sistema colaboren y pongan de su parte para avanzar.

Uno de los ejes indispensables es el profesor, el cual debe conocer y manejar muchos recursos didácticos para aplicar el que le parezca más apropiado en función del tema que explica, de la actitud y aptitudes del alumnado presente en su aula y de los objetivos que uno se plantee en ese lugar y en ese momento. (Balbuena, 2001)

En el ejercicio del arte de educar, que uno jamás llega a dominar, es fundamental mantener una actitud abierta al mundo, crítica y creativa. La divulgación de las matemáticas y su enseñanza requieren un esfuerzo continuo por parte de sus mediadores (profesores y medios de comunicación) en la búsqueda de nuevas vías de investigación que nos acerquen a esa utopía de una auténtica formación humana y nos alejen, consiguientemente, de otras prácticas más bien alienantes que a veces convierten esta noble profesión en herramienta de frustración intelectual y humana. (Roldán, 2002)

Hay que hacer un esfuerzo por desterrar convicciones como que las matemáticas son una asignatura para la élite de los muy inteligentes. El teatro puede crear un espacio inédito, un contexto inhabitual, dentro del cual sea factible el desarrollo de los personajes matemáticos más insólitos y variopintos. (Roldán, 2002)

El Teatro

Muchos teóricos y estudiosos del teatro, lo han definido desde sus propias perspectivas, experiencias y puntos de vista, respondiendo a sus propios intereses prácticos y cognitivos. El teatro desde sus orígenes milenarios no es más que un laboratorio donde se analiza el alma humana. La complejidad inherente al devenir humano encuentra en el teatro un medio de expresión fascinante, un medio de comunicación sorprendente. A lo largo de la historia el teatro ha encontrado una diversidad de orientaciones posibles: el teatro dramático, el teatro épico, el teatro político, el del absurdo, la comedia, etc. Los autores teatrales crean personajes e historias apasionantes que vienen a reflejar las peculiaridades del comportamiento humano. (Muñoz y Roldán, 2005)

Valcarcel (2004), señala que a lo largo de los siglos, el teatro ha sido un vehículo cultural, una dilatada puesta en escena de los destinos humanos desde la perspectiva de los grandes autores, sensible al potencial de la comunicación. El teatro incorpora a la sociedad su peculiar evolución desde el sentir de los ciudadanos, sus inquietudes, valores, sentimientos, innumerables lenguajes con que contar la realidad. Puede ser clásico, contemporáneo, musical, alternativo, entre otros, con el fin de situar al espectador en un espacio único capaz de unir dos grandes antagonismos: ficción y realidad.

El Teatro en La Enseñanza

Según Queiros (2006) el Teatro Educativo o Teatro Pedagógico, consiste en llevar al salón de clases las técnicas de teatro y aplicarlas en la comunicación del conocimiento. El teatro como instrumento pedagógico es un poderoso medio para grabar en la memoria del estudiante un determinado tema, o para llevarlo, a través de un impacto emocional, a reflexionar sobre determinado aspecto moral.

El teatro educativo es una manera de "aprender divirtiéndose". Ofrece a la comunidad formas de conocimiento inmediato acerca de la realidad, del ambiente, conductas y sistemas de valores, mediante la comunicación del estudiante con su circunstancia social. Muestra la razón y la finalidad de la comunicación en el género humano; afirma en el estudiante el concepto de que la comunicación tiene una supremacía jerárquica sobre otros valores humanos y que mediante la comunicación se emprende la búsqueda de los valores que regirán su vida. Incorpora valores a su vida personal y social, tanto de tipo ético como político. Finalmente, es una estrategia innovadora para generar una respuesta a la actual falta de motivación de los estudiantes. (Fundación Crisanto, 2005)

El Teatro en La Enseñanza en Costa Rica

Chacón, Díaz y Núñez (2002), mencionan que: "En Costa Rica a partir de la segunda mitad del siglo XX, toma fuerza la propuesta de utilizar el teatro como instrumento mediador en la enseñanza, sin embargo, no aparece identificado y sistematizado para poder incorporarlo en un proceso de planeamiento real en concordancia con la práctica docente" (p. 7), es decir, las obras se quedan en un plano meramente literario o a lo sumo en inquietudes de índole teórico, donde la decisión de tomar en cuenta el teatro en el proceso académico surge de una inclinación muy personal y en ocasiones espontánea.

Como instrumento o técnica didáctica en el campo educativo, el teatro ha perdido fuerza por causa del enfoque tecnocrático y academicista de éste. Chacón, Díaz y Núñez (2002) señalan:
"Los estudiantes están deseosos de ser protagonistas de su propio aprendizaje y creen que la mejor manera es participando de actividades dinámicas, que les permitan expresar sus ideas, conocimientos y sentimientos, o en aquellas en las que puedan experimentar por sí mismos e interactuar con sus similares. Estas experiencias les producen placer por el aprendizaje, elemento que viene a potenciar sus posibilidades". (p. 78)

El teatro atrae espectadores de todas las edades y siembra en ellos enseñanzas, recuerdos e incluso deseos por participar. Debido a su flexibilidad, el teatro puede ser utilizado en todos los ciclos y materias al margen de las posibilidades tecnológicas, económicas y sociales, según la realidad de los centros educativos.

El Teatro en La Enseñanza de la Matemática

Las obras de teatro, no sólo se han presentado para la literatura o la historia. Actualmente, se han utilizado obras con temas de matemática para la enseñanza de ésta, a todos los niveles de la educación.
En los montajes teatrales es posible encontrar experiencias donde se presentan aspectos de la vida cotidiana relacionadas con las matemáticas, en ellas los actores representan personajes que presentan sus antipatías o predilecciones por las matemáticas argumentando sus sentimientos, por ejemplo, en Colombia el guión de una pequeña obra donde un profesor hace ver a uno de sus alumnos incrédulo como las matemáticas son importantes en la vida cotidiana. Se citan a continuación algunas de las obras escritas por docentes y personas interesadas en el papel del teatro en la enseñanza, y aplicadas en diversos entornos.

Una aproximación al teatro matemático puede consistir en escenificar la historia real de algún matemático concreto (Galois, Euler, Descartes, entre otros) o de algún descubrimiento importante en ésta ciencia. Este tipo de obras son las más conocidas o usadas para contextualizar la situación o para introducir un tema; un ejemplo concreto es el texto de un pequeño montaje escrito y realizado por la profesora argentina Victoria Ponza (Ponza, 1996) junto con sus estudiantes, con el título *De lo que sucedió en la Biblioteca de Alejandría, de algunas discusiones entre sabios, dioses, musas y muchas cosas más*. En dicha pieza

teatral, Euclides y Eratóstenes junto con algunas musas griegas declaman dentro del marco incomparable de la Biblioteca de Alejandría. Muñoz y Roldán (2005).

Otra experiencia destacable con estudiantes de secundaria en un montaje de teatro matemático, es el caso de los números naturales y decimales que se desenvuelven por el escenario, en *La creación de los números*, una pieza teatral escrita por el profesor canario Luis Balbuena (Balbuena; 2001). Aquí se cuenta que el número 1, de género femenino, "se ve forzada a repetirse" dando lugar así a todos los números naturales entre el 1 y el 9, donde con la aparición del cero resulta posible la creación de los restantes números, tanto naturales como negativos, decimales o sus equivalentes fraccionarios, reflejando a la vez la situación que viven como una familia.

Claudi Alsina organizó, en la década de los noventa, unas colonias de matemáticas en Torrebonica donde cada grupo hacía una "estancia de motivación matemática" y representaba algunas mini-obras teatrales escritas por él mismo y donde el interés también estaba en la coreografía. Algunas de esas obras llevaban por título: *La ciutat sense atzar, L`següent si us plau, Miss figura de L´any* y *La Bit y el Brujo de las letras*. Esta última obra relata el encuentro de una niña que ama las matemáticas con un brujo que ama las letras y odia los números.

En Estados Unidos, Rosenblum y Sydney (2000), montaron un espectáculo musical titulado *El Último Tango de Fermat*. La historia transcurre en la época en que la demostración realizada por Andrew Wiles se ha descubierto errónea y éste está intentando resolver el fallo encontrado. En el desarrollo de su descubrimiento es ayudado por el propio Fermat revivido, Pitágoras, Gauss y Euclides.
Roldán (2005) planteó la obra *La liberación de la potencia* que narra la historia de una potencia en la que hay problemas de comunicación entre sus miembros (la base y el exponente) y donde aparece la liberadora figura del logaritmo.

La última de las experiencias que vamos a reseñar nos revela la existencia de que la variedad de temas que se pueden presentar mediante el teatro es impresionante. García (2000), publicó un relato teatralizado con el título, para trabajar sobre inferencia estadística y contraste de hipótesis con un ejemplo simulado de la vida real, utilizado para la aplicación de este tema.

La obra de teatro *El caso de los despedidos de la empresa Westwaco* fue puesta en práctica en el primer ciclo del año 2007 en la Universidad Nacional en el curso de Inferencia Estadística de la carrera Licenciatura y Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática. Los actores de la presentación en escena fueron estudiantes matriculados en el mismo curso, al inicio y final de la obra se le efectúo un cuestionario al "público" con el fin de conocer la percepción que tenían acerca de la utilización del teatro como herramienta metodológica en la enseñanza de las matemáticas; entre los resultados más relevantes tenemos:

La mayoría de los estudiantes indicaron haber presenciado clases magistrales de matemáticas, en todos los niveles de enseñanza y afirman que ésta era la primera obra de teatro con temas de matemáticas que habían presenciado.

Respecto a la creencia de que el teatro podría convertirse en una herramienta metodología efectiva, para la enseñanza de algunos temas en matemática, algunos opinaron que se podría transformar en una herramienta útil que capturara la atención de los estudiantes, que mostrara la aplicación de esta disciplina en la vida cotidiana, que cubriera temas como historia, geometría, trigonometría, estadística. Consideran que el teatro podría utilizarse tanto para la introducción de temas como para el reforzamiento de conocimientos.
Sin embargo, señalan, también, algunos contratiempos, que podría interferir en el uso de esta herramienta contando como el más importante, el poco tiempo para desarrollar las lecciones.

Consideraciones finales

La implementación del teatro como herramienta metodológica en la enseñanza de la Matemática en nuestro país es algo nuevo y novedoso, que puede provocar un poco de temor, al tratar de aplicarla en el salón de clase. Sin embargo, es una posibilidad que se tiene para cambiar la imagen fría y aburrida, en la cual se ha enmarcado la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina.

Se espera que el uso del teatro como herramienta metodológica proporcione vida a los conceptos matemáticos, les cambia la imagen estática que tienen a una dinámica y atrayente.

Al implementar el teatro como estrategia metodología en la clase de Matemática, los estudiantes necesitan familiarizarse con los conceptos pertinentes al tema tratado en cada obra de teatro, por lo que se asegura un reforzamiento de los conocimientos vistos en la clase de matemáticas, o por otra parte una adquisición de conceptos, hechos históricos o hasta resultados matemáticos que deben manipular y manejar para convencer a sus compañeros por medio de la dramatización que están realizando.

Para poner en escena una obra de teatro se requiere del apoyo de la institución y buena disposición por parte de los estudiantes (Rivero, 2006). De esta manera será más sencillo que el docente aplique obras de teatro con temas de matemática o escriba los guiones de teatro relacionados con los contenidos vistos en clase. No se necesita que sean obras espectaculares, se puede empezar con pequeños dramas y poco a poco ir incursionándose en el teatro; por ello consideramos que el tiempo no debe ser una excusa, para la creatividad siempre hay tiempo y más si es para suprimir la rutina. Euler una vez dijo: “Si dispusiera de los enunciados de los teoremas que debo probar, ¡que fácil sería la tarea!”

Bibliografía

Chacón, S., Díaz, A. y Núñez, L. (Eds.). (2002). El teatro como instrumento didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje para I, II, III ciclos y educación diversificada. (Tesis). Costa Rica: Universidad nacional, Centro de Investigación y Docencia en educación.

García, J. A. (2000). “El caso de los despedidos de la empresa Westwaco”. Uno, 23, pp. 121-128

Muñoz, J. y Roldán, I. (2005, marzo). Teatro y Matemática. *Divulgamat: Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas*, Cultura y Matemáticas, Teatro y Matemáticas. Recuperado el 20 de febrero de 2007, de: http://www.divulgamat.net/weborriak/Cultura/Teatro/Teatromate.asp

Queiroz, R. (2006, 4 de setiembre). O Teatro Educativo. COBRA PAGES. Recuperado el 30 de abril de 2007, de http://www.cobra.pages.nom.br/ecp-teatropedag.html

Ráez, E. (2007, enero). Relaciones entre el teatro y la educación. *TiempoEscena la revista del teatro peruano*. Teatro y educación. Recuperado el 28 de febrero de 2007 de http://www.tiempoescena.com/index.php?option=com_content&task=view&id=273&Itemid=43

Rivero, F. (2006, enero-junio). Proyecto pedagógico comunitario en torno a la enseñanza de la matemática a través del teatro. EquisÁngulo: Revista Electrónica Iberoamericana de Educación Matemática, 3, 2. Recuperado el 28 de febrero de 2007, de http://www.actualizaciondocente.ula.ve/equisangulo/index.html

Ruiz, A., Alfaro, C. y Gamboa, R. (2003). Aprendizaje de las Matemáticas: Conceptos, procedimientos, lecciones y resolución de problemas. Uniciencia, 2, 20, 285-296.

Teatro Educativo “El Lobo, Caperucita, el Leñador y el Bosque”. (2005). *Fundación Crisanto, la Flor de Oro*. Recuperado el 30 de abril de 2007 de: http://www.crisanto.org.ar/teatro_educativo_caperucita.htm

EL USO DE LA TECNOLOGÍA COMO MEDIADOR EN LOS PROCESOS MATEMÁTICOS DE GENERALIZACIÓN

Javier Barrera Ángeles[1]
Juan Homero Roldan Rojas[2]
Iván León Giniebra [3]

Resumen

El presente trabajo tiene como objetivo principal estudiar el papel de la tecnología como herramienta mediadora en los procesos matemáticos de generalización en un ambiente de resolución de problemas; con estudiantes de nivel superior(del Instituto Tecnológico de Pachuca y la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo) con la finalidad de mejorar el proceso enseñanza aprendizaje. Un análisis de investigaciones recientes (Philip, 1998; Trouche, 2005; Kieran & Guzman, 2004), hacen patente la necesidad de profundizar en el papel de la tecnología (tales como la utilización de calculadoras, calculadoras graficadoras, computadoras, entre otras) como herramienta mediadora en los procesos cognitivos de construcción del conocimiento. Nuestro interés principal se centrará en presentar algunos aspectos relevantes emanados de esta investigación, partiendo de la hipótesis de que el uso adecuado de la tecnología permite al sujeto una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, a través de los procesos de generalización, dentro de un contexto de la resolución de problemas.

Referencias

Ausubel, D. A., Novak, J. D. & Hanesian, H. (1987*). Aprendizaje significativo por recepción y retención. Psicología Educativa*. México:Editorial Trillas.

Berbaum, J. (2000). *Aprendizaje y formación*. México: Editorial Trillas.

Cazares, G. F.G. (2004). *Integración de los procesos cognitivos para el desarrollo de la inteligencia*. México:Editorial trillas

Courant, R. & Robbins, H. (2002). ¿*Qué son las matemáticas*?: *Conceptos y métodos fundamentales*. México: Editorial Fondo de Cultura Económica.

Guin, D., Ruthuen, K. & Trouche, L. (2005). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*.United States of America:Springer.

Kieran, C. & Guzman, J. (2004). *The number-theoretic experience of 12 to 15 year olds in a calculator environment*: *The intertwining co-emergence of technique and theory*.Canada: Zazkis & Campbell Book,.

Philip, J. D. & Hersh, R. (1998). *The mathematical experience. Houghton Mifflin Company*: United States of America: A Mariner book.

[1] Centro de Investigación en matemáticas del ICBI, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México, jbarrera@uaeh.reduaeh.mx
[2] Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México homerrr_1@hotmail.com
[3] leon@uci.cu Departamento de Matemática General, Universidad de las Ciencias Informáticas (UCI) Ciudad Habana, Cuba

Enfrentando el Cambio: El Profesor de Matemática de Secundaria y Los Avances Tecnológicos.

Norma Noguera[1],
Candida Grimes[2]

Resumen

En el curso de Matemática: Geometría en la Escuela Secundaria del programa de Maestría de California State University Long Beach (CSULB), los estudiantes (profesores de matemática) deben realizar presentaciones en la clase universitaria integrando las teorías y metodologías de aprendizaje especialmente usando tecnología en sus presentaciones.

El proyecto consiste en mostrar aplicaciones sobre el uso de tecnología en el aula en la enseñaza de la geometría. Como los estudiantes de este curso todos son profesores de matemática ellos deben realizar estas presentaciones primero en sus propias clases y después deben realizar estas presentaciones en la clase universitaria y discutir los problemas que enfrentaron con los alumnos de secundaria a la hora de la presentación.

Además en las presentaciones los profesores deben usar el modelo constructivista donde lo estudiantes desempeñan un papel principal y el profesor es solo un facilitador de los procesos de aprendizaje. Una de las lecciones aprendidas en este curso es que muchos de los profesores de matemática no usan tecnología en sus clases porque ellos no se sienten bien usándola. Ellos se sienten inseguros a la hora de usar tecnología en sus clases ya que sus experiencias como estudiantes de matemática no incluyen el uso de tecnología.

William Glasser en su trabajo de investigación encontró que el 95% de lo que los profesores enseñan esta determinado por la forma en que ellos mismos aprendieron como estudiantes. Si los estudiantes de secundaria aprenden matemática usando tecnología esto no solo va hacer la clase de matemática mas interesante sino que va a motivar a los estudiantes de secundaria a encontrar conexiones entre la matemática y el mundo en que ellos se desarrollan.

Presentaciones usando Power Point así como juegos de trivia y de bingo fueron algunas de las presentaciones de los estudiantes.

Antecedentes:

El creciente fracaso que los estudiantes de secundaria están experimentando en los cursos de matemática, y la falta de motivación de los estudiantes a la hora de aprender matemática motivaron la creación de un programa de Maestría en California State University , Long Beach (Master of Science in Mathematics: Option in Mathematics Education for Secondary School Teachers). Este programa esta designado especialmente para profesores que actualmente están trabajando en la escuela secundaria, El objetivo principal de esta maestría es brindarle a los estudiantes universitarios las experiencias necesarias en curriculum, metodología, evaluación e investigación en la enseñaza de la matemática que los lleven a mejorar en su experiencia como educadores.

Una de las clases que forma parte de los requisitos en el programa de maestría es la de "Geometría en la Escuela Secundaria". El objetivo principal de esta clase es el uso de tecnología en el proceso de enseñanza aprendizaje de geometría de acuerdo con los estándares del National Council of Teacher of Mathematics así como de los Estándares de Matemática del estado de California. Los estudiantes de

[1] nnoguera@csulb.edu
[2] Master Student, Candida.Grimes@svusd.org

secundaria tendrán la oportunidad de explorar conceptos geométricos usando tecnología con la guía de los estudiantes de maestría (profesores). Además otro de los objetivos de esta clase es que los estudiantes universitarios adquieran el conocimiento necesario en estrategias metodológicas así como en prácticas de investigación que los lleven a motivar a los estudiantes de secundaria a aprender geometría como un sistema axiomático que requiere la construcción de pruebas y la aceptación de postulados. Los estudiantes universitarios estarán inmersos en el uso de nuevas técnicas de enseñanza y concepciones pedagógicas modernas que los lleven a usar la información obtenida en trabajos de investigación para tomar decisiones que van a afectar su forma de enseñar incluyendo nuevas metodologías de enseñanza y el uso de tecnología en la clase

Desarrollo:

Sin embargo estos cambios en la forma de enseñar matemática especialmente geometría de los estudiantes universitarios involucran muchos cambios en las instituciones. En muchas ocasiones estos cambios no son solo factores de tipo económico; dinero para comprar la tecnología y establecer las conexiones eléctricas necesarias. También hay que enfrentar problemas de espacio; donde se va a colocar la tecnología en la escuela o el colegio. Problemas de seguridad; como mantener este nuevo equipo protegido para evitar que se maltrate al moverlo o que se lo vayan a robar cuando la escuela o el colegio esta de vacaciones. Todos estos problemas son te tipo logístico y los vamos a dejar de lado para permitir que los administradores traten de resolverlos con la ayuda gubernamental necesaria.

El problema que intentaremos presentar aquí es como motivar a los otros profesores de matemática en la institución, que todavía les faltan muchos anos de trabajo en la escuela o en los colegios para retirarse y que no han recibido ningún entrenamiento en el uso de tecnología a enfrentar estos cambios. Este fue uno de los retos más difíciles de resolver que los estudiantes del programa de maestría encontraron a la hora de aplicar el uso de tecnología en sus lugares de trabajo. La reacción negativa al cambio de muchos de los otros profesores de matemática de los colegios fue un factor muy fuerte a la hora de enfrentar el cambio.

Muchos de los estudiantes de maestría se dieron a la tarea de ofrecer cursos de capacitación en sus instituciones, donde ofrecían planes de lección para los profesores de la institución. Algunos de estos planes de lección eran básicos ya que el objetivo principal era ofrecer lecciones en el uso de tecnología de la forma más básica posible.

De esta manera los profesores de matemática al recibir esta capacitación para que poder implementar en una forma apropiada y creativa el uso de tecnología en sus clases se sentían más motivados y menos temerosos. Es importante tomar en cuenta también que las experiencias personales de los profesores, su conocimiento de la materia, sus creencias y sus actitudes hacia la matemática y la tecnología en general juegan un papel muy importante a la hora de enseñar matemática. (NCTM "National Council of Teachers of Mathematics).

Una posible causa del fracaso en los estudiantes en matemática puede ser la forma en que esta siendo enseñada en las escuelas y colegios; esta corresponde a las mismas prácticas educativas que se usaron a inicios del siglo XX. Los estudiantes del siglo XXI están familiarizados con tecnologías que hace solo diez años parecían imposibles de obtener en nuestras aulas. Existe entonces un desfase entre el conocimiento del profesor y lo que los estudiantes esperan de la enseñanza de la matemática en las escuelas secundarias.

En la vida real el mercado de trabajo les exige más conocimiento en tecnología a sus posibles empleados. Sin embargo los estudiantes de secundaria no están recibiendo la educación necesaria para competir en este mundo de trabajo. Estamos en una era en que el que no conoce algo de tecnología será relegado a puestos mas bajo y con salarios inferiores. Lo más importante es que los estudiantes entiendan que la matemática es la base del avance tecnológico

El objetivo principal de cualquier profesor de matemática es que sus estudiantes desarrollen habilidades necesarias para resolver problemas. Esta habilidad no se desarrolla de un día para otro. Los profesores sabemos que los estudiantes han desarrollado esta habilidad cuando vemos que ellos saben usar herramientas matemáticas en forma adecuada para resolver problemas de la vida real. Aquí es donde la tecnología juega un papel muy importante en educación. La tecnología nos puede servir para motivar a los estudiantes a aprender matemática así como a crear un ambiente en el aula en el que ellos puedan disfrutar y sentirse seguros en la clase de matemática. Los educadores deben enfatizar en sus respectivas aulas el uso apropiado de las computadoras y las calculadoras. El mal uso o el uso inapropiado de estas tecnologías es algo que se puede dar en las escuelas. Es trabajo del profesor encontrar un balance en los temas que va a desarrollar usando tecnología y en los que los estudiantes tendrán que trabajar sin la ayuda de las diferentes tecnologías. Algo que se debe tomar en cuenta es la posibilidad de que muchos estudiantes con problemas de aprendizaje se pueden beneficiar a la hora de usar tecnología en la clase de matemática. Por ejemplo un estudiante con problemas para resolver sistemas de ecuaciones puede encontrar difícil resolver problemas de geometría analítica simplemente porque los sistemas de ecuaciones que se encuentra frecuentemente en geometría analítica. Aquí es donde la la tecnología se vuelve indispensable para ayudar a estos estudiantes a superar sus debilidades. Para estudiantes sobresalientes y con una gran capacidad de aprendizaje la tecnología es también una herramienta para que puedan desarrollar temas avanzados, temas que sin tener tecnología serían imposible de investigar para ellos.

En conclusión para lograr un cambio en el currículo de la enseñanza de la matemática es necesario considerar un cambio radical en la preparación de los futuros profesores, así como cursos de entrenamiento que incluyan la integración de tecnología en la clase de matemática para los profesores en servicio.

Plan de lección:
Cuantas veces queremos hacer dibujos para mostrar ciertos conceptos matemáticos a los estudiantes. Sin embargo estas figures s muchas veces son muy complicadas y para el momento en que terminamos la figura en la pizarra los estudiantes han perdido todo el interés en la clase además de que hemos perdido mucho tiempo. Es aquí donde la tecnología se vuelve indispensable. Presentaciones usando por ejemplo Power Point no están designadas solamente para el mundo de los negocios. Profesores y estudiantes pueden usarlas en la misma forma. Los profesores pueden integrarlas en sus clases de matemática en una forma efectiva.

Nuestra meta en esta presentación es mostrar como usar cierto conocimiento tecnológico en una forma eficiente y adecuada para los estudiantes en su clase. Como todo plan de lección debemos empezar con un objetivo bien claro. Cuando determinamos nuestro objetivo empezamos a escribir y lo que normalmente escribimos en la pizarra ahora va a formar parte de la presentación usando Power Point . Para empezar a familiarizarse con Power Point y darse cuenta de cómo esto va a afectar nuestro estilo de enseñanza podemos buscar en la Internet por recursos que se encuentran ahí así como presentaciones existentes en la Internet, así con casi nada de esfuerzo podemos transformar estas presentaciones para que nos sirvan en lo que queremos hacer así nos vamos conociendo y descubriendo que clase de profesor de Power Point somos. Es importante que cada slide tenga significado y no mucha información para los estudiantes. No debemos poder muchos efectos ya que estos distraen a los estudiantes. Trate de crear solo el número de slide que considere que son muy importantes. Trate de mantener la presentación corta pero manteniendo su estilo propio. Este tipo de presentación es muy cómoda ya que si un estudiante falta se puede imprimir la información para el. Además las presentaciones usando Power Point pueden incluir otros tipos de tecnología como Videos, música, el Geómetra, etc.

El Geómetra nos ayuda a manejar el tiempo que tenemos en nuestra clase en una forma efectiva. Tiene muchas aplicaciones que son excelentes e innovadoras, Cuando se construye una figura usando el

Geómetra ésta se puede manipular de tal forma que podemos mostrar que es válido para cualquier figura con las mismas características, El Geómetra tiene un compás una regla y un transportador virtual. Todos los instrumentos que usaron los griegos pero en una computadora. El Geómetra se puede integrar en una presentación usando Power Point así como en un documento Word o como una foto. También es muy fácil para evaluar los trabajos de los estudiantes. Recuerde que la nueva tecnología no puede reemplazar las técnicas tradicionales que usted usaba como el escribir en la pizarra y hacer construcciones usando la pizarra y el compás tradicional. No tenga temor de incomparar las dos técnicas en su plan de lección.
…
www.globalstreaming.com
http://www.actden.com/pp/
http://www.pppst.com/math.html
http://www.maththatcounts.com/page7.html

GEOMETER'S SKETCHPAD LESSON PLAN
TITLE: The Eagle: Translation, Reflection Animation
BY: Candida Grimes
SUBJECT: Geometry
GRADE LEVEL: 8^{th}-12^{th}
CA STANDARDS 22.0: Students know the effect of rigid motions on figures in the coordinate plane and space, including rotations, translations, and reflections.

OBJECTIVE: The students will be able to construct, translate, and reflect circles and triangles in GSP to create an eagle.
PROCEDURE:

Circle #1
1. Construct a circle in the upper left corner of the screen with approximate diameter of 0.5 inch, using the circle tool.
2. Label the center of the circle A and the other point B.
3. Create a new point on the circle by selecting the circle and the POINT ON THE CIRCLE option from the CONSTRUCT menu. This point should be labeled C and test and see if that it slides around the circle.

Circle #2
4. Construct a point approximately 4 inches below and slightly to the right of circle A.
5. Label the point D.
6. Select points A and then D. From the TRANSFORM menu select MARK VECTOR. Make sure the vector is from point A to D.
7. Select circle A and point C and from the transform menu select TRANSLATE. A new circle with center D will appear.
8. The point on circle D should be labeled C'. Test this point by moving point C around circle A. Point C' should move simultaneously around circle D.

Animating Points
9. Select point C. In the EDIT menu, select ACTION BUTTON and slide the mouse to the right and down to select ANIMATION. When dialog box appears with some choices, select the speed you want.
10. Select ANIMATE and an animation button will appear on your screen. Move this button to the upper left corner on the screen if not already there.
11. Click on the animation button and watch points C and C' move around their circles. To stop animation click the ANIMATE button.

Triangle

12. Construct a vertical line in the center of the screen. Label the points on the line E and F.
13. Construct a point on the lower right side of the screen. This point should not be on the same side as the circles of the $\overleftrightarrow{EF}$.
14. Label the point G.
15. Select points C, C', and G. Select TRIANGLE INTERIOR from the CONSTRUCT menu. A triangle should appear with vertices C, C', and F.
16. Highlight the triangle interior and in the DISPLAY menu, select COLOR and slide the mouse to the right and down to select the color of your choice.

Reflection

17. Select $\overleftrightarrow{EF}$ and select MARK MIRROR from the TRANSFORM menu.
18. Select the vertices, interior, and sides of triangle CC'F. Select REFLECT in the TRANSFORM menu. Watch what happens.
19. Click on the animation button. What have you created?

Disappear

20. Highlight all the circles, points, segments, and line. Select HIDE OBJECTS from the DISPLAY menu.
21. Click on the animate button.

Bibliografía:

Demana, F. & Waits, B. K. (1990). The role of technology in teaching mathematics. Mathematics Teacher, 82(7), 546-550.

Carter, H. H. (1995). A visual approach to understanding the function concept using graphic calculators (doctoral dissertation, Georgia State University, 1995). Dissertation Abstract International, 56 3869A.

National Council of Teachers of Mathematics (1991). Professional Standards for Teaching Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.:NCTM 2000.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Navigating through Measurement in Grades 9-12. Reston, Va.:NCTM 2005

Addenda Series ***-Grades k-8 Patterns*** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reaching All Students with Mathematics Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Enseñando Probabilidades y Estadística con software de aula

Rodolfo Jiménez Céspedes[1]

Resumen

La creciente posibilidad de contar con tecnología en el aula paralela a los avances científico tecnológicos actuales y las oportunidades que estos ofrecen, amén de la oportunidad de trabajar con estudiantes de la carrera de Ingeniería en Computación en la Sede de San Carlos del Instituto Tecnológico de Costa Rica, hacen que en conjunto se tenga toda una gama de recursos para crear programas computacionales amenos y ajustados a los intereses de lo que se debe desarrollar en al aula.

Desde hace más de diez años se viene trabajando con estudiantes de informática y desde entonces se han estado dando aproximaciones de lo que hoy se está empezando a formalizar. Programas desarrollados para impartir uno a uno los contenidos de algunos cursos. Es eso lo que se ha definido como software de aula.

El objetivo es que el estudiante desarrolle (no en todos los semestres) un software apropiado para desarrollar una a una las unidades del curso en un caso el de Probabilidades y en otro caso, el de Estadística, y de paso, que reafirme sus conocimientos tanto en programación como en la matemática algorítmica, eso es, que cada tema debe ser evaluado en los algoritmos e interfaces del programa, de esa manera el alumno puede ir estudiando y repasando la materia para así reforzar más su aprendizaje y ejecute así aplicaciones sencillas y concretas a casos reales. Aquí es donde entra en juego la correcta interpretación de resultados matemáticos pues la computadora solo brinda una salida de datos numéricos que el estudiante deberá entender e interpretar correctamente. Se trata de datos que se imprimen en la pantalla y/o en papel, los cuales por cierto, muchas veces sobrepasan los datos solicitados, de ahí que se debe tener un buen dominio de los temas para discriminar resultados e interpretar lo que se requiere. De aquí en adelante lo que sigue es la toma acertada de decisiones respaldada en resultados numéricos y algorítmicos que ofrecen las distribuciones probabilísticas aplicadas tanto en Probabilidades como en Estadística.

La intención es que un software se utilice en el tiempo y se vuelva a actualizar tres o cuatro años después aprovechando las nuevas y dinámicas herramientas que van ofreciendo algunos lenguajes de programación (Java u otros). De los programas obtenidos se selecciona el "mejor" (confiable y dinámico) paquete y se implementa en su momento en el aula; dándole gran importancia a la interpretación de resultados, lo cual eleva el aprendizaje al llevarlo más allá de lo convencional, agilizando más y mejor el tiempo para que se aproveche la resolución de más ejercicios y por ende la discusión de su correcta interpretación y la adecuada toma de decisiones.

Introducción

La idea es compartir la experiencia de aula desarrollada en cursos de nivel superior tales como Probabilidades, Estadística y otros en la carrera de Ingeniería en Computación en la Sede de San Carlos del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Partiendo del aprendizaje y de la experiencia de alumnos en cursos de programación previos es que se inicia la etapa de poner en práctica las tareas programadas que desarrollarán los estudiantes paralelo al estudio de distintas unidades de los cursos en cuestión.

Comprar software especializado es a veces "injustificado" y los presupuestos de nuestras universidades no siempre dan para tanto. Es por eso que haciendo uso de los recursos disponibles y aprovechando las oportunidades del entorno es que crece el proyecto de ir equipando el salón de clases con software "de aula".

Se pretende con esto apostar en lo que a veces se cree que edifica más y mejor la formación integral del alumno. Ir mas allá del convencionalismo clásico de la enseñanza en la disciplina matemática "aplicada", no satisfaciéndose con los desarrollos algebraicos, sino que se debe dar un interés especial a la parte de la interpretación numérica, la cual nos llevará en forma escalonada a la acertada toma de decisiones (matemáticamente hablando).

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, rodjimenez@itcr.ac.cr

Aprender haciendo, aprovechar los recursos y motivaciones del entorno es el dispositivo que ilumina la esperanza de ofrecer alternativas adecuadas al proceso de enseñanza y aprendizaje en cursos con tanta aplicación como los antes mencionados.

Desarrollo

Con la aparición de la computadora y otras tecnologías en el aula, surge la inquietud por implementar aplicaciones que permitan su uso acertado y la simplificación de procesos matemáticos sin que eso tenga necesariamente que estropear la correcta formación integral del alumno. La ambición de aprovechar un recurso como el computador, que de por si intrínsicamente presenta el valor agregado de que al usarlo, el usuario aprende cada vez más de él y de los sistemas instalados en el mismo, de ahí, que se haga un mejor esfuerzo o un gran intento por apegarlo a los intereses de algunos cursos aplicados en el área de la matemática.

La iniciativa se da al momento de analizar los recursos disponibles y la oportunidad que ofrece el entorno, considerando que se cuenta con la carrera de Ingeniería en Computación y que sus futuros ingenieros deben recibir una buena dosis de cursos de matemática, donde además los alumnos luego de al menos dos años de formación, ya manejan buenas nociones de programación en diferentes ambientes; así y con la finalidad de aprovechar esos elementos, es que se ha implementado en algunas ocasiones la modalidad de tareas programadas en estos cursos. Se espera que los estudiantes aporten algo a la institución contribuyendo así con el quehacer didáctico y fomentando en ellos valores de retribución e identificación hacia el "TEC". Esto es sentido de pertenencia.

El software de aula, se hace en el desarrollo de un semestre determinado, se evalúa, se depura, luego entra en la etapa de validación y por último, en la de aplicación en las lecciones.

En cursos como Probabilidades o como Estadística por ejemplo deben a veces, en la resolución de situaciones, arrastrar datos y resultados que pueden ser usados reiteradas veces, según corresponda y donde los mecanismos de procesarlos son en algunas ocasiones muy tediosos, es por eso que la inquietud por agilizar el proceso de enseñanza y aprendizaje ha exigido el desarrollo de programas pertinentes a tales cursos, pero desde la perspectiva "casera" , es decir, hechos por los estudiantes de tales cursos con propósitos didácticos y académicos sin restricciones de uso y de licencias.

Para que esto sea posible es necesario redactar un "enunciado" en el cual se debe directa y claramente expresar el producto esperado. Este enunciado es una arma de doble filo, pues si no se indica con claridad y amplitud lo que se quiere, se corre el riesgo de que los alumnos se apeguen al mismo y se tenga que recibir lo que no se deseaba. O por lo menos quedar muy por debajo de las pretensiones iniciales. Este tema es todo un reto para el docente, pues es ahí donde se fijan las normas del juego y lo interactivo, útil y confiable de un producto final. No manejar claridad en lo que se espera y en la ruta por alcanzarlo es casi un buen indicador de fracaso para la satisfacción de lo que se construye primero en la mente del profesor.

Por su parte el alumno deberá implementar módulos afines al tema de estudio del momento y probarlo con múltiples ejercicios de los cuales deberá conocer previamente su respuesta, para validar la confiabilidad del programa y el cual será evaluado por el profesor como avance del proyecto. Luego deberá ir pegando uno a uno los módulos desarrollados para presentar un software integrado que abarca satisfactoriamente todas las unidades de estudio de un curso.

Aquí se mezclan un poco algunas corrientes filosóficas de la construcción del conocimiento, pues aunque pareciera que en el aprender haciendo, se procura que los recursos y actividades activen las mentes de los estudiantes, que les ayude a conocer todo el inicio, proceso y producto de las actividades para el desarrollo del pensamiento.

Con el constructivismo se contribuye a que el alumno tenga una visión global, para proponer los recursos que necesita y su adecuada utilización. Además éste ayuda al docente a tener en mente las

necesidades, intereses y posibilidades de los estudiantes. Con ello se valora tanto la calidad del proceso de construcción como el producto construido.

"La teoría constructivista afirma que el conocimiento y en este caso, el matemático, no puede reducirse a un almacenamiento de datos y técnicas que puedan inculcarse con facilidad a un aprendiz pasivo. Según esta perspectiva, el conocimiento matemático es construido de manera activa." (MEP / UNESCO, 1996: 19).

Por su parte la corriente del racionalismo también sobrepone algunos de sus enfoques. Aquí se buscan las relaciones entre los contenidos de los cursos y las actividades de la vida diaria, de ser posible, en el entorno inmediato del estudiante. Se valora también la calidad del conocimiento y del proceso de pensamiento racional lógico, la construcción del conocimiento científico y sistemático, fomentando en todo momento la posibilidad de pensamiento y la criticidad. Tal como lo establece Fernández Morales (sf):

> *La enseñanza de la probabilidad debe apoyarse en el conocimiento previo de las concepciones que los estudiantes poseen acerca de los conceptos relativos a la probabilidad, a veces erróneas, ya que cuando se enseña algo nuevo los estudiantes construyen los nuevos conocimientos conectando las nuevas informaciones con las que tenían asumidas previamente, según el punto de vista constructivista de Garfield (1995).* (p2)

Cuando se presentan los proyectos finales se seleccionan los mejores y éstos serán los que por un tiempo se utilicen en el salón de clases. Es importante resaltar que esta práctica no se aplica todos los semestres en todos los cursos. Esto se hace periódicamente con el espíritu de actualizar el software existente y corregir algunos errores de versiones previas. Sin embargo, la utilización y el aporte que estos hacen en el salón de clases son de gran utilidad para el mejor desempeño por parte del profesor en el desarrollo de las unidades de los cursos.

Indudablemente, se suaviza en gran medida el proceso de enseñanza y aprendizaje cuando se cuenta con recursos didácticos de esta especie pues se agilizan los procesos de resolución de problemas y actividades quedando más tiempo para razonar e interpretar resultados y tomar las decisiones pertinentes.

La cantera de programas para la parte estadística consiste en programas que hacen distribuciones de frecuencias, medidas de tendencia y dispersión central, gráficas, números aleatorios, tamaño de la muestra, estimaciones puntuales, por intervalos y de proporciones, pruebas de hipótesis para distribuciones normales, T-Student, Chi cuadrado, regresiones lineales y análisis de correlación. Semejante sucede el los cursos de Probabilidades donde se puede calcular probabilidades clásicas, aplicar reglas de probabilidades, Experimentos bayesianos, Teorema de Tchebyshev, valores esperados, varianzas y desviaciones típicas de variables aleatorias discretas y continuas, y muchas distribuciones discretas y continuas de probabilidades.

Todos con interface gráfica amena para ser trabajado en ambiente Windows con la documentación de rigor, con los archivos de código fuente que permitirán hacer en el momento requerido algunas variaciones necesarias para que los mismos se ejecuten confiablemente, pudiendo implementarles correcciones y nuevas funciones cuando sea necesario.

Es normal escuchar comentarios de alumnos que expresan el porque no haber utilizado desde el principio un paquete de cómputo, sin embargo es necesario aclararles que hasta tanto no hayan construido las bases de determinado tema, **"el hablar todos en el mismo idioma"**, la identificación de algoritmos, variables y parámetros, no es recomendable utilizarlos, pues hay que recordar que si al programa se le introducen correctamente los datos, se obtendrán datos y mas datos que no necesariamente se sabrán interpretar de manera certera. De ahí la importancia de primero caminar para luego correr y hasta volar. También Fernández Morales (sf) establece que:

> *El uso de los conceptos de la Probabilidad en la práctica cotidiana pasa necesariamente por el filtro del lenguaje. No basta con un conocimiento exhaustivo de las leyes de la Probabilidad sino también de cómo transmitirlo a través de la expresión verbal. Moore (1977) menciona acertadamente que en el mundo de los negocios la incertidumbre se expresa verbalmente con términos como "probable, posible, ...". Este esquema sólo puede resultar satisfactorio si tanto el emisor como el receptor asignan el mismo significado preciso a cada término.* (p4).

Resulta importante entonces uniformar hasta donde se pueda el proceso de enseñanza y aprendizaje para explotar al máximo los esfuerzos y aprovecharlos para una mejor construcción del proceso de construcción del conocimiento.

Es importante mencionar que cuando se ha utilizado el software en el aula, donde se le han dado múltiples aplicaciones, y se han resuelto muchos ejercicios, se debe ser consecuente con la hora de aplicar pruebas cortas y parciales; por lo que un examen debe ir mas allá de la tradicional prueba escrita donde en el mejor de los casos se podía hacer uso de la calculadora. Además, se deben programar actividades adicionales tales como solicitar con las previsiones del caso los laboratorios de computación para ofrecerle a los estudiantes las comodidades y recursos que propicien una resolución más interactiva de las pruebas y del proceso en general claro está, con las restricciones del caso para no estimular la transferencia indeseada de información (que no copien) y así tener mayor certeza de que se evalúa el aprendizaje del que se ha apropiado cada alumno..

Resultados

- Se tiene software ajustado a las intenciones de los cursos sin necesidad de invertir parte de los presupuestos de operación, donde además, no existen problemas de licencias o restricciones legales. Software con fines didácticos y académicos "gratis".

- Mayor motivación y participación de los estudiantes tanto en clases como fuera de esta.

- Las consultas extra clases con frecuencia se refieren a problemas con niveles de exigencia muy por encima de lo convencional, pues el alumno le pierde el miedo a ejercicios que en algunos casos, hacerlos por los mecanismos convencionales es toda una hazaña.

- La inquietudes y cuestionamientos en la resolución de problemas y en la interpretación de resultados son en bastantes casos de muy buen nivel si se comparan con los alcanzados por métodos convencionales; lo cual fortalece el proceso de comprensión y construcción del conocimiento.

- El alumno se entrena mas en la lectura de problemas y en la obtención acertada de los datos que lo llevarán a plantear con propiedad la forma de resolución del mismo. Esto es toda una ganancia en el proceso formador.

- Aprender a interpretar y a tomar decisiones es un ejercicio no muy acostumbrado en matemáticas, como puede verse en muchos libros afines en donde se llega a un resultado numérico y se da por finalizado un proceso. Quizás aquí radica el mayor logro de esta experiencia.

- Mientras se desarrolla la destreza de interpretación de resultados y toma de decisiones, se eleva el nivel de criticidad en los estudiantes, se favorece la participación grupal y búsqueda del consenso y construcción del conocimiento.

Conclusiones y recomendaciones

- Es necesario variar el sistema de evaluación tradicional y es necesario a veces realizar los exámenes parciales en el laboratorio de computación para ser consecuente con el proceso descrito.

- El estudiante cubre un mayor volumen de solución de ejercicios y problemas pues cuenta con una herramienta que le origina la solución de los mismos en tiempos realmente pequeños, lo que favorece la práctica constante de los temas en estudio.

- La interpretación de resultados y la toma de decisiones es algo que los alumnos no están acostumbrados ni necesariamente entrenados para hacer aceptablemente, de ahí que el aporte de esta disciplina es en verdad novedosa y muy buena.

- Se desarrolla una mejor destreza en la lectura de problemas y en su respectivo planteamiento, lo cual es indispensable pues es ahí donde se originan los datos que se introducirán en el sistema de cómputo. Una mala praxis en este proceso producirá datos errados incongruentes que si se razonan correctamente se puede interpretar que algo no anda bien, es decir, que persiste algún error de rutina.

- Se recomienda que el profesor maneje en forma equilibrada el uso de dichos programas y que los ponga en práctica en el momento que considere que sus alumnos conocen y dominan las nociones básicas de variables y parámetros propios de un tema de estudio.

- Los conocimientos básicos de programación por parte del profesor podrían ayudar, pues en algunos casos los programas presentan errores conocidos popularmente como “pulgas” que conllevan al software a ser inestable o dar problemas en los datos de salida del computador. Estas son fallas menores fáciles de corregir.

Bibliografía

Fernández, A. (nd). Obstáculos para la Enseñanza de la Probabilidad en los estudiantes de economía y administración de empresas. Consultado en setiembre 22, 2007 en http://www.caib.es/ibae/esdeveniment/jornades_10_01/doc/obstaculos.doc

Ministerio de Educación Pública / UNESCO. 1996. Orientaciones para mejorar 4el aprendizaje de la matemática en I y II ciclos. San José, MEP / UNESCO.

Tabera, R. (nd). El razonamiento heurístico en la enseñanza de la estadística. Consultado en julio 08, 2007 en http://educar.jalisco.gob.mx/02/02escoba.html.

Vilanova, S; Rocerau, M; Valdez, G; Oliver, M; (nd). El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Consultado en julio 12, 2007 en http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF.

Errores de los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático a nivel de secundaria

Alcides Astorga Morales [1]

Resumen

La mayoría de los errores que comenten nuestros estudiantes en las aulas, no provienen de una falta de conocimiento, sino más bien de una mala enseñanza, y por tanto de una deficiente construcción de las nociones matemáticas por parte de los discentes, deficiencia que se manifiesta en la construcción mental de conceptos nuevo que se sustentan en estructuras cognitivas ya presentes en el alumno.

Introducción:

Sin duda alguna, una de las mayores preocupaciones en materia de duración, de políticos y educadores es la problemática que presenta la enseñanza de la matemática a todo nivel (primaria, secundaria y universidad). Unos por el alto costo que genera el hecho de que los alumnos repitan cursos y deserten de la Escuela, y otros por el pesimismo y poca motivación que existe hacia el estudio de la matemática.

Dentro de esta problemática, no falta quien en forma pesimista, afirme que este problema es insoluble, y por tanto, no es necesario, malgastar esfuerzos en la búsqueda de soluciones que no existen. Las estadísticas en países con mayor desarrollo económico que el nuestro parece darles la razón, y la longevidad del problema ratificarla.

A mi parecer tales expresiones son el producto del pesimismo acumulado por generaciones, donde se hacen grandes erogaciones e investigaciones, y el problema de la deserción y bajo rendimiento escolar se mantiene.

Antes de continuar, planteemos las siguientes premisas:

- ✓ Los sistemas educativos, son el reflejo de la ideología dominante de un país
- ✓ Los planeamientos curriculares a nivel nacional son realizados por expertos, externos a la realidad de aula.
- ✓ En la propuesta curricular, a nivel teórico, no se considera la experiencia acumulada de los educadores que día a día, viven en carne propia, en el aula, la realidad económica, social, cultural y política del país.
- ✓ En el sistema educativo costarricense, la calidad se mide en términos de resultados (porcentaje de estudiantes que aprueban las diferentes materias).
- ✓ A los educadores no se les reconoce en forma adecuada el tiempo de planeamiento.
- ✓ Las capacitaciones formales, tanto en contenidos propios de la materia, como en pedagogía, no son las adecuadas, ni se da en las mejores condiciones para los educadores.
- ✓ El profesor es conciente que el alumno comete errores, pero no hace el esfuerzo, o no dispone del tiempo (o formación) para atacar esa deficiencia con la celeridad apropiada.

Y por último una visión propia:

Antes de emitir juicios de valor tajantes, es conveniente realizar algunos estudios sobre las diferentes formas que utiliza el docente para lograr la asimilación de los conceptos matemáticos, por parte de los estudiantes, desde las épocas más tempranas (prekinder) hasta la secundaria. Esto por cuanto, una vez que un estudiante ha asimilado un concepto bajo un marco conceptual y epistemológico erróneo o incompleto, es difícil corregir los fundamentos lógicos a nivel cognitivo, que le sirven al estudiante para justificar la validez del conocimiento que posee y lo acepta como correcto.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, aastorga@itcr.ac.cr

En muchos casos, el docente no se percata que el estudiante presenta ciertos problemas en el proceso constructivo, e incluso si lo hace no determina el origen de éstos, permitiendo que esos errores, se interioricen y formen parte de un aprendizaje que va a ser la base sobre la cual se construirán otros conocimientos, con las consabidas consecuencias.

Aspectos teóricos de los errores.

"*Hablamos de error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar"*. (Godino, Batanero y Font).

Los errores en muchos casos son juicios o afirmaciones que se hacen en un momento y circunstancias en que no son válidos, posiblemente por que, las condiciones bajo las que las afirmaciones eran ciertas variaron o simplemente por que nunca fueron ciertas.

Así, un estudiante puede que tenga el "conocimiento correcto" pero falle en su aplicación, porque desconoce, por errores pedagógicos o de formación del profesor, el marco original sobre el cual es válido ese conocimiento y si todavía se mantiene.

Un ejemplo típico de este error lo constituye la aplicación, en forma incorrecta de las identidades: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$. Es importante resaltar este caso, pues si usted les pregunta a los estudiantes por las "fórmulas notables" estos se las repiten sin ningún problema, entonces la interrogante surge ¿por qué se equivocan en la resolución de ejercicios?.

El error, también puede tener procedencias diferentes, "*generalmente tiende a ser considerado como la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimientos*".

En algunos casos, por medio de respuestas correctas, un alumno puede dar la impresión que tiene un conocimiento correcto, sin embargo, a la hora de profundizar, del por qué de la respuesta, nos llevemos una sorpresa.

"*Un maestro pregunta por el número racional que corresponde a* $\frac{-18}{3}+\frac{8}{2}$.

Después de un rato algunos estudiantes dan la respuesta -2.

Sin embargo, si se profundiza en el algoritmo que posiblemente aplicaron los estudiantes, tenemos las siguientes posibilidades:

$$\frac{-18}{3}+\frac{8}{2} = \frac{-18}{3}+\frac{8}{2} = \frac{(-18)\cdot 2+8\cdot 3}{6} = \frac{-36+24}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

$$\frac{-18}{3}+\frac{8}{2} = -6+4 = -2$$

$$\frac{-18}{3}+\frac{8}{2} = \frac{-18+8}{3+2} = \frac{-10}{5} = -2$$

Observemos que el tercer procedimiento obtuvo el resultado correcto, por un algoritmo equivocado. Aquí es donde el docente, en el momento oportuno debe hacer todo el esfuerzo para eliminar esta conducta del discente.

También es bueno tener presente que, muchos de los errores de nuestros estudiantes, son producto de algunos conceptos dados en forma errónea por los docentes.

Por ejemplo, es frecuente encontrar en los libros de texto, y por tanto reproducido en las aulas que: $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, sin hacer ninguna restricción sobre el conjunto al que pertenecen las variables *x*, *y*.

Por lo tanto, para muchos estudiantes cuando se les pregunta sobre el dominio real de funciones como: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$, $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$, para ellos es el mismo

Similarmente, cuando se trabaja en simplificación de expresiones algebraicas, se pueden encontrar ejemplos, como:

Simplificar $\frac{\sqrt{x^2y^3}}{xy}$

Para muchos profesores, el estudiante debe proceder de la siguiente forma:

$\frac{\sqrt{x^2y^3}}{xy} = \frac{\sqrt{x^2y^2y}}{xy} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}\sqrt{y}}{xy} = \frac{xy\sqrt{y}}{xy} = \sqrt{y}$, pero si se le asignan valores, por ejemplo:

$x = -1$, $y = 1$, la expresión original da -1, pero la simplificada 1. ¿y si $x = 0$ o $y = 0$?

Lo curioso de este tipo de procedimientos, es que en el tema posterior de ecuaciones e inecuaciones el docente insiste en que $\sqrt{x^2} = |x|$

También es importante determinar cuando un resultado es un error o simplemente es una afirmación que no está planteada en forma correcta:

Por ejemplo, el error tipográfico

$$a^2 - b^2 = a2 - b2 ,$$

puede ser una igualdad verdadera si se plantea como:

Sean *a* y *b* números reales tales que $a + b = 2$ o $a = b$, entonces se cumple que: $a^2 - b^2 = 2a - 2b$

CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTALES DE LOS ERRORES[1]

- Los errores surgen en la clase por lo general de una manera espontánea. Sorprenden al profesor, aunque pueden gestarse desde mucho antes.

- Son persistentes y particulares de cada individuo. Son difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno.

[1] Tomado de *Los errores en el aprendizaje de Matemática*, artículo elaborado por Adriana Engler et all, disponible en la dirección http://www.soarem.org.ar/Publicaciones/Los%20Errores.pdf , pág. 2

- Hay un predominio de los errores *sistemáticos* con respecto a los errores *por azar u ocasionales*. Los errores sistemáticos revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada.

- Los alumnos en el momento no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.

- Los errores sistemáticos son en general resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la Matemática, reconocibles o no reconocibles por el profesor.

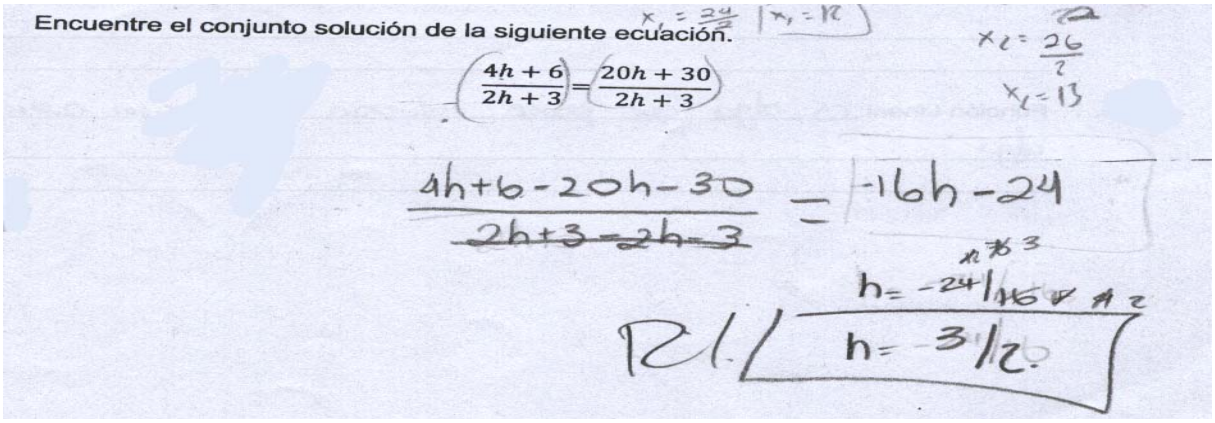
- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el alumno de la información que da el profesor. Los alumnos por ejemplo recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor.

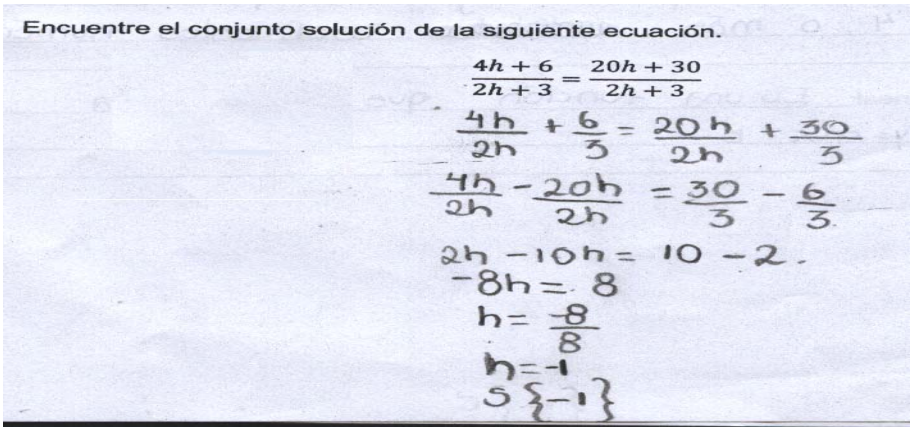
La corrección y superación de las concepciones inadecuadas y los errores de los estudiantes, depende en gran medida de la organización de la enseñanza, de los métodos y estrategias de enseñanza-aprendizaje utilizados, los contenidos y problemas seleccionados, y las tareas orientadas que evidencien los errores y provoquen la reflexión.

En la corrección y superación de las concepciones inadecuadas y los errores se ha demostrado que el tratamiento didáctico de la enseñanza tradicional es menos eficaz que las metodologías de enfoque constructivista donde el estudiante se enfrenta a la solución de problemas que generan conflictos cognitivos, y a partir de ellos construye el conocimiento.

Algunos errores manifestados por los estudiantes:

A continuación se presentan una serie de errores cometidos por estudiantes de diferentes niveles educativos. Lo notorio de este tipo de errores, es que no es un patrimonio de nuestros jóvenes estudiantes, puesto que son conductas presentes en casi todas las sociedades estudiantiles a nivel mundial, entonces la pregunta es ¿por qué se presenta esa situación?




Encuentre el conjunto solución de la siguiente ecuación.

$$\frac{4h+6}{2h+3}=\frac{20h+30}{2h+3}$$

$$\frac{4h}{2h}+\frac{6}{3}=\frac{20h}{2h}+\frac{30}{3}$$

$$\frac{4h}{2h}-\frac{20h}{2h}=\frac{30}{3}-\frac{6}{3}$$

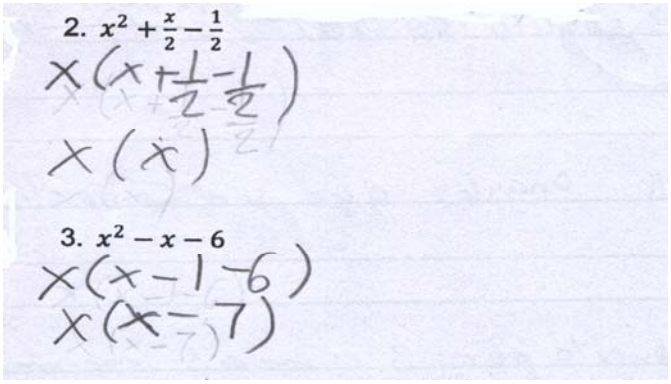
$$2h-10h=10-2$$

$$-8h=8$$

$$h=\frac{8}{8}$$

$$h=-1$$

$$S\{-1\}$$


2. $x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

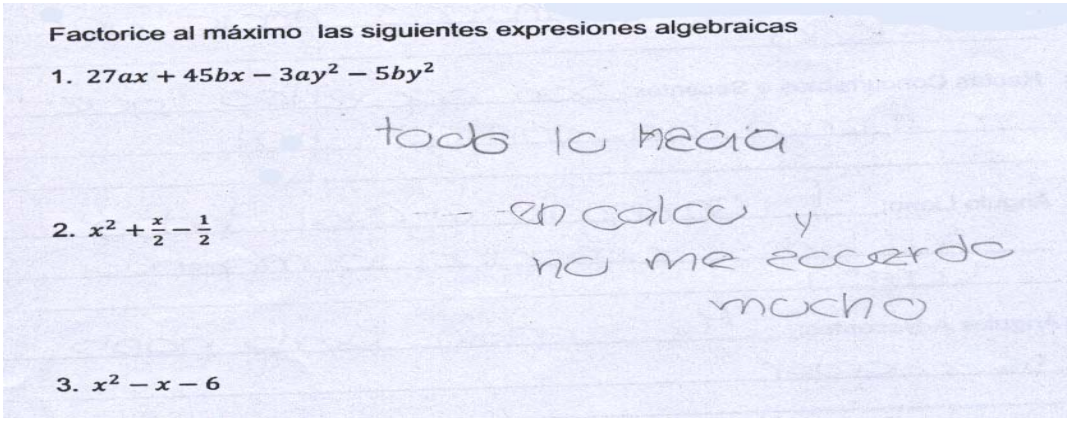
$x(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2})$

$x(x)$

3. x^2-x-6

$x(x-1-6)$

$x(x-7)$

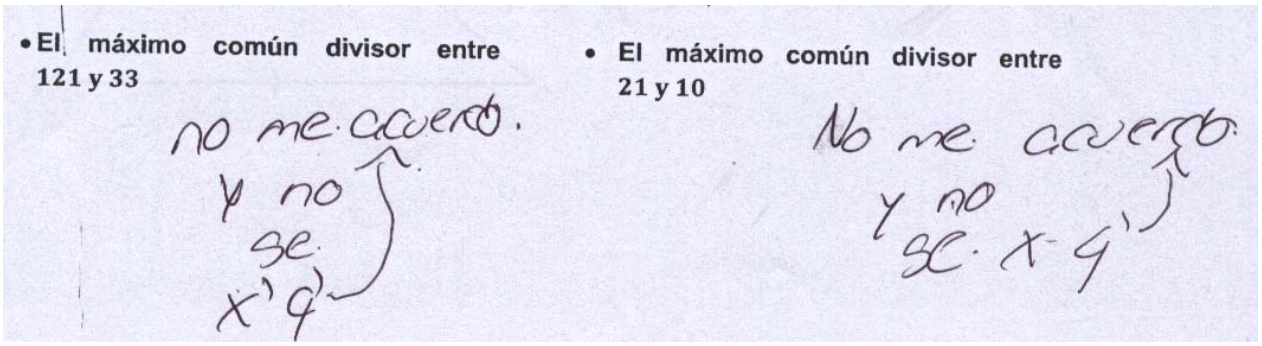

Factorice al máximo las siguientes expresiones algebraicas

1. $27ax+45bx-3ay^2-5by^2$

todo lo hacia en calculadora y no me acuerdo mucho

2. $x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$

3. x^2-x-6


- El máximo común divisor entre 121 y 33

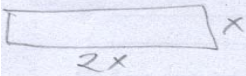
no me acuerdo. y no se x'q

- El máximo común divisor entre 21 y 10

No me acuerdo y no se x'q

Resuelva el siguiente problema.

1. La profesora Natalia compró un terreno de forma rectangular cerca del colegio Elías Leiva para no tener que viajar tanto cuando va a trabajar. El largo del terreno mide el doble de lo que mide el ancho. Si el largo se aumenta en 40 m. y el ancho en seis metros, el área se hace el doble. ¿Cuál es la longitud del ancho del terreno de la profesora Natalia?



$L = 2x + 10$
$A = x + b$
$a = (L \times a)^2$

$(2x + 10) + (x + 6) = 40$

→ Nunca, nunca llegue a entender los problemas siempre me han costado

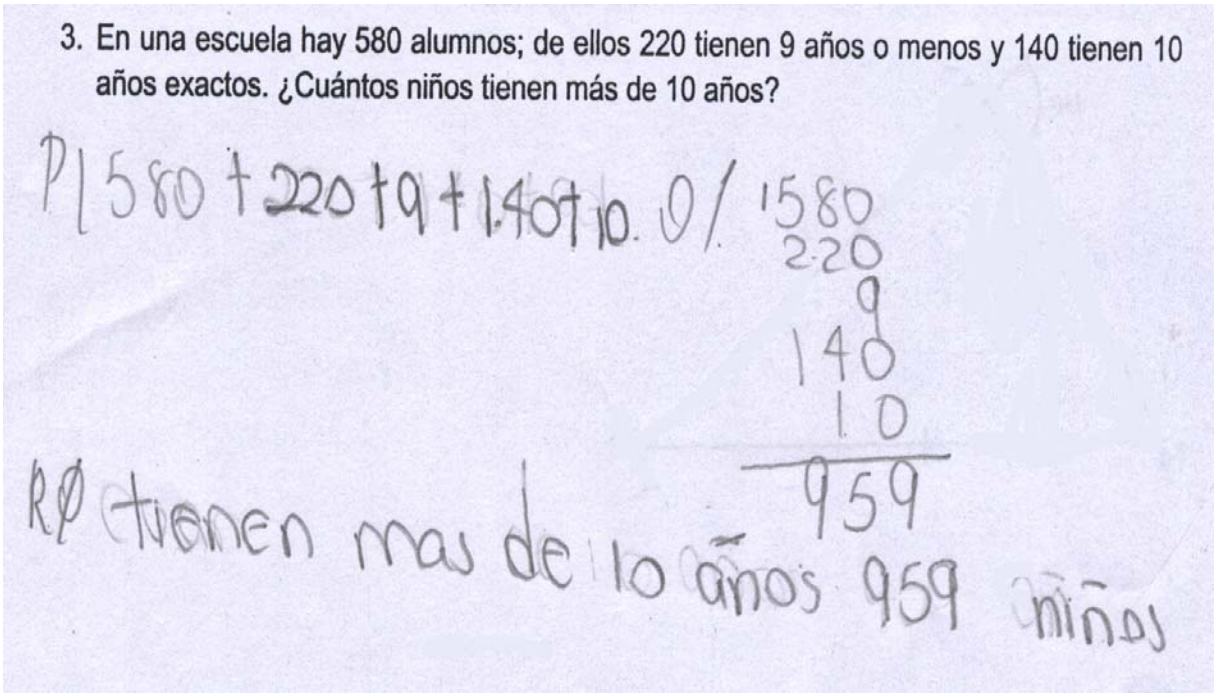
2. $(-1)^3 + (-1)^5 - (-1)^2$

tengo idea de lo que es pero sin calcu nothing !!

Encuentre el conjunto solución de la siguiente ecuación.

$$\frac{4h+6}{2h+3} = \frac{20h+30}{2h+3}$$

tambien me ayudaba un monton la calcu



Conclusiones finales:

El estudio de los errores por parte de los estudiantes, y de los profesores es uno de los grandes temas de la didáctica matemática moderna. No basta con decir que la enseñanza de la matemática está mal en Costa Rica, que los estudiantes son muy vagos y que no les gusta estudiar, es necesario que los y las docentes realicen un análisis exhaustivo de sus metodologías y conocimientos, hacer un seguimiento de su labor e intentar determinar cuáles son las verdaderas causas del bajo rendimiento en matemática. E incluso a un nivel curricular (macro) evaluar si el enfoque y los contenidos incluidos en el plan de estudios en los diferentes niveles responde a los tiempos actuales.

Bibliografía:

Godino, Juan; Batanero Carmen y Font Vicenç (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Universidad de Granada. Distribución en Internet: *http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/*

Hinostroza, J. *Los errores en el aprendizaje de las matemáticas.* Disponible en Internet: http: //macareo. Pucp. Edu.pe/

Pochulu, M. (2005) *Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad.* Revista Iberoamericana de Educación (ISSN:1681−5653)

Rico, L. (1993). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico. (Compiladores). Educación Matemática. (60 – 108). México, Grupo Editorial Iberoamericano.

Estudio y resolución de las Ecuaciones Diferenciales con la aplicación Maple

Omar Ropero[1]

Resumen

Esta investigación ha sido desarrollada para diseñar un texto teórico–pràctico–computacional apoyado en el software Maple, a fin de fortalecer significativamente el proceso de enseñanza–aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales que se imparten en los cursos de Cálculo IV/ Matemática IV en las Facultades de Ingeniería en la Educación Superior de Venezuela. En esta investigación del tipo Descriptiva Documental, se han analizado los textos y programas de asignatura que se utilizan en la enseñanza del tema en 8 universidades públicas del país. A dichos textos y programas, se les aplicó Análisis de Contenido y se logró priorizar y sistematizar su orden lógico. A continuación, se desarrolla en extenso toda la teoría relacionada con las ecuaciones diferenciales, algunas funciones especiales y otros tópicos suplementarios. En cada tema, los ejercicios se resuelven analíticamente y, a continuación, se ilustra detalladamente el uso de la sintaxis básica del programa Maple para obtener la representación explícita e implícita de las soluciones, así como de sus respectivas representaciones gráficas. La ventaja más importante de usar Maple es que se obtienen las graficas asociadas con las soluciones de cada ecuación diferencial, situación particularmente útil en la discusión de las aplicaciones de muchas situaciones físicas que se modelan con éstas ecuaciones.

Ejemplo 1. Verifique que la función $y(x) = x e^{-x}$ es una solución de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$. Además, obtenga la representación gráfica de la solución.

Solución. Primeramente se define y,

```
> y:=x->x*exp(-x);
```

$$y := x \to x\, \mathbf{e}^{(-x)}$$

Ahora se usa el comando **diff** para calcular $y' = e^{-x} - x e^{-x}$, llamando al resultado **dy**.

```
> dy:=diff(y(x),x);
```

$$dy := \mathbf{e}^{(-x)} - x\, \mathbf{e}^{(-x)}$$

Similarmente, el comando **diff** se emplea para calcular $y'' = -2e^{-x} + x e^{-x}$, llamando al resultado **d2y**.

```
> d2y:=diff(y(x),x$2);
```

$$d2y := -2\, \mathbf{e}^{(-x)} + x\, \mathbf{e}^{(-x)}$$

Ahora se evalúa $y'' + 2y' + y = 2e^{-x} + 2(e^{-x} - x e^{-x}) + x e^{-x} = 0$

```
> d2y + 2*dy + y(x);
```

Finalmente, usando el comando **plot**, se obtiene la gráfica de la función $y(x) = x e^{-x}$ que es solución de la ecuación diferencial dada en el intervalo [-1,1]

```
> plot(y(x),x=-1..1);
```

[1] Universidad Nacional Experimental del Táchira, Venezuela. oropero@unet.edu.ve, oropero5@cantv.net

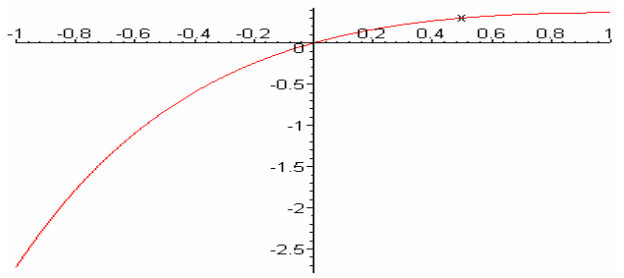


Figura 1: Curva solución de la ecuación y'' + 2y' + y =0

Ejemplo 2. Verifique que la función implícita $2x^2 + y^2 - 2xy + 5x = 0$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 4x - 5}{2y - 2x}$. Además, obtenga la representación gráfica de la solución.

Solución. Primeramente se deben definir las variables x e y. Luego, se emplea el operador **D** para derivar $2x^2 + y^2 - 2xy + 5x = 0$, llamando a este resultado **paso1**. Así,

```
> x:='x':y:='y':
> paso1:=D(2*x^2+y^2-2*x*y+5*x=0);
```

$$paso1 := 4\,D(x)\,x + 2\,D(y)\,y - 2\,D(x)\,y - 2\,x\,D(y) + 5\,D(x) = 0$$

El resultado que se obtiene de aplicar el operador **D(x)** se reemplaza en **paso1** por 1 empleando el comando **subs**, y a este resultado se le llama **paso2**, que representa a la ecuación $4x + 2y\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y + 5 = 0$. El símbolo **D(y)** representa la expresión $y' = \frac{dy}{dx}$.

```
> paso2:=subs(D(x)=1,paso1);
```

$$paso2 := 4\,x + 2\,D(y)\,y - 2\,y - 2\,x\,D(y) + 5 = 0$$

Finalmente, con el comando **solve**, se resuelve el **paso2**, para obtener la derivada **D(y)**

```
> solve(paso2,D(y));
```

$$\frac{1}{2}\,\frac{4\,x - 2\,y + 5}{-y + x}$$

Por tanto, la solución dada implícitamente satisface la ecuación diferencial dada. La solución, que representa gráficamente a una elipse, se obtiene empleando el comando **implicitplot**, el cual está contenido en el paquete **plots**. Así,

```
> with(plots):
> implicitplot(2*x^2+y^2-2*x*y+5*x=0, x=-7..2,y=-7..2);
```

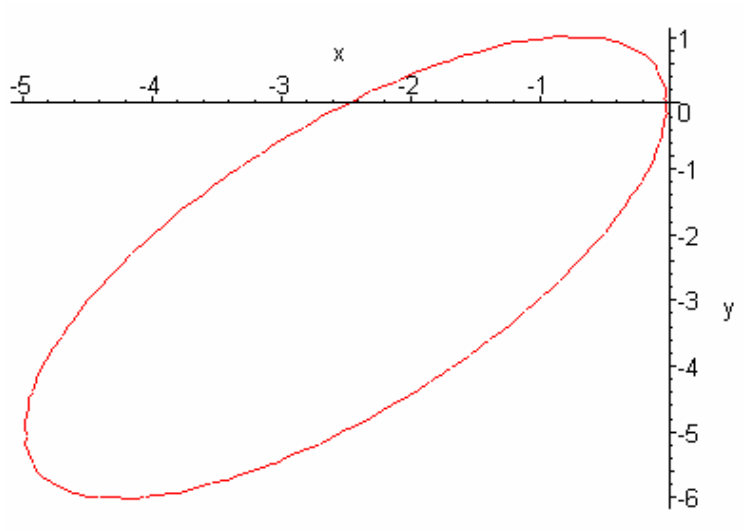


Figura 2: Gráfica de la curva solución $2x^2 + y^2 - 2xy + 5x = 0$

Ejemplo 3. Obtener la gráfica de la solución al problema de valor inicial $y' = \sin(x^2)$; $y(0) = 0$, en el intervalo [0,10]. Evaluar y(5).

Solución. Acá, el comando **dsolve** es aún útil para resolver el problema de valor inicial dado, aunque el resultado se obtiene en términos de funciones de Fresnel. Así,

> **solexact:=dsolve({diff(y(x),x)=sin(x^2),y(0)=0},y(x));**

$$solexact := y(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\text{FresnelS}\left(\frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\pi}}\right)$$

Luego, usando el comando **dsolve** junto con la opción **numeric**, se obtiene una solución numérica al problema de valor inicial dado. Así,

> **solnum:=dsolve({diff(y(x),x)=sin(x^2),y(0)=0},y(x),numeric);**

$$solnum := \text{proc}(rkf45_x) \;\ldots\; \text{end proc}$$

la cual se graficará con el comando **odeplot**. El comando **odeplot** está contenido en el paquete **plots**. En consecuencia, la representación gráfica de la solución del problema de valor inicial dado en el intervalo [0,10], se obtiene como sigue.

> **with(plots):**
> **odeplot(solnum,[x,y(x)],0..10);**

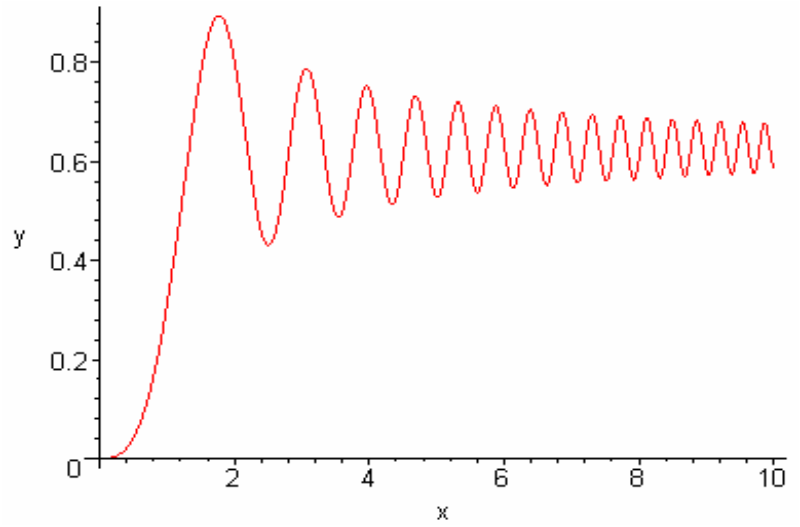


Figura 3: Curva solución del problema $y' = sen(x^2)$; $y(0) = 0$

Finalmente, para evaluar y(5), se procede así:

```
> solnum(5);
```

$$[x = 5., y(x) = .527918216518758142]$$

lo cual indica que $y(5) \approx 0.5279$

Ejemplo 4. Verificar que la ecuación diferencial $y' = -y\cos(x)$ tiene infinitas soluciones.
Solución. Se utiliza el comando **dsolve** para resolver la ecuación diferencial lineal de primer orden, llamando al resultado **sol**. En el resultado si C es cualquier número real, entonces una solución para la ecuación es $y = C e^{-\sin(x)}$. Así, la ecuación tiene infinitas soluciones.

```
> sol:=dsolve(diff(y(x),x)=-y(x)*cos(x),y(x));
```

$$sol := y(x) = _C1\, e^{(-\sin(x))}$$

Ahora, se grafican algunas soluciones con el comando **plot**.

```
> nplot:={seq(subs(_C1=i,rhs(sol)),i=-6..10)}:plot(nplot,x=0..4*Pi,color=blue);
```

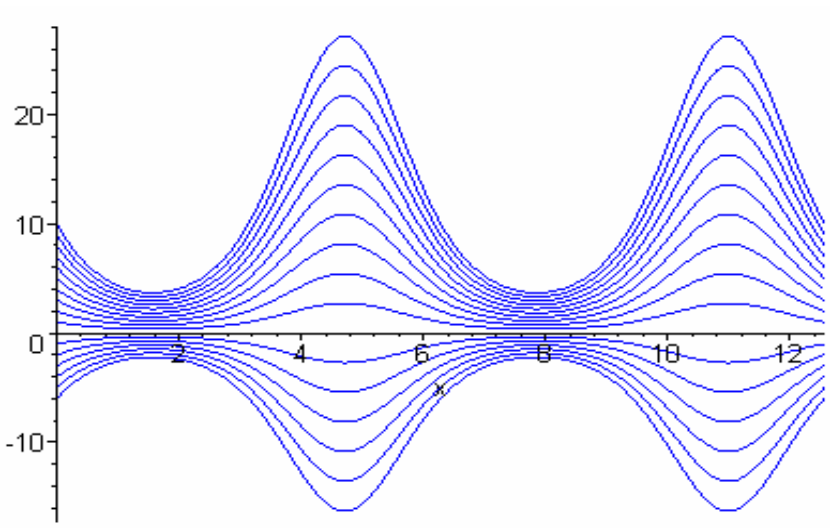


Figura 4 Infinitas curvas solución de la ecuación y' = – ycos(x)

Ejemplo 5. Obtenga la gráfica del campo direccional asociado con la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(y) - y\cos(x)}{x\,\mathrm{sen}(y) + \mathrm{sen}(x) - 1}$$

Solución. Empleando el comando **dsolve**, se halla una solución general de la ecuación diferencial dada y, a este resultado se le llamará solgen.

```
> y:='y':
> solgen:=dsolve(diff(y(x),x)=(cos(y(x))-y(x)*cos(x))/(x*sin(y(x))
  +sin(x)-1),y(x));
```

$$solgen := -x\cos(y(x)) + y(x)\sin(x) - y(x) + _C1 = 0$$

Se puede observar que una solución general de la ecuación dada está dada por la expresión: y sen(x) – x cos(y) – y = C.

Note que la gráfica de y sen(x) – x cos(y) – y = C para varios valores de C es la misma que la gráfica de las curvas de nivel de $f(x,y)$ = y sen(x) – x cos(y) – y.

A continuación, se define **cvniv** por ysen(x) – xcos(y) – y, para ello se aplica **lhs** el cual extrae el lado izquierdo de la ecuación **solgen** para finalmente usar **subs** , que reemplazará y(x) por **y** y _C1 por 0.

```
> cvniv:=subs({y(x)=y,_C1=0},lhs(solgen));
```

$$cvniv := -x\cos(y) + y\sin(x) - y$$

Luego, se carga el paquete **plots** para usar el comando **contourplot**, con el cual se obtendrán las gráficas de algunas curvas de nivel en el rectángulo $[0,4\pi] \times [0,4\pi]$.

```
> with(plots):
> cplot:=contourplot(cvniv,x=0..4*Pi,y=0..4*Pi,grid=[40,40],axes=NORMAL,
  color=BLUE):
> display(cplot);
```

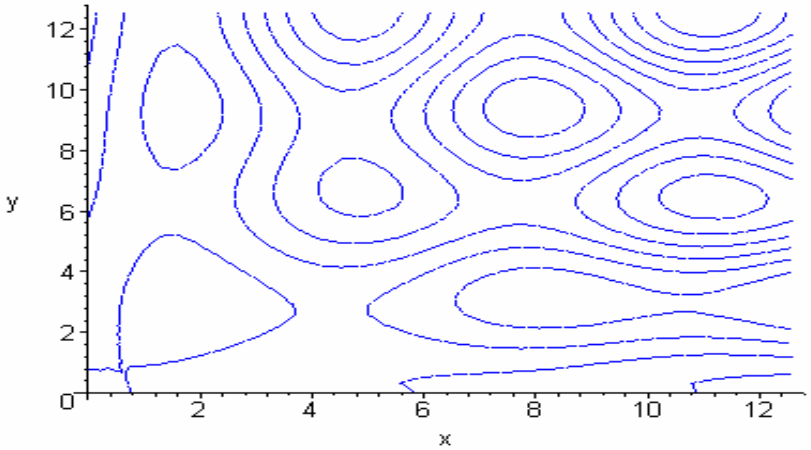


Figura 5 : Curvas de nivel de $f(x,y)$ *= y sen(x) – x cos(y) – y*

Ejemplo 6. Muestre que la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{y} - 2y}{x}$ es separable, y resuélvela por dicho método. Además, obtenga las curvas solución para distintos valores del parámetro c.

Solución. En efecto, la ecuación dada es separable ya que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}-2y} = \frac{dx}{x} \qquad (1)$$

Para efectuar cualquier cambio de variable, se utiliza el comando **changevar** que está contenido en la librería **student**. Así, integrando el lado izquierdo de (1), se tiene:

```
> y:'y':
> with(student):
> paso1:=changevar(1-sqrt(y)=u,Int(1/(2*y^(1/2)*(1-y^(1/2))),y),u);
```

$$paso1 := \int -\frac{1}{u}\,du$$

La integral indefinida se resuelve con el comando **value**

```
> paso2:=value(paso1);
```

$$paso2 := -\ln(u)$$

Se regresa a la variable original aplicando el comando **subs**.

```
> paso3:=subs(u=1-sqrt(y),paso2);
```

$$paso3 := -\ln(1-\sqrt{y})$$

Integrando el segundo miembro de (1), se tiene:

```
> paso4:=int(1/x,x);
```

$$paso4 := \ln(x)$$

Para hallar una solución general de la ecuación dada, en términos de x ó y, se procede así:

```
> simplify(solve(paso3=paso4+c,x));
```

$$-\frac{\mathbf{e}^{(-c)}}{-1+\sqrt{y}}$$

```
> simplify(solve(paso3=paso4+c,y));
```

$$\frac{(-1+x\,\mathbf{e}^{c})^{2}\,\mathbf{e}^{(-2c)}}{x^{2}}$$

Un resultado equivalente se puede obtener empleando el comando **dsolve**. Así,

```
> solgen:=dsolve(diff(y(x),x)=(2*sqrt(y(x))-2*y(x))/x,y(x));
```

$$solgen := \sqrt{y(x)} - 1 - \frac{_C1}{x} = 0$$

Se redefine la solución obtenida, la cual es equivalente a:

```
> soly:=(x+_C1)^2/x^2;
```

$$soly := \frac{(x+_C1)^{2}}{x^{2}}$$

Similarmente, se puede encontrar una solución general de la ecuación dada, usando el comando **separablesol**. Para ello, primeramente se carga la librería **DEtools**, y luego se emplea dicho comando. Así:

```
> with(DEtools):
> separablesol(diff(y(x),x)=(2*sqrt(y(x))-2*y(x))/x,y(x));
```

$$\{\ln(x) + \frac{1}{2}\ln(y(x)-1) - \operatorname{arctanh}(\sqrt{y(x)}) + _C1 = 0\}$$

Para obtener la representación gráfica de la solución para varios valores de _C1, se emplean los comandos **seq**, **subs** y para generar el conjunto de curvas que se obtienen al sustituir _C1 para cada i, con

i= –2, –1.75,...., 1.75, y 2, se llama a esta sustitución **vinic**. Al conjunto de curvas resultantes se le llamará **curint**.

```
> vinic:=seq(-2+0.25*i,i=0..16);
```

vinic := -2., -1.75, -1.50, -1.25, -1.00, -.75, -.50, -.25, 0., .25, .50, .75, 1.00, 1.25, 1.50, 1.75, 2.00

```
> curint:={seq(subs(_C1=i,soly),i=vinic)}:
> plot(curint,x=-2..2,view=[-2..2,0..4],color=BLACK);
```

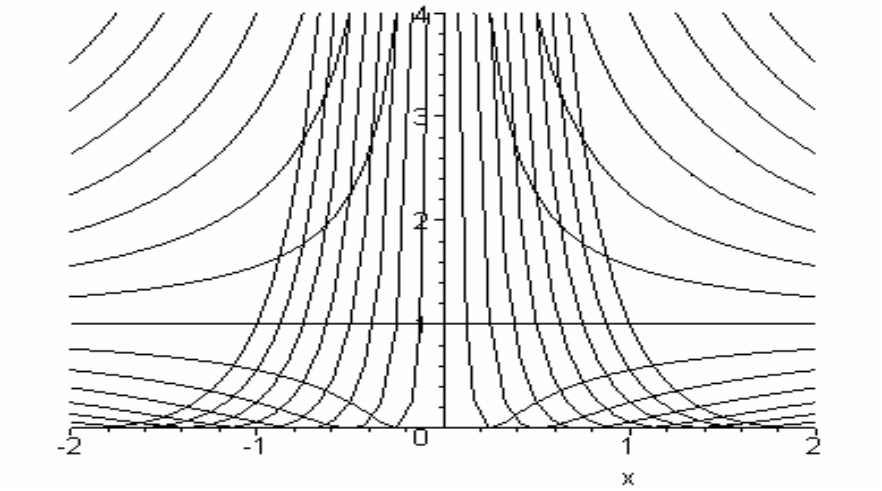


Figura 6 *Curvas solución de la ecuación* $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{y} - 2y}{x}$

BIBLIOGRAFÍA

Barrow, D: Belmonte, A: Bogges, A: Bryant, J: Kiffe, T: Morgan, J: Rahe, M: Smith, K: Stecher, M; Solving ODEs with Maple V; Canadá: Editorial Brooks/Cole. (1998)

Boyce, W: DiPrima, R; Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera, octava edición; México: Limusa. (1998)

Burbulla, D: Dodson, C; Self-Tutor for Computer Calculus using Maple; Canadá: Prentice-Hall. (1993)

Coombes, K; Differential Equations with Maple V; U.S.A: Editorial John Wiley & Sons. (1997)

Edwards, C; Penney, D; Ecuaciones Diferenciales Elementales; México: Pearson Educación. (2001)

Haberman, R: Campbell, S; Ecuaciones Diferenciales con problemas de valor de frontera; México: McGraw-Hill/ Interamericana. (1998)

Marlin, J; Solving Ordinary Differential Equations; U.S.A: North Carolina State University. (1997)

Nagle, K: Saff, E; Fundamentos de Ecuaciones Diferenciales, segunda edición; U.S.A: Addison-Wesley Iberoamericana. (1992)





UNIVERSIDAD NACIONAL
de LA PAMPA

EXPERIENCIA DE APRENDIZAJE EN ENTORNOS VIRTUALES

DAL BIANCO, Nydia;
BOTTA GIODA, Rosana;
CASTRO, Nora;
MARTINEZ, Silvia;
LEE Mei;
PIA SALVADORI Andrea;
PRIETO, Fabio.

Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa – Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar

Introducción

- ✓ **Describimos una experiencia didáctica sobre un tema de la asignatura Matemática, complementando la propuesta metodológica presencial con el aula virtual a fin de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje.**

- ✓ **El aula virtual fue diseñada en la plataforma de educación a distancia de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam y está basada en el sistema de gestión de aprendizaje Moodle.**

- ✓ **La propuesta se desarrolló con un formato híbrido: algunas actividades se llevaron a cabo a través de la Web y otras en forma presencial para resolver en forma conjunta con el equipo docente.**

Desarrollo

Utilizamos el modelo de diseño instruccional ADDIE que consta de las siguientes fases:



Análisis

El tema seleccionado fue Secciones Cónicas, desarrollando: circunferencias, elipse, parábola e hipérbola.

Se pretendía:

- ✓ **Identificar cónicas como lugar geométrico.**
- ✓ **Reconocer las diferentes ecuaciones y relacionarlas con las gráficas correspondientes.**
- ✓ **Identificar los elementos característicos.**
- ✓ **Analizar la influencia de los diferentes parámetros en su relación con la gráfica de la cónica correspondiente.**
- ✓ **Hallar la solución de: ecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones no lineales.**
- ✓ **Resolver situaciones problemáticas que integren los conceptos aprendidos.**

Diseño

La unidad didáctica se organizó de la siguiente forma:

- ✓ **Bienvenida al aula virtual.**
- ✓ **Objetivos e Introducción.**
- ✓ **Presentación de cada una de las cónicas. (Texto teórico interactuando en forma dinámica con actividades realizadas con software Geogebra).**
- ✓ **Ejercitación integradora. Espacio destinado a atención de consultas mediante foros o chat.**
- ✓ **Autoevaluación. (combinando formatos: opción múltiple, v - f, o para completar, corrección instantánea)**
- ✓ **Trabajo Final. (Las actividades debían ser cargadas en tiempo y forma a la página web).**
- ✓ **Encuesta.**
- ✓ **Bibliografía y direcciones útiles de Internet.**

Desarrollo

El trabajo de diseño fue llevado a cabo por los integrantes de la cátedra previa capacitación en el uso de la plataforma.

En esta etapa se explicitaron los objetivos del proyecto:

- **Mejorar la enseñanza**
- **Incorporar las TICs**

Se organizó el funcionamiento del equipo de trabajo y el armado del aula virtual.

Implementación

- **Los docentes realizamos un seguimiento de las actividades para poder modificar en la marcha aspectos que puedan obstaculizar el normal desarrollo de las actividades programadas.**

- **Las actividades se desarrollaron combinando clases presénciales (en la sala de cómputos o en el aula) con actividades que los alumnos realizaban mediante la web.**

- **Durante las clases presénciales se trató de que los alumnos se familiarizaran con el entorno virtual y pudieran plantear dudas referidas a la resolución de los prácticos.**

Evaluación

- ✓ **Los alumnos resuelven las actividades propuestas, reunidos en grupos de dos, registrando en un documento de texto las respuestas, que posteriormente subían al aula virtual para su corrección.**
- ✓ **Autoevaluación en línea, individual.**
- ✓ **Seguimiento continuo por parte de los integrantes de la cátedra permitió detectar dificultades en el proceso de aprendizaje y trabajar sobre las mismas para subsanarlas.**
- ✓ **Permitió evaluar el desempeño de los alumnos, como así también autoevaluar la tarea de los docentes y el material utilizado para tener una información completa de los resultados de la propuesta.**

Resultados

Ventajas del uso de la plataforma basada en Moodle:

- **Promueve el trabajo colaborativo.**
- **Tiene una interfaz de navegación sencilla.**
- **Ofrece una variedad de actividades para armar el curso como foros, cuestionarios, tareas y permite incorporar material en distintos formatos**
- **El docente puede realizar un seguimiento de las actividades del curso.**
- **Integra el correo electrónico.**
- **Para el diseño de las actividades de enseñanza se utilizó el software matemático GeoGebra, que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo.**

Conclusiones

- **Para los docentes, la creación de un grupo que pueda desarrollar contenidos de acuerdo al perfil de la asignatura y en formatos específicos para ser accedidos desde un ambiente virtual, vía Internet, será un complemento ideal para el dictado tradicional de clases.**

- **Creemos que la incorporación de la tecnología efectuada en forma conciente y paulatina, prepara y capacita a quienes la utilicen, a fin de obtener resultados favorables en el proceso de enseñanza- aprendizaje.**

Bibliografía

- **ADII JORDI. (1997) Edutec, "Revista Electrónica de Tecnología Educativa Nº 7".**
- **SANGRÀ, A. (2002) "Educación a distancia, educación presencial y usos de la tecnología: una tríada para el progreso educativo". EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa, número20.**
- **SCAGNOLI, N. (2004) "Integración de Internet en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje".**
- **Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas. (1998).*"Educación Matemática e Internet".* Editorial Graó. España.**

Experiencia de aprendizaje en entornos virtuales

Nydia Dal Bianco[1]*;*
Rosana Botta Gioda;
Nora Castro;
Mei Yi Lee,
Silvia Martínez;
Andrea Pía Salvadori;
Fabio Prieto

Resumen

En este trabajo describimos una experiencia desarrollada sobre una unidad didáctica, modificando la propuesta metodológica presencial con la incorporación del aula virtual a fin de mejorar los procesos de aprendizaje de los alumnos.

Para realizar la misma utilizamos el modelo de diseño instruccional conocido como ADDIE, que consta de las siguientes etapas: Análisis, Diseño, Desarrollo, Implementación y Evaluación.
Esta actividad elaborada con docentes fue puesta en práctica en la cursada de la asignatura Matemática, que se dicta en primer año de las carreras de Ciencias Naturales y Químicas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa.

*La propuesta se enmarca en el proyecto de investigación "**Diseño de Estrategias Didácticas para la Enseñanza de la Matemática en Carreras Técnicas**" , uno de cuyos objetivos es el de formular estrategias que logren mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.*

La organización de nuevos espacios de interacción combinando los materiales didácticos con los recursos multimediales fue uno de los objetivos de la propuesta, tratando que la incorporación de la tecnología se efectuara en forma conciente y paulatina con el fin de obtener resultados favorables.

Introducción

En este trabajo describimos una experiencia didáctica sobre un tema correspondiente a la asignatura Matemática, complementando la propuesta metodológica presencial con el aula virtual a fin de mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de los alumnos.
El aula virtual fue diseñada en la plataforma de educación a distancia de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam , pudiendo acceder a ella mediante el siguiente vínculo: http://online2.exactas.unlpam.edu.ar/moodle, basada en el sistema de gestión de aprendizaje Moodle. Esta se desarrolló con un formato híbrido, donde algunas actividades se llevaron a cabo a través de la Web y otras en forma presencial para resolver en forma conjunta con el equipo docente.

Por ello los objetivos de esta experiencia fueron:

- Enseñar los temas de una unidad didáctica del programa de la cátedra utilizando clases virtuales combinadas con presenciales.
- Diseñar las clases siguiendo un modelo de diseño instruccional.
- Analizar las ventajas y desventajas que se observan en el pasaje de la modalidad presencial a la semipresencial.

Marco Teórico

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad Nacional de La Pampa – Argentina
dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar

Algunos autores como Sangrà (2002), expresan que la educación en entornos virtuales de aprendizaje, no se sitúa necesariamente en ninguna orientación educativa concreta. Al igual que en la presencialidad existe la convivencia entre orientaciones y didácticas diversas, siempre que éstas actúen de forma coherente con las finalidades educativas y con los fines de la educación, de la misma forma sucede en la virtualidad.

La diferencia más importante entre la educación en la presencialidad y en la virtualidad reside en el *cambio de medio* y en el potencial educativo que se deriva de la optimización del uso de cada medio. No podemos hacer lo mismo en medios distintos, aunque nuestras finalidades educativas y, por tanto, los resultados que perseguimos sean las mismos, pero debemos saber de antemano que el camino que debemos recorrer es distinto. En la aceptación de esta diferencia de medio de comunicación reside el éxito o el fracaso de la actividad educativa.

Debemos reflexionar respecto a que los modelos virtuales no tendrán éxito si se basan en intentar replicar los modelos presenciales. La clase magistral es una clase presencial, y suponiendo que sea un buen recurso, que a veces lo será, no puede "copiarse" en otro medio. Será necesaria una adaptación, que aproveche lo mejor que ese medio ofrece y que, de esta forma, alcance los mismo objetivos formativos que se plantearía una acción presencial. Es ahí donde la educación a distancia y sus diferentes enfoques didácticos pueden realizar un importante aporte.

Educación y virtualidad se complementan en la medida en que la educación puede gozar de las posibilidades de creatividad de la virtualidad para mejorar o diversificar sus procesos y acciones encaminados a la enseñanza y al aprendizaje, mientras que la virtualidad como sistema se beneficia de la metodología de trabajo educativo y de comunicación, necesaria en aquellos casos habituales en los que la finalidad de la relación en la red sobrepasa la de la búsqueda de información.

Al utilizar una aula virtual necesitamos planificar nuestras clases, sabiendo que no sería exitoso trasladar nuestro material habitual sin tener algunos aspectos en cuenta. Es por ello que lo necesitamos un modelo de diseño instruccional. Estos modelos son representaciones visuales del proceso de diseño y planificación de un curso y muestran los distintos elementos y etapas en la planificación y la relación entre las mismas.

Los modelos básicamente responden a las estrategias pedagógicas básicas correspondientes a transmitir y motivar la creación de nuevos conocimientos en los alumnos.

Desarrollo

A partir de lo expresado en la introducción, trataremos de sintetizar como fue nuestra experiencia como grupo de trabajo en este primer intento de diseñar un tema de matemática para su enseñanza utilizando un aula virtual.

Utilizando el modelo de diseño instruccional ADDIE, trabajamos en las siguientes etapas:

1. Análisis.

El tema elegido del programa de la asignatura Matemática fue Secciones Cónicas, desarrollando: circunferencias, elipse, parábola e hipérbola.

Con el desarrollo de esta actividad se pretendía:

- Identificar cada una de las secciones cónicas como lugar geométrico.
- Reconocer las diferentes cónicas a partir de sus ecuaciones y relacionarlas con las gráficas correspondientes.

- Adquirir destreza para transformar las distintas expresiones de las cónicas (canónica <=> general <=> paramétrica).
- Identificar los elementos característicos de cada una de las cónicas, a partir de su ecuación.
- Deducir la ecuación de la cónica según los datos proporcionados.
- Analizar la influencia de los diferentes parámetros en su relación con la gráfica de la cónica correspondiente.
- Hallar la solución de: ecuaciones y sistemas de ecuaciones e inecuaciones no lineales.
- Resolver situaciones problemáticas que integren los conceptos aprendidos.

Los alumnos que participaron de esta experiencia tenían conocimientos básicos en la utilización de la computadora. Para poder acceder al aula virtual, necesitaban contar con una PC y conexión a Internet. Este requisito no fue un obstáculo ya que los alumnos podían utilizar la sala de computación de la facultad.

2. Diseño

La unidad didáctica se organizó de la siguiente forma:

- ✓ Breve bienvenida al aula.
- ✓ Objetivos de la unidad, en un documento de texto.
- ✓ Introducción al tema, en un documento de texto con imágenes.
- ✓ Presentación de cada una de las cónicas.

El material teórico constaba de un apunte realizado por la cátedra en formato Word o PDF para asegurar el acceso desde cualquier máquina con guías de autoaprendizaje, interactuando dinámicamente con el software Geogebra.

- ✓ Ejercitación integradora.

Una serie de ejercicios a resolver relacionados con el tema y disponiendo de las respuestas para un mayor control por parte de los estudiantes, además del espacio destinado para atención de las consultas (mediante foros o chat).

- ✓ Autoevaluación.

Se trata de evaluaciones con ejercicios de opción múltiple, verdadero - falso, o para completar, todas ellas de corrección instantánea, lo que les permitía a los estudiantes controlar su proceso de aprendizaje.

- ✓ Trabajo Final.

Las actividades propuestas de carácter obligatorio, debían ser cargadas en tiempo y forma a la página correspondiente.

- ✓ Encuesta

Los estudiantes completaron una encuesta al finalizar el desarrollo de la actividad en la que opinaban sobre diversos aspectos relacionados con esta metodología de trabajo.

- ✓ Bibliografía y direcciones útiles de Internet.

Un listado de libros accesible en la biblioteca, en formato digital y también direcciones electrónicas recomendadas.

3. Desarrollo

El trabajo de diseño fue llevado a cabo por los integrantes de la cátedra previa capacitación en el uso de la plataforma. En esta etapa se explicitaron los objetivos del proyecto:

- ✓ Mejorar la enseñanza
- ✓ Incorporar las TICs

Se organizó el funcionamiento del equipo de trabajo y el armado del aula virtual.

4. Implementación

A partir del inicio del proyecto, los docentes realizamos un seguimiento de las actividades para poder modificar en la marcha aspectos que puedan obstaculizar el normal desarrollo de las actividades programadas.

En esta experiencia debemos recordar que también se dictaron clases presenciales, algunas de las cuales tenían como objetivo central, facilitar el acercamiento de los alumnos con el aula virtual y otras de consultas sobre la resolución de los prácticos.

5. Evaluación

Al resolver los alumnos cada una de las actividades propuestas, reunidos en grupos de dos, registraban en un documento de texto las respuestas, que posteriormente subían al aula virtual para su corrección.

También contaban con una autoevaluación en línea, que debían resolver en forma individual.
Al realizar los responsables de la actividad un seguimiento continuo permitió detectar dificultades en el proceso de aprendizaje y trabajar sobre las mismas para subsanarlas. La evaluación final permitió evaluar el desempeño de los alumnos, como así también autoevaluar la tarea de los docentes y el material utilizado para tener una información completa de los resultados de la propuesta.

Resultados

Durante el desarrollo de la experiencia los alumnos se mostraron interesados, con una buena disposición para el trabajo y participaron en forma comprometida.
Analizamos algunas ventajas de la plataforma basada en Moodle:

- ✓ Promueve herramientas para el trabajo colaborativo.
- ✓ Tiene una interfaz de navegación sencilla.
- ✓ Ofrece una variedad de actividades para armar el curso como foros, cuestionarios, tareas y permite incorporar material en distintos formatos.
- ✓ El docente puede realizar un seguimiento de las actividades del curso.
- ✓ Integra el correo electrónico.

Para el diseño de las actividades de enseñanza se utilizó el software matemático GeoGebra, que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo, permitiendo realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones las que pueden ser modificadas.

También se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente y tiene la potencia de manejar con variables vinculadas a números, vectores y puntos; hallando derivadas e integrales de funciones con un amplio repertorio de comandos propios del análisis matemático, a fin de identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos.

Conclusiones

Organizamos esta experiencia con el convencimiento de introducir cambios en la metodología de la cátedra, buscando organizar nuevos espacios de interacción y combinando materiales didácticos con los recursos multimediales.

Teniendo siempre como objetivo iniciar un proceso de cambio donde lentamente incorporamos estrategias y herramientas que nos permitan mejorar la enseñanza aprendizaje.

Desarrollando adecuadamente el material didáctico y presentándolo en una aplicación Web con los recursos y mecanismos indispensables de un ambiente virtual de aprendizaje, se motiva a los estudiantes para que, a través de un trabajo sistemático aumenten sus posibilidades de lograr un buen desempeño durante la cursada de la asignatura.

Por otra parte les permite acceder al material de estudio en cualquier momento, facilitando de este modo la auto-regulación de su aprendizaje.

Para los docentes, la creación de un grupo que pueda desarrollar contenidos de acuerdo al perfil de la asignatura y en formatos específicos para ser accedidos desde un ambiente virtual, vía Internet, será un complemento ideal para el dictado tradicional de clases.

Resumiendo la incorporación de la tecnología efectuada en forma conciente y paulatina, prepara y capacita a quienes la utilicen, a fin de obtener resultados favorables en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Bibliografía

ADII JORDI. (1997) Edutec, "Revista Electrónica de Tecnología Educativa Nº 7".

SANGRÀ, A. (2002) "Educación a distancia, educación presencial y usos de la tecnología: una tríada para el progreso educativo". EDUTEC, Revista Electrónica de Tecnología Educativa, número20.

SCAGNOLI, N. (2004) "Integración de Internet en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje".
Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas**.** (1998) ."*Educación Matemática e Internet"*. Editorial Graó. España.

Exploraciones sobre la linealización de la gráfica de una función alrededor de un punto y una justificación algebraica.

Ma. Eugenia Andreu Ibarra.[1]

Resumen

Se propone un acercamiento gráfico para introducir la recta tangente como la aproximación lineal de una función en un punto justificándolo algebraicamente lo que permite tratar el tema antes de entrar al concepto de límite con toda la dificultad que entraña.

¿Qué pasa si nos acercamos a una pequeña vecindad alrededor de un punto de la gráfica de una función y luego la ampliamos? Esta pregunta se puede contestar experimentalmente si se cuenta con una computadora y un paquete para graficar que posea lente de acercamiento (zoom) como podría ser Derive.

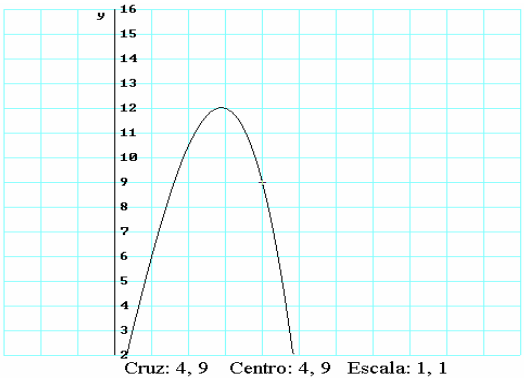
Se traza la gráfica de la función $y = f(x)$, se fija un punto en ella, digamos $(a, f(a))$ y se toman acercamientos (aplicando repetidamente el zoom con centro en ese punto)

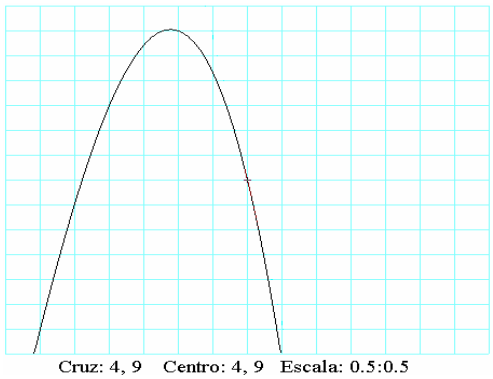
Veamos esto en un caso concreto considerando la función $f(x) = \frac{25}{4}x - \frac{1}{4}x^3$ cuya gráfica es:

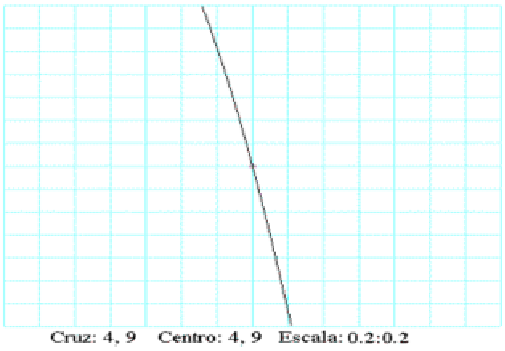


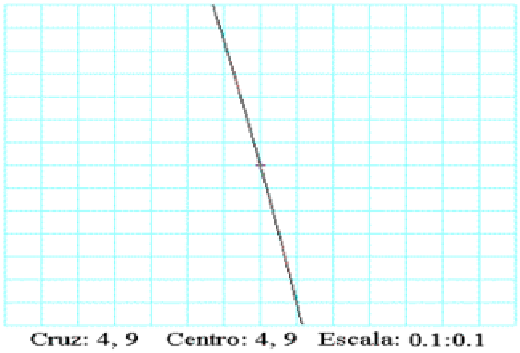
Ahora fijémonos en un punto cualquiera de la curva $y = \frac{25}{4}x - \frac{1}{4}x^3$, por ejemplo el de coordenadas $(4, f(4)) = (4, 9)$ y tomándolo como centro hagamos acercamientos aplicando repetidamente el zoom:

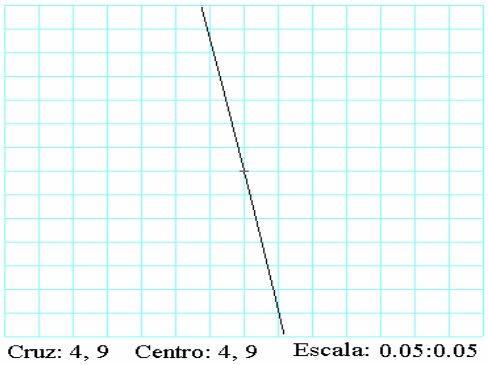
[1] Universidad Autónoma Metropolitana, México, Unidad Azcapotzalco. México D. F.
mai@correo.azc.uam.mx











En este momento, el pedazo de gráfica de la función ya se ve como una recta y podríamos preguntarnos por qué al tomar ampliaciones en la curva se ve como una recta ¿cómo se justifica teóricamente esto? Una justificación algebraica es la siguiente.

Consideremos la diferencia $f(x+h)-f(x)$, tendremos

$$f(x+h)-f(x) = \tfrac{25}{4}(x+h)-\tfrac{1}{4}(x+h)^3-(\tfrac{25}{4}x-\tfrac{1}{4}x^3),$$
$$= \tfrac{25}{4}x+\tfrac{25}{4}h-\tfrac{1}{4}(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-\tfrac{25}{4}x+\tfrac{1}{4}x^3,$$
$$= \tfrac{25}{4}h-\tfrac{3}{4}x^2h-\tfrac{3}{4}xh^2-\tfrac{1}{4}h^3$$

agrupando los términos en potencias de h y despejando $f(x+h)$ tendremos que

$f(x+h) = f(x) + (\tfrac{25}{4} - \tfrac{3}{4}x^2)h - \tfrac{3}{4}xh^2 - \tfrac{1}{4}h^3$. Substituyendo los valores que tomamos como centro para la ampliación $x=4$ y $f(4)=9$, obtenemos

$f(4+h) = f(4) + (\tfrac{25}{4} - \tfrac{3}{4}(16))h - \tfrac{3}{4}(4)h^2 - \tfrac{1}{4}h^3$,

$f(4+h) = 9 + (25/4 - 12)h - 3h^2 - 1/4 h^3 = 9 - 23/4 h - 3h^2 - 1/4 h^3$.

Si ahora tomamos $h = x - 4$, de donde $4 + h = x$ y substituimos nuevamente se tiene que $f(x) = 9 - 23/4 (x-4) - 3(x-4)^2 - 1/4 (x-4)^3$.

Que es la misma función original pero expresada de manera diferente como puede comprobarse al desarrollar y simplificar:

$$f(x) = 9 - 23/4 (x-4) - 3(x-4)^2 - 1/4 (x-4)^3$$
$$= 9 - 23/4 x + 23 - 3x^2 + 24x - 48 - 1/4 x^3 + 3x^2 - 12x + 16$$
$$= 25/4 x - 1/4 x^3$$

En la nueva expresión de $f(x) = 9 - \frac{23}{4}(x-4) - 3(x-4)^2 + \frac{1}{4}(x-4)^3$ se puede inferir y constatarse numéricamente, que para valores de x muy cerca de 4 los valores $(x-4)^2$ y de $(x-4)^3$ son mucho más pequeños que $(x-4)$ ya que estamos considerando que $|x-4|$ está cerca de cero, por lo que tendremos que $f(x) \approx 9 - \frac{23}{4}(x-4)$ para valores de x muy cerca de 4. A esa aproximación a la gráfica se le llama **aproximación lineal de la función en** $x = 4$ es una recta que tiene pendiente $-\frac{23}{4}$, y que pasa por el punto $(4, f(4)) = (4,9)$ y es la que se define también como la **recta tangente a la función en ese punto**.

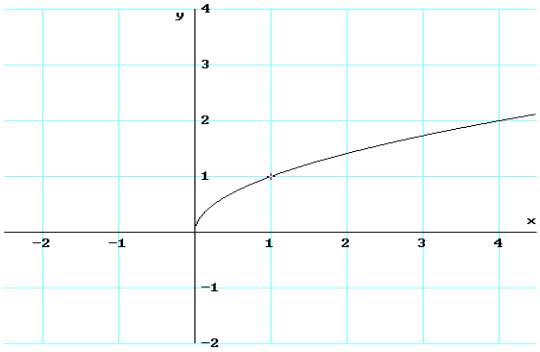
En la gráfica de la recta en que se convirtió la función podemos constatar que efectivamente esa recta pasa por el punto de coordenadas $(4,9)$ y podemos estimar su pendiente como sigue: ubicándonos en un punto de la gráfica, como el marcado de coordenadas $(4,9)$, avanzamos un cuadrito en x y para encontrarnos sobre la gráfica nuevamente tendremos que bajar casi 6 cuadritos en y, digamos aproximadamente 5.75 y entonces la pendiente de esa recta será $-5.75 = -\frac{23}{4}$, ¿se entiende porqué? (pues porque hemos tomado $\Delta x = 1(.05)$ y resultó $\Delta y = -5.75(.05)$ y sabemos que la pendiente de una recta es $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-5.75\ (.05)}{1\ (.05)} = -5.75$).

Tracemos ahora juntas la gráfica de la función $f(x) = \frac{25}{4} x - \frac{1}{4} x^3$ y la de la recta que pasa por el punto $(4, f(4)) = (4,9)$ y cuya pendiente es $f'(4) = -\frac{23}{4}$, que tiene por ecuación $y = -\frac{23}{4} x + 32$ (la cual se obtuvo aplicando la fórmula conocida como punto–pendiente para obtener la ecuación de una recta que pasa por el punto de coordenadas (x_1, y_1) y tiene pendiente m; esta fórmula está dada por $y - y_1 = m(x - x_1)$) y que es igual a la aproximación lineal obtenida anteriormente.

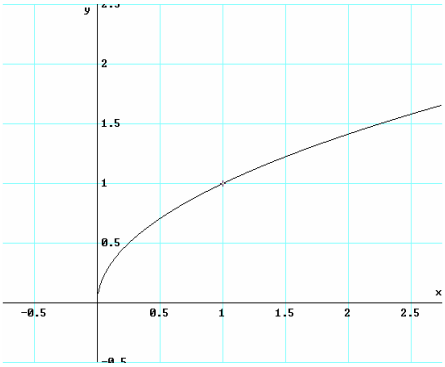


Al aplicar repetidamente el zoom pudimos observar que efectivamente esa recta, que llamamos recta tangente o aproximación lineal de la función, es la recta en la que prácticamente se convierte la curva alrededor del punto de tangencia.

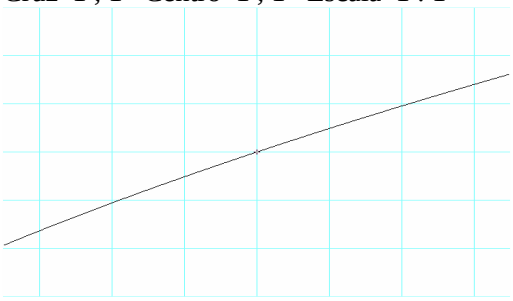
Consideremos otro ejemplo, cuando $f(x)$ es una función no polinomial, como $f(x)=\sqrt{x}$ y el punto es $(1,\ f(1))=(1,1)$. Primero explorémoslo gráficamente a través de la computadora



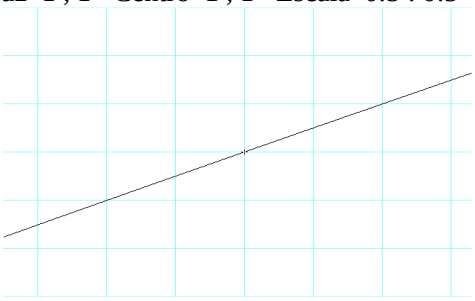
Cruz 1 , 1 Centro 1 , 1 Escala 1 : 1



Cruz 1 , 1 Centro 1 , 1 Escala 0.5 : 0.5



Cruz 1 , 1 Centro 1 , 1 Escala 0.1 : 0.1



Cruz 1 , 1 Centro 1 , 1 Escala 0.01 : 0.01

Como puede verse se repite el proceso, al tomar acercamientos de la gráfica centrados en el punto la función se va viendo como una recta cuya ecuación podemos estimar como $y=1+\frac{1}{2}(x-1)$. Justifiquémoslo algebraicamente, tomamos la diferencia

$f(x+h)-f(x)=\sqrt{x+h}-\sqrt{x}$ multiplicando y dividiendo por $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ (su conjugado) se tendrá

$$f(x+h)-f(x)=\frac{x+h-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{h}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$ sumando y restando $\frac{h}{2\sqrt{x}}$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}h+\left(\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)h$$ substituyendo $x=1$ tendremos

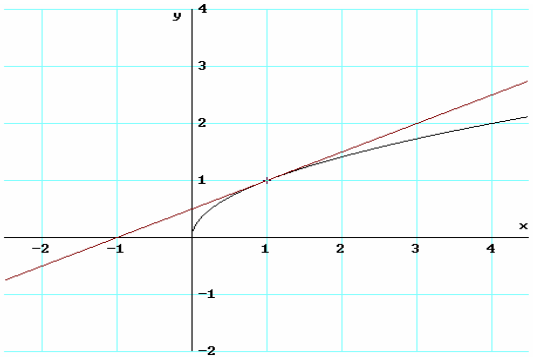
$$f(1+h)=f(1)+\tfrac{1}{2}h+\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}-\frac{1}{2}\right)h$$ se substituye $h=x-1$ obteniendo

$$f(x)=1+\tfrac{1}{2}(x-1)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

En esta nueva expresión para la función original:

$f(x)=\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}(x-1)+\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{2}\right)(x-1)$, la aproximación lineal o recta tangente es $y=1+\frac{1}{2}(x-1)$ como la visualizamos gráficamente y podemos comprobar la ecuación.

A continuación se muestran juntas la función y la recta.



Este proceso se repite para cualquier función algebraica en los puntos de su dominio y puede obtenerse la justificación algebraica de manera análoga a lo expuesto anteriormente.

Es muy importante destacar la relación de este proceso con la derivada de la función. En ambos ejemplos al considerar la diferencia $f(x+h)-f(x)$ se obtuvo una expresión del tipo $f(x+h)-f(x)=Q(h)\,h$ (tomando a x como parámetro y a h como la variable independiente) donde se puede establecer una definición algebraica de la función derivada como $f'(x)=Q(0)$ (Andreu y Riestra 2005) basada en una versión moderna del método de Fermat (Riestra 2001). Así se puede establecer la pendiente de la recta tangente como la derivada de la función valuada en el punto de tangencia.

Otro aspecto interesante del trabajo es que al llegar a la nueva expresión final de $f(x)$ lo que obtuvimos fue el polinomio de Taylor de primer grado de la función, más su residuo exacto en el punto considerado, esto es $P(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+R(x)$ como lo vimos anteriormente en los dos ejemplos considerados:

$$f(x)=\tfrac{25}{4}x-\tfrac{1}{4}x^3 \quad =9-\tfrac{23}{4}(x-4)-3(x-4)^2+\tfrac{1}{4}(x-4)^3 \quad \text{en} \quad x=4.$$

$$f(x)=\sqrt{x} \quad =1+\frac{1}{2}(x-1)+\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}\right)(x-1) \quad \text{en } x=1.$$

Considero que este trabajo puede ser de utilidad en un curso de Cálculo Diferencial en el nivel medio superior o superior en carreras no matemáticas como ingeniería y otras. También quiero mencionar que este trabajo es parte de mi tesis doctoral dirigida por el Dr. Jesús A, Riestra Velásquez.

Bibliografía

Andreu, Ma. Eugenia y Riestra, J.Alfonso (2005). Propuesta alternativa para la enseñanza del concepto de derivada desde una perspectiva histórico-epistemológica de su desarrollo. En José Carlos Cortes & Fernando Hitt (Eds.) *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. Morevallado Editores, Morelia, Mich. México, pp. 157-174.

Andreu, Ibarra M. Eugenia y Riestra Velázquez, Jesús A. (Mexique – Article adapté par F. Pluvinage). (2007) Et si nous en restions á Euler et Lagrange? Mise á l´essai d´unenseignement d´analyse á des étudiants non mathématiciens en début d´études supérieures. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Volume 12, pp. 165-187. Revue internationale de didactique des mathématiques. IREM de Strasbourg. Université Louis Pasteur.

GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Estela Rechimont, Nora Ferreyra, Carlos Parodi,
María D. Scarímbolo, Inés Pedro

Universidad Nacional de La Pampa
Argentina.

RESUMEN

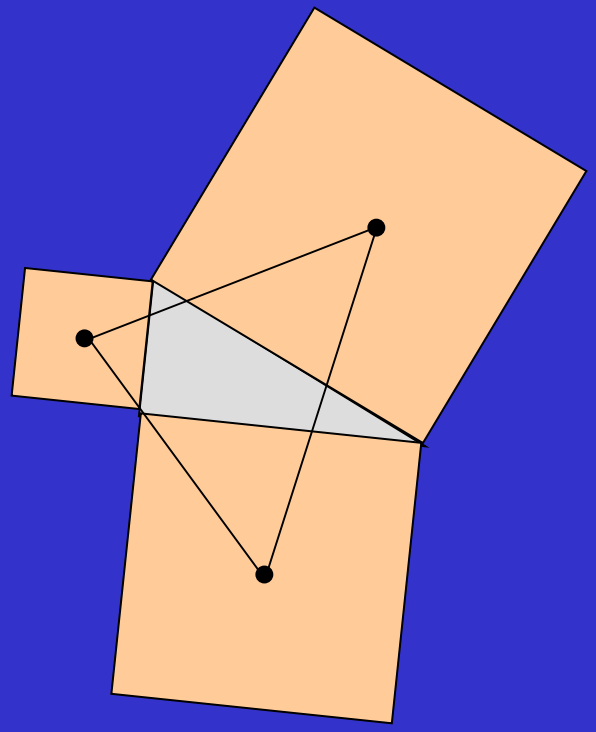
La visualización a través de un software abre múltiples posibilidades para explorar, formular nuevas conjeturas e intentar su validación.

La tendencia actual es volver a ver cuestiones matemáticas geométricamente y se advierte un cambio en la metodología de trabajo al propiciar la visualización de conceptos a través del uso de la computadora en la enseñanza y la investigación educativa

En este trabajo analizamos la respuesta de estudiantes de los primeros años de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, ante un problema cuya resolución, en un análisis a priori, exige la validación de algunos supuestos surgidos del gráfico.

Problema

Sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo, se construye exteriormente un cuadrado, cuyo lado mide lo mismo que el respectivo lado del triángulo rectángulo dado. Hallar el área del triángulo determinado por los centros de los tres cuadrados considerados.



LAS EXPERIENCIAS

Se presentó el problema a dos grupos de estudiantes de segundo año de Profesorado en Matemática que resolvieron:

Primer grupo

Con conocimientos generales de Geometría Elemental, sin otros recursos.

Segundo grupo

Utilizando un software específico, además de los conocimientos geométricos.

RESOLUCIONES CON LÁPIZ Y PAPEL

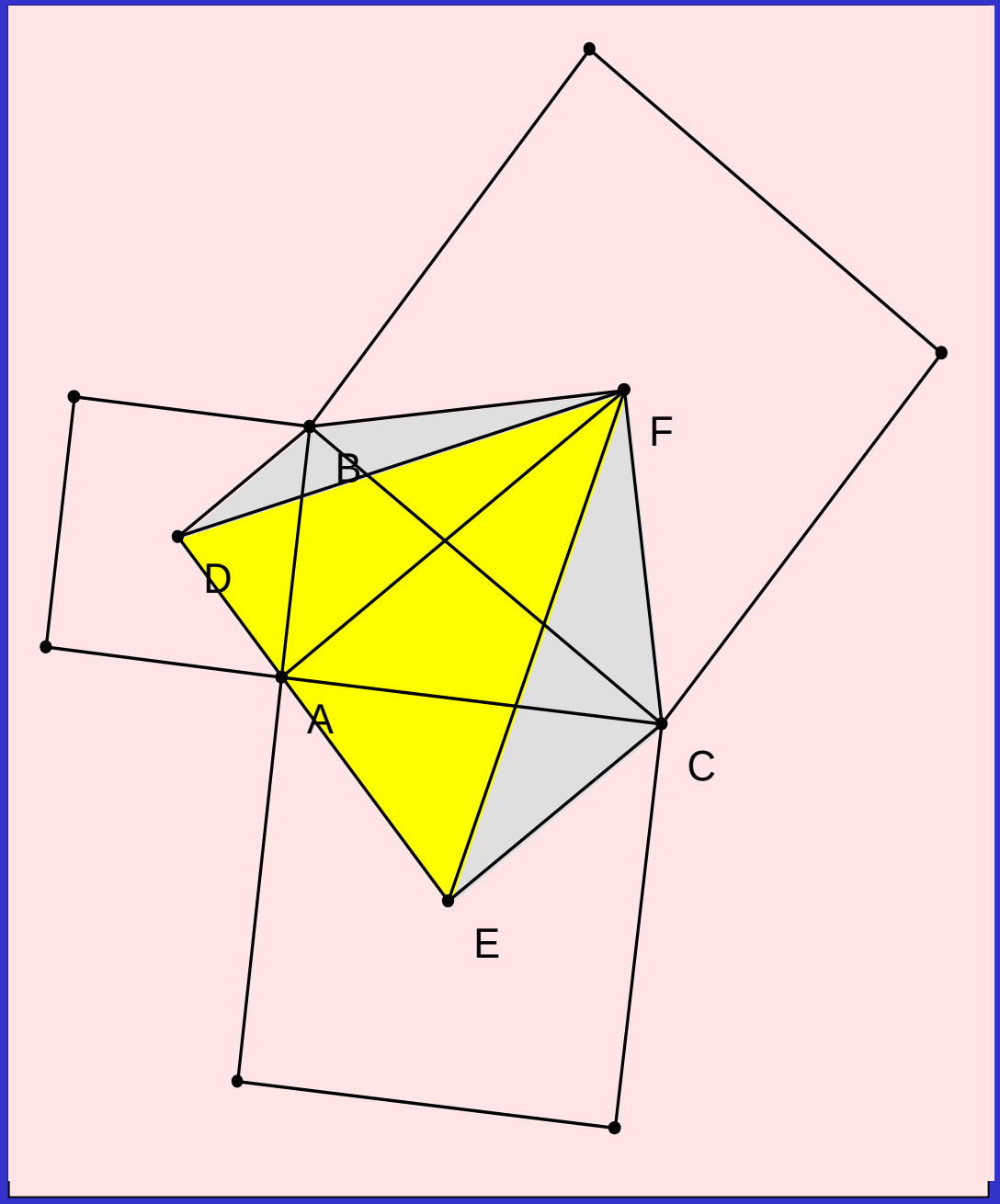
Resoluciones Analíticas

Utilizando la Fórmula de Herón

Ubicando la figura en un sistema de coordenadas rectangulares y trabajando con las ecuaciones de las rectas, las distancias entre puntos y la fórmula para el cálculo del área del triángulo.

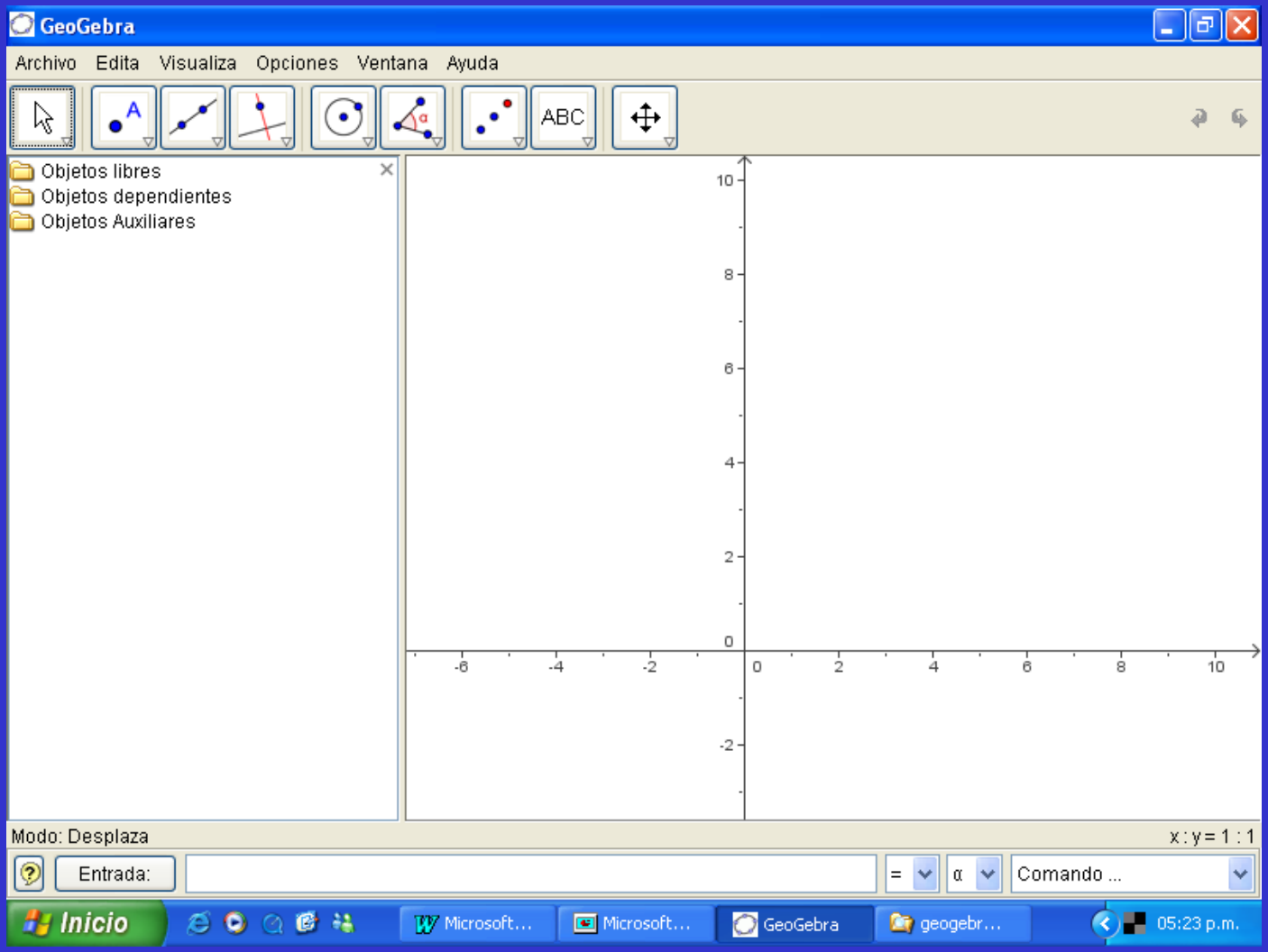
Resolución Geométrica

Considerando el área del triángulo como la diferencia entre las áreas del pentágono BFCED y las áreas de los triángulos BDF y ECF.



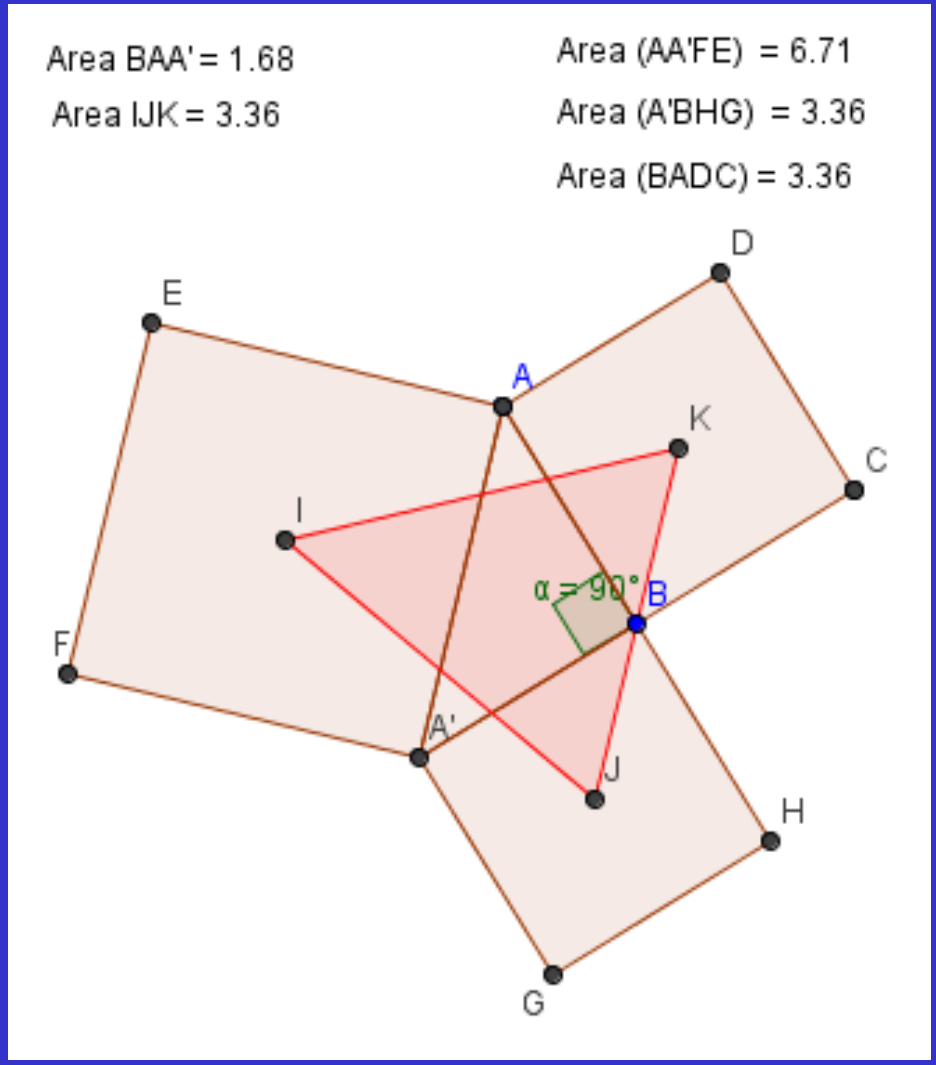
GEOGEBRA

Software gratuito que permite hacer construcciones y disponer de herramientas algebraicas y de animación para las mismas.



RESOLUCIONES CON GEOGEBRA

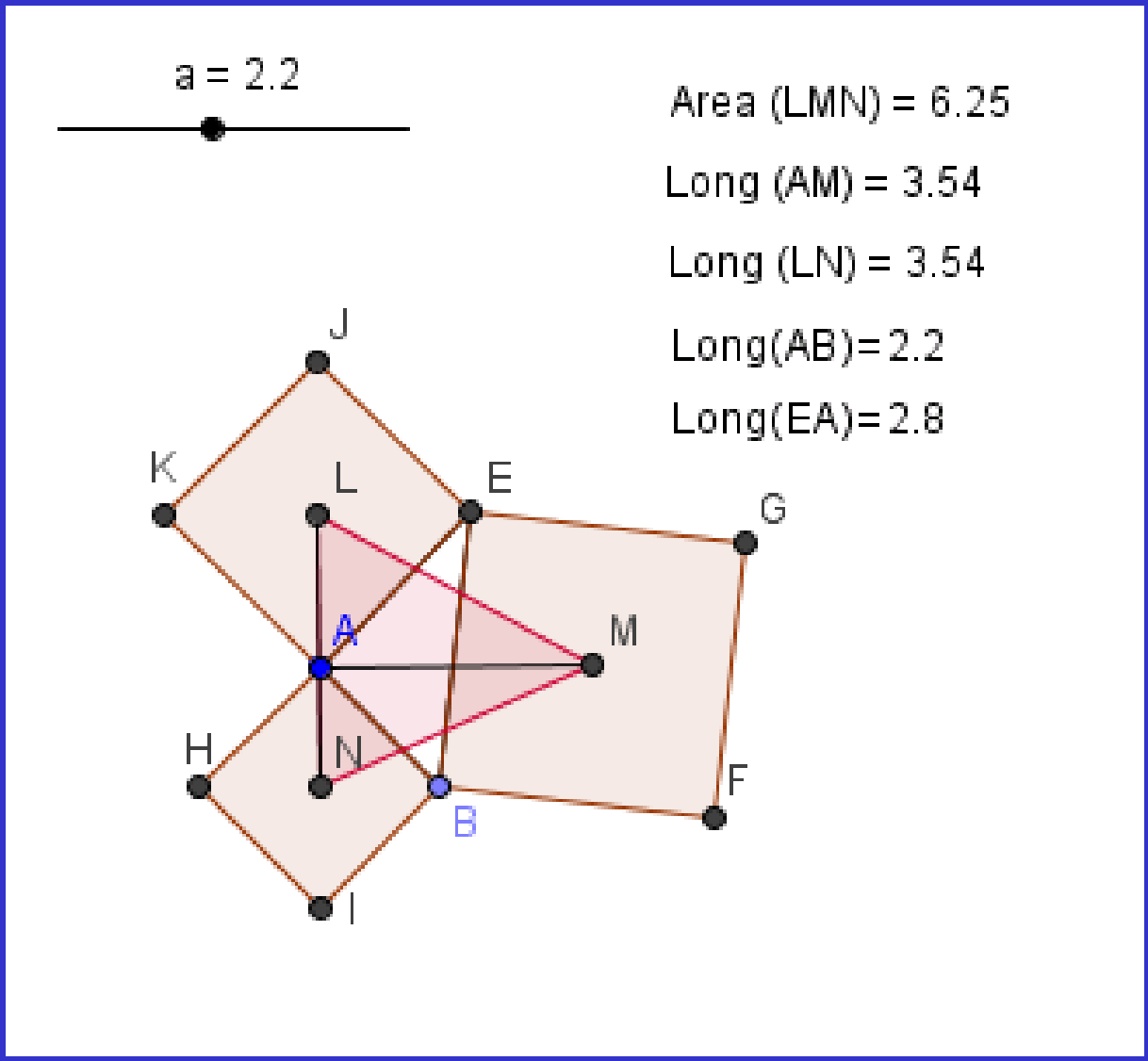
- Construcción dinámica
- Consideración de triángulos particulares
- Procesos de elaboración y validación de conjeturas
- Propiedad detectada:
  Si el triángulo rectángulo dado es isósceles, el área buscada es el doble del área del triángulo inicial.



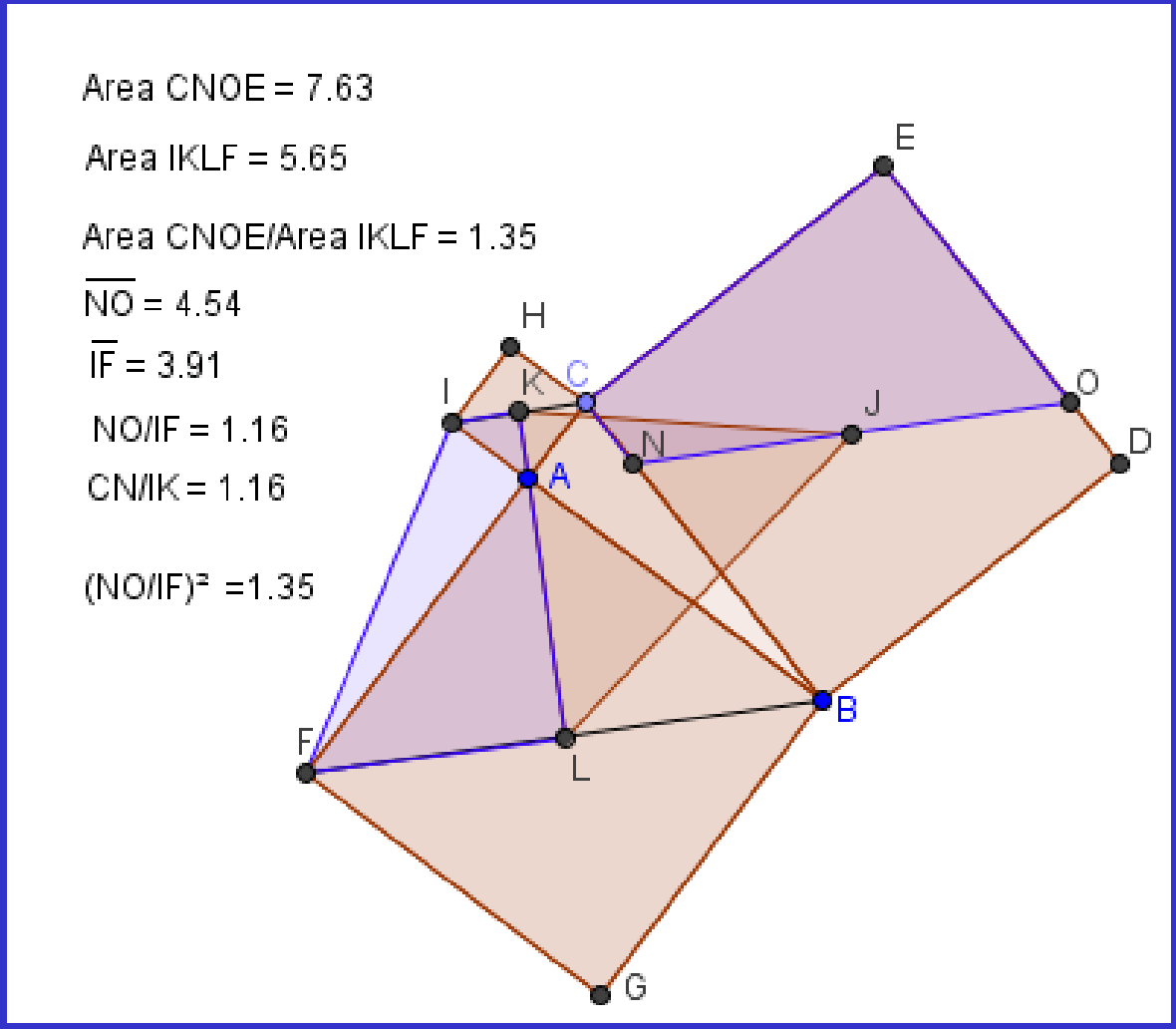
Utilizando la opción “deslizador”, analizaron el caso del triángulo inicial con la suma de las medidas de los catetos igual a una constante

Algunas propiedades detectadas:

- La altura del triángulo *LNM* correspondiente al lado *LN* es igual a *LN*.
- Si la suma de los catetos del triángulo rectángulo es constante, el punto *M* es invariante.



Al trazar rectas paralelas quedaron determinadas otras figuras que dieron lugar a debate y conjeturas.



Propiedad hallada:

- Los trapecios *IKLF* y *NCEO* son semejantes y la razón de semejanza entre ellos es el cociente entre de la suma de los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo inicial.

CONSIDERACIONES FINALES

Las experiencias realizadas con los dos grupos de alumnos muestran las ventajas de la utilización de un software, en particular el Geogebra, en la producción de conjeturas y propuesta de validaciones.

En el trabajo con el software los alumnos se mostraron más entusiasmados, propusieron variaciones del problema y ofrecieron diferentes alternativas de resolución, actitudes que no aparecieron en la resolución tradicional con lápiz y papel.

La utilización del software, en este caso, ha sido no sólo motivador sino también el disparador de procesos de resolución, elaboración de conjeturas y validación.

GEOGEBRA en la resolución de un problema

Estela Rechimont[1],
Nora Ferreyra[2],
Carlos Parodi,
María D. Scarímbolo,
Inés Pedro

Resumen

Es sabido que el uso de la computadora facilita obtener conclusiones en trabajos matemáticos por la posibilidad de visualizar algunos objetos, lo cual constituye sólo un complemento del trabajo del matemático que es quien obtiene los resultados más importantes. La visualización a través de un software abre múltiples posibilidades para explorar, formular nuevas conjeturas e intentar su validación.
En este trabajo analizamos la respuesta de estudiantes de los primeros años de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, ante un problema cuya resolución, en un análisis a priori, implica la validación de algunos supuestos surgidos del gráfico.
En una primera experiencia planteamos la resolución manual del problema y luego, trabajando con otro grupo de alumnos, propusimos la tarea utilizando el software Geogebra
Luego de ambas experiencias, podríamos afirmar que la utilización del software, fue no sólo motivadora sino también el disparador de procesos de resolución, elaboración de conjeturas y validación.

Introducción

La resolución de un problema puede involucrar diversos contenidos y procedimientos muy variados y, generalmente, requiere desplegar y articular distintos registros de representación para lograr una exploración completa de la situación.
"La visualización matemática es el proceso de formarse imágenes mentales, con lápiz y papel o con ayuda de la tecnología, y usar tales imágenes efectivamente para descubrir matemáticas y comprenderlas". (Núñez Urías, J.)
Es sabido que el uso de la computadora permite obtener conclusiones en estudios o trabajos matemáticos por la posibilidad de visualizar algunos objetos, lo cual constituye sólo un complemento del trabajo del matemático que es quien obtiene los resultados más importantes.

La tendencia actual es volver a ver cuestiones matemáticas geométricamente y se advierte un cambio en la metodología de trabajo al utilizar como fuerte herramienta para el entendimiento, la visualización de conceptos a través del uso de la computadora en la investigación educativa.
La visualización a través de un software abre múltiples posibilidades para explorar, formular nuevas conjeturas e intentar su validación.

Sin embargo, el solo hecho de proponer un problema, resolverlo a través de un software y facilitar la formulación de conjeturas respecto de él, no es suficiente para garantizar que los estudiantes pongan en marcha un proceso de prueba. Las experiencias desarrolladas por Nicolás Balacheff (Balacheff, 2000) muestran que, aún en grupos habituados a resolver problemas, son pocos los estudiantes que ven la necesidad y se comprometen en la producción de una prueba de sus resultados.

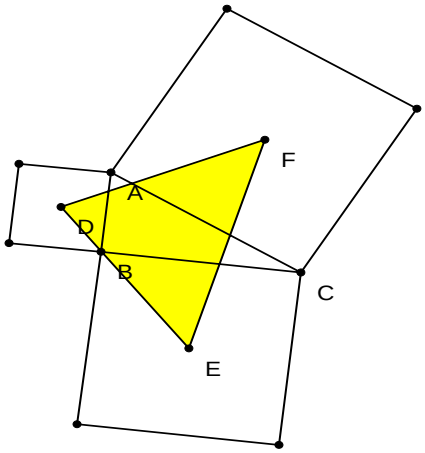
En este trabajo analizamos la respuesta de estudiantes de los primeros años de la carrera Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de La Pampa, ante un problema cuya resolución, en un análisis a priori, implica la validación de algunos supuestos surgidos del gráfico.

[1] Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, rechimont@exactas.unlpam.edu.ar
[2] Universidad Nacional de La Pampa, Argentina, noraf@exactas.unlpam.edu.ar

Problema
Sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo, se construye exteriormente un cuadrado, cuyo lado mide lo mismo que el respectivo lado del triángulo rectángulo dado. Hallar el área del triángulo determinado por los centros de los tres cuadrados considerados.

Análisis a priori
Realizamos un análisis a priori suponiendo, por la experiencia de años de trabajo, que los alumnos solamente tratarán de exhibir una solución y que en el proceso de resolución no se detendrán en la observación propiedades y/o relaciones que pudieran estar implícitas en la figura, considerando la utilización de contenidos elementales de Geometría.

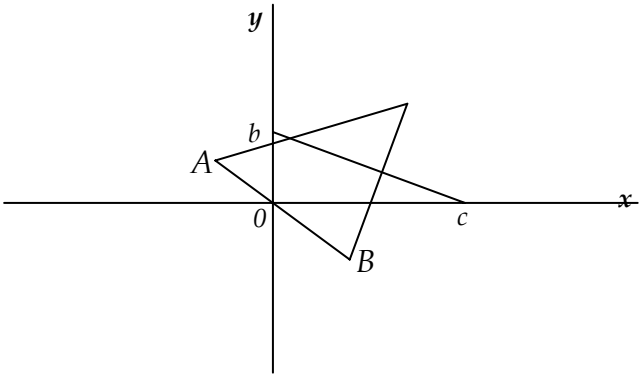
1) Resolución analítica (Utilizando la Fórmula de Herón para calcular el área)



Dado que $\overline{DE} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{DB} + \overline{BE}\right)$, aplicamos el Teorema del Coseno para hallar las medidas de $\overline{DF}$ y de $\overline{FE}$ y resolvemos con ayuda del software Mathematica para finalmente hallar: Área $(DFE) = \frac{\left(\overline{AB} + \overline{BC}\right)^2}{4}$

2) Resolución analítica: ubicando la figura en un sistema de coordenadas cartesiano y trabajando con las ecuaciones de las rectas, las distancias entre puntos y la fórmula tradicional para el cálculo del área del triángulo.

Como las coordenadas de los vértices del triángulo cuya área debemos hallar son $A = \left(-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $B = \left(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2}\right)$, podemos calcular el tercer vértice hallando la perpendicular a la hipotenusa que pasa por el punto medio de ella y determinando el punto que se halla sobre esa perpendicular y a una distancia $\sqrt{b^2 + c^2}$ del punto medio tomado. Así obtenemos dos conclusiones importantes: que la perpendicular a $\overline{AB}$ que pasa por el punto C también pasa por el origen y que $C = \left(\frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$.

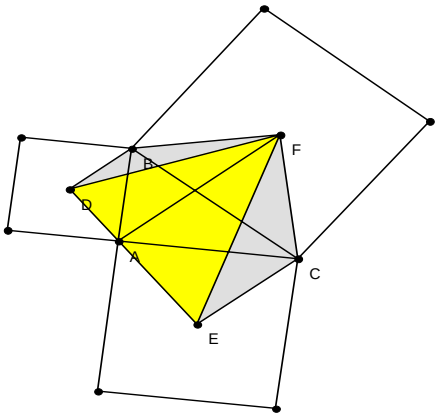


Luego, el área buscada será el semiproducto de la distancia entre *A* y *B* y la distancia entre *C* y el origen.

Esto es: $Área = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{-b}{2}-\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}$

$$Área = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c)^2}{2}}\cdot\sqrt{\frac{(b+c)^2}{2}} = \frac{(b+c)^2}{4}.$$

3) Desde un punto de vista geométrico, podemos pensar el área del triángulo como la diferencia entre las áreas del pentágono *BFCED* y las áreas de los triángulos *BDF* y *ECF*.



El área del pentágono *BFCED* puede calcularse como la suma de los triángulos *ABC*, *BCF*, *AEC* y *BDA*.

El área del triángulo *BDA* es igual al área del *BDF* (tienen igual base, *DB* e igual altura, *DA*, puesto que el segmento *AF* es paralelo a *DB* *) y el área del triángulo *ECA* es igual a la del triángulo *ECF*.

Por lo tanto el área buscada se puede obtener como la suma de áreas de los triángulos *ABC* y *BCF*. Es decir que será:

$$Area = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{2}+\frac{\overline{AC}^2}{4}$$

Indicando $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ y $\overline{BC} = a$, tenemos:

$$Area = \frac{b\cdot c}{2}+\frac{a^2}{4} = \frac{b\cdot c}{2}+\frac{b^2+c^2}{4} = \frac{(b+c)^2}{4}$$

* Quedaría por justificar que efectivamente la altura del triángulo *DBF* es congruente al segmento *DA*.

En cualquiera de las resoluciones propuestas se hallan implícitos procesos de validación, en algunos casos más que en otros, ya que por ejemplo, la validez de propiedades como la fórmula de Herón se suponen conocidas y no se plantea la necesidad de su demostración.
En la última resolución presentada, se plantea la conjetura "la altura del triángulo *DBF* es congruente al segmento *DA*", lo cual favorecería una actitud de reflexión y algún intento posterior de validación.

Las experiencias
La primera vez que se planteó el problema a los estudiantes, al analizar los protocolos de resolución, no hallamos más desarrollos ni observaciones que las previstas en el análisis a priori. La mayoría de los trabajos consistieron en una resolución centrada en geometría analítica y, si bien los estudiantes llegaron a un resultado, no ampliaron el estudio, no formularon generalizaciones, tampoco conjeturas y no desarrollaron el tema más allá de lo pedido explícitamente.

De los once alumnos considerados, sólo dos estudiaron como un caso particular el análisis de un triángulo rectángulo isósceles, en general ubicaron la figura sobre un par de ejes ortogonales y calcularon.

Como caso excepcional, se presentó un único caso de un alumno que, luego de obtener el resultado pedido, formuló una conjetura acerca de la altura, sin embargo no intentó validarla ni resaltó de alguna manera su afirmación

En una segunda ocasión, se presentó el problema a un grupo de estudiantes luego de un curso básico de manejo de un software específico.

El GeoGebra es un software matemático con el que se pueden trabajar conceptos de Geometría, Álgebra y Cálculo principalmente, permite hacer construcciones y disponer de herramientas algebraicas y de animación para dichas construcciones. El software GeoGebra 2.7.1.0 se puede bajar gratuitamente de la página oficial del autor www.geogebra.org , sólo requiere para su instalación disponer de una versión actualizada de Java.

La primera ventaja del programa con respecto a la resolución manual del problema es la construcción dinámica, puesto que de los datos iniciales depende la movilidad de la figura y obliga al usuario a pensar en distintas alternativas de construcción para poder variar las distintas medidas de la figura.

Al disponer en pantalla de áreas y longitudes, es posible corroborar algunas conjeturas y animar al estudiante a intentar una demostración.

En la Figura 1 se muestra el gráfico correspondiente al problema para el caso del triángulo rectángulo isósceles. A raíz de esta construcción, los alumnos hicieron varias observaciones, todas dieron pie a un debate y a algún tipo de argumentación y justificación de su validez. Cuando lo dicho por algún estudiante no se verificaba, fácilmente podía refutarse a través del software y, aunque no todas las afirmaciones realizadas pudieron probarse, rescatamos la utilización del Geogebra como disparador de procesos de elaboración y validación de conjeturas.

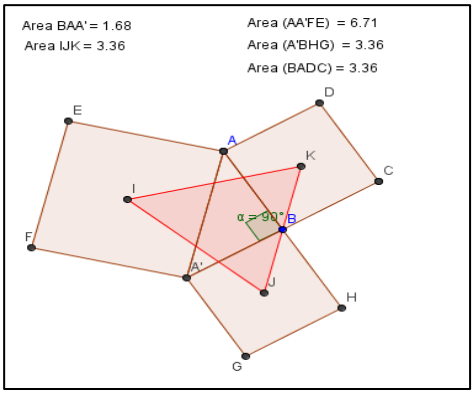


Figura 1

Algunas conjeturas realizadas por los alumnos a partir de la construcción de la Figura 1 son:

1- Si el triángulo rectángulo dado es isósceles, el área del triángulo cuyos vértices son los centros de los cuadrados es el doble del área del triángulo inicial.
2- Si el triángulo rectángulo dado es isósceles, el área del triángulo cuyos vértices son los centros de los cuadrados es igual al área de cada uno de los cuadrados construidos a partir de los catetos.

Animados por las posibilidades del programa, los estudiantes aceptaron el desafío de construir el triángulo inicial con la suma de las medidas de los catetos igual a una constante utilizando la opción "deslizador". En la Figura 2 se rescata una de las producciones, a partir de las que se produjeron nuevas conjeturas y buenos intentos de validaciones.

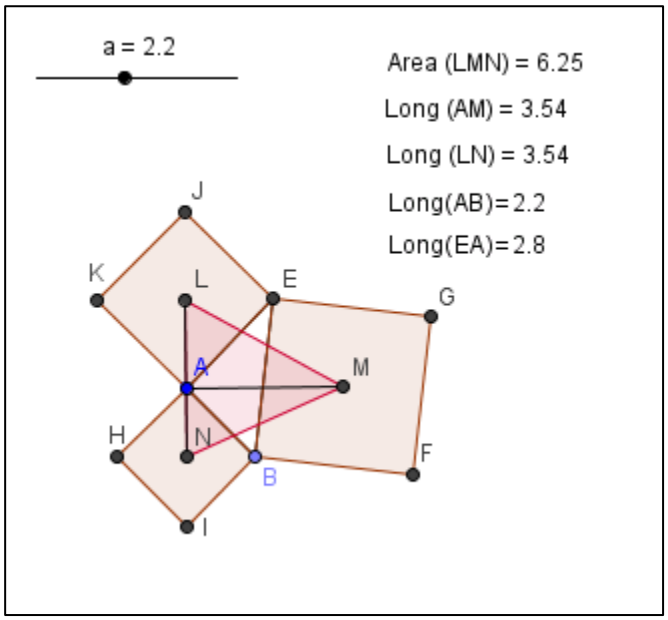


Figura 2

Algunas de las conjeturas que surgieron de esta construcción son:

3- La altura del triángulo *LNM* correspondiente al lado *LN* es igual a *LN*.
4- Si la suma de los catetos del triángulo rectángulo es constante, el punto *M* es invariante.
5- El punto *M* es centro de un cuadrado de lado la suma de los catetos.

Finalmente, mostramos en la Figura 3 una de las producciones más llamativas que dio origen a una propiedad que no tuvimos en cuenta en el análisis a priori y que surgió a partir de la utilización del software para la resolución del problema.

Puesto que algunas de las construcciones se hicieron trazando rectas paralelas y perpendiculares, en muchos casos quedaron determinadas nuevas figuras además de los triángulos y cuadrados mencionados en el enunciado.

En el caso de los trapecios que pueden observarse en la Figura 3, en un primer momento los estudiantes conjeturaron que dichas figuras eran congruentes, se trabajó sobre esa afirmación pero, a partir de la posibilidad de aumentar o reducir la longitud de algunos segmentos de la construcción inicial, aparecieron contraejemplos para esa aseveración.

Los docentes sugirieron la búsqueda de relaciones entre los ángulos y las longitudes de los lados de ambos trapecios y así, surgió una nueva propiedad:

6- Los trapecios *IKLF* y *NCEO* son semejantes y la razón de semejanza entre ellos es el cociente entre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ de la suma de los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo inicial.

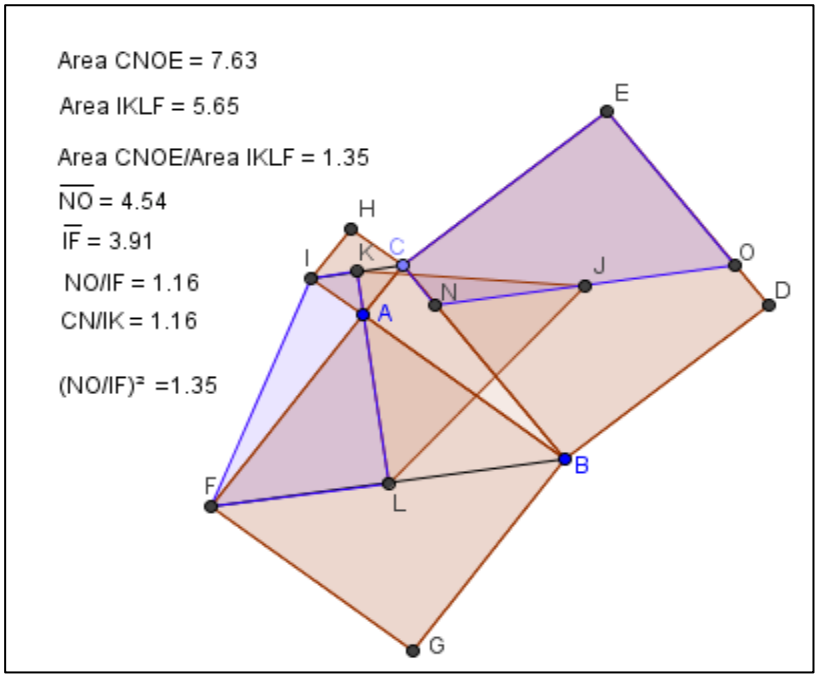


Figura 3

Consideraciones Finales

Las experiencias realizadas con los dos grupos de alumnos muestran las ventajas de la utilización de un software, en particular el Geogebra, en la producción de conjeturas y propuesta de validaciones, sin embargo, se requiere del acompañamiento serio del docente para evitar que, a raíz de las posibilidades dinámicas de las construcciones, los estudiantes puedan pensar que la prueba de una propiedad es la consideración de todas las variantes y posibilidades del gráfico.

Las opciones con nuevas figuras no se tuvieron en cuenta en una resolución manual puesto que en ese caso la construcción insume mucho tiempo como para repetirla varias veces.

Luego de la propuesta de conjeturas a partir del software el trabajo sobre las demostraciones fue trasladándose al cuaderno de los estudiantes y se obtuvieron demostraciones de algunas propiedades y buenas aproximaciones a otras.

En el trabajo con el software los alumnos se mostraron más entusiasmados, propusieron variaciones del problema y ofrecieron diferentes alternativas de resolución, actitudes que no aparecieron en la resolución tradicional con lápiz y papel.
Podríamos afirmar que la utilización del software, en este caso, ha sido no sólo motivador sino también el disparador de procesos de resolución, elaboración de conjeturas y validación.

Bibliografía

- BALACHEFF, Nicolás, (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemática*. Bogotá. Una empresa docente, Universidad de los Andes.
- NUÑEZ URÍAS, Jacobo, (2007). *Visualización y Matemáticas*. http://www.sectormatematica.cl/educmatem/visymat.htm

V CIEMAC

Interfaces visuales en la enseñanza del análisis numérico

Marta Caligaris
Georgina Rodriguez

Grupo Ingeniería & Educación

Facultad Regional San Nicolás

Universidad Tecnológica Nacional

San Nicolás – Argentina

gie@frsn.utn.edu.ar

¿Qué hicimos?

En este trabajo damos a conocer uno de los usos de los CAS en las asignaturas de Análisis Numérico en la Facultad Regional San Nicolás de la Universidad Tecnológica Nacional de la República Argentina.

Interfaces gráficas . . .
¿Por qué?

Utilizando ventanas preparadas por el profesor, el alumno sólo debe cargar datos y obtener resultados, sin tener que ver líneas y líneas de código inentendible, hecho que agrega una importante carga cognitiva al tema en estudio, haciendo que se pierda la esencia de lo que se pretende enseñar.

Interfaces gráficas . . .
¿Cómo se crean?

Utilizando Maple, a partir de la versión 8, se pueden generar "Maplets".

Se debe conocer el lenguaje de programación de Maple para diseñarlas.

Se debe tener Maple instalado en la PC donde se ejecuta.

Interfaces gráficas . . .

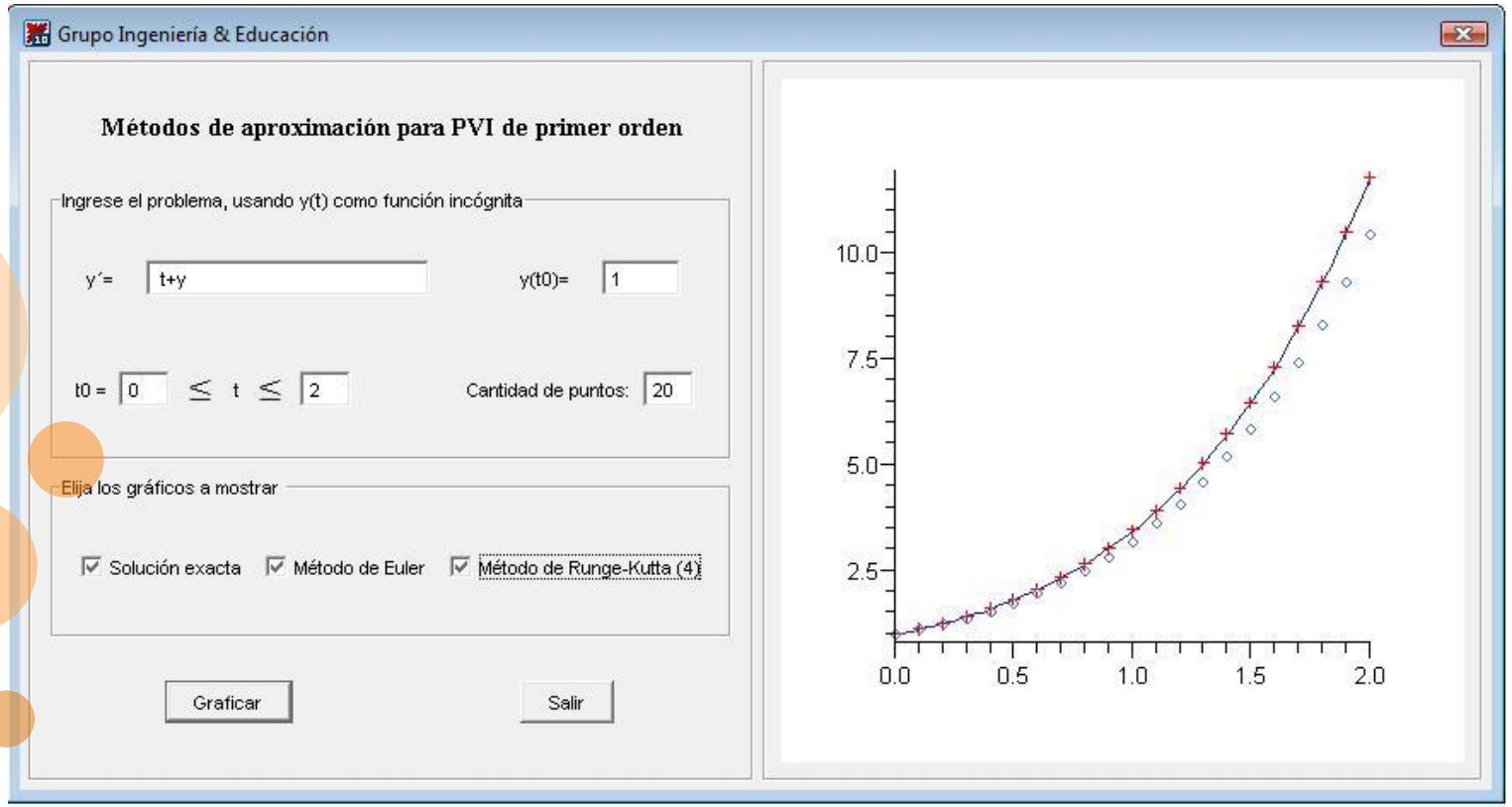
¿Para qué las usamos?

Utilizamos Maplets para obtener soluciones aproximadas de problemas que se describen mediante ODEs y PDEs.

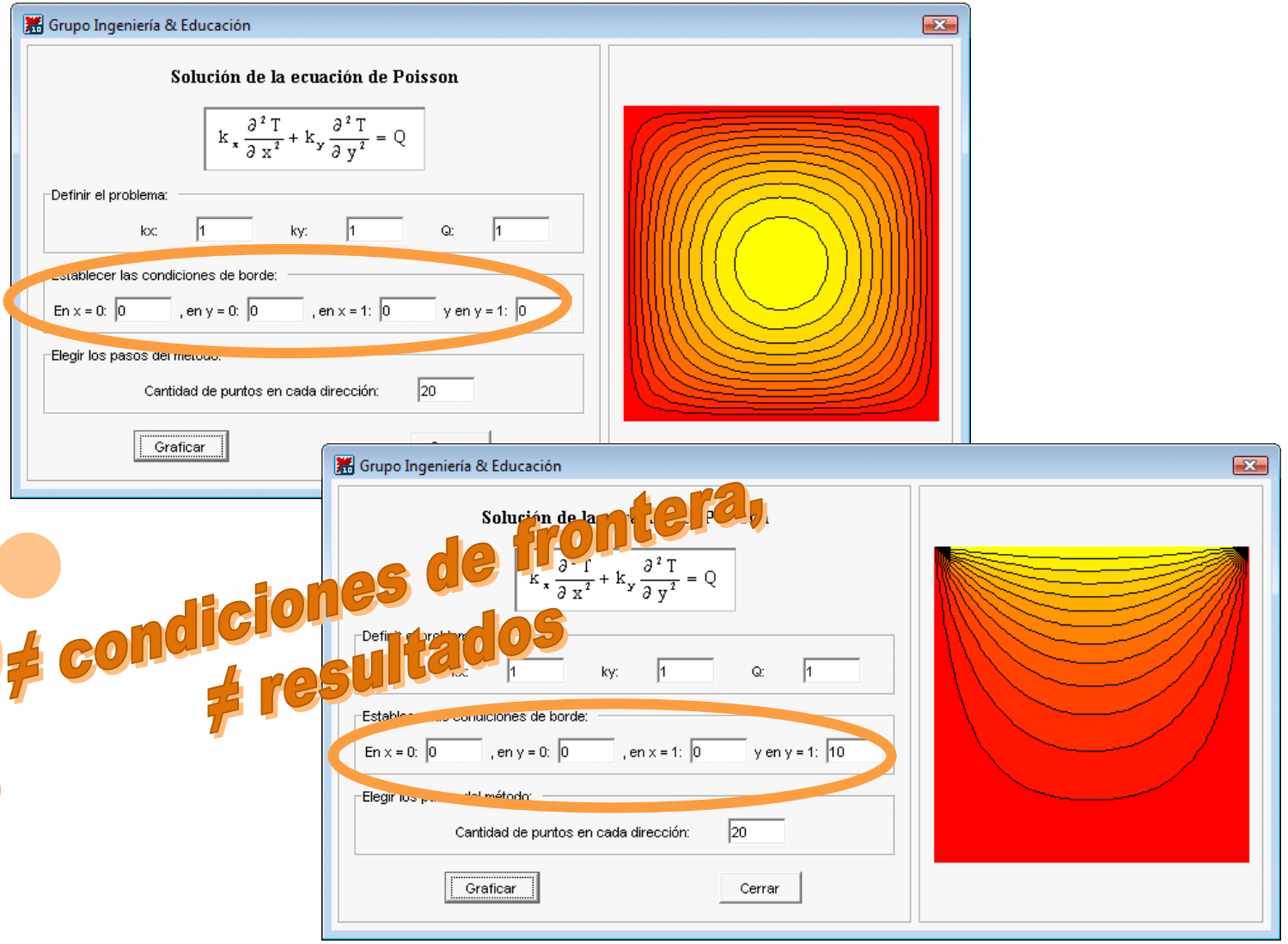
En este trabajo se presentan como ejemplo ventanas que aplican los métodos de Euler y Runge-Kutta para ODEs y el método de diferencias finitas para distintas PDEs.

V CIEMAC

Un Maplet para resolver una ODE de primer orden

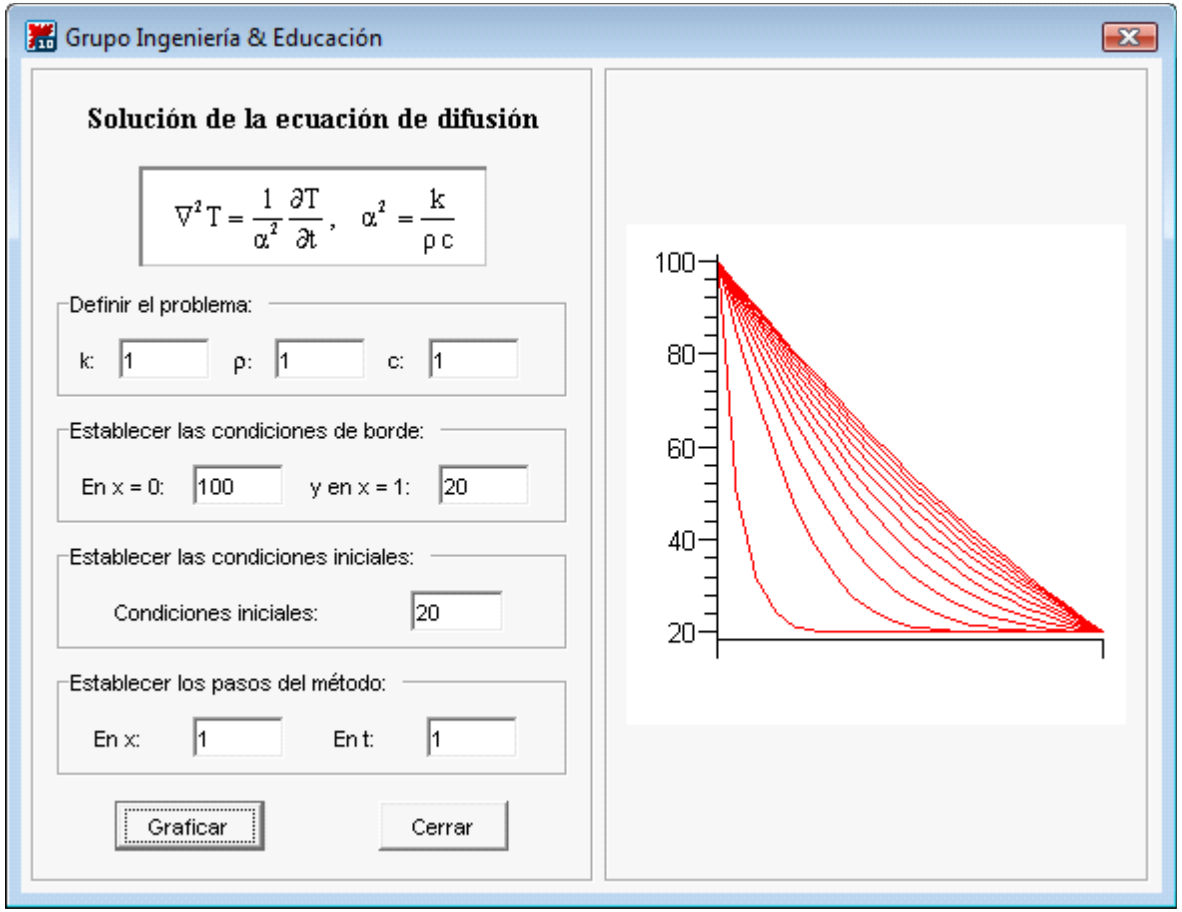


Maplets para EDPs elípticas



≠ condiciones de frontera,
≠ resultados

Un Maplet para resolver una EDP parabólica



Pero…

no es sólo apretar botones

Una vez que se explica el método en clase, puede surgir una discusión sobre los cambios que deben realizarse para obtener la solución de otro tipo de problemas.

Conclusiones

Una gran ventaja de las ventanas personalizadas, es que el alumno puede enfocar su atención en el objeto de enseñanza, y no en el código utilizado.

Conclusiones

La posibilidad de crear ventanas con diseño propio para presentar temas en la forma que el profesor lo desea es una herramienta muy poderosa en el diseño de las clases, aunque alguien debe lidiar con el código!!

Interfaces visuales en la enseñanza del análisis numérico

Marta Caligaris[1]
Georgina Rodríguez[2]

Resumen

La currícula de prácticamente todas las carrera de ingeniería contempla asignaturas de matemática y programación en el ciclo básico, y luego la asignatura análisis numérico, en la que naturalmente convergen los conocimientos de las anteriores. Decimos naturalmente, porque el gran desarrollo del análisis numérico se dio a partir del acceso a computadoras de alta velocidad y capacidad de cálculo. Es prácticamente imposible resolver, por ejemplo, sistemas de miles de ecuaciones con miles de incógnitas sin esta herramienta vital. Y este es un ejemplo que surge en el proceso de solución de algunos problemas ingenieriles.

La formación de un ingeniero debe contemplar el aprendizaje de la modelización matemática de los problemas de ingeniería y su correspondiente metodología de solución, para luego poder entender la esencia de los programas enlatados diseñados para problemas de gran porte. El análisis numérico se ha convertido en la herramienta esencial para obtener soluciones aproximadas, suficientemente precisas, de aquellos problemas que no poseen solución analítica. Es fundamental entonces que un alumno de ingeniería maneje esta rama de la matemática, y distintas herramientas que le permitan ponerla en práctica.

En este trabajo se presentan distintas herramientas visuales que permiten al alumno aplicar distintos métodos numéricos para aproximar la solución de problemas que se describen mediante ecuaciones diferenciales. La gran ventaja diferencial que estas herramientas poseen es la posibilidad de analizar los resultados que devuelven sin la particular carga cognitiva que en un principio puede causar el tener que programar el código.

Introducción

La aparición de los sistemas de álgebra computacional, llamados CAS por sus siglas en inglés, ha dado un importante impulso a la enseñanza de las ciencias en Ingeniería. Estos programas ofrecen la inigualable oportunidad de desarrollar actividades que convierten a los estudiantes en participantes activos en las clases de física y matemática.

Este tipo de programas permite enfatizar las ideas conceptuales al resolver problemas, integrando el trabajo en computadora con los desarrollos teóricos. El mejor instrumento en el desarrollo de una clase es hacer que los alumnos se interesen en lo que se está enseñando, y una forma atractiva de lograrlo es con el apoyo de software matemático.

A través de los experimentos se logra un aprendizaje activo. Con los CAS, un ejemplo puede ser transformado en cientos de ejemplos, con pocos cambios: una operación, un número, una función. Y esto lo hacen los alumnos, probando una y otra vez, observando, pensando, sacando conclusiones.

Los sistemas de algebra computacional también son herramientas útiles para estimular la intuición de los alumnos, aprovechando su capacidad gráfica. En este sentido, el GIE ha trabajado en una introducción gráfica para tratar con transformaciones lineales [2], y se han desarrollado también un conjunto de procedimientos en Maple y Mathematica para mostrar, a través de animaciones, distintas definiciones y

[1] Facultad Regional San Nicolás, Universidad Tecnológica Nacional, Argentina.
[2] Facultad Regional San Nicolás, Universidad Técnológica Nacional, Argentina, grodriguez@frsn.utn.edu.ar

conceptos matemáticos como por ejemplo la generación de cónicas [3] y de superficies de revolución [4] y varios fenómenos físicos, como propagación de ondas [5] y difusión del calor [6], entre otros.
Las versiones más recientes de los CAS ofrecen una nueva herramienta: la posibilidad de diseñar interfaces gráficas personalizadas. Es decir, se pueden crear ventanas con objetos gráficos, como botones, cuadros de textos, combos, reglas, etc, para realizar cálculos o gráficos personalizados.

Una ventaja destacada del uso de este tipo de interfaces es que aquellos que las utilizan, no necesitan conocer qué comandos se necesitan o cuáles están disponibles, o su sintaxis, para lograr el resultado. Basta con escribir la función que se desea graficar, por ejemplo, para obtener el gráfico en la misma ventana, sin preocuparse por el comando apropiado, los paréntesis, los corchetes o las comas necesarias.

Resolver problemas descriptos por ecuaciones diferenciales con métodos de aproximación es uno de los objetivos de los cursos de análisis numérico en la Facultad Regional San Nicolás de la Universidad Tecnológica Nacional de la República Argentina. En el desarrollo de las clases, se presentan ventanas de diseño propio de cada método, para visualizar los resultados de los métodos expuestos y luego se analiza el código para entender el funcionamiento del algoritmo.

En este trabajo, se presentan algunas herramientas diseñadas para aproximar soluciones de problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias, y problemas de frontera en ecuaciones diferenciales parciales. En el primer caso se utilizan los métodos de Euler y Runge-Kutta, y en el segundo, diferencias finitas. Se supone que estos métodos son conocidos [7, 8], por lo tanto no se incluye una descripción de los mismos en este trabajo.

Ventanas personalizadas

A menudo, lo que un CAS brinda no es suficiente para una persona que quiere enseñar un tema en una forma particular, con una didáctica específica. Los CAS ofrecen rutinas con código abierto que los estudiantes pueden consultar, pero muchas veces son muy complicadas, o no se ajustan a la forma en que el profesor desea abordar el tema.

Casi todos los sistemas de álgebra computacional ofrecen la posibilidad de hacer programas propios, bajando la dificultad acorde al nivel de los estudiantes. Pero tienen la complicación del código en sí mismo que, algunas veces, no es adecuadamente manejado por los estudiantes. Afortunadamente, existen algunos sistemas que permiten crear ventanas personalizadas, de manera que el usuario sólo deba cargar datos y obtener resultados, sin tener que ver líneas y líneas de código inentendible, hecho que agrega una importante carga cognitiva al tema en estudio, haciendo que se pierda la esencia de lo que se pretende enseñar.
Maple, en particular, ha incorporado el paquete "Maplets" desde la versión 8 (actualmente está en mercado la versión 11). Este paquete es una herramienta que permite crear ventanas de diseño personalizado, es decir, aplicaciones en ventanas que permiten hacer lo que el diseñador se propone, utilizando la potencia de cálculo y graficación de Maple, sin mostrar el código al usuario. En las primeras versiones se debía diseñar la ventana con comandos, pero a partir de la versión 10 se pueden arrastrar elementos para diseñar la ventana, debiéndose luego escribir el código necesario para incorporar procedimientos propios.

Debe aclararse que para poder ejecutar los Maplets (así se llaman estas aplicaciones) en una PC, es necesario tener instalado Maple en la misma (al menos versión 8), aunque pueden no ser ejecutadas en la interfaz de Maple.
También es posible crear ventanas personalizadas en MATLAB. Es más, muchas de las herramientas de este CAS se presentan en ventanas. Es necesario aclarar también que se debe tener instalado MATLAB en la PC para ejecutar las ventanas, ya que las mismas se llaman desde la línea de comando de MATLAB. El diseño de las ventanas aquí también se hace arrastrando y soltando elementos, pero además se debe escribir el código para asignar funciones a cada objeto insertado. En MATLAB, estas herramientas se

llaman GUI, por el inglés graphic user interfase (interfaces gráficas de usuario), y se trabajan en el entorno de desarrollo GUIDE (graphical user interfase development environment).

Ecuaciones diferenciales ordinarias con condición inicial

Los métodos de Euler y Runge-Kutta de orden 4 son métodos clásicos para obtener una aproximación de la solución de problemas de valor inicial que involucran ODEs. El método de Euler es muy simple, pero menos preciso que Runge-Kutta. Es importante remarcar este hecho resolviendo y comparando un mismo problema con los dos métodos, y graficar la solución para poder ver la diferencia entre ellos.

Para poder aplicar estos métodos, la ODE debe escribirse en la siguiente forma:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

y las condiciones iniciales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, …, $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$, que se necesitan para obtener una solución única.

Se diseñó una ventana para resolver problemas de valor inicial de primer orden. Por lo tanto, los datos necesarios para ejecutar los métodos son la función del lado derecho de la ecuación $y' = f(t, y)$, el valor de la condición inicial $y(t_0) = y_0$, el intervalo y el número de puntos donde se va a obtener la solución aproximada. En esta ventana se comparan los dos métodos en el mismo gráfico, y es posible cambiar el número de puntos para poder hacer un análisis intuitivo de estabilidad, o ver si los cambios mejoran la solución.

Por ejemplo, se resuelve el siguiente problema de valor inicial de primer orden en el Maplet que se muestra en la figura 1:
$y' = y + t, \ 0 \leq t \leq 2, \ \ y(0) = 1$

Una vez cargados los datos en las casillas correspondientes, y pulsado el botón Graficar, se obtienen el gráfico deseado.

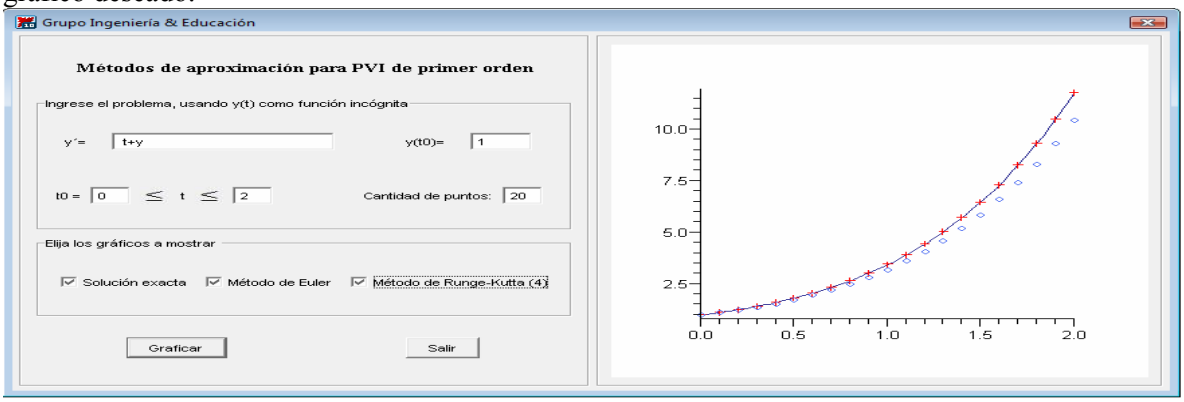


Figura 1: Un Maplet para resolver una ODE de primer orden

Dado que Maple posee un comando que permite obtener la solución exacta de aquellas ecuaciones diferenciales ordinarias que se pueden resolver, se presenta la posibilidad de mostrar la solución exacta del problema junto con las soluciones discretas aproximadas obtenidas por los métodos de Euler y Runge-Kutta, para poder discutir qué tan buenas fueron las aproximaciones obtenidas.

Ecuaciones en derivadas parciales

Una herramienta muy simple pero muy útil para resolver PDEs es el método de diferencias finitas. Este método convierte un problema de frontera con PDE en un sistema algebraico de ecuaciones lineales.

Aproximando las derivadas de la function incognita en algunos puntos seleccionados por cocientes de diferencias.

Un método para obtener la solución de la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson es una PDE elíptica. Este tipo de ecuaciones usualmente se presenta en el estudio de diferentes tipos de problemas de ingeniería. Por ejemplo, conducción del calor, o filtración en medios porosos en estado estable son problemas que pueden ser descriptos por esta ecuación.

La ecuación de Poisson es $k\nabla^2 T + Q = 0$, donde k es en general un parámetro relacionado con el material involucrado. Se logra la solución única cuando se imponen condiciones de frontera, que pueden ser de tipo Dirichlet o Neumann.

En el libro de Cleve Moler [9], se presenta una ventana de MatLab para resolver PDEs con condición de frontera nula de tipo Dirichlet. Tomando esta ventana como inspiración, se desarrolló una ventana en Maple con condiciones de frontera de tipo Dirichlet en cada lado de una placa cuadrada.

Como ejemplo, se resuelve en el Maplet desarrollado un problema de conducción de calor en estado estacionario, descripto por la siguiente ecuación, donde las constantes k_x y k_y no necesariamente son iguales:

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 1 = 0, \qquad 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$$

y con dos conjuntos de condiciones de frontera de tipo Dirichlet, dadas por:

a) $T(0, y) = T(1, y) = T(x, 0) = T(x, 1) = 0$
b) $T(0, y) = T(1, y) = T(x, 0) = 0, T(x, 1) = 10$

Cuando se ejecuta el Maplet, colocando los datos correspondientes en las casillas habilitadas para tal fin, se obtienen los gráficos correspondientes, como se muestra en las figuras 2a) y 2b).

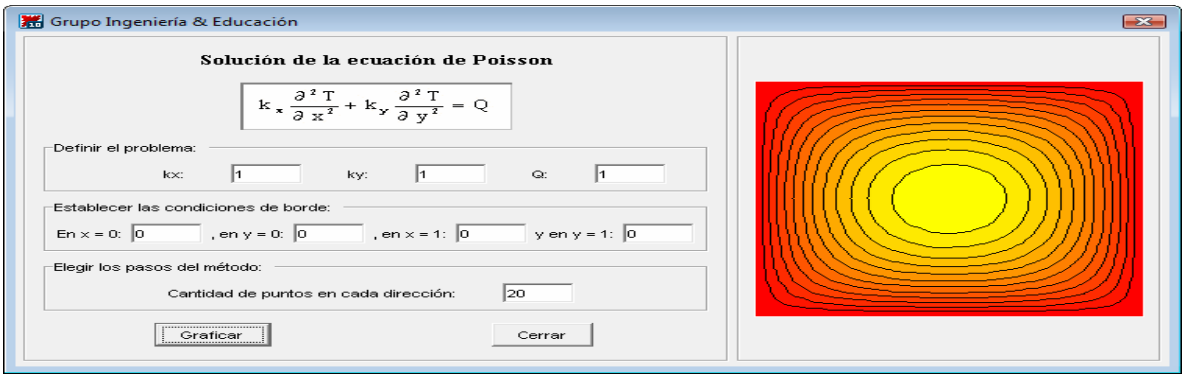


Figura 2a): Un Maplet para ecuaciones elípticas. Condiciones de frontera nulas.

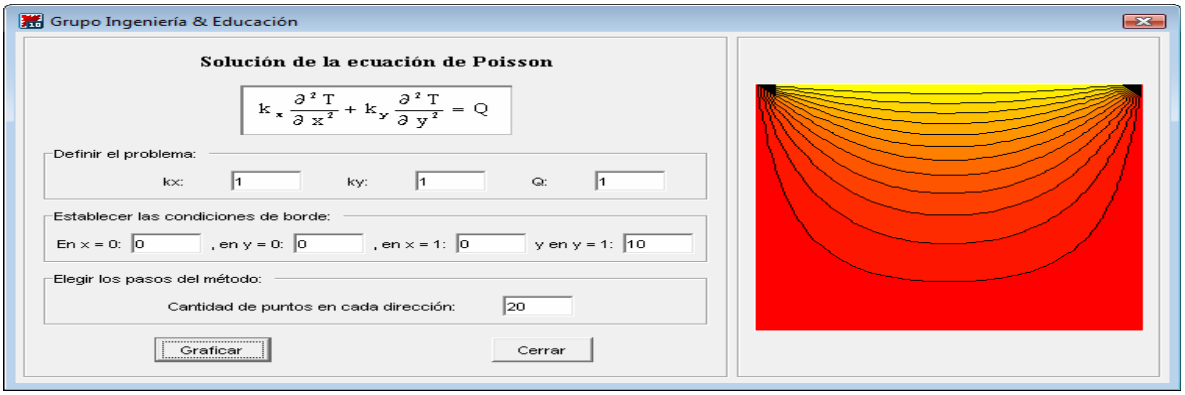


Figura 2b): Un Maplet para ecuaciones elípticas. Condiciones de frontera de Dirichlet no nulas.

Se observa en los gráficos obtenidos cómo cambia la solución al modificar las condiciones de frontera. La salida gráfica se obtiene con el comando listcontplot del paquete plots de Maple.

La ecuación de difusión

La ecuación de difusión es una PDE parabólica. Este tipo de ecuaciones también aparece en el estudio de diferentes problemas de ingeniería.

La ecuación de difusión está definida por $\alpha^2 \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$, donde α^2 es un parámetro del problema. Se puede obtener la solución única imponiendo condiciones iniciales y de frontera, donde estas últimas pueden ser de tipo Dirichlet o Neumann.

A modo de ejemplo la figura 3 muestra un Maplet que resuelve la ecuación de difusión para un problema de conducción de calor.

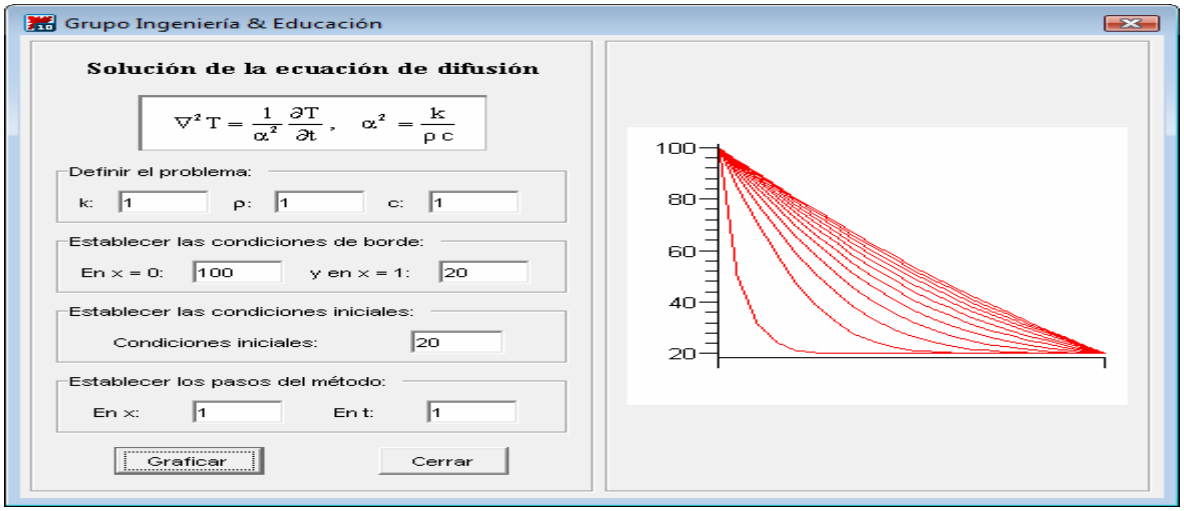


Figura 3: Un Maplet para la ecuación de difusión

Se consideró una barra de un metro de longitud a una temperatura inicial de 20°C, y se colocó una fuente de calor a temperatura constante de 100°C en el borde izquierdo de la misma. Su lado derecho se mantiene durante todo el proceso a 20°C. El parámetro α^2 de la ecuación se calcula en función de los parámetros físicos del material de la barra. En este caso particular, se suponen todos los parámetros iguales a 1.

Como se ve en la figura 3, al ejecutar este Maplet, se obtiene un gráfico que muestra la temperatura a lo largo de la barra en diferentes pasos de tiempo, de acuerdo a los datos ingresados. En el código se ha seleccionado un subconjunto de gráficos, para no cargar el dibujo.

Es factible mostrar en el Maplet una animación, hecho que no se muestra aquí porque no se vería reflejado en un trabajo impreso.

Conclusiones

En este trabajo se da a conocer uno de los usos de los Sistemas de Algebra Computacional en las asignaturas de Análisis Numérico en la Facultad Regional San Nicolás de la Universidad Tecnológica Nacional de la República Argentina.

Una de las grandes ventajas de las ventanas personalizadas, es que el alumno puede enfocar su atención en el objeto de enseñanza, y no en el código/lenguaje utilizado; este es un segundo paso a abordar.

Una vez que se explica el método en clase, surge una discusión sobre los cambios que deben realizarse para obtener la solución de otro tipo de problemas, como por ejemplo si se imponen condiciones de frontera de tipo Neumann o si se permite que la condición inicial no sea constante.

La posibilidad de crear ventanas con diseño propio para presentar temas en la forma que el profesor lo desea es una herramienta muy poderosa en el diseño de las clases, aunque alguien debe lidiar con el código!! Quien prepare esas ventanas puede ser el profesor mismo, o un equipo destinado para tal fin.

Referencias

[1] Davis B., Porta H, Uhl J. *Calculus&Mathematica*, Addison Wesley Publishing Company, Second Edition, 1994.

[2] Caligaris R.E., Rodríguez G.B. and Caligaris M.G. Linear Transformations for Beginners. *Mathematica in Education and Research*, 7(2):29-33, 1998.

[3] Caligaris R.E., Rodríguez G.B. y Caligaris M.G. Animando la Matemática. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*, 1(1):17-26, 2000.

[4] Caligaris R.E., Rodríguez G.B. y Caligaris M.G. Gira, gira. *Revista Matemática, Educación e Internet*, 2 [3] 2001. Revista virtual: www.itcr.ac.cr/revistamate

[5] Nagornov O.V., Caligaris R.E., Rodríguez G.B. y Caligaris M.G. Animando la Física. Parte 1. Propagación de ondas. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*, 2(3):41–44, 2001.

[6] Nagornov O.V., Caligaris R.E., Rodríguez G.B. y Caligaris M.G. Animando la Física. Parte 2. Difusión del calor. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería*, 5(9):15-24, 2004.

[7] Análisis Numérico, 6° edición. R. L. Burden y J. D. Faires. International Thomson Editores.

[8] Métodos numéricos con Matlab, 3° edición. J. H. Mathews y K. D. Fink. Ed. Prentice Hall.

[9] Moler, C. Numerical Computing with MATLAB, publicado por "the Society for Industrial and Applied Mathematics", disponible en http://www.mathworks.com/moler

La Pedagogía de Internet aplicada en un curso de Matemáticas en el nivel Universitario.

Víctor J. Palencia G[1]*.,*
Nora Goris M[2]*.*
Ma. Eugenia Canut D.V. [3]

Resumen

El proyecto "Unidades de Aprendizaje para el Taller de Álgebra de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación con el modelo pedagógico CAIT", que se desarrolla en la FES Acatlán de la UNAM, integra una metodología de enseñanza específica basada en teorías modernas de la educación, con el aprovechamiento de la tecnología de cómputo y multimedia, para aplicar ambos al desarrollo de un curso básico de la licenciatura.

El proyecto consiste en aplicar el modelo pedagógico CAIT (constructivo, auto-regulado, interactivo y tecnológico) al proceso enseñanza-aprendizaje del Taller de Álgebra, curso establecido como requisito para los alumnos de nuevo ingreso a la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación que no acrediten el examen diagnóstico de conocimientos de matemáticas básicas. Para esto, se desarrollan Unidades de Aprendizaje con los contenidos del Taller, tanto por medio de páginas Web como en multimedia y se elaboran Guías para su uso así como un Manual para la aplicación del modelo. Los materiales se presentan en un ambiente que propicia la interacción y cooperación de los integrantes de los grupos de aprendizaje gracias al uso del paquete de gestión de cursos Moodle.

Las teorías pedagógicas en que se basa el modelo son consideradas entre las más modernas de la Teoría de la Educación y entre las más adecuadas al tipo de procesos cognitivos y al desarrollo de habilidades y actitudes que corresponden a la educación en matemáticas. El proyecto está sustentado en experiencias exitosas previas - en el extranjero, en el área socio-humanística y en el nivel básico y medio superior - del modelo pedagógico seleccionado. La importancia de este proyecto y su carácter innovador radican en su inserción en nuestro país (México), en el área de las ciencias exactas y en el nivel de educación superior.

Si bien el proyecto está aún en una etapa de desarrollo, los materiales elaborados se encuentran ya en línea a disposición de los profesores y alumnos del Taller y la respuesta obtenida hacia ellos puede considerarse satisfactoria.

Antecedentes.

El actual plan de estudios de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación (MAC) que se ofrece en la Facultad de Estudios Superiores Acatlán de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM), implantado en 2005, señala explícitamente:

1. La necesidad de infundir en los alumnos actitudes dinámicas en el aprendizaje, acordes con las concepciones pedagógicas modernas que centran el proceso enseñanza-aprendizaje en el alumno, y
2. El apoyo que debe darse a los profesores a fin de que su actuar docente se adapte a los requerimientos de las nuevas metodologías de enseñanza y al uso de la tecnología en clase.

Ambos factores se consideraron especialmente relevantes en la concepción del plan de estudios e indispensables para su adecuada instrumentación. Como parte de este apoyo a profesores y alumnos, se

[1] Facultad de Estudios Superiores Acatlán. Universidad Nacional Autónoma de México, México, palencia@servidor.unam.mx
[2] noragoris@hotmail.com
[3] marucanut@gmail.com

recomendó la elaboración de material didáctico que, además de hacer reflexionar a los primeros sobre su labor como docentes, les facilite y motive a asumir el papel de mediadores entre el alumno y los conocimientos que establecen los programas de las materias que imparten y, a los segundos, les facilite el desarrollo de las habilidades instrumentales que permiten representar los contenidos del aprendizaje mediante el uso de las habilidades verbales, orales y escritas.

Marco Teórico.

El modelo pedagógico CAIT (**C**onstructivo, **A**uto-regulado, **I**nteractivo y **T**ecnológico) [3], [6], [7], [12] apoya una pedagogía de la imaginación que, a través de Internet, pretende ayudar a los alumnos a aprender de manera significativa. Lo que se espera de los alumnos no es que repitan o reproduzcan la información que puedan encontrar en Internet, sino que la sometan a la acción del pensamiento con el fin de analizar, relacionar, criticar, transferir y aplicar esa información, transformándola en conocimiento. De esta forma, además de adquirir conocimientos, aprenden a aprender, una tarea especialmente importante en la sociedad de la información.

Puesto que aprender no significa sólo adquirir información sino, sobre todo, desarrollar habilidades y destrezas que permitan seleccionar, organizar e interpretar la información, el aprendizaje al que lleva la pedagogía de Internet - y que permite transformar la información en conocimiento, aprender a aprender y, sobre todo, cambiar y mejorar la realidad - debe ser un aprendizaje activo, constructivo, interactivo y auto-regulado.

Debe ser un aprendizaje activo en el que los alumnos se comprometen a realizar diferentes actividades para asimilar los contenidos informativos que reciben. En este sentido, la calidad del aprendizaje depende de la calidad de las actividades realizadas al aprender; en la medida en que el estudiante repita, reproduzca o relacione los conocimientos, tendrá un aprendizaje repetitivo, reproductivo o significativo [1]. La actividad del aprendizaje se pone de relieve en el contexto tecnológico donde el estudiante aprende cuando quiere, como quiere y donde quiere.

Es también un aprendizaje constructivo porque las actividades que el estudiante realiza tienen como finalidad construir el conocimiento; se trata de una construcción personal de la realidad en la que el sujeto reestructura los contenidos informativos que recibe en el contexto de la instrucción [5], [9]. Esta construcción pone de manifiesto las diferencias individuales en el aprendizaje que deben ser favorecidas y estimuladas, especialmente, en un contexto tecnológico [14]. Por eso se fomenta en los alumnos negociar construcciones en el aprendizaje desde una perspectiva comunitaria [16].

Debe ser un aprendizaje auto-regulado. Lo normal es que el aprendizaje sea dirigido, al principio, por el profesor, porque es el que sabe lo que hay que aprender y cómo hay que aprenderlo. Pero, a medida que el aprendizaje avanza, el profesor tiene que transferir al alumno la dirección de ese aprendizaje. En ese momento se pasa al aprendizaje auto-regulado [15]. Si, como han señalado los expertos [8], lo más importante del aprendizaje no es lo que se aprende, sino el aprender a aprender, sólo se puede decir que un alumno ha aprendido a aprender cuando es capaz de aprender por sí mismo, cuando puede dirigir su aprendizaje y ha conseguido una cierta autonomía personal [17]. Esto no significa que haya que prescindir del profesor. Al contrario, en el aprendizaje auto-regulado el profesor realiza una labor todavía más importante porque es cuando el alumno necesita un tipo de ayuda o de mediación más cualificada.

Por último, conviene que el aprendizaje sea interactivo. Las ventajas del aprendizaje interactivo son muchas. Entre ellas, permitir a cada uno de los miembros del grupo construir el conocimiento de manera propia y personal a partir de los diferentes puntos de vista que cada uno de ellos tiene sobre la información adquirida. La construcción del conocimiento es cualitativamente más rica cuando una persona tiene numerosas versiones de un mismo suceso o fenómeno de la realidad y puede, a partir de todas ellas, construir la suya propia, como han señalado las nuevas corrientes del aprendizaje: el constructivismo, el

aprendizaje cooperativo o la teoría de la flexibilidad cognitiva [2], [5], [11], [13]. El aprendizaje interactivo permite a los estudiantes pasar de la construcción personal a la construcción social del conocimiento [10], aprendiendo a trabajar dentro de una comunidad científica que se esfuerza por ampliar los horizontes de la ciencia y generar conocimientos que pueden mejorar la sociedad, especialmente en un contexto tecnológico, como se ha puesto de relieve en las nuevas comunidades de aprendizaje [4]. Estos rasgos se pueden condensar en cuatro que definen el modelo de aprendizaje que se identifica como: Constructivo, Autoregulado, Interactivo y Tecnológico (CAIT).

El Proyecto.

Desde el inicio de la carrera de MAC, hace 25 años, las áreas de Álgebra y Cálculo se encuentran entre las de mayor índice de reprobación y deserción ya que numerosos alumnos de primer ingreso acusan serias deficiencias en los conocimientos básicos de las matemáticas que se consideran indispensables para un exitoso desempeño en sus estudios profesionales. Por ello, el actual plan de estudios incluyó el requisito de acreditar un examen de antecedentes como condición necesaria para tener derecho a calificación en la asignatura curricular de Álgebra Superior, ubicada en el primer semestre. Los alumnos que no acreditan el examen tienen la obligación de cursar un Taller de Álgebra al término del cual deberán presentar un nuevo examen. El Taller incluye 14 Unidades Temáticas, correspondientes a conceptos y procedimientos de Álgebra, Geometría y Trigonometría. La población para este Taller es del orden de 300 estudiantes en cada ciclo quienes deben, no sólo mejorar sus conocimientos sino, principalmente, modificar sus actitudes respecto al aprendizaje de las Matemáticas.

Con apoyo de la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM [18], se generó un proyecto para la creación de un sistema de aprendizaje para el Taller que, al tiempo que permite utilizar de manera óptima los recursos tecnológicos de la Facultad, incide en los dos factores que se han señalado anteriormente. Este proyecto, denominado "Unidades de Aprendizaje para el Taller de Álgebra de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación con el modelo pedagógico CAIT" se encuentra actualmente en desarrollo y en una etapa experimental.

Las hipótesis que se formularon fueron:

1. La adecuada implantación del plan de estudios de MAC requiere modificar la forma tradicional del proceso enseñanza–aprendizaje hacia una forma más dinámica y actual en la que el alumno asuma un papel más activo.
2. El modelo CAIT favorece la construcción del conocimiento dentro del contexto curricular correspondiente, es decir, transformar la información en conocimiento y estimular el desarrollo de los procesos o habilidades mentales donde destacan, como objetivos de primer orden, el pensamiento analítico, el pensamiento pragmático y el pensamiento dialéctico (crítico y creativo).
3. La metodología educativa moderna adecuada para el plan de estudios debe propiciar un aprendizaje significativo e incluir el uso de tecnología multimedia y de cómputo en el desarrollo de los cursos.
4. El modelo CAIT propicia la creación de comunidades de aprendizaje como instrumentos de apoyo para el aprendizaje compartido y la negociación de significados.
5. La disposición de manuales y de recursos en línea que describan el desarrollo de los programas con la metodología educativa propuesta facilita a los profesores el cambio en su actividad docente y asumir el papel de mediadores entre el alumno y los conocimientos que establecen los nuevos programas de las materias que imparten.
6. El modelo pedagógico CAIT promueve un aprendizaje activo, constructivo, auto-regulado y tecnológico que entiende la tecnología como instrumento cognitivo más que como herramienta de reproducción.

Con base en lo anterior, el proyecto se fijó los siguientes objetivos:

1. Implementar el modelo CAIT en la enseñanza de las matemáticas en la FES Acatlán de la UNAM.
2. Proporcionar a los alumnos que cursan la licenciatura un material de apoyo en línea para acreditar el requisito de Álgebra, establecido en el Plan de Estudios.
3. Integrar aspectos de la teoría de la educación y el uso de tecnología con la práctica docente, para auxiliar a los profesores en la implantación del Plan de Estudios de la licenciatura en Matemáticas Aplicadas y Computación.

El logro de estos objetivos se contempla mediante cuatro fases:

I.- Profundización en el Modelo Pedagógico, consistente en el estudio con mayor detalle del modelo, sus fundamentos, características, requerimientos y logros.

II.- Desarrollo del Material, en la cual se elabora el material mediante la selección de los contenidos en que se deben dividir las diferentes unidades temáticas del Taller, se determina el diseño específico de cada una de las unidades de aprendizaje establecidas, es decir, se establece el tipo de material de apoyo adecuado para cada una y se realiza el guión correspondiente, se seleccionan las actividades que deberán realizar los alumnos en cada unidad, se elaboran los esquemas básicos de los textos, ejercicios y aplicaciones correspondientes al contenido de la unidad y al tipo de actividad seleccionada, se desarrollan in extenso las unidades seleccionadas, construyendo las páginas Web y presentaciones multimedia respectivas. Además, se elaboran la Guía para profesores de cada unidad y la Guía correspondiente al modelo general.

III.- Implementación y Prueba. En esta fase, se lleva a cabo la implementación del modelo y se realizan las actividades necesarias para su evaluación. Aquí, se instruye a los profesores del Taller sobre las características y metodología del modelo pedagógico, se supervisa la aplicación del modelo en los grupos piloto en que se pone en práctica, se realizan las pruebas de análisis de cambio de actitudes en los profesores y alumnos participantes en el Taller y en los grupos de control y se recopilan estadísticas referentes a deserción y aprobación- reprobación de los alumnos de los grupos piloto y de los grupos de control.

IV. Evaluación y Mejora Continua. Finalmente, se realizará la evaluación del impacto de la metodología en la implantación del Plan de Estudios así como del modelo pedagógico mismo y, en caso de ser necesario, se realizarán los ajustes y modificaciones que se requieran para el logro de los objetivos del proyecto.

Con excepción de la Fase IV, que debe efectuarse al término de cada ciclo escolar, las otras fases se están desarrollando en paralelo. Particularmente, no es un requisito haber terminado completamente la Fase II para iniciar la III.

En síntesis, en la segunda fase del proyecto se ha desarrollado ya la mayor parte del material didáctico relacionado con los contenidos temáticos del Taller en diversas formas, principalmente mediante documentos escritos, presentaciones en PowerPoint® y mapas conceptuales (Figs. 1 a 3) y se utiliza el paquete Moodle [19], para ofrecer a los participantes - profesores y alumnos – el acceso a estos materiales, así como enlaces a sitios de Internet en los que se abordan contenidos similares. Puesto que las características de Moodle permiten, entre otras, establecer ambientes cooperativos y constructivos, realizar foros de discusión, plantear diarios de actividades, cuestionarios a responder en línea, tareas a realizar por el alumno, y mantener un registro y seguimiento completo de las acciones del usuario, resulta particularmente adecuado para satisfacer los planteamientos del modelo pedagógico adoptado.

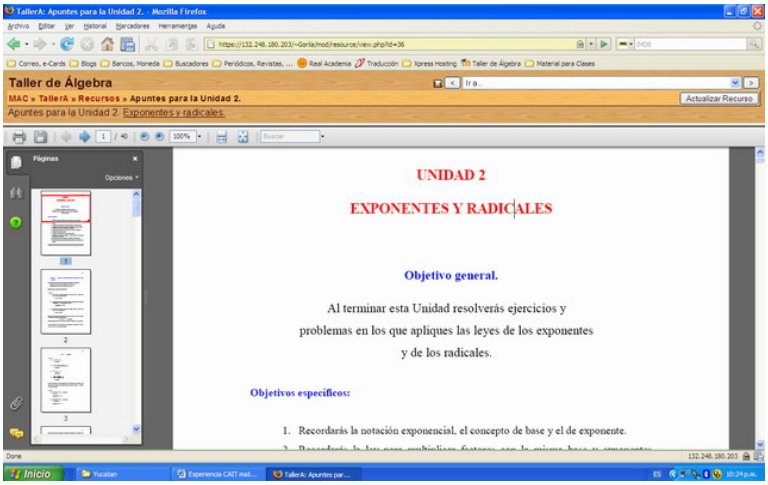


Fig. 1. Material escrito para la Unidad correspondiente al tema de Exponentes y Radicales.

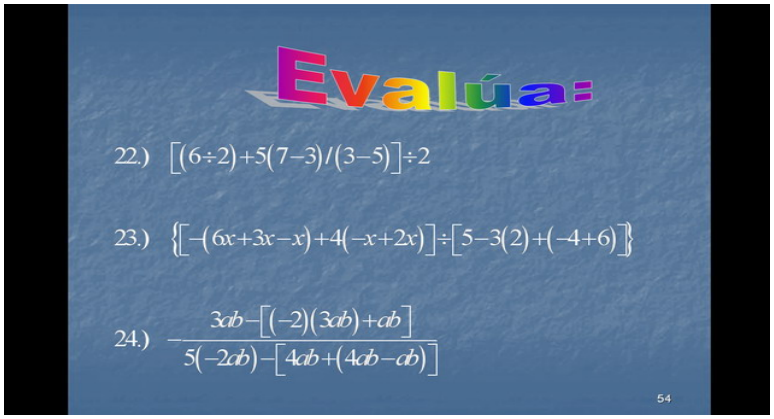


Fig. 2. Diapositiva de la presentación de la Unidad correspondiente al tema de Reglas de los Signos.

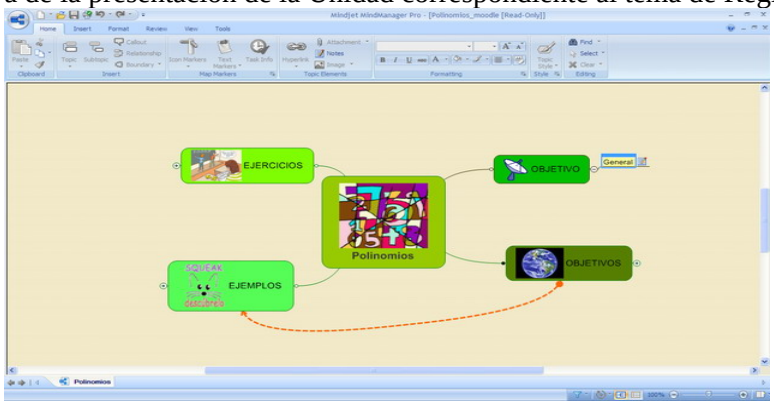


Fig. 3. Mapa de contenidos de la Unidad correspondiente al tema de Operaciones con Polinomios.

A la vez, dentro de la tercera fase, en noviembre de 2006 se impartió un curso sobre el modelo pedagógico para formar a los instructores del Taller y en agosto de 2007 se llevó a cabo un encuentro con los mismos, relacionado con los contenidos académicos y con el uso del paquete Moodle.

El sitio en desarrollo (Figs. 4 y 5), con los recursos didácticos que se han publicado, se encuentra en la dirección <https://132.248.180.203/~Gorila/> y se puede acceder a él con la clave de usuario: **proyecto**, y la contraseña: **FES/Acatlan.** El sitio se está probando en cuatro de los ocho grupos del Taller. En estos grupos, además del examen diagnóstico de conocimientos, se aplicó un test para detectar actitudes y

habilidades vinculadas al estudio en general y al aprendizaje de las matemáticas en particular, con objeto de determinar posteriormente el impacto del modelo en estos aspectos.



Fig. 4. Portal del Sitio.

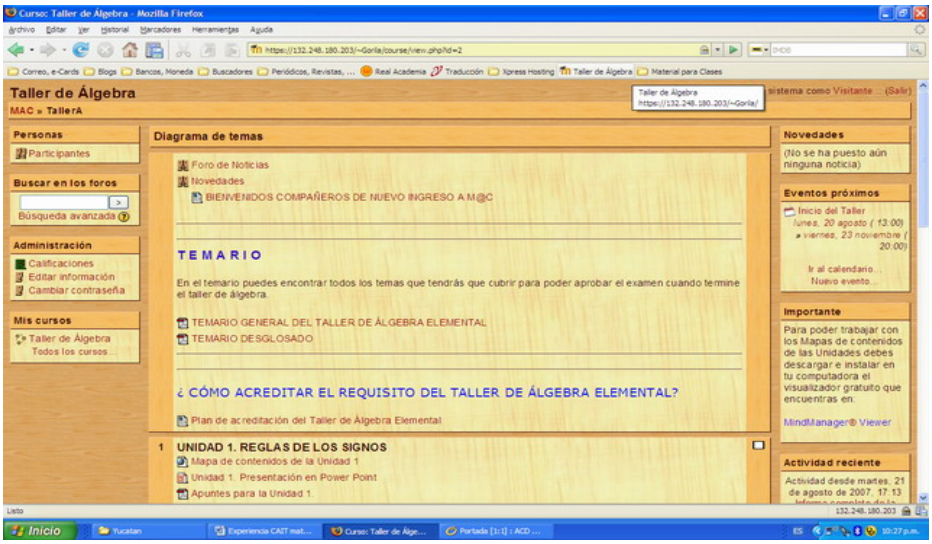


Fig. 5. Página principal del Taller.

Conclusión.

Si bien en la FES Acatlán y en la UNAM se están desarrollando sitios similares (p.ej.: <http://www.academianet.com/>, <http://valoragregado.org/Aprendiz/>), el que aquí se ha descrito cuenta con el soporte del modelo CAIT, lo cual le da un sustento diferente, acorde con las teorías pedagógicas modernas.

A la fecha (agosto de 2007), la experiencia con el proyecto es satisfactoria. Los participantes en el Taller han recibido con agrado el sistema y comienzan a aportar ideas que contribuyen a enriquecerlo. Los responsables del proyecto pretenden extenderlo en el futuro para otras asignaturas del Plan de Estudios. Para el mes de diciembre de 2007 se dispondrá ya de una evaluación sistemática, si bien preliminar, de su impacto.

Referencias.

[1] Ausubel, D., Novak, J., y Hanesian, H. (1978). *Educational Psychology: A Cognitive View* (2nd Ed.). New York: Holt, Rinehart & Winston.

[2] Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
[3] Beltrán Llera, J. y Segovia Olmo, F. (1999). *El aula inteligente*. Madrid: Nuevo horizonte educativo.
[4] Brown, A. L., y Campione, J. C. (1996). *Psychological theory and the design of innovative learning environments: On procedures, principles and systems*. En L. Schauble y R. Glaser (Eds.), Innovations in learning: New environments for education. Mahwah, NJ: Erlbaum Associates. 289-325.
[5] Bruner, J. (1990). *Acts of Meaning*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
[6] Martín Patino, J. M., Beltrán Llera, J. y Pérez, L. (2003). *Cómo aprender con Internet*. Madrid: Fundación Encuentro.
[7] Martín Patino, J. M. y Beltrán Llera, J. (2003). *La novedad pedagógica de Internet*. Madrid: Fundación Encuentro.
[8] Perkins, D. (1992). *Smart Schools*. New York: Free Press.
[9] Piaget, J. (1970). *The Science of Education and the Psychology of the child*. NewYork: Grossman.
[10] Popper, K. (1999). *All life is problem solving*. London: Routledge.
[11] Salomon, G. (1981). *Communication and Education*. Beverly Hills, CA: Sage.
[12] Segovia Olmo, F. (coord.) (2003). *El aula inteligente. Nuevas perspectivas*. Madrid: Espasa Calpe.
[13] Sternberg, R. J. (1997). *Thinking styles*. New York: Cambridge University Press
[14] Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
[15] Wertsch, J. V. (1985) *Vygotsky and the social formation of mind*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
[16] Dirección General de Asuntos del Personal Académico. *Programa de Apoyo a Proyectos para la Innovación y Mejoramiento de la Enseñanza*. UNAM, México. En línea. <http://dgapa.unam.mx/programas/fortalecimiento/papime/papime.html> Consulta: 12 ago, 2007.
[17] *Moodle – AFree Open Source Course Management System*. versión 1.9. En línea. <http://moodle.org/> . Consulta: 11 ago. 2007.

Lenguaje matemático: su influencia en el rendimiento académico matemático en estudiantes costarricenses de secundaria en colegios de Costa Rica, durante el 2004 y 2007

Rebeca A. Coto Fernández[1],
Ronald A. Arias Madriz[2],
Rodrigo J. Moya Roque[3].

Resumen

El propósito de la investigación consiste en realizar un análisis de los niveles de comprensión del lenguaje matemático, en algunos estudiantes de secundaria (estudiantes entre quince y diecisiete años) de Costa Rica. Se enfatiza en el desconocimiento del lenguaje matemático, como una problemática actual que enfrenta nuestro sistema educativo, reflejada en el bajo rendimiento académico en pruebas estandarizadas aplicadas a estos niveles.

1. Problema de Investigación

A. Limitación del problema.

El propósito de realizar un análisis de los niveles de comprensión del lenguaje matemático en noveno (estudiantes de quince años) y quinto año de secundaria (diecisiete años), se enfoca a una de las problemáticas que en la actualidad enfrenta nuestro sistema educativo vigente, como lo es, los bajos resultados en las pruebas académicas estandarizadas en estos años.

El análisis de esta problemática es bastante complejo, así como la búsqueda de una solución; por esta razón se decidió hacer un pequeño análisis en algunas instituciones del país, con el propósito de dar alerta de la magnitud, implicaciones, y gran influencia que esta situación tiene para la educación matemática de nuestro país.

B. Justificación del problema.

Uno de los objetivos de este trabajo es investigar como el desconocimiento del lenguaje matemático, así como la mala utilización que se le da a su enseñanza en los contextos educativos, centrados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, influyen o son una de las causas del fracaso en las pruebas, las cuales tienen como objetivo primordial evaluar los niveles de calidad en la educación, de acuerdo a nuestro sistema educativo; el cual se encuentra a cargo del Ministerio de Educación Pública (M.E.P.).

Debe de darse especial atención al conocimiento de los niveles de comprensión del lenguaje matemático para dar una solución a la problemática del bajo rendimiento en las pruebas nacionales.

Con la realización de esta investigación podremos obtener algunas conclusiones sobre las causas que conllevan al bajo rendimiento académico en las pruebas nacionales, y tal vez en un futuro se pueda dar solución a esta problemática que ha venido causando desde años atrás tanta controversia y que en la actualidad da cifras alarmantes en el resultado de estas pruebas.

El objetivo general es conocer los niveles de comprensión del lenguaje matemático en estudiantes de noveno y quinto año de secundaria; así como su influencia en el rendimiento académico matemático.

[1] Estudiantes del Instituto Tecnlógico de Costa Rica, cotfer@hotmail.com
[2] Estudiantes del Instituto Tecnlógico de Costa Rica, josmoya12@hotmail.com
[3] Estudiantes del Instituto Tecnlógico de Costa Rica,rarias_madriz@hotmail.com

2. Marco Conceptual

En el desarrollo de la investigación, se exponen diversas teorías sobre la adquisición del lenguaje inspirado en los trabajos realizados por Chomsky (Teoría del dispositivo de adquisición del lenguaje), Bruner (Teoría de la solución de problemas), Piaget (Teoría del constructivismo), Vigotsky (Teoría de las influencias socioculturales) y Skinner (Teoría del condicionamiento) que explican los procesos de adquisición del lenguaje y la importancia que éste tiene para el desempeño del ser humano y los procesos evolutivos del lenguaje, producto del desarrollo, tanto en su aspecto conductual como gramático y funcional, centrado en el contexto educativo matemático.

El estudio también conlleva las etapas del desarrollo del lenguaje basadas en las teorías anteriormente mencionadas que consta de cinco etapas; las cuales van de la mano con el desarrollo mental: etapa Prelingüística, de una palabra, del lenguaje telegráfico, de las oraciones sencillas y de las oraciones complejas.

3. Metodología

3.1 Participantes en la investigación

Para la realización del proyecto se contactaron seis instituciones, con distintas características (públicas, privados y subvencionados o semiprivados) los cuales se encuentran ubicados en diferentes puntos del país.

3.2 Instrumentos de recolección de datos y procedimiento de trabajo

La técnica utilizada para la recolección y análisis de los datos consistió en la elaboración de una encuesta por parte de los investigadores, cuyo interés se centraba en recopilar información de estudiantes que se encuentran cursando el noveno o el quinto año, y determinar las características de la institución a la cual pertenecen, así como información individualizada de su nivel de comprensión del lenguaje matemático.
Se realizó una misma encuesta para ambos niveles (noveno y quinto), con el único fin de realizar un análisis comparativo del nivel de comprensión del lenguaje matemático en el que se encuentran o que poseen los dos niveles.

El lenguaje matemático utilizado en la encuesta fue clasificado en tres categorías, para facilitar su análisis en la recopilación de los datos obtenidos, las tres categorías son: operadores básicos (x, +, -, ÷), operadores lógicos ($\therefore, \in, \notin, \cup, \cap, \wedge, \vee, \ldots$) y operadores geométricos ($\angle, \perp \Delta ABC, 90°, \theta, \alpha, \ldots$).

La investigación realizada es de tipo exploratoria, debido a que se realizaron investigaciones de campo en las instituciones seleccionadas para llevar a cabo la investigación.

4. Análisis de resultados

La investigación nos mostró, que existen deficiencias dentro de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática, reflejados en el bajo rendimiento académico de los estudiantes. Encontramos que estos procesos inciden en el aspecto motivacional y en un fenómeno actual denominado “Matefobia” (temor o rechazo hacia el aprendizaje de la matemática) dentro de la población estudiantil. Además, los resultados reflejan que más allá del alumno, el problema estudiado se centra en que no se les brinda a los estudiantes los conocimientos necesarios para interpretar de manera correcta los conceptos matemáticos. Razón que educadores entrevistados durante la investigación justifican que la falta de tiempo para la preparación académica de los estudiantes conlleva al bajo rendimiento en pruebas estandarizadas y al bajo dominio de los contenidos matemáticos dentro de los planes de estudio.

Cuadro comparativo de tres instituciones encuestadas en el 2004, referente a los aciertos de los y las estudiantes.

Tipos de operador	Institución			
	Privado	Subvencionado	Público	Promedio
Básicos	98,00%	95,00%	87,80%	93,60%
Lógicos	50,00%	1,25%	1,50%	17,58%
Geométricos	51,90%	8,75%	7,57%	22,74%
Promedio por institución	66,63%	35,00%	32,29%	

Fuente: encuesta aplicada

Cuadro comparativo de tres instituciones encuestadas en el 2007, referente a los aciertos de los y las estudiantes.

Tipos de operador	Institución			
	Privado	Subvencionado	Público	Promedio
Básicos	95,00%	94,00%	83,87%	90,96%
Lógicos	55,00%	1,17%	1,39%	20,85%
Geométricos	49,72%	6,95%	5,47%	20,71%
Promedio por institución	66,57%	34,04%	30,24%	

Fuente: encuesta aplicada

En los cuadros anteriores se muestra el porcentaje de estudiantes que dominan distintos operadores, según el tipo de institución. A partir de los resultados, se observa el desconocimiento del lenguaje matemático por parte de los y las estudiantes en los años 2004 y 2007, el cual es reflejado en los resultados de las pruebas nacionales estandarizadas. Además se puede apreciar que el nivel de comprensión del lenguaje matemático ha disminuido en estos años, tomando en cuenta que las instituciones encuestadas para el año 2007 son las mismas que se encuestaron en el año 2004.

5. Conclusiones y Recomendaciones

Desde algunos años atrás, nuestro país ha debido enfrentar la problemática del bajo rendimiento en el desempeño de las pruebas estandarizadas en el área de matemática para los niveles de noveno y quinto año (bachillerato).

A través de varios análisis y, tomando en cuenta los porcentajes de rendimiento académico de las pruebas nacionales de los últimos años, se pudo observar que en porcentajes alarmantes, la mayoría de los estudiantes que deben realizar dichas pruebas, no tienen dominio o desconocen en gran medida el lenguaje matemático.

Como lo explican diversas teorías, la influencia del lenguaje en el éxito y en el desempeño, así como en el aprendizaje de cada individuo es realmente significativo, por lo que no se puede avanzar en los niveles de conocimiento si no se tiene un dominio de conocimientos previos al aprendizaje de ese nuevo conocimiento. En el caso de la matemática, es necesario dominar los conocimientos previos que conllevan a la asimilación y al aprendizaje del nuevo tema a desarrollar.

Por lo anterior los resultados obtenidos muestran la problemática presente debido al desconocimiento del lenguaje matemático en los niveles que deben enfrentar pruebas estandarizadas, problema que no se refleja únicamente en el desempeño de las pruebas sino que lo podemos ver reflejado en todos los niveles cuando

se desarrollan las lecciones de matemática, centrando el problema en el ¿por qué las Matemáticas son tan difíciles?, término común que podemos escuchar.

Nuestra propuesta no se antepone al trabajo que debe realizar el profesor en sus lecciones de matemática, ni pretende criticar del todo la labor que el Ministerio de Educación desempeña en nuestro país, sino que trata de concientizar sobre el uso sin abuso del lenguaje matemático, que se debe tener en cuenta en la dinámica general del aula, con una metodología activa y participativa en la que se parte de cada realidad.
La experiencia de presentar y llevar a cabo estas recomendaciones nos hace ver la conveniencia de continuar en esta línea pues ha servido para orientar la intervención en el aula en el área de la comunicación y el lenguaje matemático presente en los procesos educativos.

6. Referencias bibliográficas

- Boada, Humbert. (1986). *El desarrollo de la comunicación en el niño*. Barcelona: Anthropos.
- Bouton, Charles. (1976). *El desarrollo del lenguaje*. Buenos Aires: Huemul.
- Brown, Roger. (1981). *Psicolingüística: algunos aspectos acerca de la adquisición del lenguaje*. México, D.F.: Trillas.
- Dale, Philip S. (1992). *Desarrollo del lenguaje: un enfoque psicolingüístico*. México, D.F.: Trillas.
- Davidoff, Linda. (1989). *Introducción a la psicología*. Madrid: McGraw-Hill.
- Garton, Alison. (1994). *Interacción social y desarrollo del lenguaje y la cognición*. Barcelona : Paidos.
- Luria, A.R. (1956). *Lenguaje y desarrollo intelectual en el niño*. Madrid: Pablo del Río, Editor.
- Mussen, Conger y Kagan. (1978). *Desarrollo de la personalidad en el niño*. México, D.F.: Trillas.
- Piaget, Jean. (1969). *Lenguaje y pensamiento en el niño.* Madrid: Ediciones de la Lectura.

Los Ángulos trigonométricos

Geovany Sanabria Brenes

Resumen

Generalmente el estudio de las funciones trigonométricas en la enseñanza secundaria implica un "gran" cambio en el concepto de ángulo. La introducción de ángulos con medidas negativas o mayores a 360°, llevan al docente a establecer una serie de creaciones didácticas sin un fundamento matemático, como por ejemplo, ver el ángulo como el movimiento de uno de sus lados en la dirección de las agujas del reloj o en dirección contraria y hablar del número de "vueltas" que da un ángulo. Este trabajo le da vida a estas creaciones en el mundo de las matemáticas, no con el fin de justificar la enseñanza tradicional de la trigonométrica en secundaria, por el contrario, se pretende que el docente a partir de estos apuntes establezca propuestas didácticas más acordes con la matemática y abandone esas practicas míticas. Seguidamente se expone una serie de definiciones y procedimientos necesarios para el desarrollo del tema.

Palabras claves: trigonométrica, ángulo,rigurosidad

Contenidos

1 Definiciones **2**

2 Medida de un ángulo trigonométrico **7**

2.1 Medida de un ángulo geométrico 7

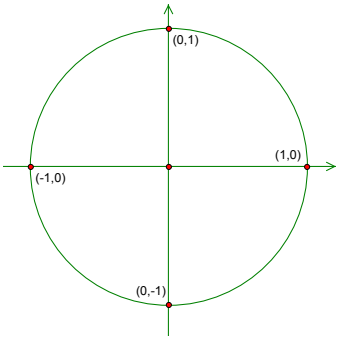
2.2 Definición de medida angular para ángulos trigonométricos 8

3 Propiedades de la medida de un ángulo trigonométrico **14**

1 Definiciones

Definición 1. ***(Círculo trigonométrico)***

Dado un sistema rectangular de coordenadas, el círculo trigonométrico asociado a ese sistema es el círculo de radio 1 *cuyo centro es el origen del sistema.*



Así, la distancia entre un punto (x, y) de la circunferencia del círculo trigonométrico y el centro $(0, 0)$ es 1, es decir; $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$. Se tiene entonces que todo punto (x, y) de la circunferencia del círculo trigonométrico cumple:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Recíporcamente, todo punto (x, y) que satisface esta igualdad, está sobre la circunferencia del círculo trigonométrico.

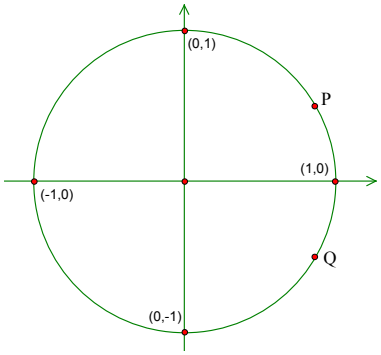
Ejemplo 1. *Dado un sistema de coordenadas, determinemos los puntos del círculo trigonométrico cuya coordenada* x *es* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Si P *es un punto de la circunferencia trigonométrica de coordenadas* $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, y\right)$, *se cumple que:*

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1,$$

de donde se obtiene que $y = \dfrac{1}{2}$ *ó* $y = -\dfrac{1}{2}$. *Así, existen dos puntos de la circunferencia trigonométrica cuya coordenada* x *es* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *los puntos* $P\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ *y*

$Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$.



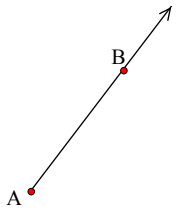
Definición 2. ***(Rotación Angular)***

Una rotación angular (a,b) *con* $a^2+b^2=1$, *es una función que toma un rayo* $\overrightarrow{AB}$ *y lo trasforma en otro* $\overrightarrow{AC}$, *donde* C *se encuentra bajo el siguiente procedimiento:*

1. *Se traza el sistema rectangular de coordenadas con centro en* A *de manera que el* $\overrightarrow{AB}$ *concuerde con el eje* X *positivo.*
2. *Se traza el círculo trigonométrico asociado al sistema construido.*
3. *El punto* C *corresponde al punto de la circunferencia trigonométrica de coordenadas* (a,b).

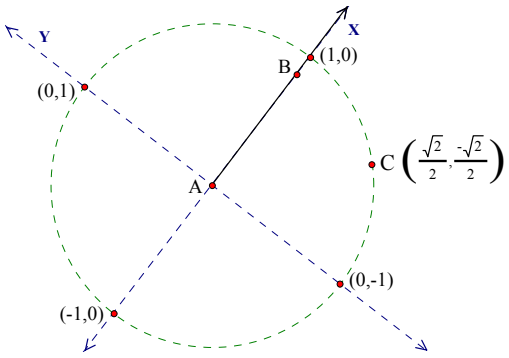
Nota. *La rotación* (a,b) *se puede interpretar como la aplicación que lleva el punto* $(1,0)$, *en el sistema construido, al punto* (a,b). *Puede tormarse la escala de forma que* $AB=1$, *note que, dicha rotación toma el punto* $B\,(1,0)$ *y lo lleva al punto* $C\,(a,b)$.

Ejemplo 2. *Apliquemos la rotación angular* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *al rayo:*

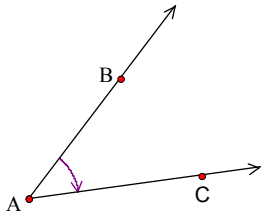


Tracemos el sistema rectangular de coordenadas con centro en A *de manera que:*

el $\overrightarrow{AB}$ concuerde con el eje X positivo, y el círculo trigonométrico asociado:



Por lo tanto, el resultado de aplicar la rotación angular $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ *al* $\overrightarrow{AB}$ *es:*



Note que: la escala que se utiliza para construir el sistema de coordenadas no afecta a la rotación.

En el *applet*: **"Rotación de rayos"**, se visualiza un punto A que será el punto origen del rayo a rotar, el usuario debe realizar los siguientes pasos:

1. Con el *Mouse* debe indicar en la pantalla un punto B, para determinar el $\overrightarrow{AB}$ a rotar.
2. Puede aplicarle la rotación que desee al rayo AB y visualizarla.

Usualmente, se dice que una rotación puede tener dirección y número de "vueltas". Sin embargo; esto es ambiguo, pues por ejemplo, al dar una vuelta más, se obtiene matemáticamente la misma rotación original. A continuación, se propone una definición más consistente.

Definición 3. ***(Ángulo trigonométrico)***

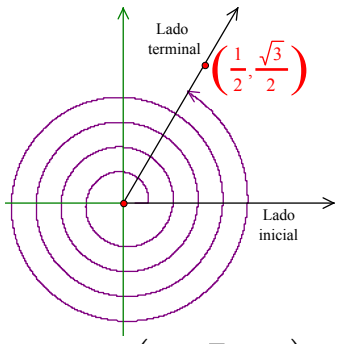
Dado un sistema rectangular de coordenadas, un ángulo trigonométrico es una cuadrúpleta (a, b, d, n) *, donde:*

1. *El rayo "eje X positivo" es llamado lado inicial del ángulo*
2. *La rotación* (a, b) *aplicada al lado inicial, determina el rayo llamado lado final del ángulo.*

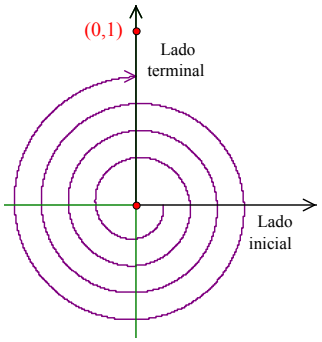
3. *d indica la dirección del ángulo que puede ser positiva* $(d = +)$ *si es contraria a las manecillas del reloj o, en caso contrario negativa* $(d = -)$.

4. *n es un número natural que indica el número de vueltas aplicadas al lado inicial en la dirección d, antes de aplicarle la rotación* (a, b) .

Ejemplo 3 . *Representemos los ángulos trigonométricos* $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 4\right)$ *y* $(0, 1, -, 3)$*:*

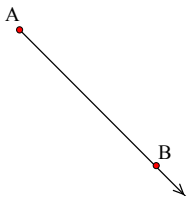


Ángulo $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 4\right)$



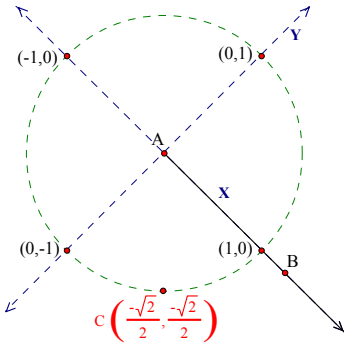
Ángulo $(0, 1, -, 3)$

Ejemplo 4. *Tome el* $\overrightarrow{AB}$

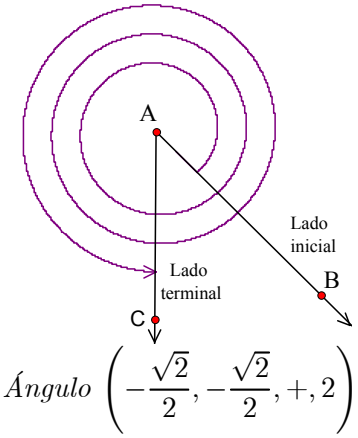


como el lado inicial del ángulo $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}, +, 2\right)$. *Representemos dicho ángulo.*

Primero, apliquemos la rotación angular $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$ *al* $\overrightarrow{AB}$*:*



Por lo tanto, el ángulo está representado, en el sistema generado por el $\overrightarrow{AB}$*, por:*



$$\text{Ángulo}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +, 2\right)$$

Nota. En el ejemplo anterior se muestra que un ángulo trigonométrico (a, b, d, n) es único dado un sistema de coordenadas rectangular.

Definición 4. ***(Composición de Rotaciones)*** *Dadas dos rotaciones* (a, b) *y* (c, d) *se define la rotación composición* $(a, b) \circ (c, d)$*, como aquella función que toma un rayo* $\overrightarrow{AB}$*, le aplica la rotación* (c, d) *y luego, al rayo resultante le aplica la rotación* (a, b)*.*

Se puede comprabar que la composición de rotaciones es conmutativa:

$$(a, b) \circ (c, d) = (c, d) \circ (a, b).$$

Ejemplo 5. *Dadas dos rotaciones* (a, b) *y* (c, d)*, note que*

$$\begin{aligned}(ac - bd)^2 + (bc + da)^2 &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) = 1\end{aligned}$$

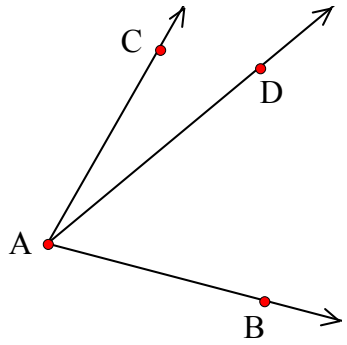
Por lo tanto $(ac - bd, bc + da)$ *es una rotación, esta es llamada la* ***rotación suma****.*

2 Medida de un ángulo trigonométrico

2.1 Medida de un ángulo geométrico

Recordemos que geométricamente, una medida angular, es una función m_g que cumple:

1. Asigna a cada ángulo un número real positivo, es decir; $m_g\angle BAC \geq 0$
2. Si la medida de los ángulos llanos es l, entonces para cualquier ángulo BAC se cumple que:
$$0 \leq m_g\angle BAC \leq l.$$
3. (Postulado de la Construcción de un Ángulo) Si el $\overrightarrow{AB}$ pertenece a la frontera de un semiplano H y $r \in [0, l]$, entonces existe un punto $C \in H$, tal que:
$$m_g\angle BAC = r$$
4. (Postulado de la Suma de Ángulos). Dado un $\angle BAC$, si D pertenece al interior de este ángulo:



entonces: $m_g\angle BAC = m_g\angle BAD + m_g\angle DAC$.

Dos medidas angulares importantes, son la medida en grados y la medida en radianes, que se denotarán con m_g. La medida en grados asigna a cada ángulo un número real entre $0°$ y $180°$, es decir;
$$0° \leq m_g\angle BAC \leq 180°.$$
En el caso de la medida de un ángulo en radianes, se tiene que
$$0 \leq m_g\angle BAC \leq \pi$$
El siguiente teorema recuerda la conversión entre grados y radianes.

Teorema 1. *Dado un ángulo cualquiera BAC (en el sentido geométrico), cuya medida en grados es $m_g\angle BAC = a°$, sólo hay una manera de definir su medida en radianes, y esta es:*
$$x\ rad\ = \frac{a \cdot \pi}{180}\ rad$$

Ejemplo 6. *Si un ángulo mide* $150°$ *entonces su medida en radianes es* x *rad, donde:*

$$x = \frac{150\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

Ejemplo 7. *Si un ángulo mide* $\frac{7\pi}{9}$ *rad entonces su medida en grados es* $a°$*, donde:*

$$a = \frac{7\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 140.$$

En adelante, se hablará de m_g para referirse a la medida de un ángulo, entendiendo ángulo de acuerdo con su concepción geométrica.

2.2 Definición de medida angular para ángulos trigonométricos

Definición 5. *(**Medida de un ángulo trigonométrico**)*

Considere un sistema rectangular de coordenadas de centro A*, con* B *un punto en el eje* X *positivo y* D *un punto en el eje* X *negativo. Sea* $\mathbb{A}$ *el conjunto de ángulos trigonométricos sobre dicho sistema, y sea* m_g *una medida angular geométrica cualquiera. Entonces una medida para los elementos de* $\mathbb{A}$ *es una función* m*:*

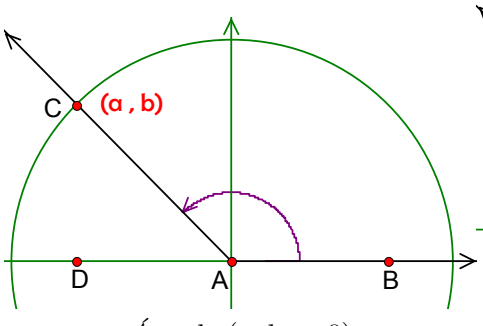
$$m : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumple:

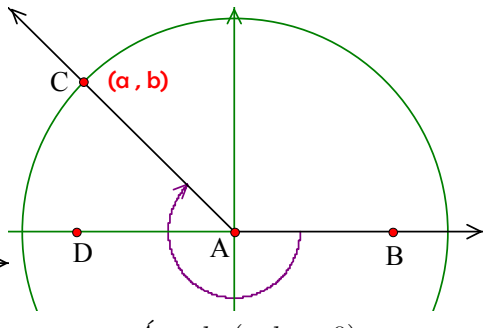
1. *(Propiedad sumativa) Para todo ángulo trigonométrico* (a, b, d, n) *se cumple:*

$$m\,(a, b, d, n) = m\,(a, b, d, 0) + m\,(1, 0, d, n)$$

2. *Para todo ángulo trigonométrico de la forma* $(a, b, d, 0)$ *se tiene que:*
   (a) *Si* $b \geq 0$*, entonces* $m\,(a, b, +, 0) = m_g\angle BAC$ *y* $m\,(a, b, -, 0) = m_g\angle BAC - 2m_g\angle BAD$*. (note que el* $\angle BAD$ *es llano).*

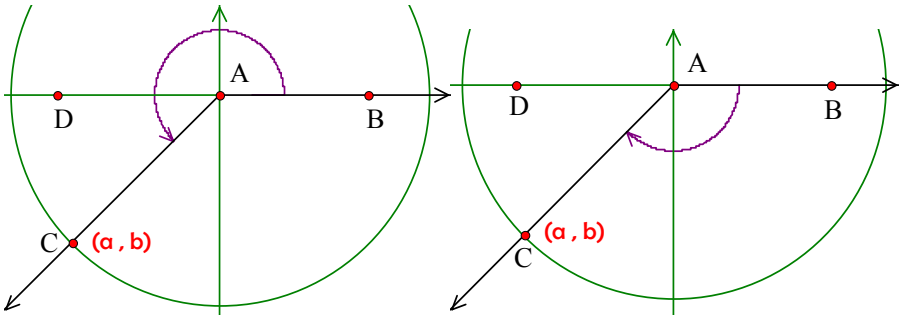


Ángulo $(a, b, +, 0)$



Ángulo $(a, b, -, 0)$

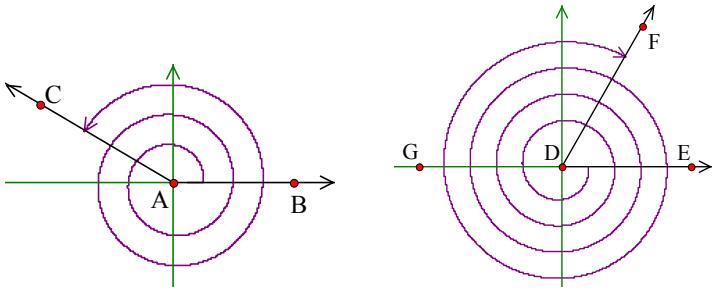
(b) *Si* $b < 0$, *entonces* $m(a, b, +, 0) = 2m_g\angle BAD - m_g\angle BAC$ *y* $m(a, b, -, 0) = -m_g\angle BAC$.



Ángulo $(a, b, +, 0)$ *Ángulo* $(a, b, -, 0)$

3. *Para todo ángulo trigonométrico de la forma* $(1, 0, d, n)$ *se tiene que:*
   (a) *Si* $d = +$, *entonces* $m(1, 0, +, n) = 2n \cdot m_g\angle BAD$
   (b) *Si* $d = -$, *entonces* $m(1, 0, -, n) = -2n \cdot m_g\angle BAD$
   Note que: esto concuerda con la intuición de ver una vuelta como la suma de las medidas de 2 ángulos llanos.
4. m *es una función biyectiva de* $\mathbb{A} - \{(1, 0, -, 0), (1, 0, +, 0)\}$ *en* $\mathbb{R} - \{0\}$. *Es decir; el ángulo trigonométrico de medida* 0 *es el único que tiene dos formas de escribirse* $(1, 0, -, 0)$ *y* $(1, 0, +, 0)$.

Ejemplo 8. *Utilice el transportador para obtener la medida en grados de los ángulos representados por:*



El primer ángulo es de la forma $(a, b, +, 2)$, *y el segundo de la forma* $(c, d, -, 3)$. *La medida del primer ángulo es:*

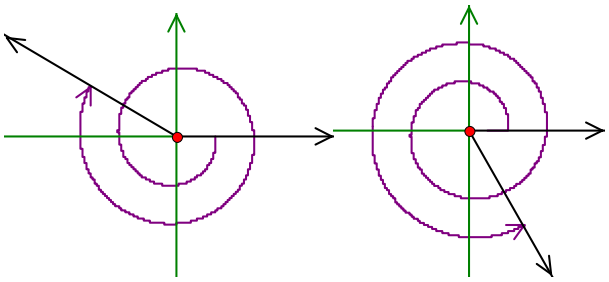
$$\begin{aligned} m(a, b, +, 2) &= m(a, b, +, 0) + m(1, 0, +, 2) && \textit{(propiedad sumativa)} \\ &= m_g\angle BAC + m(1, 0, +, 2) && \textit{(propiedad 3, } b > 0\textit{)} \\ &= 150^\circ + m(1, 0, +, 2) && \textit{(utilizando el transportador)} \\ &= 150^\circ + 4 \cdot 180^\circ && \textit{(propiedad 4)} \\ &= 870^\circ \end{aligned}$$

El el caso del segundo ángulo se tiene que la medida es:

$$\begin{array}{rcll} m\left(c,d,-,3\right) & = & m\left(c,d,-,0\right)+m\left(1,0,-,3\right) & \textit{(propiedad sumativa)} \\ & = & m_g\angle EDF-2\cdot 180^\circ+m\left(1,0,-,3\right) & \textit{(propiedad 3, } d>0\textit{)} \\ & = & 60^\circ-2\cdot 180^\circ+m\left(1,0,-,3\right) & \textit{(utilizando el transportador)} \\ & = & -300^\circ+-6\cdot 180^\circ & \textit{(propiedad 4)} \\ & = & -1380^\circ & \end{array}$$

El lector puede observar que la medida de un ángulo trigonométrico concuerda con la intuición de asociar una vuelta con 2π rad o 360°. En el ejemplo anterior, se justificaron todos los pasos, en el siguiente, se enfatiza la intuición y se suprimen las justificaciones.

Ejemplo 9. *Determine la medida de los siguientes ángulos representados gráficamente:*



En la primera representación, se observa que el ángulo tiene dirección negativa y utilizando un transportador se obtiene que la medida del ángulo geométrico es de 150°, *por lo tanto, la medida del ángulo representado es de:* $-360^\circ-180^\circ-30^\circ=-570^\circ$. *En el caso de la segunda representación, el ángulo geométrico mide* 60°, *así, el ángulo representado mide:* $360^\circ+\left(360-60\right)^\circ=660^\circ$.

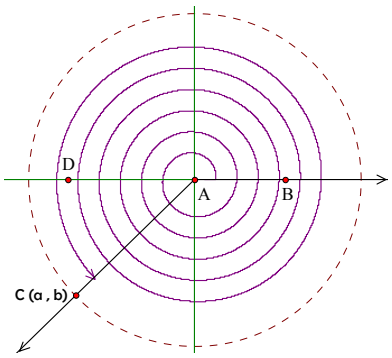
Ejemplo 10. *Utilice triángulos especiales para hallar los ángulos trigonométricos de medidas:*

$$2025^\circ \quad y \quad -\frac{34}{3}\pi \text{ rad.}$$

Se propone como ejercicio probar que la dirección del ángulo concuerda con el signo de su medida. El primer ángulo es de la forma $(a,b,+,n)$, *debido a que; cada vuelta equivale a* 360°, *para determinar el número de vueltas busquemos el mayor múltiplo de* 360 *que no sobrepasa a* 2025, *utilizando el algoritmo de la división :*

$$2025=5\cdot 360+225$$

Así, $n = 5$ y el ángulo tiene la siguiente representación:



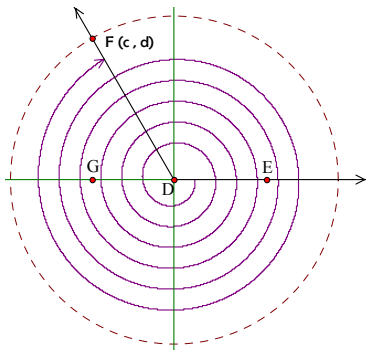
Donde D es pie de la perpendicular al eje X trazada desde C. Como $m_g\angle DAC = 45°$ y $AC = 1$ (radio del círculo trigonométrico) entonces $DC = DA = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, por lo tanto,

$$a = -DA = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad y \quad b = -DC = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

y el primer ángulo es $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +, 5\right)$. Por otro lado, el segundo ángulo tiene dirección negativa y es de la forma $(c, d, -, m)$, m es el mayor múltiplo de 2π ("medida" de una vuelta) que no sobrepasa a $\frac{34}{3}\pi$, como:

$$\frac{34}{3}\pi = 5 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{3},$$

entonces $m = 5$ y su representación es:



donde G es pie de la perpendicular al eje X trazada desde F. Se tiene que: $m_g\angle GDF = \frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$ y como $DF = 1$ (¿Por qué?) entonces se tiene un

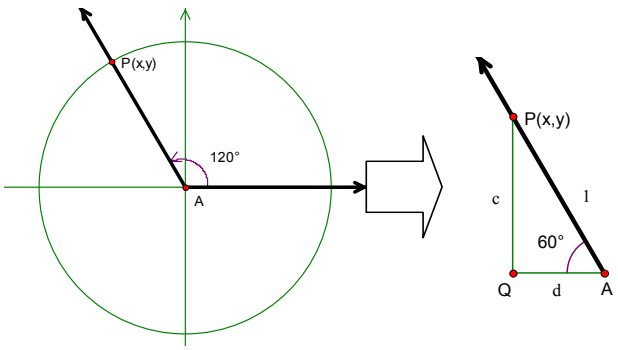
triángulo especial $30° - 60°$ $(\triangle FGD)$ *con hipotenusa de medida* 1. *Por lo tanto;* $GD = \dfrac{1}{2}$ *y* $FG = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *además:*

$$c = -GD = -\frac{1}{2}, \quad d = GF = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así, el segundo ángulo es: $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -, 5\right)$.

Note que: dado un ángulo trigonométrico (a, b, d, n), su lado terminal determina un único punto del círculo trigonométrico, el punto (a, b).

Ejemplo 11. *Halle el punto del círculo trigonométrico determinado por el ángulo trigonométrico de medida* $120°$.
Aquí se procederá de manera distinta al ejemplo anterior, utilizando las funciones trigonométricas estudiadas previamente. El ángulo está representado por:



De la representación del ángulo se extrae el triángulo rectángulo $\triangle APQ$, *seguidamente utilizando algunas de las razones trigonométricas estudiadas, se obtiene que:*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 60° &= \frac{c}{1} \quad \Rightarrow \quad c = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos 60° &= \frac{d}{1} \quad \Rightarrow \quad d = \cos 60° = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora, note que: x *es negativo, mientras que* y *es positivo, por lo tanto;* $x = -d = -\dfrac{1}{2}$, $y = c = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Así el punto del círculo trigonométrico determinado por el ángulo de medida* $120°$ *es* $P\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ejemplo 12. *Los ángulos trigonométricos de medida:* $120°, -240°$ *y* $480°$ *determinan el mismo punto en el círculo trigonométrico.*

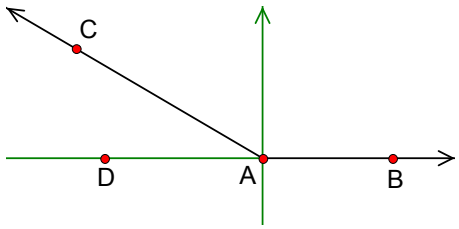
El siguiente teorema, señala que la fórmula de conversión entre grados y radianes se preserva.

Teorema 2. *(Conversión entre grados y radianes)*
Dado un ángulo trigonométrico (a, b, d, n), si su medida en grados es g° y en radianes es x rad, entonces se tiene que:

$$\frac{g}{180} = \frac{x}{\pi}.$$

Prueba

Sea A el centro del sistema de coordenadas, B un punto en el eje X positivo, C un punto en el lado terminal del ángulo y D un punto en el eje X negativo. Veamos el caso en que: $b \geq 0$ y $n = 0$.



Note que: si la medida en grados del $\angle BAC$ es $m_g\angle BAC = h^\circ$, entonces su medida en radianes es $\frac{h\pi}{180}$ rad, por lo tanto, si $d = +$, se tiene que:

$$g^\circ = m\,(a, b, +, 0) = m_g\angle BAC = h^\circ,$$

de donde $g = h$, entonces:

$$x \text{ rad} = m\,(a, b, +, 0) = m_g\angle BAC = \frac{h\pi}{180} \text{ rad} = \frac{g\pi}{180} \text{ rad}.$$

Así, se concluye que: $\frac{g}{180} = \frac{x}{\pi}$ si $d = +$. Por otro lado si $d = -$, entonces:

$$g^\circ = m\,(a, b, -, 0) = m_g\angle BAC - 2m_g\angle BAC = (h - 360)^\circ,$$

por lo tanto, $g = h - 360$, así x rad $= m\,(a, b, -, 0) = m_g\angle BAC - 2m_g\angle BAC$ de donde:

$$x \text{ rad} = \frac{h\pi}{180} - 2\pi \text{ rad} = \frac{(h - 360)\,\pi}{180} \text{ rad} = \frac{g\pi}{180} \text{ rad}..$$

Los otros casos quedan como ejercicio para el lector. ■

Ejemplo 13. *La medida en radianes de un ángulo cuya medida en grados es -1836°, está dado por x rad, donde:*

$$x = -\frac{1836 \cdot \pi}{180} = -\frac{51}{5}\pi.$$

Observaciones. En las siguientes secciones, el lector debe tomar en cuenta que:

a) En adelante, se utilizarán solamente ángulos trigonométricos, por ello serán nombrados, en caso de no haber ambigüedad, simplemente como ángulos.

b) Los resultados y propiedades serán enunciados utilizando la medida de ángulos en radianes, el lector se encargará de deducir la equivalencia de estos usando grados. Esto con el fin de no hacer "pesada" esta presentación.

3 Propiedades de la medida de un ángulo trigonométrico

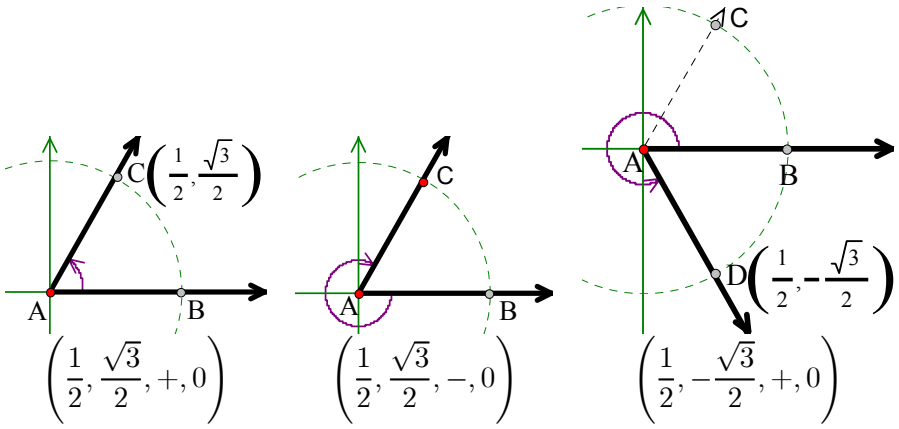
Seguidamente, se presentan una serie de resultados referentes a la medida de un ángulo trigonométrico. Las demostraciones de algunas de dichas propiedades son sencillas, pero requieren el establecimiento de una serie de casos, dada la definición de ángulo trigonométrico.

Como el objetivo de esta sección es alimentar la intuición del lector sobre el ángulo trigonométrico y su medida, muchas de las demostraciones serán sustituidas por una justificación gráfica.

Definición 6. *(Dirección opuesta)*
Si d es la dirección de un ángulo, se define $-d$ como la dirección opuesta a d, es decir;

$$-d = \begin{cases} - & si \quad d = + \\ + & si \quad d = - \end{cases} .$$

Ejemplo 14. *Determine la medida en radianes de los ángulos* $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -, 0\right)$ *y* $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, +, 0\right)$.
Dibujemos cada uno de estos ángulos:



Utilizando el transportador se tiene que: $m\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 0\right) = \frac{\pi}{3}$ *rad. El primer y segundo ángulo comparten el mismo lado terminal y tienen dirrección opuesta,*

por lo tanto; difieren en una vuelta es decir:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},-,0\right) &= m\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},+,0\right)+m\left(1,0,-,1\right) \\ &= \frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}\ rad. \end{aligned}$$

En el caso del tercer ángulo, note que: C y D son simétricos con respecto a $\overleftrightarrow{AB}$ entonces $\angle CAB \cong \angle DAB$, por lo tanto; la suma de las medidas de los ángulos primero y tercero es una vuelta, o sea:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},+,0\right) &= m\left(1,0,+,1\right)-m\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},+,0\right) \\ &= 2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}\ rad. \end{aligned}$$

El ejemplo anterior establece dos resultados que se enunciarán en el teorema siguiente. Para facilitar la comprensión y simplificar la notación, se utilizará en los enunciados de los resultados de este apartado sólo la medida en radianes, el lector puede enunciar los resultados equivalentes a estos, en grados. Así, se establecerá la siguiente notación para la medida de una vuelta en radianes:

$$m\left(1,0,d,1\right)=2\pi d=\left\{\begin{array}{lll} 2\pi & si & d=+ \\ -2\pi & si & d=- \end{array}\right. .$$

Teorema 3. *Dado un ángulo $(a,b,d,0)$ de medida de θ, se tiene que:*

1. *$(a,b,-d,0)$ es un ángulo y además:*

$$m\left(a,b,-d,0\right)=\theta-2\pi d.$$

2. *$(a,-b,d,0)$ es un ángulo y además:*

$$m\left(a,-b,d,0\right)=2\pi d-\theta.$$

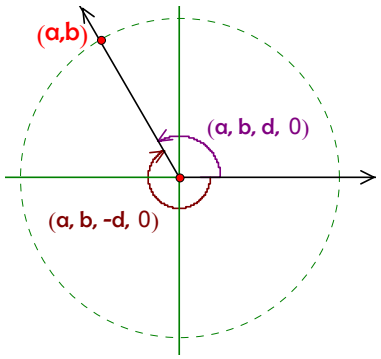
Justificación. *Note que:*

$$a^2+(-b)^2=a^2+b^2=1,$$

pues $(a,b,d,0)$ es un ángulo. Además, debido a la definición de $-d$, se tiene que: $(a,b,-d,0)$, $(a,-b,d,0)$, $(-a,b,d,0)$ son ángulos. A continuación, se halla la medida de cada uno de estos ángulos.

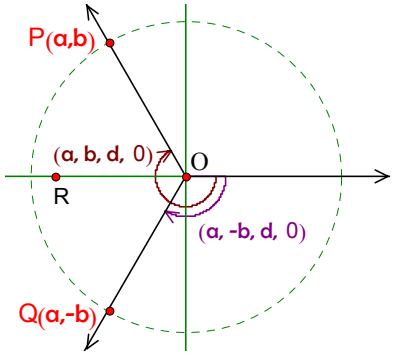
1. *Los ángulos $(a,b,-d,0)$ y $(a,b,d,0)$ determina el mismo punto sobre la circunferencia trigonométrica, tienen dirección opuesta y realizan*

0 *vueltas. Una posible representación de estos ángulos en un mismo sistema es la siguiente:*



Note que: la medida de una vuelta en la dirección $-d$*, y* θ *tienen signos opuestos. Por lo tanto; la medida de* $(a, b, -d, 0)$ *es la suma de la medida de una vuelta en la dirección* $-d$ *y* θ*.*

2. *Dado un sistema de coordenadas, los puntos* (a, b) *y* $(a, -b)$ *son simétricos con respecto al eje* X*.*



Entonces $\angle POR \cong \angle QOR$*, por lo tanto:*

$$m\,(a, -b, d, 0) = -m\,(a, b, -d, 0)$$

y aplicando la parte 1 del teorema 3 *se obtiene que:*

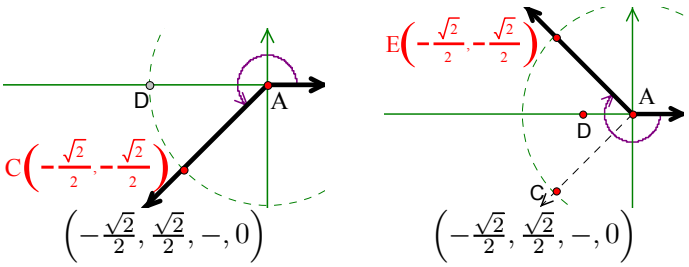
$$m\,(a, -b, d, 0) = -\left[\theta + -2\pi d\right] = -\theta + 2\pi d. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 15. *Como* $m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +, 0\right) = 225°$*, aplicando el teorema anterior se tiene que:*

$$\begin{aligned} m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -, 0\right) &= (225 + -360)\,° = -135°, \\ m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, +, 0\right) &= (360 - 225)\,° = 135°. \end{aligned}$$

Ejemplo 16. *Determine la medida en grados del ángulo* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -, 0\right)$.

Del ejemplo anterior se tiene que: $m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +, 0\right) = 225°$, *considere las siguientes representaciones de ángulos:*



Note que: de acuerdo con los postulados de medida de ángulos se tiene que:

$$m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +, 0\right) = 180° + m\angle DAC \quad y$$
$$m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -, 0\right) = -180° - m\angle DAE.$$

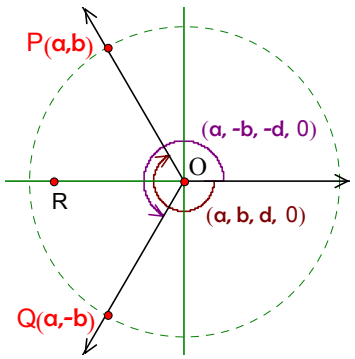
Como los puntos $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *y* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *son simétricos con respecto al eje X entonces* $\angle DAC \cong \angle DAE$, *por lo tanto:*

$$m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -, 0\right) = -m\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +, 0\right) = -225°.$$

Los resultados anteriores nos permiten demostrar el siguiente teorema.

Teorema 4. *Dado un ángulo* $(a, b, d, 0)$ *de medida de* θ, *se tiene que:* $(a, -b, -d, 0)$ *es un ángulo y además:*

$$m(a, -b, -d, 0) = -\theta.$$



Prueba. *Utilizando los resultados 1 y 2 del teorema anterior se tiene que:*

$$\begin{aligned} m(a,-b,-d,0) &= m(a,-b,d,0)+m(1,0,-d,1) \\ &= m(1,0,d,1)-m(a,b,d,0)+m(1,0,-d,1) \end{aligned}$$

Como $m(1,0,d,1)=-m(1,0,-d,1)$ *(¿por qué?) entonces:*

$$m(a,-b,-d,0)=-m(a,b,d,0). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 17. *Sea* (a,b) *una rotación. Si* $m(a,-b,+,5)=\dfrac{47\pi}{4}$ *rad, determine la medida del ángulo* $(a,b,-,6)$.
Se tiene por la propiedad sumativa que:

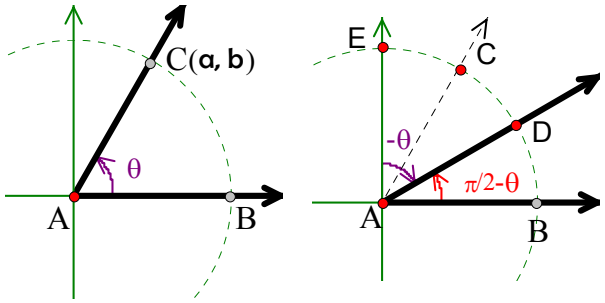
$$m(a,-b,+,0)+m(1,0,+,5)=\frac{47\pi}{4},$$

entonces $m(a,-b,+,0)=\dfrac{47\pi}{4}-5\cdot 2\pi=\dfrac{7\pi}{4}$. *Por lo tanto:*

$$\begin{aligned} m(a,b,-,6) &= m(a,b,-,0)+m(1,0,-,6) && \textit{(propiedad sumativa)} \\ &= m(a,b,-,0)-12\pi \\ &= m(a,-b,+,0)-12\pi && \textit{(teorema 4)} \\ &= \frac{7\pi}{4}-12\pi=\frac{-41\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ejemplo 18. *Dado el ángulo* $A(a,b,d,0)$ *de medida* θ, *encuentre un ángulo de medida* $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ *en términos de* a,b *y* d.
Una manera de proceder para resolver el ejercicio es realizar casos sobre el valor de d *y el cuandrante donde se halle el lado terminal del ángulo* A. *En total son ocho casos, sequidamente se realizarán algunos, los demás quedan como ejerccio.*

Caso I. *Si* $d=+$ *y el lado terminal del ángulo* A *esta en el primer cuadrante. Intutivamente, como el ángulo de medida* θ *tiene dirección positiva, el ángulo de medida* $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ *es el resultante de formar un ángulo recto* B *con dirección positiva y luego formar un ángulo de medida* $-\theta$ *con lado inicial igual al lado terminal de* B.

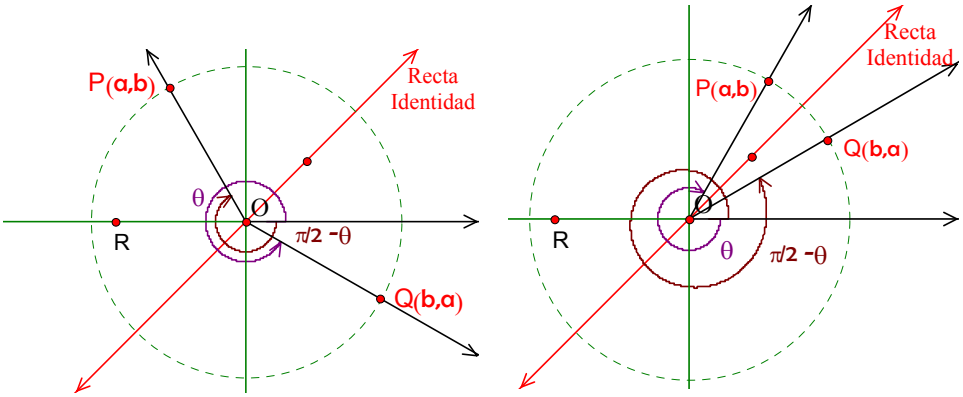


Note que: $\angle CAB \cong \angle EAD$, *entonces:* $\angle EAC \cong \angle DAB$, *por lo tanto;* C *y* D *son simétricos con respecto a la identidad. Así las coordenadas de* D *son* (b,a) *y el ángulo de medida* $\frac{\pi}{2}-\theta$ *es* $(b,a,d,0)$. *Verifiquemos formalmente que:* $m(b,a,d,0)=\frac{\pi}{2}-\theta$. *Dado que* $C(a,b)$ *y* $D(b,a)$ *son simétricos con respecto a la identidad entonces:* $\angle EAD \cong \angle CAB$ *(justifique), aplicando los postulados de la medida de ángulos se tiene que:*

$$\begin{aligned} m(a,b,+,0) &= m\angle CAB, \\ m(b,a,+,0) &= m\angle BAD = \frac{\pi}{2} - m\angle EAD \end{aligned}$$

y como $\angle EAD \cong \angle CAB$, *entonces* $m(b,a,+,0)=\frac{\pi}{2}-m(a,b,+,0)$.

Otros casos. *Intutivamente el lector puede obtener las siguientes representaciónes del ángulo de medida* $\theta-\frac{\pi}{2}$.



$d=+$ *y* (a,b) *en el II cuadrante* $d=-$ *y* (a,b) *en el I cuadrante*

En la primera representación el ángulo de medida $\frac{\pi}{2}-\theta$ *es* $(b,a,-d,0)$ *y en la segunda representación es* $(b,a,-d,1)$.

El ejemplo anterior sugiere el siguiente resultado.

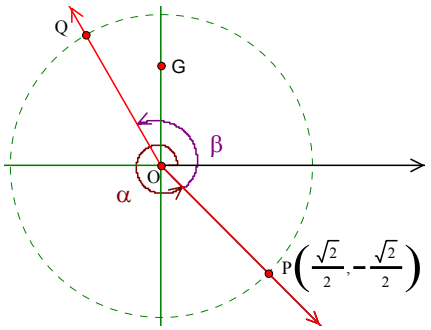
Teorema 5. *Dado un ángulo* $(a,b,d,0)$ *de medida de* θ, *existe un ángulo de medida* $\frac{\pi}{2}-\theta$, *de la forma* (b,a,e,v), *con* $e\in\{+,-\}$ *y* $v\in\{0,1\}$.

Justificación. *Completando el ejemplo anterior se obtiene que el ángulo definido por:*

$$\begin{cases} (b,a,d,0) & si \quad d=+ \text{ y } (a,b) \text{ está en el } I \text{ cuadrante.} \\ (b,a,-d,1) & si \quad d=- \text{ y } (a,b) \text{ está en el } I \text{ cuadrante.} \\ (b,a,-d,0) & en \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

mide $\frac{\pi}{2}-\theta$. ■

Ejemplo 19. *Dados dos ángulos* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, +, 0\right)$ *y* $\left(-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, +, 0\right)$ *de medidas* $\alpha = 315°$ *y* $\beta = 165°$ *respectivamente, halle un ángulo de medida* $\alpha + \beta$.
Dibujemos el ángulo de medida α *seguido del ángulo de medida* β *tomando el lado terminal del primero como el lado inicial del segundo.*



Note que: $m\angle QOG = 30°$, *por lo tanto, las coordenadas del punto* Q *son* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. *Así, el ángulo de medida* $\alpha + \beta$ *es* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 1\right)$.

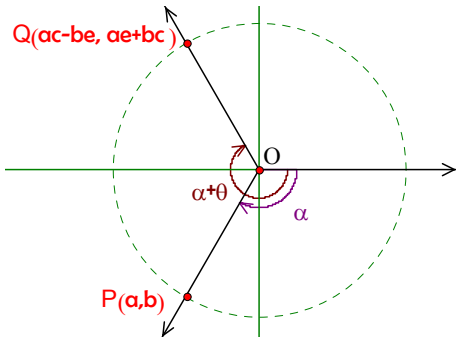
Teorema 6. *Dados dos ángulos* $(a, b, d, 0)$ *y* $(c, e, d, 0)$ *de medidas* α *y* β *respectivamente, se tiene que:*

$$\alpha + \beta = m\left(ac - be, ae + bc, d, n\right),$$

donde n *es cero o uno.*

Justificación. *Como;* $(ac - be)^2 + (ae + bc)^2 = \left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + e^2\right) = 1$, *se tiene que* $(ac - be, ae + bc, d, n)$ *es un ángulo. Consideremos dos casos.*

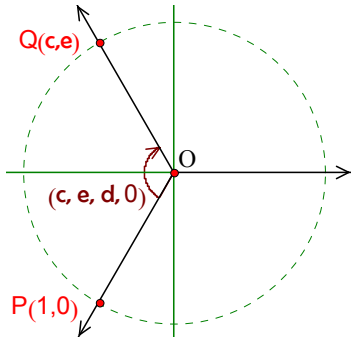
Caso I. *Si* $\alpha + \beta$ *es mayor a la medida de una vuelta, es decir;* $|\alpha + \beta| < 2\pi$. *Dibujemos los ángulos* $(ac - be, ae + bc, d, n)$ *y* $(a, b, d, 0)$ *en un mismo sistema:*



Sea θ *la medida del ángulo trigonométrico de lado inicial* $\overrightarrow{OP}$ *y lado terminal* $\overrightarrow{OQ}$. *Entonces se tiene que:*

$$m\left(ac - be, ae + bc, d, 0\right) = m\left(a, b, d, 0\right) + \theta.$$

Se debe cumplir: $\theta = m(c, e, d, 0)$. *Considere un nuevo sistema de coordenadas de manera que* $\overrightarrow{OP}$ *coincida con su eje* X *positivo. En este nuevo sistema las coordenadas de* P *son* $(1, 0)$, *es decir; a toma el valor de* 1 *y* b *el valor de* 0, *así, las coordenadas del punto* Q *son:* $(1 \cdot c - 0 \cdot e, 1 \cdot e + 0 \cdot c) = (c, e)$.



Por lo tanto; $\theta = m(c, e, d, 0)$. *Así se tiene que si* $|\alpha + \beta| < 2\pi$, *entonces:*

$$m(ac - be, ae + bc, d, 0) = m(a, b, d, 0) + m(c, e, d, 0).$$

Caso II. *Si* $|\alpha + \beta| \geq 2\pi$.

Similar al caso anterior se obtiene que:

$$m(ac - be, ae + bc, d, 1) = m(a, b, d, 0) + m(c, e, d, 0).$$

Se deja como ejercicio, la justificación de este caso.

Ejemplo 20. *Determine el valor de* $x = m\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 2\right) + m\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -, 3\right)$.

Se tiene que:

$$\begin{aligned} x &= m\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 0\right) + m\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -, 0\right) - 2\pi \quad \textit{(propiedad sumativa)} \\ &= m\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 0\right) + m\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, +, 0\right) - 4\pi \quad \textit{(teorema 3)} \\ &= m(0, -1, +, n) - 4\pi \quad \textit{(teorema 6)} \end{aligned}$$

Donde n *es cero o uno, como el punto* $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *se encuentra en el primer cuadrante y el punto* $(0, -1)$ *en el eje* Y *negativo entonces:* $m(0, -1, +, n) > m\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, +, 0\right) > 0$, *por lo tanto;* $n = 0$, *así se concluye que:*

$$x = m(0, -1, +, 0) - 4\pi = \frac{3\pi}{2} - 4\pi = -\frac{5\pi}{2}.$$

Utilice el *applet*: **"Ángulo trigonométrico"**, para determinar el ángulo trigonométrico a partir de su medida.

Bibliografía

[1] Abarca, Isaac. *Funciones trigonométricas y circulares*. Boletin Matemático Costarricense Vol. 3, N° 1. Universidad de Costa Rica (1974).

[2] Arce Salas, Carlos. *Trigonometría, una exploración de sus conceptos con ayuda del computador*. Universidad de Costa Rica (1996).

[3] Baldor, Aurelio. *Geometría Plana y del espacio, con una introducción a la trigonometría*. (1983).

[4] Beckmann, Petr. *A history of π (pi)*. The Golem Press. New York (1971).

[5] Cambronero, S. *Una construcción elemental de las Funciones Exponencial y Logarítmica*. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Vol 3, N°1, Abril 2002. Dirección: *http:// www.itcr.ac.cr/ carreras/ matematica/ revistamate/ Contribucionesv3n1002/ funcionexponencial/ index.html*

[6] Copeland, Arthur. *Geometry, algebra and trigonometry by vector methods*. (1962).

[7] Wentworth, George. *Plane and Spherical trigonometry and tables*. (1903).

Matemática Superior para estudiantes de Secundaria con rendimiento académico alto.

Ernesto Navarro Cumpean[1]

Resumen

En este documento, se presenta un proyecto que tiene como propósito fundamental trabajar la Matemática Superior con estudiantes de Educación Secundaria, a través de una metodología innovadora - diseñada por el autor de este proyecto - que promueve el interés y alegría por adquirir estos conocimientos. Con su aplicación se ha logrado que grupos de estudiantes de segundo grado de secundaria aprendan Matemática desde el álgebra hasta el cálculo integral.

La duración aproximada del proyecto es de dos a dos años y medio; estos adolescentes que formen parte del proyecto, cuando hayan concluido el mismo y terminan ese nivel de estudios, es decir el Secundario, respecto a conocimientos matemáticos estarán en posibilidades de cursar con éxito cualquier carrera de ingeniería.

El segundo propósito va dirigido a que las autoridades educativas promuevan esta metodología empleada y que facilite la elaboración de estrategias para su puesta en práctica y que se logre aumentar el índice de aprobados en la asignatura de Matemática, además de motivarlos por el estudio posterior de esta ciencia.

A la fecha ya se han obtenido resultados muy satisfactorios con los grupos experimentales; los adolescentes han logrado habilidades para aprender la matemática. Esto implica que sólo es necesario saber enseñárselas para motivar en ellos la alegría por aprender y construir su propio conocimiento.

I.- INTRODUCCION

La matemática es la más simple, la más perfecta y la más antigua de las ciencias.
Diariamente todos los seres humanos sin darse cuenta y sin importar el lugar donde se encuentren, hacen uso de la matemática. Por ejemplo: al despertar por la mañana puede hacer un cálculo mental sobre el tiempo que le llevará para llegar a su trabajo, al cruzar una calle calculará si podrá hacerlo ante la proximidad de un vehículo, contará el cambio que recibe al pagar el pasaje en un autobús o el ama de casa calculará si el dinero que posee le alcanza para hacer unas compras. Sin embargo, este maravilloso instrumento creado por el genio del hombre para el descubrimiento de la verdad y que honra el espíritu humano, es temido y por lo mismo rechazado por la gran mayoría de las personas y especialmente por los estudiantes. Con frecuencia el rechazo es una herencia dictada por el medio, generación tras generación, según la cual el aprendizaje de la matemática es en sí mismo de gran dificultad. Esto en gran parte es originado porque el alumno desconoce que la matemática es la llave de oro que abre todas las ciencias y en la cual se sustenta todo el desarrollo científico y tecnológico actual, ya que toda educación científica que no se inicia con la matemática es imperfecta en su base, pues la escala de la sabiduría tiene sus peldaños hechos de números.

Independientemente que para ciertos alumnos el encuentro con la matemática es una experiencia de efectos traumáticos, se observa la presión familiar y social y el sentir del alumno que se bloquea aún más ante el temor y el miedo al fracaso; **esa desfavorable imagen heredada se ve fortalecida por los procedimientos didácticos usados por la mayoría de los docentes, que sólo consiguen obstruir la alegría de descubrir y construir.**

Sin embargo, el interés y motivación en la materia, si bien tiene una estrecha relación en cómo se transmite la misma; también es influenciado por un contexto más amplio, la familia en la cual está

[1] México, ernacu51@yahoo.com.mx

inmerso el estudiante, pues es frecuente que estos escuchen de sus padres el rechazo que ellos tuvieron hacia la materia y los problemas para aprobarla.

Es necesario generar una actitud positiva en los alumnos hacia la materia, de modo que se posibilite su aprendizaje. Lo ideal sería que el alumno tuviera oportunidad de estudiarla como un juego, que el puede practicar libremente y con responsabilidad. Es probable que se despierte en él un interés mayor desde el primer momento en que participa, desarrolla su iniciativa y se descubre a sí mismo, dado que hay un interés práctico. Esto último es importante para llegar a la resolución del problema.

Cuando en el alumno ha desaparecido el rechazo a las matemáticas, la motivación se ha hecho presente y a empezado ha aprender, entonces, tal vez, esté en vías de comprender que las leyes de la naturaleza son sólo los pensamientos matemáticos de Dios.

Se considera que los altos índices de reprobación en matemáticas no son exclusivos de una determinada institución o lugar, sino más bien **es un problema que afecta por lo general a todos los países del mundo, a alumnos de todos los niveles sociales, económicos y culturales; ello origina rezago y deserción escolar de gran cantidad de estudiantes**. Además, es un hecho que la reprobación en esta materia produce frustración en el alumno, el profesor y en la sociedad.

La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a nivel mundial ha planteado siempre un problema bastante paradójico. En efecto, existe una cierta categoría de alumnos que, por una parte inteligentes y que incluso pueden dar prueba en otros campos de una inteligencia superior, pero que fracasan más o menos sistemáticamente en matemáticas; **¿por qué no se forma ese mismo interés en el aprendizaje de las matemáticas?, ¿por qué se les hace difícil y en ocasiones imposible de aprender las matemáticas?, ¿qué o quién origina ese rechazo?**

II.- DESARROLLO DEL PROYECTO

En investigación realizada por el autor del proyecto Navarro Cumpeán, E. encontró que de los alumnos que ingresaron a estudiar una carrera de ingeniería al Instituto Tecnológico de Cd. Victoria en el semestre agosto-diciembre de 1999, el 88.26% reprobaron un examen de matemáticas de nivel secundaria, siendo 70 la calificación mínima aprobatoria; y 77.04% de reprobación en el mismo examen con 60 de calificación mínima. El 100% de esos alumnos reprobó el examen de admisión; según estos resultados, no hubo aprendizaje en los años de bachillerato.

En la práctica docente en la citada institución educativa, se ha observado que existen alumnos estudiando una carrera de ingeniería que desconocen la aritmética y algunos hasta las tablas de multiplicar.

Es de suponer los altos índices de reprobación y deserción que se tienen en las instituciones de educación superior, sobre todo en aquellas escuelas donde las diversas asignaturas que conforman el plan de estudios requieren de las matemáticas para la descripción, explicación y predicción de los conceptos fundamentales en el campo teórico y experimental, y por tanto, requieren de un conocimiento profundo de las mismas.

En este documento se hace la descripción de un proyecto en el cual se aplicará un método de enseñanza-aprendizaje innovador que motiva y facilita el aprendizaje de las matemáticas **en alumnos de primero, segundo y tercer grado de secundaria**. Se considera que por sus características, es un proyecto de gran envergadura y relevancia que requiere la interacción de los padres de familia y las autoridades educativas para lograr el siguiente:

1.- Objetivo: Contribuir al desarrollo de habilidades en el estudio de la Matemática.

Con la utilización de una metodología que motive y facilite el aprendizaje de las matemáticas. La aplicación de la Metodología pretende demostrar que los estudiantes de primero, segundo y tercero de secundaria, pueden iniciar a aprender **y aprenden todas las matemáticas desde el álgebra hasta el cálculo integral**, provocando en él la formación y desarrollo del razonamiento matemático.

2.- Justificación

La realización de este proyecto se considera relevante ya que al obtener el objetivo planteado **(se obtendrá),** la metodología usada en la enseñanza-aprendizaje puede servir de base a las autoridades educativas en el diseño de estrategias para remediar el problema de rechazo, reprobación y el no aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. Además, se dará cumplimiento a compromisos de las instituciones de educación superior: *investigación y desarrollo en vinculación con la sociedad.*

En México y el resto de los países de América Latina, generalmente se trabaja en educación especial pero siempre en el extremo bajo, o sea con estudiantes con problemas de aprendizaje; pero nunca se trabaja con estudiantes de rendimiento académico alto. Lo que se propone en este documento es educación especial.

3.- Realización de la propuesta

a) Formación del grupo.- se formarían dos grupos con máximo de 40 alumnos de **segundo grado de secundaria** (13 años de edad). Se está considerando posible deserción de alumnos.

b) Requisitos para los alumnos que formen parte del grupo.- únicamente los conocimientos básicos de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división). Es indispensable que los alumnos escogidos sean del más alto promedio escolar; esto se debe a que estos adolescentes tienen las características necesarias para el desarrollo del proyecto como son: **hábitos de estudio, disciplina, responsabilidad, generalmente tienen padres con las mismas características, etc**.; además, estos alumnos serán los que estarán dispuestos a formar parte del proyecto; no así los alumnos con problemas de disciplina y reprobación. **Más que capacidad, se requiere buenas actitudes**. Se sugiere que la selección de los alumnos se realice entre los promedios más altos de las diversas escuelas secundarias de la localidad; tener una plática con sus padres y proporcionales una detallada información del proyecto para originar un compromiso con el mismo; el compromiso de sus padres con el proyecto es indispensable para la obtención del éxito.

Posteriormente se podrá experimentar con grupos de alumnos con problemas de rechazo y reprobación en matemáticas, y/o con alumnos de menor edad.

c) Actividades a realizar:

*** Del Instructor - autor:** *En caso que se desarrolle en Cd. Victoria, Tamaulipas o cualquier otro lugar del país, el autor del presente lo desarrollará hasta el fin. Si posteriormente es necesaria la formación de más grupos de alumnos; el autor del presente y el Instituto Tecnológico de Cd. Victoria, seleccionarán a aquellos maestros de matemáticas que a su juicio tengan las características necesarias para aplicar la metodología y la conducción de los grupos.*

* **Contenidos de Matemática**.- **álgebra, trigonometría, geometría analítica, cálculo diferencial y cálculo integral**, (se anexan contenidos temáticos). La aplicación será en ese orden.

*** Duración del proyecto.-** de dos a dos años y medio. Cuando estos pequeños que integren el grupo terminen sus estudios de secundaria, habrán aprendido la mayor parte del cálculo integral **– muy probablemente todo**.

*** Lugar de realización.-** el que se designe; preferentemente debe ser un local ubicado en el centro de la ciudad ya que al captar alumnos de todos los sectores de la misma, se les facilitará más la puntualidad y asistencia diaria. La renta del local y gastos de operación del proyecto podría ser pagado con la aportación de una pequeña cuota de los padres de familia de los alumnos.

*** Material requerido**.- ***lo que ya existe en las aulas de todas las escuelas del mundo***.

En el aula; pizarrón verde o blanco (de preferencia), mesa bancos, escritorio, gis o marcadores, borrador. (El autor aportaría los mesa bancos y el pizarrón blanco).

Por el alumno; cuaderno de cuadrícula cuadro grande, lápiz, goma para borrar. En las primeras semanas se proporcionarán fotocopias de material elaborado por el autor y posteriormente comprarán el libro o los libros relacionados con la materia. La calculadora científica (la más sencilla), sólo se necesitará en la parte final del álgebra o hasta iniciar la trigonometría.

*** Personal de apoyo en el aula.-** sólo en caso que sea necesario, el autor del proyecto se auxiliará de jóvenes que fueron sus alumnos y que dominan bien la metodología. Actualmente se encuentran estudiando educación superior y si realizan esta actividad de apoyo, podrá ser considerada como servicio social.

*** Horarios de clase.-** Se sugiere que sea de lunes a jueves, una hora y media por día y por grupo; o sea, seis horas a la semana por grupo. Aunque pudieran ser dos horas diarias de lunes a jueves por grupo, para un total de ocho horas a la semana.

4.- Antecedentes del proyecto

No se tienen antecedentes de que en algún país se este realizando algo igual; excepto en Costa Rica, donde empiezan a experimentar pero con principios algebraicos en un proyecto llamado "Álgebra Temprana". Probablemente en Cuba lo inicien próximamente.

De enero de 2002 se trabajó con un grupo de alumnos que cursaban segundo grado de secundaria; al terminar su instrucción secundaria en junio de 2003, habían aprendido hasta un 35 % del cálculo integral.

De manera aislada se ha trabajado con alumnos de sexto grado de primaria, habiéndose tenido gran éxito en el aprendizaje del álgebra. También de manera aislada se ha trabajado con alumnos con problemas de aprendizaje, obteniéndose resultados extraordinarios.

5.- Presentaciones en Foros Educativos

Congreso Mundial de Pedagogía y Alfabetización realizado en febrero de 2005 en la Habana Cuba. La ponencia fue ubicada entre las cinco mejores de las casi 1500 que se presentaron.

Encuentro Latinoamericano y del Caribe de Asociaciones Shalom para ex becarios de los cursos en Israel; evento realizado en octubre de 2005 en la República Dominicana.

Festival Internacional de Matemática, realizado en marzo de 2006 en Puntarenas, Costa Rica.

Congreso Nacional de Matemática, evento organizado por la Sociedad Matemática Mexicana y realizado en noviembre de 2005 en Acapulco, México. Como resultado de este evento, a solicitud de autoridades educativas del Edo. de México, el autor del presente asistió a impartir una capacitación a maestros de matemáticas de la citada entidad.

Congreso Nacional de Investigación Educativa, que organizará el Instituto Tecnológico de Cd. Madero, y la Universidad Valle de Bravo; evento que se realizó del 19 al 21 de octubre próximo (2006), en el Puerto de Tampico, Tam. México.

Congreso Internacional de la Enseñanza de la Matemática y la Computación; evento que se realizó en diciembre de 2006 en Cd. Matanzas Cuba. En las conclusiones finales del evento, se consideró al trabajo contenido en la ponencia como *"una revolución educativa"*.

6.- Resultados esperados.-

Sin tener grupos controlados se han obtenido excelentes resultados; por lo tanto se considera que, al tener control de los mismos, con alumnos que sean estimulados al saber que forman parte de un proyecto educativo oficial de gran trascendencia en sus vidas y en la educación en general, **su rendimiento será mayor.**

Padres de familia de alumnos beneficiados comentan que, cuando sus hijos formaban parte del grupo y después del mismo los observaban más maduros, seguros de si mismo y muy analíticos en la toma de decisiones, comparados con los demás jóvenes. **Hay que investigar si esa conducta es por cambios propios de la edad, o fue por consecuencia de la seguridad que da el tener ese conocimiento.** Del desarrollo de este proyecto, surgirán más proyectos de investigación educativa en otras áreas del conocimiento.

III.- METODOLOGIA DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Hace unos 8 años y de manera accidental, el autor empezó a experimentar con sus hijos que estudiaban secundaria. Desde esa época la metodología se ha ido depurando; al principio originaba en los alumnos leves dolores de cabeza, mareos y algunos estados de gran confusión, -la matemática no se aprende a la primera y para siempre-; actualmente eso ya casi no se presenta, y cuando sucede son muy leves.

La metodología e encuentra registrada con el nombre de MERYAD en el Instituto Nacional de Derechos de Autor de la Secretaría de Educación Pública en México.

Para aplicar la metodología se requieren tres cosas fundamentales: 1) que el maestro tenga un conocimiento más avanzado de lo que está enseñando, 2) creatividad en la práctica de la docencia y 3) amor a la docencia.

IV.- CONCLUSIONES

Realizar o no este proyecto depende de las autoridades educativas del Instituto Tecnológico de Cd. Victoria y/o el Gobierno del Estado de Tamaulipas.

En grupos con alumnos no controlados se han obtenido excelentes resultados. El no control del grupo se debe a excesivas tareas que les encargan en sus escuelas lo que origina no resolver problemas en sus casas; inasistencias y retardos de alumnos a la clase de matemáticas; esto último origina que en ocasiones se suspenda la clase, o varios días estar repitiendo lo mismo. Inevitablemente cada dos meses se suspende la clase durante una semana porque ellos están en sus exámenes bimestrales.

Estos pequeños aprenden matemática, sólo por el placer de aprender. **Con grupos controlados, el éxito debe ser mucho mayor.**

Los niños y jóvenes han demostrado tener una gran habilidad para el aprendizaje de los idiomas e interpretar la lógica de la computadora; también la tienen para el aprendizaje de la matemática. Sólo falta saber enseñárselas. Con lo que ya se tiene se puede mejorar mucho la educación.

Exito total si se realiza este proyecto

ÁLGEBRA
I.- Operaciones en las Expresiones Algebraicas
II.- Factorización y Operaciones con las Fracciones
III.- Funciones y Relaciones
IV.- Ecuaciones Lineales
V.- Exponentes y Radicales
VI.- Ecuaciones Cuadráticas
VII.- Sistemas que Envuelven Ecuaciones Cuadráticas
VIII.- Logaritmos
IX.- Despeje en Fórmulas

TRIGONOMETRÍA
I.- Angulos y Aplicaciones
II.- Funciones Trigonométricas de un Angulo Genérico
III.- Funciones Trigonométricas de un Angulo Agudo
IV.- Solución de Triángulos Rectángulos
V.- Aplicaciones Prácticas
VI.- Relaciones Básicas e Identidades
VII.- Funciones Trigonométricas de dos Angulos
VIII.- Triángulos Oblicuángulos
IX.- Area de un Triángulo
X.- Aplicación de la Trigonometría en la resolución de algunos problemas de ingeniería.

GEOMETRÍA ANALÍTICA
I.- Sistemas de Coordenadas
II.- Gráfica de una Ecuación y Lugares Geométricos
III.- La Línea Recta
IV.- Ecuación de la Circunferencia
V.- La Parábola
VI.- La Elipse
VII.- La Hipérbola
VIII.- Aplicación de la Trigonometría y la Geometría Analítica en la resolución de algunos problemas de ingeniería.

CALCULO DIFERENCIAL
I.- Variables, Funciones y Límites
II.- Derivación
III.- Regla Para Derivar Funciones Algebraicas
IV.- Aplicaciones de la Derivada
V.- Derivadas Sucesivas de una Función. Aplicaciones
VI.- Derivación de Funciones Trascendentes

CALCULO INTEGRAL
I.- Integración de Formas Elementales Ordinarias
II.- Constante de Integración
III.- Integral Definida
IV.- Aplicación del Cálculo en la Solución de Algunos Problemas de Ingeniería

BIBLIOGRAFIA

1.- AZCOAGA, Juan E.- Aprendizaje Fisiológico y Aprendizaje Pedagógico. Ed. Biblioteca, Colección Pedagógica No 6. Rosario, Argentina, 1974.

2.- DELVAL, Juan.- Crecer y Pensar: La Construcción del Conocimiento en la Escuela. Ed Laia. Barcelona, 1984.

3.- DIAZ BARRIGA Y HERNANDEZ ROJAS.- Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Ed McGraw Hill. México, 1997.

4.- EUSSE ZULUAGA, Ofelia.- Proceso de Construcción del Conocimiento y su Vinculación con la Formación Docente. CISE UNAM. Perfiles Educativos No. 63, 1994.

5.- FERMOSO ESTEBANEZ, Ponciano.- Teoría de la Educación. Ed. Trillas. Méx. 1981

6.- GLATTHORN, Allan.- Constructivismo: Principios Básicos. Instituto Mexicano de Investigaciones Educativas. Revista Educación 2001, N° 24. México, Mayo d 1997.

7.- PAIN, Sara.- Diagnóstico y Tratamiento de los Problemas del Aprendizaje. Ed Nueva Visión. Buenos Aires, 1983.

8.- SWENSON, Leland.- Teorías del Aprendizaje. Ed. Paidos. Buenos Aires, 1984.

Método novedoso para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo y tercer orden no homogéneas con coeficientes constantes

Ramírez Arce Greivin, gramirez@itcr.ac.cr

Setiembre, 2007

Resumen:
Este artículo parte de un nuevo método propuesto por Rivera (2006) para resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden no homogéneas con coeficientes constantes. Vamos a establecer las relaciones y diferencias de este método con el de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros.
Además, aplicaremos las ideas generales del método para deducir la solución general de la ecuación diferencial $y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$.

Palabras claves: ecuación diferencial, coeficientes indeterminados, variación de parámetros.

1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Rivera (2006) establece que la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$ *está dada por:*

$$y(x) = \underbrace{c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_1 x}\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}dx}_{y_{\text{hom}\,ogénea}} + \underbrace{e^{\lambda_1 x}\int\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int e^{-\lambda_2 x}b(x)\,dx\right]dx}_{y_{particular}}$$

donde λ_1 *y* λ_2 *son las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial homegénea.*

Partamos de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden que tienen la forma $y' + a(x)\,y = b(x)$ donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en un intervalo I. Multiplicamos por una función arbitraria $v(x)$ a ambos lados de la igualdad:

$$v(x)y' + v(x)a(x)\,y = v(x)b(x) \tag{1}$$

Para que el lado derecho de la igualdad anterior sea la derivada del producto $y \cdot v(x)$ necesitamos que $v'(x) = v(x)a(x)$. Pero esta es una ecuación diferencial cuya solución es $v(x) = e^{\int a(x)dx}$ y que llamamos factor integrante.

Volviendo a (1) tenemos:

$y' + a(x)\,y = b(x)$

$e^{\int a(x)dx}\cdot y' + e^{\int a(x)dx}\cdot a(x)\,y = e^{\int a(x)dx}\cdot b(x)$

$\left[y\cdot e^{\int a(x)dx}\right]' = e^{\int a(x)dx}\cdot b(x)$

$y\cdot e^{\int a(x)dx} = \int b(x)\cdot e^{\int a(x)dx}dx + c$

$y = e^{-\int a(x)dx}\int b(x)\cdot e^{\int a(x)dx}dx + ce^{-\int a(x)dx}$

Ejemplo
Resuelva la siguiente ecuación diferencial
$y' - 3x^2 y = x^2$

Se tiene $v(x) = e^{\int -3x^2 dx} = e^{-3\frac{x^3}{3}} = e^{x^3}$

Multiplicando a ambos lados de la igualdad por e^{x^3} se tiene:
$e^{x^3} y' - e^{x^3} 3x^2 y = x^2 e^{x^3}$

$$\left[y e^{x^3} \right]' = x^2 e^{x^3}$$
$$y e^{x^3} = \int x^2 e^{x^3} \, dx$$
$$y = e^{-x^3} \int x^2 e^{x^3} \, dx$$
$$y = e^{-x^3} \cdot \frac{e^{x^3}}{3} + c e^{-x^3}$$
$$y = \frac{1}{3} + c e^{-x^3}$$

En general, la solución de la ecuación diferencial
$$y' + a(x)\, y = b(x) \tag{2}$$
está dada por
$$y = \underbrace{c e^{-\int a(x) dx}}_{y_h(x)} + \underbrace{e^{-\int a(x) dx} \int b(x) \cdot e^{\int a(x) dx} dx}_{y_p(x)}$$

Donde $y_h(x) = c e^{-\int a(x) dx}$ es la solución de la ecuación homogénea asociada de (2) (esto es $b(x) = 0$)

Y $y_p(x) = e^{-\int a(x) dx} \int b(x) \cdot e^{\int a(x) dx} dx$ es una solución particular de la ecuación (2).

Para determinar la solución particular $y_p(x)$ anterior se puede utilizar el método de coeficientes indeterminados siempre que $b(x)$ sea un polinomio, una función exponencial, la función seno, la función coseno o combinación de ellas.

Así por ejemplo, en la ecuación diferencial $y' + 2y = x$, utilizando el método de coeficientes indeterminados, será fácil hallar la solución particular de la forma $y_p(x) = \alpha x + \beta$, y esta es $y_p(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

En la ecuación diferencial $y' + 2y = e^x$, la solución particular tendrá forma $y_p(x) = \alpha e^x$, y esta es $y_p(x) = \frac{1}{3} e^x$

En la ecuación diferencial $y' + 2y = \cos\ x$, la solución particular tendrá forma $y_p(x) = \alpha \cos\ x + \beta\ sen\ x$, y esta es $y_p(x) = \frac{2}{5} \cos\ x + \frac{1}{5}\ sen\ x$

En la ecuación diferencial $y' + 2y = xe^x$, la solución particular tendrá forma $y_p(x) = \alpha x e^x + \beta e^x$, y esta es $y_p(x) = \frac{1}{3} x e^x - \frac{1}{9} e^x$

¿Pero que pasa si $b(x)$ no es una función como las anteriores?
No se puede aplicar el método de coeficientes indeterminados.

Encontrar la solución de la ecuación diferencial homogénea asociada de (2) no parece tan complicado; hasta nos hemos olvidado un poco de ello, la dificultad está en encontrar una solución particular. Este problema de encontrar una solución particular también se traslada a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden como veremos a continuación.

2 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden

Considerérese la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constante no homogénea de la forma

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x) \tag{3}$$

con a_0 y a_1 constantes reales y $b(x)$ una función continua en un intervalo I.

Se parte de la ecuación diferencial homogénea

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{4}$$

con a_1 y a_0 constantes reales.

Para resolver esta ecuación Rivera (2006) sugiere descomponer a_1 como $a_1 = \alpha + \beta$

Así, $y'' + (\alpha + \beta)\, y' + a_0 y = 0$

$(y'' + \alpha y') + (\beta y' + a_0 y) = 0$

Para el primer paréntesis el factor integrante es $\mu = e^{\int \alpha \ dx} = e^{\alpha x}$.

Multiplicando la igualdad anterior por el factor integrante se tiene:

$e^{\alpha x} y'' + e^{\alpha x} \alpha y' + e^{\alpha x} (\beta y' + a_0 y) = 0$

$(e^{\alpha x} y')' + e^{\alpha x} \beta y' + e^{\alpha x} a_0 y = 0$

Se quiere que el segundo sumando y el tercer sumando sean el resultado de la derivada de un producto. Lo será si:

$(e^{\alpha x} \beta)' = e^{\alpha x} a_0$

$\Rightarrow \alpha\beta e^{\alpha x} = e^{\alpha x} a_0$

$\Rightarrow \alpha\beta = a_0$

Así, se toman α y β tales que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a_1 \\ \alpha \cdot \beta = a_0 \end{cases}$$

Al resolver el sistema las soluciones son:

$$\beta = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$$

$$\alpha = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \tag{5}$$

Así, α y β son únicos.

Resolver esto es similar que resolver $\lambda^2 - a_1\lambda + a_0 = 0$, pues ambas son ecuaciones características asociadas a (3). La solución de $\lambda^2 - a_1\lambda + a_0 = 0$ es $\{\alpha, \beta\}$ o equivalentemente la solución de $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ es $\{-\alpha, -\beta\}$.

Así, para resolver $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, resuelvo $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$, que es la ecuación característica de la ecuación diferencial (3).

Con esto la ecuación diferencial (4) se transforma en

$(e^{\alpha x} y')' + (\beta e^{\alpha x} y)' = 0$

$(e^{\alpha x} y' + \beta e^{\alpha x} y)' = 0$, integrando se tiene

$e^{\alpha x} y' + \beta e^{\alpha x} y = c_2$

$y' + \beta y = c_2 e^{-\alpha x}$, y esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Por lo tanto

$$y(x) = c_1 e^{-\beta x} + c_2 e^{-\beta x} \int e^{(\beta - \alpha)x} dx$$

Si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica, entonces la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx$

Si λ_1 y λ_2 son números reales, en $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx$ se dan dos casos:

i. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

ii. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ entonces

$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

Si λ_1 y λ_2 son números complejos conjugados $\lambda_1 = \alpha + \beta i,\ \lambda_2 = \alpha - \beta i$, entonces $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx$

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(-2\beta i x)} dx$, haciendo la sustitución $u = -2\beta i x$

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + \dfrac{c_2}{-2\beta i} e^{\lambda_1 x} \int e^u du$

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_3 e^{(\alpha+\beta i)x} \left(e^{(-2\beta i x)} + c \right)$

$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_3 e^{(\alpha+\beta i)x} \left(e^{(-2\beta i x)} + c \right)$

$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_3 e^{(\alpha+\beta i)x} \left(e^{(-2\beta i x)} + c \right)$

$y = c_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + c_3 e^{(\alpha-\beta i)x} + c_4 e^{(\alpha+\beta i)x}$

$y = c_5 e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i sen(\beta x)) + c_3 e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i sen(\beta x))$

$y = A e^{\alpha x} \cos(\beta x) + B e^{\alpha x} sen(\beta x)$

Para hallar la solución particular se toma la ecuación diferencial lineal de orden dos no homogénea con coeficientes constantes.

Sea $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ con a_1 y a_0 constantes reales
Rivera (2006) sugiere hacer $\alpha + \beta = a_1$ obteniendo:

$y'' + (\alpha + \beta) y' + a_0 y = b(x)$

$y'' + \alpha y' + \beta y' + a_0 y = b(x)$ Multiplicando por el factor integrante $u = e^{\alpha x}$ se tiene

$e^{\alpha x} y'' + e^{\alpha x} \alpha y' + e^{\alpha x} \beta y' + e^{\alpha x} a_0 y = e^{\alpha x} b(x)$

$(y' e^{\alpha x})' + e^{\alpha x} \beta y' + e^{\alpha x} a_0 y = e^{\alpha x} b(x)$ (6)

Si $\alpha \cdot \beta = a_0$, esto implica que $(e^{\alpha x} \beta)' = \alpha \beta e^{\alpha x} = a_0 e^{\alpha x}$

De (6) se tiene $(y' e^{\alpha x})' + (e^{\alpha x} \beta y)' = e^{\alpha x} b(x)$ siempre que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a_1 \\ \alpha \cdot \beta = a_0 \end{cases}$$

$(y' e^{\alpha x} + e^{\alpha x} \beta y)' = e^{\alpha x} b(x)$

$y' e^{\alpha x} + e^{\alpha x} \beta y = \int e^{\alpha x} b(x)\ dx\ + c_2$

$y' + \beta y = c_2 e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} b(x)\ dx$ Multiplicando por el factor integrante $e^{\int \beta\ dx} = e^{\beta x}$

$$e^{\beta x}\ y' + e^{\beta x}\ \beta y = c_2 e^{(\beta-\alpha)x} + e^{(\beta-\alpha)x} \int e^{\alpha x} b(x)\ dx$$

$$\left(e^{\beta x}\ y\right)' = c_2 e^{(\beta-\alpha)x} + e^{(\beta-\alpha)x} \int e^{\alpha x} b(x)\ dx$$

$$e^{\beta x}\ y = \int \left[c_2 e^{(\beta-\alpha)x} + e^{(\beta-\alpha)x} \int e^{\alpha x} b(x)\ dx \right] dx + c_1$$

$$y = e^{-\beta x}\ c_1 + c_2 e^{-\beta x} \int e^{(\beta-\alpha)x} dx + e^{-\beta x} \int \left[e^{(\beta-\alpha)x} \int e^{\alpha x} b(x)\ dx \right] dx$$

Así, $y = \underbrace{c_1 e^{-\beta x} + c_2 e^{-\beta x} \int e^{(\beta-\alpha)x} dx}_{y_h} + \underbrace{e^{-\beta x} \int \left[e^{(\beta-\alpha)x} \int e^{\alpha x} b(x)\ dx \right] dx}_{y_p}$

Al resolver la ecuación característica de la ecuación diferencial homegénea se tenía

$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$
$\lambda_1 = -\beta$ y $\lambda_2 = -\alpha$

Por lo tanto, $y = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx}_{y_h} + \underbrace{e^{\lambda_1 x} \int \left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \int e^{-\lambda_2 x} b(x)\ dx \right] dx}_{y_p}$

Por ejemplo, al resolver la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = e^{3x},$ de su ecuación característica se tiene que:

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
$\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y = \underbrace{e^{2x}\ c_1 + c_2 e^{2x} \int e^{(-1-2)x} dx}_{y_h} + \underbrace{e^{2x} \int \left[e^{(-1-2)x} \int e^{x} b(x)\ dx \right] dx}_{y_p}$$

$$y = \underbrace{e^{2x}\ c_1 + c_2 e^{2x} \int e^{-3x} dx}_{y_h} + \underbrace{e^{2x} \int \left[e^{-3x} \int e^{x} e^{3x}\ dx \right] dx}_{y_p}$$

$$y = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}_{y_h} + \underbrace{e^{2x} \int \left[e^{-3x} \int e^{4x}\ dx \right] dx}_{y_p}$$

$$y = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{e^{2x}}{4} \int e^{x} dx}_{y_p} = y = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{e^{3x}}{4}}_{y_p}$$

¿Pero que pasaría si la ecuación diferencial a resolver es $y'' + y = \tan\ x$?

Las soluciones de la ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$ son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$. Entonces la solución de la ecuación diferencial será:

$$y = \underbrace{e^{ix}\ c_1 + c_2 e^{ix} \int e^{(-i-i)x} dx}_{y_h} + \underbrace{e^{ix} \int \left[e^{(-i-i)x} \int e^{ix} \tan x\ dx \right] dx}_{y_p}$$

Podemos calcular las integrales anteriores de manera que i sea una constante, o bien usar la identidad: $e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\ sen\beta)$

$$y = \underbrace{e^{ix}\ c_1 + c_2 e^{ix}\int e^{-2ix}dx}_{y_h} + \underbrace{e^{ix}\ \int\left[e^{-2ix}\int e^{ix}\tan x\ dx\right]dx}_{y_p}$$

$$y = \underbrace{A\cos x + B\ sen\ x}_{y_h} + \underbrace{e^{ix}\ \int\left[e^{-2ix}\int e^{ix}\tan x\ dx\right]dx}_{y_p} \tag{7}$$

La integral $\int e^{ix}\tan x\ dx$ puede calcularse utilizando $e^{ix} = \cos x + i\ senx$. Así:

$$\int e^{ix}\tan x\ dx = \int(\cos x + i\ senx)\tan x\ dx$$

$$= \int\left(sen\ x + i\ \frac{sen^2 x}{\cos x}\right)\ dx = -\cos x + i\int\frac{sen^2 x}{\cos x}dx \tag{8}$$

Pero $\int\frac{sen^2 x}{\cos x}dx = \int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx = \int\frac{1}{\cos x}dx - \int\cos x dx$
$= \ln(\sec x + \tan x) - sen\ x + c$

Volviendo a (8) tenemos

$$\int e^{ix}\tan x\ dx = -\cos x + i\ln(\sec x + \tan x) - isen\ x + C.$$

Volviendo a (7) las integrales se han complicado aún más, pues debíamos resolver
$\int\left[e^{-2ix}\int e^{ix}\tan x\ dx\right]dx = \int\left[e^{-2ix}\left(-\cos x + i\ln(\sec x + \tan x) - isen\ x + C\right)\right]dx.$

Entonces, ¿qué tiene de bueno esta fórmula para calcular la solución de cualquier ecuación diferencial lineal de orden dos no homogénea, cuando la complicación de las integrales no facilita las cosas?

Se responde a esta pregunta analizando los casos que se pueden presentar, dependiendo de λ_1 y λ_2, para la solución de la ecuación diferencial $y'' + a_1y' + a_0y = b(x)$ con a_1 y a_0 constantes reales, que es en general:

$$y(x) = \underbrace{e^{\lambda_1 x}\ c_1 + c_2 e^{\lambda_1 x}\int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}dx}_{y_h} + \underbrace{e^{\lambda_1 x}\ \int\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int e^{-\lambda_2 x}b(x)\ dx\right]dx}_{y_p} \tag{9}$$

a. Si λ_1 y λ_2 son números reales diferentes entonces, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea son:

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ y $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$

$$y = e^{\lambda_1 x}\ c_1 + c_2 e^{\lambda_2 x}\ + e^{\lambda_1 x}\ \int\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int e^{-\lambda_2 x}b(x)\ dx\right]dx$$

Para $\int\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}\int e^{-\lambda_2 x}b(x)\ dx\right]dx = I$. Sea

$u = \int e^{-\lambda_2 x}b(x)\ dx$ $\qquad$ $dv = e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}dx$

$du = e^{-\lambda_2 x}b(x)$ $\qquad$ $v = \dfrac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2-\lambda_1}$

$$I = \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2-\lambda_1}\int e^{-\lambda_2 x}b(x)\ dx - \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int e^{-\lambda_2 x}e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}b(x)\ dx$$

$$= \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2-\lambda_1}\int e^{-\lambda_2 x}b(x)\ dx - \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int e^{-\lambda_1 x}b(x)\ dx \quad \text{Volviendo a (9)}$$

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}\ c_1 + c_2 e^{\lambda_2 x}\ + e^{\lambda_1 x}\ \left(\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2-\lambda_1}\int e^{-\lambda_2 x}b(x)\ dx - \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\int e^{-\lambda_1 x}b(x)\ dx\ \right)$$

$$y(x) = e^{\lambda_1 x}\ c_1 + c_2 e^{\lambda_2 x}\ + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}\int e^{-\lambda_2 x} b(x)\ dx - \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}\int e^{-\lambda_1 x} b(x)\ dx$$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \frac{y_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}\int \frac{b(x)}{y_2(x)}\ dx - \frac{y_1(x)}{\lambda_2 - \lambda_1}\int \frac{b(x)}{y_1(x)}\ dx \tag{10}$$

b. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ son números reales iguales entonces, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea son:

$y_1(x) = e^{\lambda x}$ y $y_2(x) = xe^{\lambda x}$

$$y = c_1 e^{\lambda x}\ + c_2 x e^{\lambda x}\ + e^{\lambda x}\ \int\int e^{-\lambda x} b(x)\ dxdx$$

Para $I = \int \left(\int e^{-\lambda x} b(x)\ dx\right) dx$. Sea

$u = \int e^{-\lambda x} b(x)\ dx$ $\qquad$ $dv = dx$

$du = e^{-\lambda x} b(x)$ $\qquad$ $v = x$

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_2(x)\int \frac{b(x)}{y_1(x)}\ dx - y_1(x)\int \frac{xb(x)}{y_1(x)}\ dx$$

c. Si λ_1 y λ_2 son números complejos conjugados entonces, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea son:

$y_1(x) = A\ \cos\ x$ y $y_2(x) = B\ sen\ x$

En forma similar al trabajo desarrollado en la parte a. se tiene con $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ que:

$$y(x) = \underbrace{A\cos x + B\ sen\ x}_{y_h} + \underbrace{e^{(\alpha+\beta i)x}\ \int\left[e^{(\alpha-\beta i-(\alpha+\beta i))x}\int e^{-(\alpha-\beta i)x} b(x)\ dx\right]dx}_{y_p}$$

$$y(x) = \underbrace{A\cos x + B\ sen\ x}_{y_h} + \underbrace{e^{(\alpha+\beta i)x}\ \int\left[e^{-2\beta i x}\int e^{-\alpha+\beta i x} b(x)\ dx\right]dx}_{y_p}$$

Para $\int\left[e^{-2\beta i x}\int e^{-\alpha+\beta i x} b(x)\ dx\right]dx = I$. Sea

$u = \int e^{-\alpha+\beta i x} b(x)\ dx$ $\qquad$ $dv = e^{-2\beta i x}$

$du = e^{-\alpha+\beta i x} b(x)$ $\qquad$ $v = \dfrac{e^{-2\beta i x}}{-2\beta i}\cdot\dfrac{i}{i} = \dfrac{ie^{-2\beta i x}}{2\beta}$

$$I = \frac{ie^{-2\beta i x}}{2\beta}\int e^{-\alpha+\beta i x} b(x)\ dx - \int \frac{ie^{-2\beta i x}}{2\beta} e^{-\alpha+\beta i x} b(x)\ \ dx$$

$$I = \frac{ie^{-2\beta i x}}{2\beta}\int e^{-\alpha+\beta i x} b(x)\ dx - \frac{i}{2\beta}\int e^{-\alpha-+\beta i x} b(x)\ \ dx$$

La complejidad de las integrales anteriores será la misma que se obtiene si resolvemos la ecuación diferencial original mediante el método de variación de parámetros. Se pueden resolver dependiendo de la función $b(x)$ tomando a i como una constante cualquiera, o bien, usando el hecho de que
$e^{\alpha+\beta i} = e^{\alpha}\left(\cos\beta + i\ sen\beta\right)$.

El siguiente ejemplo muestra la relación de complejidad de las integrales si se calcula por ambos métodos.
Ejemplo
Resolver la ecuación $y'' + y = \cot x$ (11)
Las soluciones de la ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$ son:

$\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i$

La ecuación diferencial homogénea tiene soluciones: $y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = sen\ x$

La solución de la ecuación diferencial (11) es:
$y(x) = c_1 \cos x + c_2\ sen\ x + e^{ix} \int \left[e^{-2ix} \int e^{ix} \cot x\ dx\right] dx$

Sea $u = \int e^{ix} \cot x\ dx \qquad dv = e^{-2ix} dx$

$du = e^{ix} \cot x \qquad v = \dfrac{e^{-2ix}}{-2i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{2} e^{-2ix}$

Así, $e^{ix} \int \left[e^{-2ix} \int e^{ix} \cot x\ dx\right] dx = e^{ix} \left(\dfrac{i}{2} e^{-2ix} \int e^{ix} \cot x\ dx\ - \int \dfrac{i}{2} e^{-ix} \cot x dx\right)$

$= \dfrac{i}{2} e^{-ix} \int e^{ix} \cot x\ dx\ - \dfrac{e^{ix}}{2} \int e^{-ix} \cot x dx$

$= \dfrac{i}{2} e^{-ix} \int (\cos x + i\ sen\ x) \cot x\ dx\ - \dfrac{e^{ix}}{2} \int (\cos x - i\ sen\ x) \cot x dx$

$= \dfrac{i}{2} (\cos x - i\ sen\ x) \int (\cos x + i\ sen\ x) \cot x\ dx\ - \dfrac{\cos x + i\ sen\ x}{2} \int (\cos x - i\ sen\ x) \cot x dx$

Simplificando la expresión anterior se obtiene:
$\cos x \int \cos x dx - sen\ x \int \frac{\cos^2 x}{sen\ x} dx$, que no es más que lo que se obtiene con variación de parámetros.

Así, $y_{p(x)} = \cos x \int \cos x dx - sen\ x \int \frac{\cos^2 x}{sen\ x} dx = sen\ x\ \ln(\csc x - \cot x)$ (12)
Por lo tanto, $y(x) = c_1 \cos x + c_2\ sen\ x + sen\ x\ \ln(\csc x - \cot x)$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior mediante el método de variación de parámetros se tiene que las soluciones de la ecuación diferencial homogénea son:

$y_1(x) = \cos x$ y $y_2(x) = sen\ x$

La solución de la ecuación homogénea es: $y_h(x) = A \cos x + B\ sen\ x$.

Variando parámetros conseguimos una solución particular

$y_p(x) = A(x) \cos x + B(x)\ sen\ x$

Se debe resolver el sistema $\begin{cases} A'(x)\ y_1(x) + B\ '(x)\ y_2(x) = 0 \\ A'(x)\ y_1'(x) + B\ '(x)\ y_2'(x) = \cot x \end{cases}$

$\begin{vmatrix} \cos x & sen\ x \\ -sen\ x & \cos\ x \end{vmatrix} = \cos^2 x + sen^2 x = 1$

Mediante la regla de crámer
$A'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & sen\ x \\ \cot\ x & \cos\ x \end{vmatrix}}{1} = \cos x \qquad$ Así, $A(x) = \int \cos x dx = -sen\ x + c$

$B'(x) = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -sen\ x & \cot\ x \end{vmatrix}}{1} = \frac{\cos^2 x}{senx}$

Así, $B(x) = \int \frac{\cos^2 x}{senx} dx = \ln(\csc x - \cot x) + \cos x + c$

Se puede notar, que las dos integrales anteriores son las mismas que se tuvieron que resolver en (12)

Así, $y(x) = A\cos x + B\ sen\ x + A(x)\cos x + B(x)\ sen\ x$

$= A\cos x + B\ sen\ x + -sen\ x\cos x + sen\ x\,(\ln(\csc x - \cot x) + \cos x)$

Por lo tanto, $y(x) = A\cos x + B\ sen\ x + sen\ x\ln(\csc x - \cot x)$

Con la solución del caso particular anterior, se puede empezar a intuir la relación que existe entre el método que se ha desarrollado con el método de variación de parámetros. A continuación se trabajará en esa relación.

Relación entre el método de Rivera y el método de variación de parámetros

Veremos que con el método que sugiere Rivera se obtienen las mismas integrales que con el método de variación de parámetros, a diferencia de que no se le dice al estudiante, en ningún momento, que debe variar parámetros para encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal de segundo orden no homogénea.

Variación de parámetros

Sea la ecuación diferencial $y'' + a_1 y' + a_0 y = b\,(x)$ (13)

Sean y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea

$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (14)

Es decir, $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ siendo c_1 y c_2 constantes arbitrarias en la solución de (13).

Mediante variación de parámetros y usando notación funcional obtenemos que la solución de la ecuación diferencial (13) es:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \left(\int \frac{y_1 b(x)}{W[y_1,y_2]}\ dx\right) y_2 - \left(\int \frac{y_2 b(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}\ dx\right) y_1 \quad (15)$$

Obtengamos la relación que existe entre la solución anterior con respecto al nuevo método propuesto. Tomemos del punto 2a. $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ y $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. Calculando el wroskiano para estas dos soluciones tenemos:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2\ e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2\ e^{\lambda_2 x}\ e^{\lambda_1 x}\ - \lambda_1 e^{\lambda_1 x}\ e^{\lambda_2 x}\ =\ e^{(\lambda_2+\lambda_1)x}\ (\lambda_2 - \lambda_1)\,.$$

Sustityendo en (15)

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \left(\int \frac{e^{\lambda_1 x}\ b(x)}{e^{(\lambda_2+\lambda_1)x}\ (\lambda_2-\lambda_1)}\ dx\right) e^{\lambda_2 x}\ - \left(\int \frac{e^{\lambda_2 x}\ b(x)}{e^{(\lambda_2+\lambda_1)x}\ (\lambda_2-\lambda_1)}\ dx\right) e^{\lambda_1 x}$

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2-\lambda_1} \int \frac{b(x)}{e^{\lambda_2 x}}\ dx - \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2-\lambda_1} \int \frac{b(x)}{e^{\lambda_1 x}}\ dx$

$= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \frac{y_2(x)}{\lambda_2-\lambda_1} \int \frac{b(x)}{y_2(x)}\ dx - \frac{y_1(x)}{\lambda_2-\lambda_1} \int \frac{b(x)}{y_1(x)}\ dx$

Que es lo mismo que tenemos en (10)

3 Ecuaciones diferenciales lineales de tercer orden

Considerérese la ecuación diferencial de tercer orden con coeficientes constante no homogénea de la forma

$$y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x) \tag{16}$$

con $a_0,\ a_1$ y a_2 constantes reales y $b(x)$ una función continua en un intervalo I.

Llegaremos a que la solución general de la ecuación diferencial anterior está dada por:

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx}_{y_{\text{hom ogénea}}} + \underbrace{e^{\lambda_1 x} \int \left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \int e^{-\lambda_2 x} \left(c_3 e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} b(x)\ dx \right)\ dx \right] dx}_{y_{particular}}$$

Se parte de la ecuación diferencial homogénea de (16)

Sea $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (17)

con $a_0,\ a_1$ y a_2 constantes reales

Descomponemos a_2 como $a_2 = \alpha + \beta$ y a_1 como $a_1 = \delta + \theta$

Así, $y''' + (\alpha + \beta)\, y'' + (\delta + \theta)\, y' + a_0 y = 0$

$y''' + \alpha y'' + \beta y'' + \delta y' + \theta y' + a_0 y = 0$

Multiplicando la igualdad anterior por el factor integrante $e^{\alpha x}$ se tiene:

$$(y''' + \alpha y'')\, e^{\alpha x} + (\beta y'' + \delta y')\, e^{\alpha x} + (\theta y' + a_0 y)\, e^{\alpha x} = 0$$

$$(y'' e^{\alpha x})' + (\beta y'' e^{\alpha x} + \delta y' e^{\alpha x}) + (\theta y' e^{\alpha x} + a_0 y e^{\alpha x}) = 0 \tag{18}$$

Se quiere que la suma del segundo paréntesis y la suma tercer paréntesis sean el resultado de la derivada de un producto. Lo será si por un lado:

$(\beta e^{\alpha x})' = \beta\alpha e^{\alpha x} = \delta e^{\alpha x}$

$\Rightarrow \alpha\beta = \delta$

Y por otro lado

$(\theta e^{\alpha x})' = \theta\alpha e^{\alpha x} = a_0 e^{\alpha x}$

$\theta\alpha = a_0$

Así, se toman $\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \theta$ tales que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a_2 \\ \delta + \theta = a_1 \\ \alpha\beta - \delta = 0 \\ \theta\alpha = a_0 \end{cases}$$

Para que la ecuación (18) quede como:

$(y'' e^{\alpha x})' + (\beta e^{\alpha x} y')' + (\theta e^{\alpha x} y)' = 0$

$(y'' e^{\alpha x} + \beta e^{\alpha x} y' + \theta e^{\alpha x} y)' = 0$, integrando se tiene

$y'' + \beta y' + \theta y = c_3 e^{-\alpha x}$ y esta es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden

Por lo tanto si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea anterior se tiene:

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx}_{y_{\text{hom ogénea}}} + \underbrace{e^{\lambda_1 x} \int \left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \int c_3 e^{-\lambda_2 x} e^{-\alpha x}\ dx \right] dx}_{y_{particular}}$$

Ejemplo

Resolver la ecuación diferencial $y''' + y'' - 10y' + 8y = 0$

Haciendo $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \delta + \theta = -10 \\ \alpha\beta - \delta = 0 \\ \theta\alpha = 8 \end{cases}$ obtenemos $\alpha = -1,\ \beta = 2,\ \delta = -2$ y $\theta = -8$

La ecuación diferencial queda como

$y'' + \beta y' + \theta y = c_3 e^{-\alpha x}$

$y'' + 2y' - 8y = c_3 e^{x}$

Cuyas soluciones de la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$ son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -4$

Así la solución de la ecuación diferencial es

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{2x} \int e^{(-4-2)x} dx}_{y_{\text{homogénea}}} + \underbrace{e^{2x} \int \left[e^{-6x} \int c_3 e^{4x} e^{x}\ dx \right] dx}_{y_{particular}}$$

$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-4x} + c_3 e^{x}$

Para hallar la solución particular se toma la ecuación diferencial lineal de orden tres no homogénea con coeficientes constantes.

Sea $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$ (19)

con $a_0,\ a_1$ y a_2 constantes reales

Descomponemos a_2 como $a_2 = \alpha + \beta$ y a_1 como $a_1 = \delta + \theta$

Así, $y''' + (\alpha + \beta) y'' + (\delta + \theta) y' + a_0 y = b(x)$

$y''' + \alpha y'' + \beta y'' + \delta y' + \theta y' + a_0 y = b(x)$

Multiplicando la igualdad anterior por el factor integrante $e^{\alpha x}$ se tiene:

$(y''' + \alpha y'') e^{\alpha x} + (\beta y'' + \delta y') e^{\alpha x} + (\theta y' + a_0 y) e^{\alpha x} = e^{\alpha x} b(x)$

$(y'' e^{\alpha x})' + (\beta y'' e^{\alpha x} + \delta y' e^{\alpha x}) + (\theta y' e^{\alpha x} + a_0 y e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} b(x)$ (20)

Se quiere que la suma del segundo paréntesis y la suma tercer paréntesis sean el resultado de la derivada de un producto. Lo será si por un lado:

$(\beta e^{\alpha x})' = \beta\alpha e^{\alpha x} = \delta e^{\alpha x}$

$\Rightarrow \alpha\beta = \delta$

Y por otro lado

$(\theta e^{\alpha x})' = \theta\alpha e^{\alpha x} = a_0 e^{\alpha x}$

$\theta\alpha = a_0$

Así, se toman $\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \theta$ tales que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a_2 \\ \delta + \theta = a_1 \\ \alpha\beta - \delta = 0 \\ \theta\alpha = a_0 \end{cases}$$

Para que la ecuación (20) quede como:

$(y'' e^{\alpha x})' + (\beta e^{\alpha x} y')' + (\theta e^{\alpha x} y)' = e^{\alpha x} b(x)$

$(y'' e^{\alpha x} + \beta e^{\alpha x} y' + \theta e^{\alpha x} y)' = e^{\alpha x} b(x)$, integrando se tiene

$y'' + \beta y' + \theta y = c_3 e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} b(x)\ dx$

y esta es una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden.

Por lo tanto si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea anterior se tiene:

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx}_{y_{\text{homogénea}}} + \underbrace{e^{\lambda_1 x} \int \left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \int e^{-\lambda_2 x} \left(c_3 e^{-\alpha x} + e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} b(x)\, dx \right) dx \right] dx}_{y_{particular}}$$

4 Conclusiones

(a) La solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' + a(x)\, y = b(x)$ está dada por

$$y = \underbrace{c e^{-\int a(x) dx}}_{y_h} + \underbrace{e^{-\int a(x) dx} \int b(x) \cdot e^{\int a(x) dx} dx}_{y_p}$$

(b) Si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial homogénea de orden dos con coeficientes constantes $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$, entonces la solución general de esta ecuación diferencial homogénea es:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx$$

Si λ_1 y λ_2 son números reales, en $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx$ se dan dos casos:

i. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

ii. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ entonces

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

Si λ_1 y λ_2 son números complejos conjugados $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, entonces $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx$ queda como:

$$y = c_1 (\cos(\beta x) + i sen(\beta x)) e^{\alpha x} + c_2 e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i sen(\beta x))$$

$$y = A e^{\alpha x} \cos(\beta x) + B e^{\alpha x} sen(\beta x)$$

(c) Si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial de orden dos homogénea con coeficientes constantes $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$, entonces la solución general de esta ecuación diferencial homogénea es:

$$y = \underbrace{e^{\lambda_1 x} c_1 + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} dx}_{y_h} + \underbrace{e^{\lambda_1 x} \int \left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} \int e^{-\lambda_2 x} b(x)\, dx \right] dx}_{y_p}$$

i. Si λ_1 y λ_2 son números reales diferentes entonces, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea son:

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ y $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$, y la solución de la ecuación diferencial original será:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \frac{y_2(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int \frac{b(x)}{y_2(x)}\, dx - \frac{y_1(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} \int \frac{b(x)}{y_1(x)}\, dx$$

ii. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ son números reales iguales entonces, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea son:

$y_1(x) = e^{\lambda x}$ y $y_2(x) = xe^{\lambda x}$, y la solución de la ecuación diferencial original será:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_2(x) \int \frac{b(x)}{y_1(x)}\, dx - y_1(x) \int \frac{xb(x)}{y_1(x)}\, dx$$

iii. Si λ_1 y λ_2 son números complejos conjugados entonces, las soluciones de la ecuación diferencial homogénea son:

$y_1(x) = A\ \cos\ x$ y $y_2(x) = B\ sen\ x$, y la solución de la ecuación diferencial original será:

$$y(x) = \underbrace{A\cos x + B\ sen\ x}_{y_h} + e^{(\alpha+\beta i)x} \underbrace{\left(\frac{ie^{-2\beta i x}}{2\beta} \int e^{-\alpha+\beta i x} b(x)\, dx - \frac{i}{2\beta} \int e^{-\alpha-+\beta i x} b(x)\ \ dx \right)}_{y_p}$$

(d) Si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial de orden dos homogénea con coeficientes constantes $y'' + \beta y' + \theta y = c_3 e^{-\alpha x}$ que resulta de hacer

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a_2 \\ \delta + \theta = a_1 \\ \alpha\beta - \delta = 0 \\ \theta\alpha = a_0 \end{cases}$$

en la ecuación diferencial $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$ entonces su solución es:

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 x}\ + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx}_{y_{\text{hom}ogénea}} + \underbrace{e^{\lambda_1 x} \int \left[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \int c_3 e^{-\lambda_2 x} e^{-\alpha x}\, dx \right] dx}_{y_{particular}}$$

(e) Si λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica de la ecuación diferencial de orden dos homogénea con coeficientes constantes $y'' + \beta y' + \theta y = c_3 e^{-\alpha x}\ + e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} b(x)\, dx$ que resulta de hacer

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a_2 \\ \delta + \theta = a_1 \\ \alpha\beta - \delta = 0 \\ \theta\alpha = a_0 \end{cases}$$

en la ecuación diferencial $y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x),$ entonces su solución es:

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{\lambda_1 x}\ + c_2 e^{\lambda_1 x} \int e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx}_{y_{\text{hom}ogénea}} + \underbrace{e^{\lambda_1 x} \int \left[e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \int e^{-\lambda_2 x} \left(c_3 e^{-\alpha x}\ + e^{-\alpha x} \int e^{\alpha x} b(x)\, dx \right)\ dx \right] dx}_{y_{particular}}$$

(f) El método desarrollado por Rivera tiene inmerso los métodos de coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros, sin embargo, la virtud del nuevo método es que ya no debe depender de:

i. ciertas funciones $b(x)$ para poder usar coeficientes indeterminados
ii. la conveniencia de variar los parámetros en la solución de la ecuación diferencial homogénea,
para conseguir las soluciones particulares de una ecuación diferencial lineal de orden dos no homogénea con coeficientes constantes.

Además, queda por analizar para las ecuaciones diferenciales lineales de tercer orden los posibles casos que pueden ocurrir dependiendo de λ_1 y λ_2. Será también un reto para el lector determinar la generalización del método de Rivera.

Bibliografía

- Ayres, F. (1992). *Ecuaciones diferenciales.* McGraw-Hill. España.
- Boyce, W. & DiPrima, R. (2004). *Elementary differential equations and boundary value problems.* 8^a Edición. Limusa Wiley. México.
- Edwards, C. (1979). *The historical development of the Calculus.* Springer-Verlag. New York.
- Rasmussen, C. & Whitehead, K. (2004). Undergraduate students's mental operations in systemas of differential equations. In Pateman N.A.; Dougherty. B.J. & Zilliox J (Eds).Proceedings of the Psychology of Mathematics Education (PME). Honolulu, USA.
- Rivera, A. (2006, mayo). Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes. En CINVESTAV. Ecuaciones diferenciales y Álgebra Lineal. Curso impartido en el I semestre de la maestría en Matemática Educativa, México D.F.
- Simmons, G. (1993). *Ecuaciones diferenciales* . Mc Graw Hill Interamericana.
- Spiegel, M. (1992). *Ecuaciones diferenciales aplicadas.* Pearson. México.
- Zill, D. & Cullen, M. (2006). *Ecuaciones diferenciales con problemas de valores en la frontera.* 6^a Edición. Thomson. México.

Agradezco a Geonanny Figueroa y a Silvia Calderón (profesores del Instituto Tecnológico de Costa Rica) por las observaciones hechas antes de la publicación de este trabajo. Además, agradezco a Antonio Rivera (Investigador del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México) por motivarme a profundizar en esta temática.

Nuevas Tecnologías en los Cursos Álgebra Básica y Cálculo Diferencial de la Carrera Enseñanza de la Matemática de la UNED

Eugenio Rojas Mora[1]
Ronald Sequeira Salazar[2]

I. Objetivo.

Valorar aspectos positivos y negativos de la incorporación de la plataforma Moodle en los curso de Álgebra Básica y Cálculo Diferencial del programa Enseñanza de las Matemáticas de la UNED.

II. Antecedentes.

a. Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC`s) en la educación a distancia.

La educación a distancia tiene sus orígenes, precisamente, en la invención de la imprenta pues proporcionó a mucha gente la posibilidad de plasmar sus ideas en un medio físico y además rompió en cierta medida, el vínculo entre el profesor y el alumno.

Como lo afirma García (2005) la primera etapa de la educación a distancia se distinguió por la utilización primordial del material impreso vía correo y por la posibilidad, que tenían los estudiantes, de recibir asesorías por la misma vía. Las limitaciones eran muchas y la posibilidad de interactuar dentro del sistema eran casi nulas pues imperaba una comunicación eminentemente unidireccional que muchas veces se veía afectada por las distancias y la recepción del correo.

Posteriormente con la aparición y desarrollo de la radio, la telefonía y la televisión, se ampliaron los canales de comunicación social y entonces la educación a distancia adquiere un desarrollo sin precedentes, pues tiene la posibilidad de una comunicación más fluida y cercana provocando cambios representativos en los paquetes instruccionales que incluían textos diseñados para el auto estudio así como pistas de audio y video que ampliaron aún más las posibilidades de esta forma de enseñanza y aprendizaje.

En la última década del siglo XX, aparecen las TIC´s con una serie de ventajas, entre ellas el poder individualizar los procesos instruccionales, estimular la interacción entre las personas para apoyar el trabajo colaborativo en los entornos virtuales de aprendizaje, la capacidad de respuesta es casi inmediata, la cantidad de recursos pedagógicos es ilimitada, la actualización de los materiales es constante y continua y los costos de instrucción son bajos.

De igual forma la evolución tecnológica del manejo y procesamiento de la información, así como el surgimiento de la informática, la multimedia, Internet y las redes de alta velocidad han creado más posibilidades de desarrollo tecnológico, no solo en la aplicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, sino que también en la aparición de nuevas estrategias de instrucción, muy diferentes a las que se aplican en una clase tradicional con la presencia directa de los estudiantes.
Es un hecho que, en el nuevo paradigma de la educación superior, se han de tomar en cuenta aspectos tales como las oportunidades que pueda dar la globalización, la explotación de la información y el máximo uso de la tecnología.

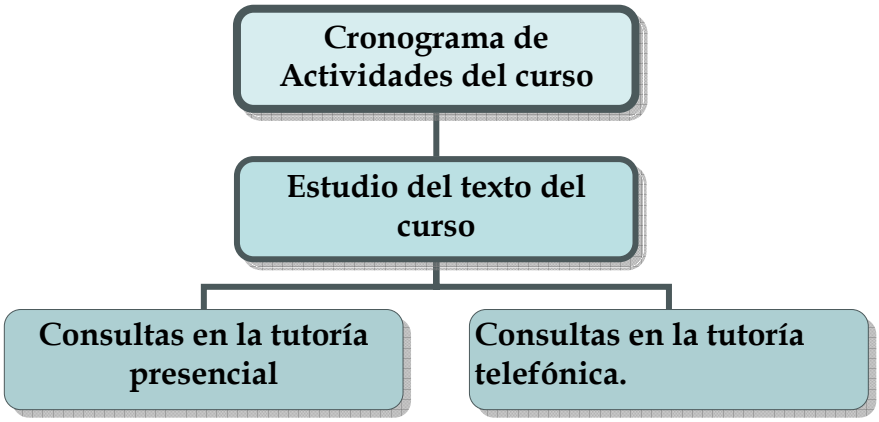
[1] Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica, euroma.eugenio@gmail.com
[2] Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica

b. Programa de Enseñanza de la Matemática de la UNED.

El programa de Enseñanza de la Matemática inicia a principios de los años noventa en la Universidad Estatal a Distancia (UNED). En los inicios esta nueva modalidad a distancia representaba todo un reto ya que era un campo poco explorado. Los profesionales que laboraban en ese momento reflexionaban constantemente de cómo se podía llevar a cabo el proceso de enseñanza- aprendizaje.
Esta primera generación de educación a distancia se basaba principalmente en lo siguiente:

- Un cronograma de trabajo
- Un texto
- La tutoría presencial
- La tutoría telefónica
- La radio o la televisión

El programa de Enseñanza de las Matemáticas de la UNED basó el proceso de enseñanza-aprendizaje en los tres primeros.
Inicialmente, el estudiante leía los objetivos del curso y el cronograma de actividades, con base en ello estudiaba los contenidos del texto y luego consultaba las dudas por medio de la tutoría telefónica y/o la tutoría presencial.
El esquema ilustra la situación.



En el año 2001, el Programa de Matemática incorpora a los cursos de Geometría Euclídea I y Geometría Euclídea II videotalleres quincenales en forma presencial en varios centros universitarios de la UNED, contando con la participación de 50 estudiantes en ese entonces.

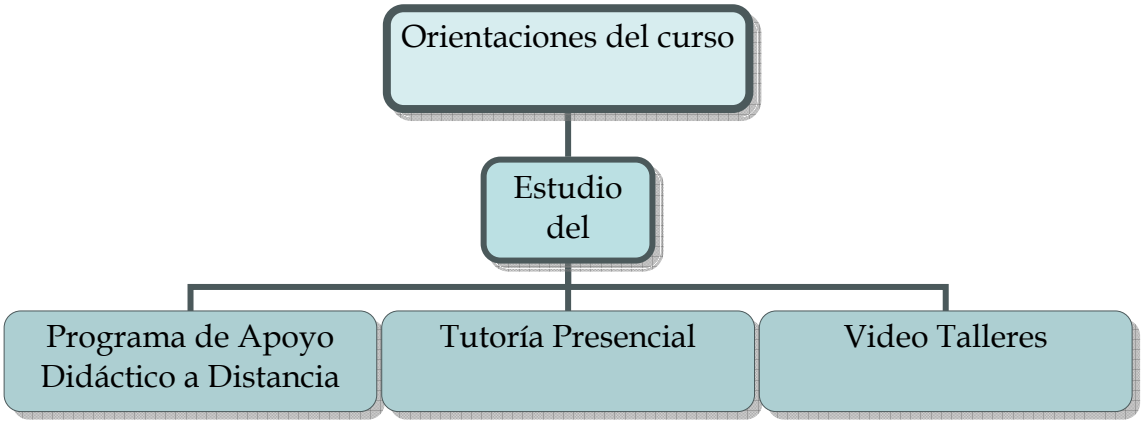
Según opinión de los estudiantes y de los profesores involucrados, los resultados de la experiencia fueron satisfactorios,. En la actualidad se desarrollan durante el segundo y tercer cuatrimestre, cuatro videotalleres de Geometría haciendo uso de la videoconferencia interactiva, enlazando de esta forma a más estudiantes del Programa.

Posteriormente se ha trabajado en la videoconferencia con otros cursos del Programa como Probabilidad y Estadística Matemática y Métodos Numéricos.
Con la implementación de esta nueva herramienta tecnológica en la entrega de la docencia, se llega a la segunda generación de la Educación a Distancia, que además de incluir los elementos de la primera generación, estaba caracterizada por:

- Videoconferencias virtuales

- Comunicación sincrónica entre estudiantes y profesores

El esquema ilustra la situación.



Para inicio, del año 2006 las autoridades universitarias de la UNED ya habían lanzado la propuesta de que la UNED tenía que entrar en la tercera generación de Educación a Distancia caracterizada por:

- La puesta en práctica de la educación virtual
- Interacción al máximo con los medios electrónicos.
- La pérdida de relevancia de la Universidad como lugar físico.

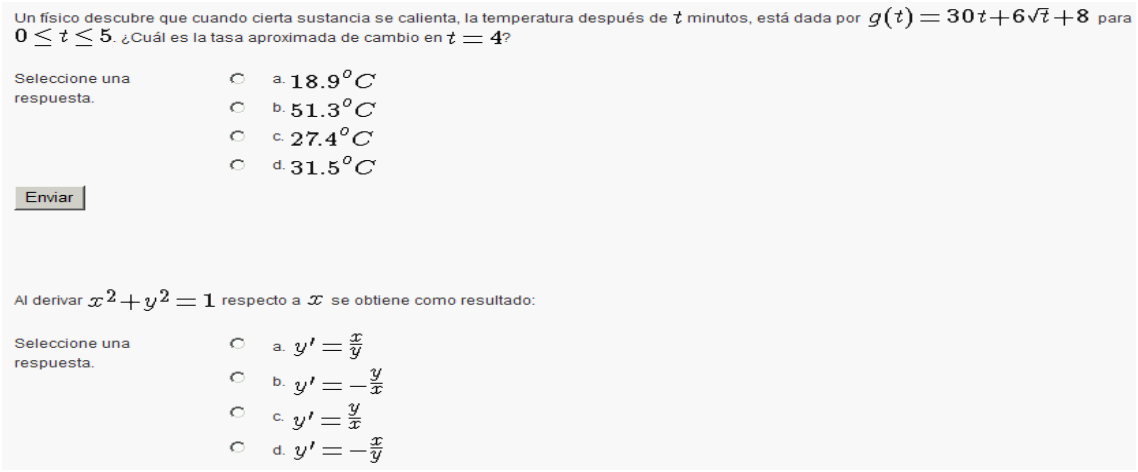
En estos momentos, el Programa de Enseñanza de las Matemáticas tiene conciencia de que este paso se debe dar en forma muy cautelosa y tratando de no excluir a estudiantes que por sus condiciones geográficas no tienen acceso a estas tecnologías.
Tomando en consideración estos aspectos, se implementa el uso de la plataforma Moodle (software libre) en algunos de los cursos específicos de la carrera, así como en cursos de servicio.

III. La Plataforma incorporada a los cursos.

El curso de Álgebra Básica y Cálculo Diferencial de la UNED ponen por primera vez a disposición de los estudiantes este recurso en el I cuatrimestre de 2007.
Las actividades que desarrollaron los estudiantes fueron las siguientes:

a. Tres tipos de ejercicios construidos en el software Hot Potatoes o con la opción cuestionario de la misma plataforma:

    1. **Quices:** Son preguntas de selección única como por ejemplo:



Un físico descubre que cuando cierta sustancia se calienta, la temperatura después de t minutos, está dada por $g(t) = 30t + 6\sqrt{t} + 8$ para $0 \leq t \leq 5$. ¿Cuál es la tasa aproximada de cambio en $t = 4$?

Seleccione una respuesta.

a. 18.9^oC
b. 51.3^oC
c. 27.4^oC
d. 31.5^oC

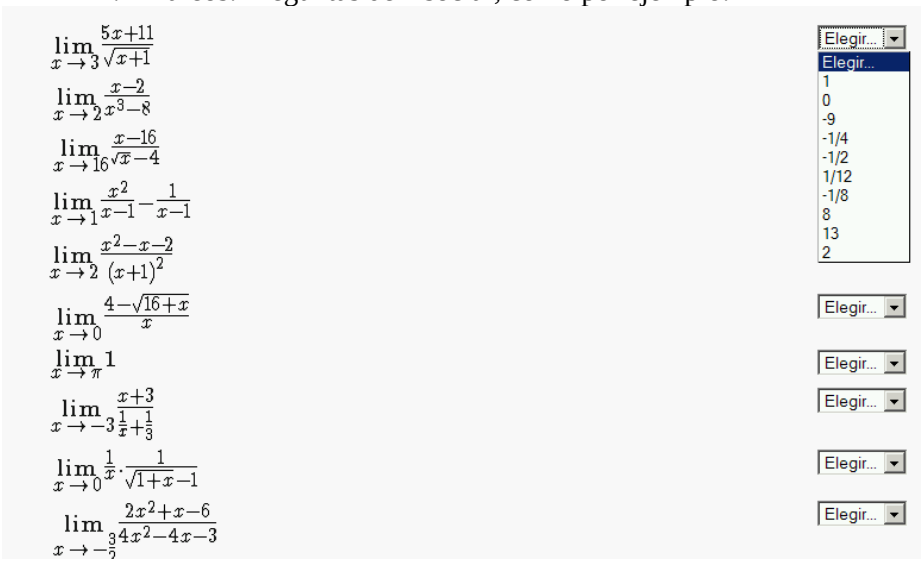
Enviar

Al derivar $x^2 + y^2 = 1$ respecto a x se obtiene como resultado:

Seleccione una respuesta.

a. $y' = \frac{x}{y}$
b. $y' = -\frac{y}{x}$
c. $y' = \frac{y}{x}$
d. $y' = -\frac{x}{y}$

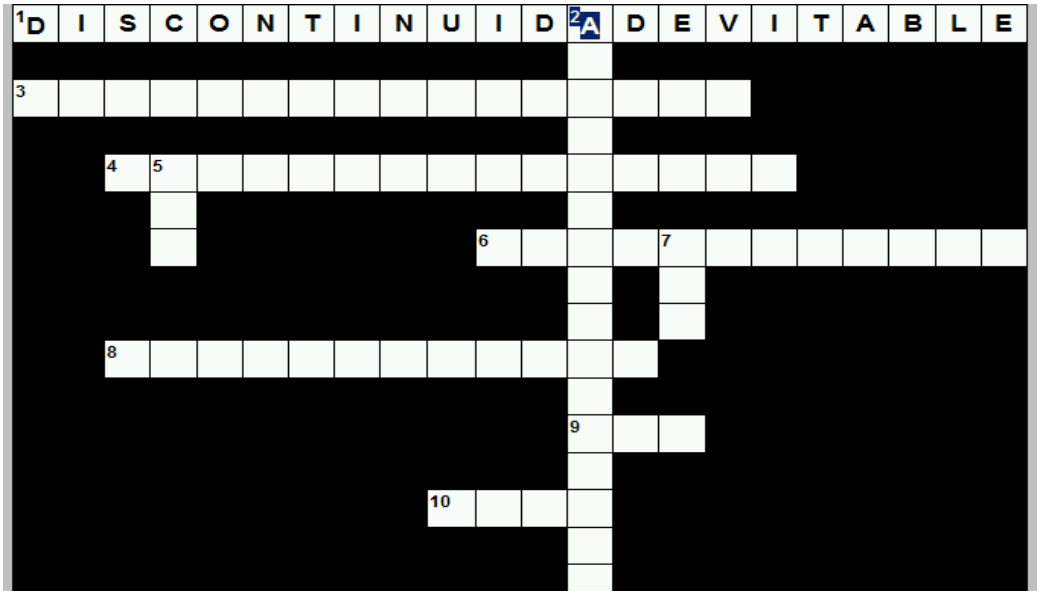
2. Pareos: Preguntas de Asociar, como por ejemplo:



$\lim_{x \to 3} \frac{5x+11}{\sqrt{x+1}}$ — Elegir...
$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^3-8}$
$\lim_{x \to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x-1} - \frac{1}{x-1}$
$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-x-2}{(x+1)^2}$
$\lim_{x \to 0} \frac{4-\sqrt{16+x}}{x}$ — Elegir...
$\lim_{x \to \pi} 1$ — Elegir...
$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$ — Elegir...
$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}-1}$ — Elegir...
$\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{2x^2+x-6}{4x^2-4x-3}$ — Elegir...

Elegir...
1
0
-9
-1/4
-1/2
1/12
-1/8
8
13
2

3. Crucigramas, como por ejemplo:



Algunos de los comentarios sobre las anteriores actividades externados por los estudiantes en aquel entonces son los siguientes:

- Nos obliga a repasar y a estudiar más.
- Es un muy buen complemento para lo que se estudia en el libro.
- Son un poco largos, lo conveniente es copiarlos hacerlos en la casa y posteriormente volver a ingresar a la plataforma.
- Son valiosos, ya que puedo hacerlos muchas veces.
- Nos preocupa la calificación, ya que generalmente no es muy buena.
- Nos obliga a preguntar más.
- Nos ayuda a entender mejor los ejercicios del libro.

b. **Tareas:** Son pequeñas asignaciones cortas con algún propósito definido, como por ejemplo:

En las tareas el inconveniente principal radicó en que la mayoría de los estudiantes enviaban la tarea vía fax e incluso un estudiante llegó a dejar la tarea a las oficinas centrales. La mayoría de tareas

Los siguientes son ejercicios en donde se aplica el concepto de derivada, estudie bien los objetivos en la unidad didáctica antes de comenzar a realizar la solución respectiva. Tiene tiempo de enviar el archivo hasta el día **viernes 26 de marzo a las 4:00 p.m.**

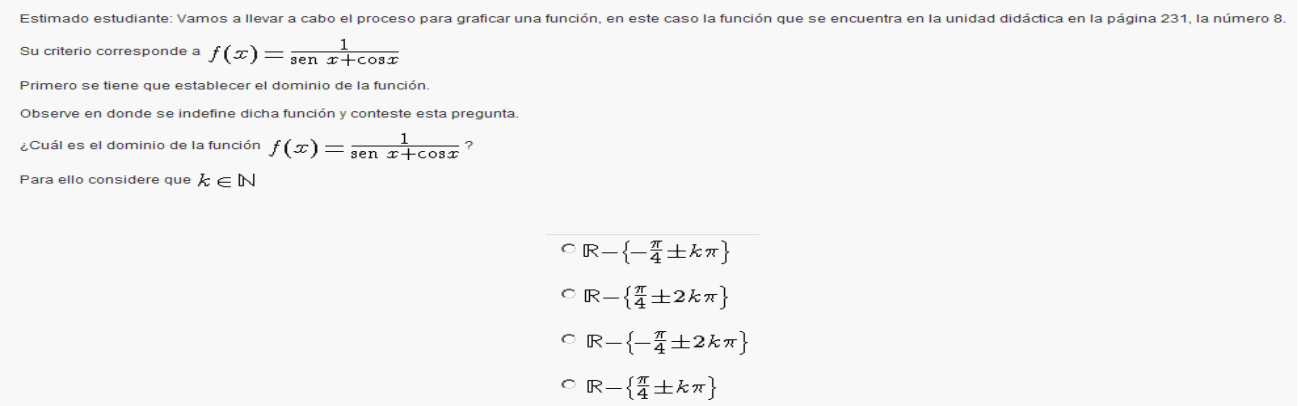
Ejercicios:

1. Suponga que $f(t)=at^2+bt+c$ y $g(1)=5$, $g'(1)=3$ y $g''(1)=-4$. Encuentre los valores de a, b y c.
2. Si $s(t)$ es el desplazamiento de un móvil y está definido por $s(t)=\frac{1}{10}(t^4-14t^3+60t^2)$. Encuentre la velocidad del móvil cuando su aceleración es cero.
3. Considere la función $f(x)=\frac{1}{2x-5}$. Respecto a ella:
   - Encuentre $f'(x)$ utilizando la definición de derivada.
   - Calcule $f''(5)$

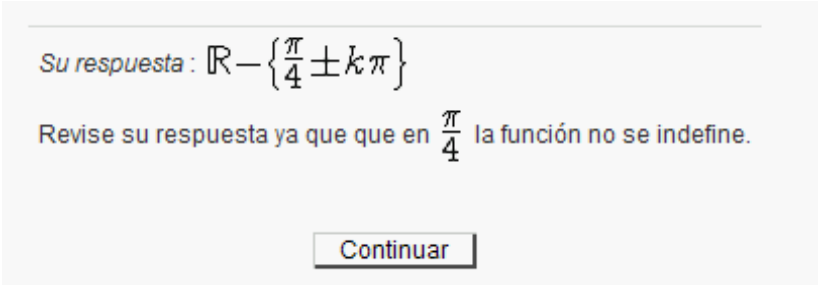
tenían notas altas, pero no se logró el objetivo de que los estudiantes digitaran su tarea y la enviaran a la plataforma para que ahí se les otorgara una nota.

c. **Lecciones:** Con está herramienta se desarrolla un tema, ejercicio o problema, en donde al estudiante se le proporciona alguna información y en forma de pregunta se le solicita otra, con ello se puede retroalimentar la respuesta dada. Si la pregunta es correcta lo pasa a otra nueva página, si es incorrecta lo devuelve para que corrija su error.
Algunos pasos presentes en la construcción de una gráfica trigonométrica fueron los siguientes:

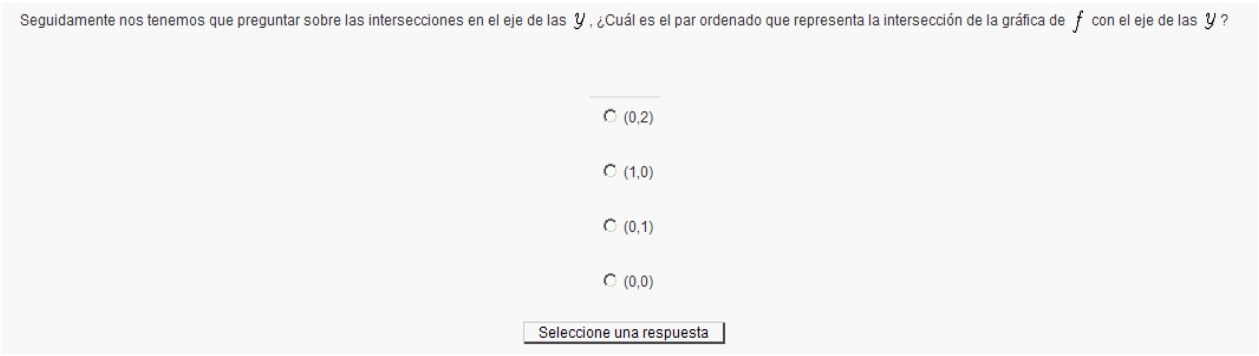
Inicio de la lección.



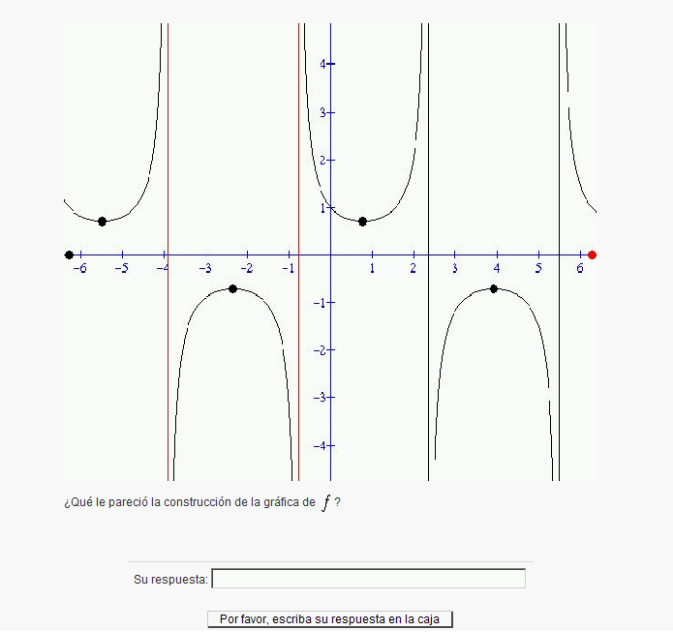
Situación presentada cuando la respuesta es incorrecta.



Otro de los pasos.



El proceso termina.



La lección fue una de las actividades más apreciadas por los estudiantes, su carácter conductista le permite estructurar un proceso para hacer un ejercicio o un problema, entre los comentarios de los estudiantes están:

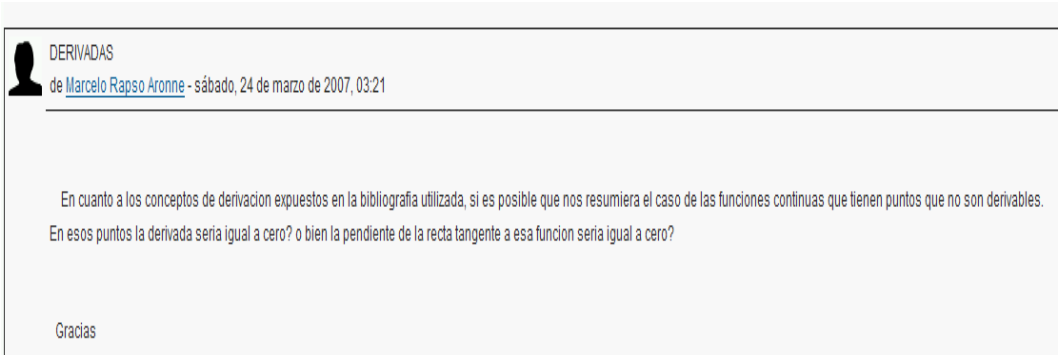
- Ahora tengo una guía para poder resolver los demás.
- Me gusta para poder revisar lo que tengo malo y puedo hacer intentos hasta que lo supere.
- Ahora me siento más seguro.
- Lo importante es que aprendemos y no perdemos puntos.
- Es un buen ejercicio para practicar para el examen.

d. **Foros:** Principalmente dedicados a comentar las actividades o a evacuar consultas de los contenidos estudiados

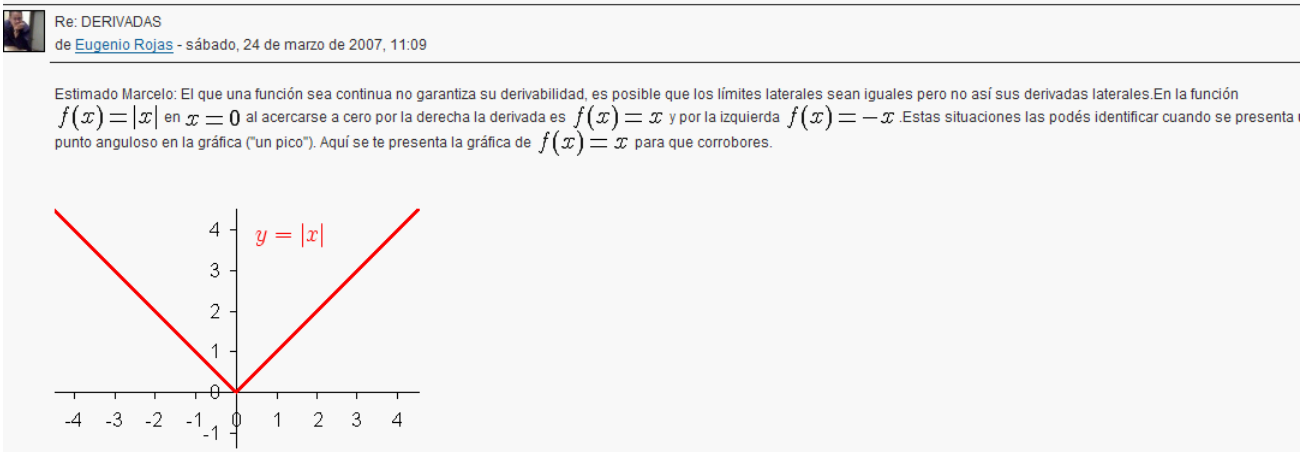
e. . Ejemplo:

- Un estudiante pregunta sobre la discontinuidad en un punto.

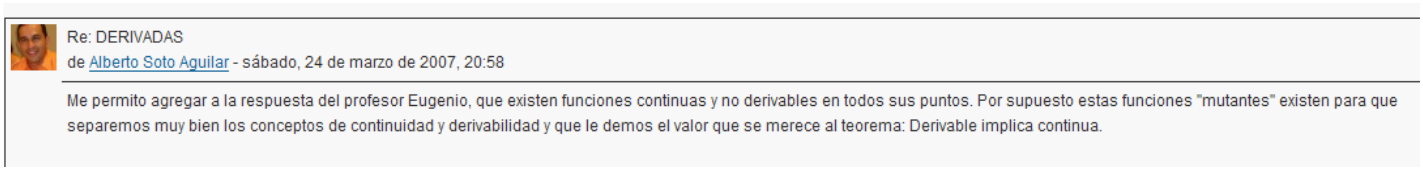
:



- Un profesor le contesta.



- Otro profesor complementa la respuesta.



Algunos de los comentarios de los estudiantes fueron los siguientes:

- Me gustan porque todos aprendemos de todos
- Me permite aclarar lo que no entendí de las actividades.
- Con las explicaciones de varios queda más clara mi duda.
- En algunas ocasiones siento vergüenza de preguntar.
- Es mucho más entretenido.

e. Un Chat. Este se realizó el día anterior al I examen ordinario, tuvo una duración de dos horas y en el mismo se trató de indagar la asimilación de algunos contenidos que se evalúan en dicha prueba. En el Chat participaron cuatro estudiantes, y dos profesores de Matemáticas, y se caracterizó por tres aspectos importantes:

- En el principio los estudiantes se sintieron inhibidos debido a que no sabían por donde comenzar, después de algunos saludos uno de los profesores los invito a opinar sobre el tema de límites laterales y poco a poco ellos se fueron introduciendo en el tema.
- La ubicación de ejercicios para indagar sobre el aprendizaje de los estudiantes. Se incluyeron ejercicio como ¿ Determinar el máximo del conjunto $\{x \in \text{IR} \ / \ x^3 - x^2 \leq 0\}$? . Primeramente, señalar que los estudiantes tenían la limitación de la escritura matemática, ya que ninguno de ellos conocía la herramienta Latex que es el programa con el cual se incorporan símbolos matemáticos a la plataforma.
  Por lo tanto al inicio la reacción fue tibia, pero al comenzar a externar algunas respuestas los profesores fueron orientando el ejercicio hasta que llegó a la respuesta correcta.

- Falta de experiencia de profesores y estudiantes en este tipo de actividades: Esto ya que ningún estudiante portaba la unidad didáctica, lo que dificultaba la comunicación, además en algunas ocasiones los profesores fallaban en la escritura matemática y no se contaba con una guía que proporcionara los lineamientos del Chat.

IV. Conclusiones

1. La valoración de la utilización como recurso de la plataforma Moodle se puede considerar como positivo debido a que en su mayoría las actividades tuvieron gran aceptación por parte de los estudiantes, ellos señalan que lo ahí realizado contribuyó a su aprendizaje.
2. El curso de Cálculo Diferencial fue aprobado por un 67% de los estudiantes que utilizaron este recurso y el Álgebra Básica por un 45%.
3. Los estudiantes consideran más ameno el aprendizaje pues se quita la idea de que solamente demostrando se aprende.
4. Se logra una mayor socialización entre los estudiantes de un modelo a distancia.
5. Los estudiantes pueden tener un contacto más constante con sus compañeros de curso y con el profesor.

V. Limitaciones

1. El manejo de la plataforma por parte de los estudiantes en algunos casos no era el Óptimo, por lo que el aprendizaje se dificulta.
2. Al inicio resistencia por parte del estudiante para estar revisando las nuevas actividades en la plataforma.
3. Dificultad de los estudiantes para la escritura de símbolos matemáticos.
4. Dificultad de acceso a Internet en algunos centros Universitarios.
5. Algunos problemas técnicos de la plataforma como en el momento de enviar mensajes.

VI. Bibliografía

Barrantes, R. Educación a Distancia. San José: EUNED, 1997.

García, L (2005). Rizando el rizo de la calidad de la Educación a distancia. Madrid. Editorial BENED.

García, J. (2005). Panorama educativo de la educación a distancia**.** Artículo electrónico disponible en [http://contexto-educativo.com.ar/2005/3/nota-08.htm]

Sequeira, R. (2006). Rediseño del curso de Geometría Euclídea I utilizando interacción de medios con énfasis en el uso del videotaller**.** Proyecto de graduación del Programa de Maestría en Tecnología Educativa, con énfasis en la producción de medios instruccionales. UNED

Percepción que poseen los estudiantes que participaron en el proyecto Matemática para la Enseñanza Media (MATEM-UNA) durante los años 2005 y 2006, acerca del desarrollo del mismo. Y las preferencias de educación superior que manifiestan.

Ana Lucía Alfaro Arce[1]
Marianela Alpízar Vargas[2]
Leonel Chaves Salas[3]

Introducción

Año con año los medios de comunicación hablan de los altos índices de deserción en los colegios,aunados a los alarmantes datos de ausentismos y bajo rendimiento. La asignatura de matemática no escapa a estos males que están afectando severamente la educación costarricense. Por ejemplo en las pruebas nacionales de sexto, noveno y bachillerato esta asignatura obtiene los promedios más bajos y de undécimo año sólo un promedio aproximado del 60% lo aprueba (Ruiz, 2000).
Por otra parte, los estudiantes llegan a las universidades con muchas deficiencias en conceptos básicos y fundamentales de matemáticas, lo que conlleva a un alto grado de reprobación en los cursos básicos de dicha asignatura.
Tomando en cuenta que corresponde a la educación matemática la formación intelectual del ser humano de manera que desarrolle su capacidad de razonamiento, la lógica, la criticidad y le ayude a enfrentar los retos de nuestra época relacionados con las ciencias y la tecnología; es que se debe prestar mayor atención a la problemática que ésta presenta, y a las contribuciones que las universidades pueden ofrecer a los educadores de esa especialidad y a sus estudiantes.

Proyecto: Matemática para la Enseñanza Media

El proyecto Matemática para la Enseñanza Media, por sus siglas, MATEM ofrece una respuesta al tipo de contribuciones que debe darse desde los centros universitarios a los futuros profesionales de nuestro país.
MATEM tuvo sus inicios en 1986, y fue auspiciada por las cuatro universidades estatales. Sin embargo, con los años sólo quedó bajo la responsabilidad de la Universidad de Costa Rica y la Universidad Nacional. En lo que se refiere a la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, los productos de MATEM son invaluables, sobre todo en el factor humano, en el que tutores, alumnos, profesores universitarios y estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática se unen por un mismo ideal bajo cánones altamente democráticos.
Para la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional es fundamental conocer la opinión que tienen los participantes del proyecto año con año, en especial, lo expresado por los estudiantes que culminan el curso que se ofrece.

Problema a investigar

El presente reporte de investigación pretende dar a conocer la percepción que poseen los estudiantes de secundaria que participaron en el proyecto MATEM-UNA durante los años 2005 y 2006, acerca del desarrollo del proyecto. Además, se presentan las preferencias que tienen los estudiantes que aprueban MATEM-Precálculo, respecto a la universidad que eligen, la carrera que siguen y los aspectos positivos, que ellos consideran, les han ayudado en su desempeño como estudiantes universitarios.

Participantes

[1] Universidad Nacional, aalfar@una.ac.cr
[2] Universidad Nacional, malvacr @yahoo.com
[3] Universidad Nacional, leonelchavess@yahoo.com

Los datos para este reporte de investigación fueron obtenidos a través de un cuestionario, aplicado a los estudiantes que realizaron el cuarto parcial en los años 2005 y 2006, y por medio de una encuesta telefónica realizada a los participantes que aprobaron MATEM-Precálculo durante estos mismos años. Luego se realizó un análisis descriptivo de los resultados más importantes.

Resultados

Los resultados obtenidos en esta investigación son importantes para los coordinadores de MATEM, puesto que dan un insumo para mejorar la ejecución del proyecto, y así, obtener mejores resultados y poder dar un aporte, como casa de formación superior, al desarrollo de nuestra sociedad costarricense.

¿Por qué los físicos hablan de matemática?[1]

Fís. Natalia Murillo Quirós[2],
Fís. Juan Carlos Lobo Zamora[3]
Fís. Ernesto Montero Zeledón[4]

Resumen:

Cada vez se comprende con mayor claridad que las diferentes disciplinas que integran el currículo del bachillerato están profundamente interrelacionadas, aunque por lo general se enseñan de forma independiente. Es posible que la relación entre algunas de las disciplinas no sea tan evidente como la que existe entre la física y la matemática, y por ello resulta más sencillo utilizar aplicaciones de la física para ilustrar algunos temas del curso de matemática.

Consideramos que es responsabilidad de los profesores realizar un esfuerzo por utilizar un enfoque de enseñanza moderno, que integre las diferentes áreas de conocimiento y que a su vez vuelva más ameno el desarrollo de los contenidos.

En esta charla se expondrán algunas ideas y experiencias en torno a esta temática y se mostrarán algunos ejemplos que ponen de manifiesto relaciones sencillas entre estas disciplinas.

[1] Profesores integrantes del Proyecto "Museo Itinerante de la Ciencia" que actualmente desarrolla la Escuela de Física del Instituto Tecnológico de Costa Rica, museoitinerante@itcr.ac.cr

[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Física, nmurillo@itcr.ac.cr
[3] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Física, jlobo@itcr.ac.cr
[4] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Física, emontero@itcr.ac.cr

Proceso para el apropiamiento y el uso de tecnología aplicada a la enseñanza de la matemática en educación secundaria.
Reporte proyecto de capacitación

Mario Marín Sánchez[1]

Resumen

El proyecto "Proceso para el apropiamiento y el uso de tecnología aplicada a la enseñanza de la matemática en educación secundaria." Respondió a una iniciativa del MEP para promover entre los y las docentes de matemática costarricenses el uso de las tecnologías de información en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática. Se incluyen información sobre los ejes centrales del proceso y algunas evaluaciones o apreciaciones.

Orientación del proceso.

En concordancia las premisas establecidas de común acuerdo entre la coordinación del proceso y el Programa de Mejoramiento de la Calidad de la Educación Preescolar y General Básica (**PROMECE**), se buscó un impactar en dos aspectos complementarios, primero a nivel de capacitación en el uso de herramientas computacionales como el Geómetra y el Front Page y paralelamente a nivel de desarrollo de la cultura de evaluación y uso oportuno de las tecnologías en los procesos de enseñanza aprendizaje.

Se plasmó un modelo de capacitación constructivista en el cual el trabajo cooperativo, la reflexión académica sobre el quehacer cotidiano y la autocrítica fueran ejes centrales. Como resultado de este proceso muchos docentes lograron desarrollar su capacidad de utilizar las herramientas citadas y en especial lograron transformar su visión acerca del uso de las tecnologías en escenarios educativos.

Desarrollo del proyecto

Dadas las características de la población, en especial la heterogeneidad en los conocimientos previos y las diferencias generacionales, lo cual incide en la manera en la que se percibe la tecnología se trabajó el proyecto completo con base en guías didácticas. Éstas, permitieron uniformidad en el nivel de los cursos y en los contenidos desarrollados. Estos materiales debieron converger con la orientación propuesta y fueron escritos bajo los siguientes criterios.

- **Uniformidad:** Todos los grupos de trabajo desarrollarían esencialmente los mismos contenidos par lograr los mismos objetivos básicos, la situación real concreta planteó diferencias significativas en los niveles de formación finales. Estas diferencias respondieron fundamentalmente a las características individuales de los y las participantes.

- **Autoformación:** El rol de participación en el proceso se planteó en un escenario individualizado y en algunos tramos autodidacta para esto a los docentes que facilitaron los procesos se les pidió evitar al máximo los esquemas conductitas, y de no ser necesario no asumieran de manera directa la explicación de las herramientas al grupo completo, mas bien, atender individualidades y velar por que el grupo avanzara de manera uniforme.

  El instructor realizó controles periódicos del avance del grupo y cuando fue necesario tomó las acciones pertinentes. Se planteó como fundamental que los docentes por sí solos trataran de comprender de las guías los aspectos centrales de las herramientas y construyeran el conocimiento pertinente. Esto es fundamental en un proceso que más que instruir en una herramienta particular busca fomentar habilidades para usar, evaluar y promover el uso herramientas didácticas en los escenarios educativos costarricenses. Un profesor con capacidad de autogestión, creativo y

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. Dirección mmarin@itcr.ac.cr

dispuesto a explorar será mucho más exitoso en el proceso de incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza aprendizaje.

- **Contexto:** En el proyecto se estableció como premisa el fomentar en los y las participantes la habilidad de crear herramientas en un contexto de completitud y responsabilidad académica. En ese sentido se les pidió ajustarse a un esquema básico desde el cual se vieran en la obligación de considerar diversos aspectos antes de hacer el proyecto. Los valores centrales en el proyecto fueron la pertinencia de la herramienta desarrollada y la calidad y coherencia conceptual del desarrollo teórico en el proyecto. Para este fin se planteó como requisito indispensable el desarrollo de un proyecto de mediación pedagógica por parte de cada participante.
  Los proyectos y actividades desarrolladas se enmarcaron en los objetivos y contenidos establecidos por el Ministerio de Educación Pública y todos los proyectos realizados se orientaron a los contenidos que se deben cubrir en educación media.

Logros y Limitaciones

Se atendieron más de 300 docentes. Los participantes se capacitaron en el uso de la herramienta específica The Geometer's SketchPad que es un software para hacer geometría y que permite incorporar algunos elementos de funciones y de álgebra. Está herramienta se complementó con un software orientado al desarrollo de páginas WEB para permitirles iniciarse en el desarrollo de proyectos de mediación pedagógica apoyados por las tecnologías de información. En la segunda etapa se perfeccionó lo aprendido en la primera y se agregaron otras herramientas como el Geogebra y el Latex.

Se produjeron cerca de 150 proyectos sobre diversos temas de matemática, elementos de geometría, trigonometría y funciones fueron los temas predominantes. Si bien los proyectos reflejan la escasa experiencia en el manejo de software y la ausencia de conocimientos acerca de metodologías para incorporar estas herramientas lo cierto es que también muestran, en muchos de los casos, una buena disposición por parte de los docentes y un esfuerzo importante. De seguro, los resultados de la elaboración de este proyecto trascienden en producto final obtenido y deja una importante lección no solo sobre la importancia de la metodología, también sobre la necesidad de la integración coherente de diversos tópicos como software educativo, contenidos, dominio de conceptos, estrategias pedagógicas, diseño, etcétera.

Tanto el MEP como los organizadores de este proceso podemos aprender mucho de estos proyectos que en muchos casos presentan una radiografía de las condiciones de los docentes de matemática. En general, existió una actitud muy apropiada por parte de los participantes, muy receptivos respecto a la propuesta del proceso pero en algunos casos con limitaciones importantes no solo a nivel de la organización del conocimiento que se transmitirá a los estudiantes también a nivel de conocimientos matemáticos.

Soy más específico. Los profesores debían elegir el desarrollo de un concepto para el proyecto. La apreciación de muchos de los docentes facilitadores es que, a muchos de los docentes participantes les resultó complicado organizar los conocimientos alrededor de ese concepto. Manejo débil de la metodología, dificultad de organización de las ideas. Me atrevo a establecer una interpretación sobre esta situación y es que la práctica docente que desarrollan cada día está muy orientada por la resolución de ejercicios y las prácticas repetitivas lo cual no les incentiva esta capacidad y por lo tanto no están acostumbrados a realizarlo.

No se debe perder de vista que se debió hacer una transición entre las prácticas tradicionales de pizarra a prácticas donde el rol de la tecnología era central, eso toma su tiempo y esta experiencia es un buen punto de partida.

Limitaciones detectadas
En términos generales la actitud de los y las participantes fue buena y en muchos casos excelente**.** Pero creo que sería justo citar algunas situaciones que de alguna manera pueden ayudar a definir o plantear otros procesos similares.

Este punto lejos de ser un aspecto negativo es información importante que permite dimensionar mejor algunas características presentes en nuestro entorno educativo.

Para muchos de los docentes que desarrollaron el proyecto resultó difícil el poder hacer un planeamiento completo y consistente de un tema. Se les solicitó que antes de iniciar el proyecto establecieran unos objetivos y que con base en ellos realizaran un planeamiento, se apreció en algunos casos:

- Poco conocimiento o interés en los objetivos planteados por el MEP y su relación con las actividades de clase.

- Metodología poco definida, no fue simple que organizaran la manera de abordar un tema con los estudiantes.

- Poco dominio de conceptos básicos o mal uso de lenguaje, frecuentemente encontramos que los teoremas o definiciones escritas tenían deficiencias importantes.

Para muchos docentes la elaboración del proyecto final consistió un reto además de interesante complejo y realizaron un buen esfuerzo para lograr un producto que llenara sus expectativas. Para otros docentes, sin embargo, el proyecto solo fue un requisito y lo realizaron sin mostrar un compromiso y sin profundizar ni en la parte computacional ni en la parte matemática.

Recomendaciones finales:
Para nuestro país es importante incidir de manera significativa en todos los aspectos que condicionan los resultados de la educación. En particular es prioritario atender aspectos relacionados con que se da en la formación, niveles de capacitación y niveles de compromiso por parte de docentes y estudiantes.

En lo que respecta al uso de las tecnologías de información y comunicación es recomendable:

- **Capacidad de autogestión:**
  Es vital que los recursos que se inviertan en este tipo de capacitación aseguren que las capacidades desarrolladas logren reproducirse y multiplicarse. Los procesos deben incidir en la capacidad de los y las docentes para continuar aprendiendo para que además de usar las herramientas en las que han sido capacitados puedan explorar nuevas opciones.
- **Materiales que permitan avance**
  Los materiales de trabajo deben constituir verdaderas fuentes de información y de formación. Es importante que estos presenten un enfoque integral y coherente sobre estrategias que permitan transcender el aprendizaje de la herramienta misma para ayudar al docente a planear sus actividades de clase.
- **Reforzar conceptos**
  En la medida de lo posible estas experiencias deben aprovecharse para refrescar conceptos. En un sistema como el nuestro, donde muchas veces priva el procedimiento sobre el concepto es importante que se aproveche cada oportunidad posible para retomar los conceptos temáticos centrales.

- **Responsabilidades compartidas**
  Una tarea central en este tipo de alternativas es que tanto el docente como el estudiante comprendan y acepten los roles que cada uno debe seguir. Las responsabilidades de profesor y estudiante deben ser claras y bien definidas.
- **Apoyar el trabajo colaborativo**
  Es necesario reforzar la importancia del trabajo colaborativo como camino hacia la validación de esquemas didácticos y para ayudar a los docentes a crear conciencia de grupo. En el proceso que se siguió en esta capacitación el trabajo en grupo, las sociedades de apoyo y de conocimiento fueron muy evidentes y útiles.

Finalmente, el uso de herramientas computacionales para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje debe verse como una excelente alternativa adicional y nunca como la alternativa al problema de la educación. Cada estudiante se adapta a un ritmo y a un estilo de aprendizaje lo que nos obliga a diseñar y planear la educación de manera diversa para atender a estudiantes diversos también.

Propuesta de Actividades con Tecnología a ser desarrollada con alumnos de la carrera Profesorado en Matemática

Nilda Etcheverry,
Marisa Reid[1]*,*
Estela Torroba,
Norma Evangelista

Resumen

En este trabajo se aportan aspectos parciales de una investigación encaminada a describir las necesidades requeridas en su formación por los alumnos del Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina)

A través de la asignatura Práctica Educativa II, mediante un cuestionario abierto realizado al inicio, se exploran los distintos aspectos referidos a la enseñanza de la matemática.

El objetivo de este trabajo es lograr estrategias de intervención, en distintos niveles y contextos, que faciliten responder cuál es el conocimiento que ayuda a los profesores a tomar decisiones respecto de los contenidos curriculares, el uso de recursos didácticos y la metodología adecuada que contribuyen a una buena gestión de la clase.

Introducción

En la primera clase (marzo de 2007) con alumnos que cursaban la asignatura Práctica Educativa II correspondiente al tercer año del Profesorado de Matemática, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), se les preguntó por escrito: ¿Qué aspectos o cuestiones referidas a la enseñanza de la Matemática pretenden responderse, a través del curso de Práctica Educativa II? Las respuestas fueron:

- Vivenciar y recibir una clase con la metodología, estrategias, actividades, recursos didácticos, manejo de grupos, como nos dijeron en las anteriores materias pedagógicas que tenemos que hacerlo, pues en las materias que hemos cursado en las áreas específicas de matemática, el método es el tradicional.
- Ver funcionar una "clase de matemática" que no sea como nosotros aprendimos, sino donde se vea el análisis de los elementos teóricos recibidos.
- ¿Cómo incluir la tecnología en la enseñanza de un tema de matemática?

Esto nos llevó a analizar e iniciar algún camino que nos conduzca a una devolución de algunas de las inquietudes que plantearon los alumnos.

PROPUESTA

Las demandas de los alumnos hicieron que intentemos una respuesta que aspire a que los futuros profesores desplieguen nuevos roles y asuman con mayor grado científico y pertinencia su formación, por cuanto deben dar pautas para interpretar y asumir las exigencias de los procesos complejos y dinámicos inherentes a la nueva enseñanza.

Por ello planificamos, en horario extracurricular, poner en práctica el análisis de "Estrategias Docentes" (Eggen, P. y Kauchak, D.) y "Aprender a Resolver problemas y Resolver problemas para aprender" (Perez Etcheverría, M; y Pozo, J.M) a través de actividades desarrolladas usando como herramienta el software Derive 6. Los contenidos desarrollados fueron:

- ✓ Funciones
- ✓ ¿Para qué sirven las funciones?
- ✓ Tipos de funciones
- ✓ Problemas que se resuelven usando funciones.

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina, mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Los docentes responsables somos quienes estamos a cargo de las materias del área de Análisis Matemático y Práctica Educativa II.

FUNDAMENTACIÓN

El estudiante tiene que ser protagonista de su proceso de formación. Se trata de poner en contacto a los estudiantes de Profesorado con la problemática profesional de la tarea docente.

La formación inicial, como todo proceso formativo, tiene que contemplar aspectos teóricos y prácticos para lograr que los futuros profesores desarrollen destrezas profesionales.
La componente teórica trata de sentar bases que ayuden al estudiante a fundamentar su actuación y a resolver problemas profesionales. La formación práctica trata de crear en el estudiante hábitos y destrezas profesionales que domina el profesor experimentado.

El camino óptimo que debería guiarnos en la práctica docente no sólo en términos de las limitaciones, sino también en términos de las oportunidades que cada situación ofrece, es trabajar en un ambiente computacional con abordajes no tradicionales, con el planteo de problemas abiertos que admiten diversos abordajes para su resolución, con intervenciones del profesor como guía y auxilio, dejando que los estudiantes sigan sus propios caminos de exploración.

ACTIVIDADES

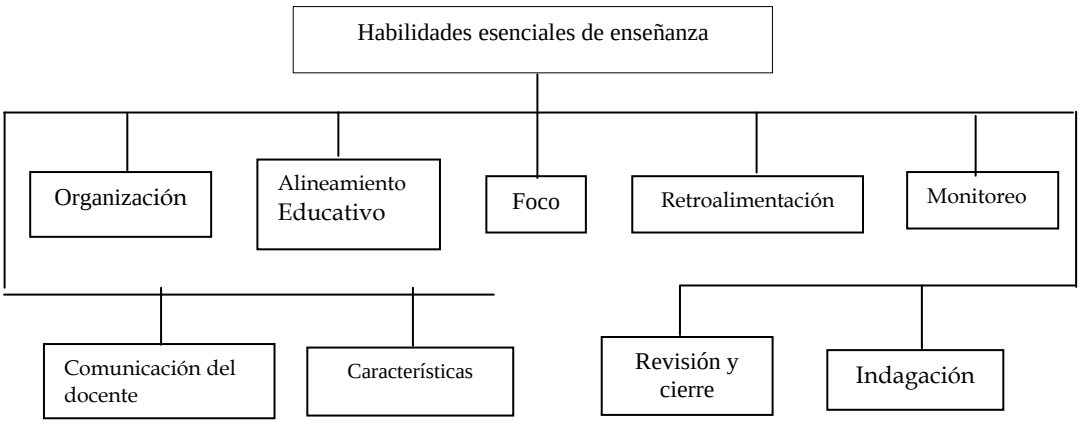
Las actividades propuestas fueron:

1- Clase en Sala de aula

Lectura y comentarios de:

- Estrategias Docentes (Paul Eggen y Donald P. Kauchak)
- Aprender a Resolver Problemas y Resolver Problemas para Aprender (María Puy Pérez Etcheverría y Juan Ignacio Pozo Municio).

La discusión se centró en **Las habilidades esenciales de enseñar: las bases de la eficacia del docente** (Estrategias docentes, Eggen, P. y Kauchak, D. Pág. 38) ilustradas en la siguiente figura:



2- Clases en Sala de computación

Se realizaron tres encuentros de 2 horas cada uno, en horarios acordados entre los responsables de la sala, los responsables del curso y los alumnos. Se dispuso una computadora cada dos alumnos. Se entregó a cada alumno un instructivo con los comandos básicos para facilitar el manejo del software y una guía de las situaciones a resolver.

Primer encuentro

El objetivo de este primer encuentro fue:

- Analizar el papel de la computadora, en el tratamiento de los problemas propuestos, como forma de contribuir al aprendizaje.
- Verificar las transformaciones que la informática está provocando en la metodología de la enseñanza.
- Mostrar la resolución de situaciones problemáticas a partir de problemas bien definidos y mal definidos.

Se desarrolló una introducción general sobre el uso del software y se resolvieron situaciones problemáticas para familiarizarse con las sentencias básicas del mismo.

Cada 20 minutos a través del uso del cañón de proyección se mostró la solución de cada ejercicio con las reflexiones pertinentes, además de descartar las posibilidades de error que los docentes ya han detectado en otras oportunidades, ya sea producto de los obstáculos propios de los conceptos matemáticos o los provocados por el software.

Segundo encuentro

"*La motivación como efecto del uso de nuevas tecnologías sólo ocurre en un principio, pero luego se produce un efecto de saturación o acostumbramiento"* (Litwin, 2000) es importante por ello idear actividades que impliquen desafíos, curiosidad para producir cambios en las formas de pensamiento.

Se plantearon ejercicios y problemas para ser resueltos usando el Derive 6, con recomendaciones acerca de su transferencia a distintos niveles. Los responsables del curso ejercimos una función de monitoreo de los distintos grupos que consistió en observar el trabajo y resolución de distintas situaciones problemáticas.

Algunas de las actividades propuestas:

Problema1 : En vísperas del lanzamiento al mercado de la nueva bebida, se quiere diseñar un recipiente de forma de cilindro circular recto que ha de contener 250cm^3 de refresco y usar la mínima cantidad posible de material para su construcción. Estimar esa cantidad, si se ignora el grosor, pero si:

(a) No se considera el desperdicio del material

(b) El material para las latas se recorta de láminas metálicas. La superficie lateral se forma doblando rectángulos; estos rectángulos se recortan de láminas rectangulares sin desperdicio. Las bases se construyen:

i) Recortando círculos de cuadrados de lado $2r$.

ii) Recortando círculos de láminas metálicas que se dividieron en hexágonos.

En ambos casos se dobla el material excedente alrededor del cuerpo de la lata.

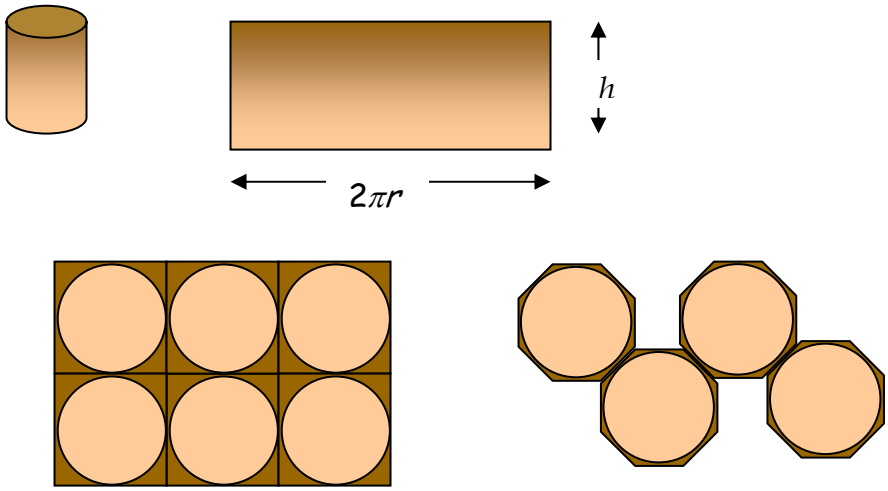
Se plantea aquí una situación sobre " diseño de materiales" que asigna al alumno una tarea, que hace necesaria la búsqueda de una función que modelice el fenómeno. El problema puede aparecer incluido en alguna organización matemática formando parte de las actividades que se realizan en una institución donde la técnica empleada para realizar la tarea asignada dependerá de la institución en la que se propone.

Los contenidos para la Educación General Básica, en Argentina en el bloque II de Matemática: ..."volúmenes, áreas....", "Funciones y sus características". Los contenidos básicos comunes para la Educación Polimodal de Argentina, introduce dentro de los contenidos conceptuales del bloque I "Números y Funciones", "Modelización de fenómenos del mundo real utilizando funciones", "Análisis de funciones usando derivadas"... Estos temas se retoman y se profundizan en las materias de Cálculo I y Análisis I en las distintas carreras de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina).

Oficialmente, cualquiera de los niveles de enseñanza mencionados proporciona técnicas y elementos tecnológicos institucionales para resolver el problema presentado.

El problema se resolvió a partir de la representación de la función en diferentes registros..

- A partir del registro verbal en que está dado este problema, se realizó un esquema de la situación.



Se modelizó la misma en el campo algebraico obteniendo una expresión para cada caso.

(a) $V = \pi r^2 h = 250cm^3$

i) $V = \pi r^2 h = 250cm^3$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h + \underbrace{2((2r)^2 - \pi r^2)}_{\text{desperdicio}} = 2\pi rh + 8r^2$$

ii) $V = \pi r^2 h = 250cm^3$

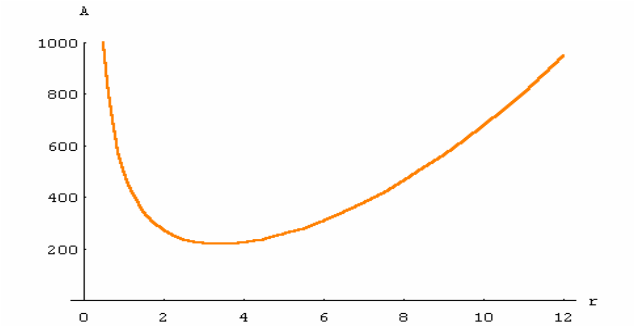
$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \underbrace{2(2r^2\sqrt{3} - \pi r^2)}_{desperdicio} = 2\pi r h + 4\sqrt{3}\, r^2$$

Se desarrolla aquí el caso a), el caso b) se puede desarrollar en la misma forma.

- Se pasó al registro de Tabla:

	Altura	**Área total**
1.5		
2		
2.5		
3		
3.25		
3.5		
4		

- Luego al registro gráfico:



En el gráfico y en la tabla se lee aproximadamente que para r = 3.5 hay un mínimo.

Para responder, el alumno del EGB no tiene otra técnica que la de realizar tablas de valores para distintos r, tarea que se vuelve rutinaria y tediosa al no ser la solución un valor natural, hasta encontrar el valor más chico que toma la función.

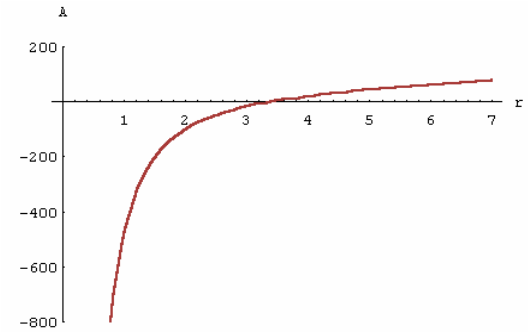
El problema puede ser resuelto desde el Cálculo diferencial, como una aplicación directa de Extremos de Funciones, una vez identificada la función que modeliza el fenómeno:

$$A = \underbrace{2\,\pi\,r^2}_{\text{bases de la lata}} + \underbrace{2\,\pi\,r\,h}_{\text{pared de la lata}}$$

$$A = 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,\frac{250}{\pi\,r^2} = 2\,\pi\,r^2 + \frac{500}{r}\,.$$

Puede verse que para valores pequeños de r (una lata alta y estrecha) el término $\frac{500}{r}$ domina la expresión ya que la cantidad $2\,\pi\,r^2$ es despreciable al compararla con aquella y entonces A es grande. Para valores de r grandes (una lata ancha y baja) el término dominante es $2\,\pi\,r^2$ y A es otra vez grande. Luego si se pretende que A sea mínimo debe ser un valor de r que no sea ni muy grande ni muy pequeño.

$A' = 4\,\pi\,r - \frac{500}{r^2}$ Para $A'(r) = 0$ se encuentra que r = $\frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$, El gráfico de la función primera derivada es:



$A''(r) = 4\,\pi + \frac{1000}{r^3} = 0$, para $r = \frac{5}{\sqrt[3]{\pi}}$ es positiva , lo cual implica que el material necesario es

mínimo para ese valor de r.

De esta manera el problema puede ser resuelto en el Polimodal con alumnos que han adquirido los primeros conocimientos del cálculo diferencial.

Aquí el alumno tiene a su disposición algunos dispositivos como calculadoras graficadoras y algún pequeño programa de computadora, ya que en general en el Polimodal se cuenta con poca tecnología en La Pampa (Argentina), que le permite verificar sus resultados algebraicos con los gráficos.

Un alumno de la materia de Cálculo I o Análisis I de la Universidad, que cuenta con todos los dispositivos para realizar los gráficos, hacer lectura de las coordenadas de los puntos que interesan y resolver las ecuaciones necesarias con cualquier software, puede abordar sin demasiados inconvenientes distintos problemas, pero el docente, será entonces, el encargado de que no haya pérdida de significados y medios de control.

Tercer encuentro

El profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de genuinos problemas matemáticos y el conocimiento entra en cuestión.

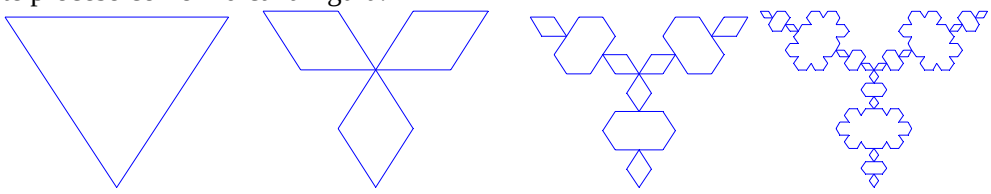
Un concepto significa, entre otras cosas, ponerlo en funcionamiento para resolver un problema, para lo cual hay que conocer el significado del concepto en cuestión, significado que sólo es construible gracias al conjunto de problemas que el concepto permite resolver. Si el concepto no se aprende funcionando en distintos problemas no se puede aplicar porque no se sabe como funciona.

Desde la perspectiva de la acción didáctica según esta concepción, pensar un problema, entonces supone anticipar cuál será la actividad cognitiva de los alumnos, cuáles son las interacciones que se han de propiciar y a propósito de qué, y cómo intervendrá el docente en las diferentes instancias.

Los problemas deben ser elegidos, no únicamente como justificación para enseñar matemática o como motivación específica para un tema a enseñar o como práctica o para referirse a un contexto cotidiano y cercano al alumno sino para responder a un interés de construcción progresiva del conocimiento matemático.

Se presentarán problemas abiertos para ser resueltos teniendo en cuenta el cuadro 5.1 pág 207. “La solución de Problemas como Contenido Procedimental de la Educación Obligatoria.” (Pozo, J y Postigo, Y.)

Ejemplo: Una joyería tiene para la venta distintos tipos de collares diseñados por un artesano de la siguiente forma: A partir de un triángulo equilátero de lado 1 pie, se dividió cada lado en tres partes iguales y sobre el segundo tercio de cada lado se quitó un triángulo equilátero que apunta hacia adentro. Y siguió este proceso como indica la figura:



Para engalanar cada modelo de la joya le colocó sobre el borde de la figura un fino hilo de oro cuyo costo es de 0.05 rupias el pie. Las joyas fueron talladas sobre una lámina de oro cuyo costo es de 0.1 rupias el pie cuadrado. El precio de venta de cada collar es inversamente proporcional al área de la misma, esto es,

cuantos más pasos demande la construcción más cara será la joya.

Mientras que el costo de fabricación del mismo depende directamente del costo de los materiales usados. La joyería desea saber cuál es el tipo de collar que le reportará el mayor beneficio. Para ello se pide analizar los costos de producción e ingresos según el nivel de complejidad de fabricación de la joya, esto es, cuando el número de pasos en su fabricación crece sin límites.
Al finalizar se realizó una puesta en común, donde cada grupo aportó los resultados, se analizaron las distintas soluciones y se discutió la importancia del uso de la tecnología en la clase de matemática.

Para finalizar se les solicitó a los alumnos de matemática que respondieran de acuerdo a lo leído en el primer encuentro y a lo solicitado por ellos el primer día de clase:

- Identificar las habilidades esenciales de enseñanza de los docentes. ¿Cuáles estuvieron presentes? ¿Cuáles ausentes? En qué momentos ?
- Identificar en un problema los distintos pasos de Polya.
- Indagar si a través de las actividades realizadas si se lograron satisfacer las expectativas que se plantearon al comienzo del curso

CONCLUSIONES

Existen argumentos que apuntan al uso de tecnologías como solución a los problemas educacionales, pero no siempre se hace la pregunta cuál es el problema para el cual la tecnología tiene respuesta.

Nuestra posición es sugerir que la relación entre la informática y la educación matemática tiene que ser pensada como una transformación de la propia práctica educativa
La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hace posible y necesario replantearse el qué y el cómo de su enseñanza aprendizaje.

Para proponer situaciones problemáticas que hagan necesaria la elaboración de nuevos conocimientos por parte de los alumnos para conducir el proceso de aprendizaje hacia la reconstrucción del conocimiento válido, para legitimar el derecho de los alumnos a reelaborar el conocimiento, poniendo en acción sus propias conceptualizaciones y confrontándolas con las de sus compañeros, el trabajo del docente debería consistir, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta, y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del profesor.

Los estudiantes tomaron conciencia de la existencia de un conjunto de saberes necesarios para enseñar por eso creen que el trabajo extracurricular fue positivo pues les permitió actualizar conocimientos en matemática, reflexionar sobre problemas y sus resoluciones, como llevar al alumno al planteo de conjeturas, a la búsqueda de formas de validación, lograr un ámbito donde se discuta, se comparen soluciones, se argumente para defender las propias o para aceptar y/o rechazar las de otros y sobre todo comprender que la enseñanza era realmente una profesión y no una ocupación remunerada.

Las cuestiones vinculadas al aprendizaje del profesor y a su práctica profesional son relativamente recientes como ámbito de investigación. La generación de nuevos conocimientos desde las investigaciones deben tener una repercusión en nuestra propia práctica de formar profesores.

BIBLIOGRAFÍA:

Eggen, P. y Kauchak, D. (1999) “Estrategias Docentes”. Enseñanza de contenidos curriculares y desarrollo de habilidades de pensamiento. México. Fondo de Cultura Económica.

Litwin, Edith (2000) Las configuraciones didácticas Paidós Buenos Aires
Nacional Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standars for school mathematics.

Perez Etcheverría, M; y Pozo, J.M "Aprender a Resolver problemas y Resolver problemas para aprender".

Polya, G. (1994) Cómo Plantear y resolver problemas. Editorial Trillas. México.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PAMPA

Propuesta de Actividades con Tecnología a ser desarrollada con alumnos de la carrera Profesorado en Matemática

Nilda Etcheverry, Marisa Reid, Estela Torroba, Norma Evangelista

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNLPam. Argentina.

mareid@exactas.unlpam.edu.ar

- En este trabajo se aportan aspectos parciales de una investigación encaminada a describir las necesidades requeridas en su formación por los alumnos del Profesorado de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina). A través de la asignatura Práctica Educativa II, mediante un cuestionario abierto realizado al inicio, se exploran los distintos aspectos referidos a la enseñanza de la matemática.

El objetivo de este trabajo es lograr estrategias de intervención, en distintos niveles y contextos, que permitan responder cuál es el conocimiento que ayuda a los profesores a tomar decisiones respecto de:

- los contenidos curriculares,
- el uso de recursos didácticos
- la metodología adecuada

que contribuyen a una buena gestión de la clase.

Propuesta

Clase en Sala de aula.

Lectura y comentarios de:

- Estrategias Docentes (Eggen, P. y Kauchak, D.)
- Aprender a Resolver Problemas y Resolver Problemas para Aprender (Pérez Etcheverría, M. y Pozo Municio, J.).




Habilidades esenciales de enseñanza
Organización
Alineamiento educativo
Foco
Retro-alimentación
Monitoreo
Comunicación docente
Características
Indagación
Revisión y Cierre

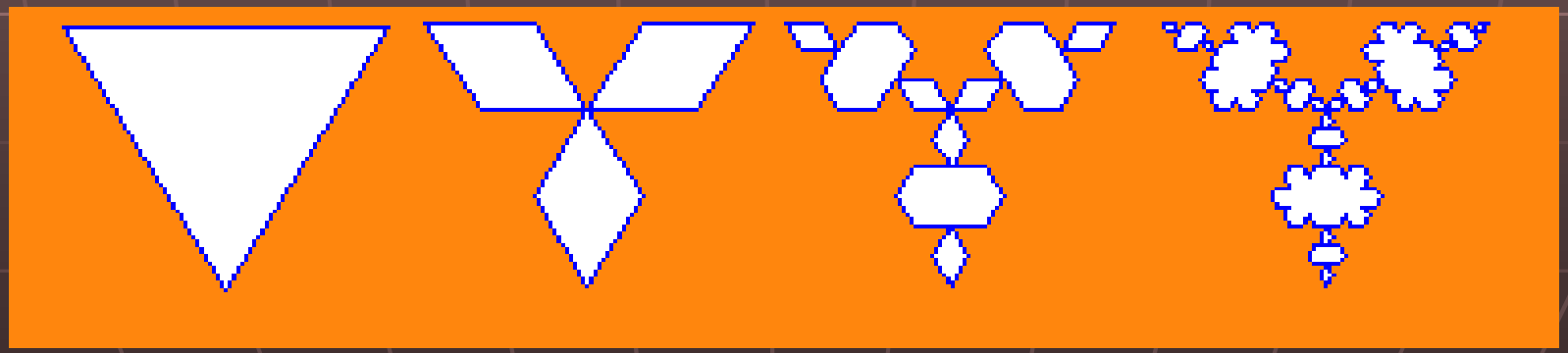
Análisis de “Estrategias Docentes” (Eggen, P. y Kauchak, D.) y “Aprender a Resolver problemas y Resolver problemas para aprender” (Perez Etcheverría, M: y Pozo, J.M)



Actividades desarrolladas usando como herramienta el software Derive 6. Los contenidos desarrollados fueron:

- Funciones
- ¿Para qué sirven las funciones?
- Tipos de funciones
- Problemas que se resuelven usando funciones.

Ejemplo: Una joyería tiene para la venta distintos tipos de collares diseñados por un artesano de la siguiente forma: A partir de un triángulo equilátero de lado 1 pie, se dividió cada lado en tres partes iguales y sobre el segundo tercio de cada lado se quitó un triángulo equilátero que apunta hacia adentro. Y siguió este proceso como indica la figura:



n=1 *n=2* *n=3* *n=4*

El precio de venta de cada collar es inversamente proporcional al área de la misma, esto es, cuanto más pasos demande la construcción más cara será la joya. Mientras que el costo de fabricación del mismo depende directamente del costo de los materiales usados. La joyería desea saber cuál es el tipo de collar que le reportará el mayor beneficio.

Conclusiones

Nuestra posición es sugerir que la relación entre la informática y la educación matemática tiene que ser pensada como una transformación de la propia práctica educativa

La existencia, versatilidad y potencia de la tecnología hace posible y necesario replantearse el qué y el cómo de su enseñanza aprendizaje.

Los estudiantes tomaron conciencia de la existencia de un conjunto de saberes necesarios para enseñar por eso creen que el trabajo extracurricular fue positivo pues les permitió actualizar conocimientos en matemática, reflexionar sobre problemas y sus resoluciones, como llevar al alumno al planteo de conjeturas, a la búsqueda de formas de validación, lograr un ámbito donde se discuta, se comparen soluciones, se argumente para defender las propias o para aceptar y/o rechazar las de otros y sobre todo comprender que la enseñanza era realmente una profesión y no una ocupación remunerada.

Realización de búsquedas sistemáticas en Internet para trabajos de investigación

Evelyn Agüero Calvo[1]

Resumen

La información que existe en Internet es muy abundante, razón por la cual, a la hora de realizar una documentación para un trabajo de investigación se debe realizar un proceso de búsqueda de información sistemática, ya que las búsquedas intuitivas cotidianas no son suficientes.

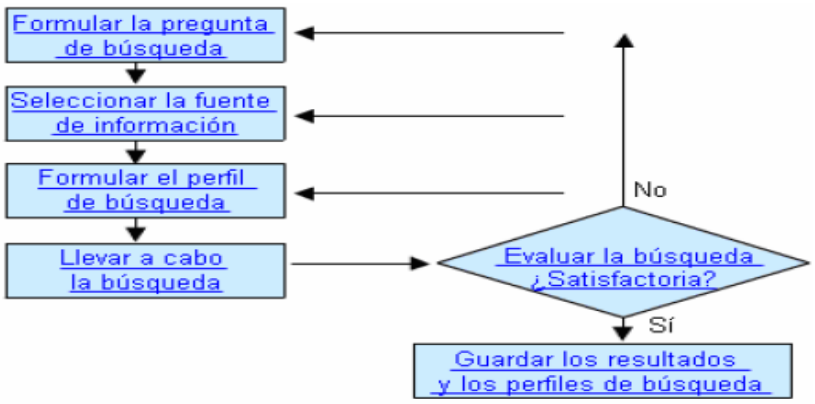
Por tal razón, de manera que se puedan orientar, en algún sentido, las búsquedas de información en Internet, en este documento se explicará de una forma concisa:

- *El procedimiento formal de búsqueda en Internet.*
- *Cómo definir y delimitar el perfil de búsqueda.*
- *El uso de operadores booleanos y comodines.*
- *El uso de índices y directorios.*
- *El uso de buscadores y metabuscadores.*
- *Cómo realizar búsquedas en Internet profunda, en bibliotecas virtuales y en obras de referencia.*
- *El uso de tesauros.*
- *Cómo realizar búsquedas de tesis doctorales y revistas electrónicas.*

Día a día, la mayoría de las personas realizan búsquedas de forma intuitiva y asistemáticas que, de manera general, son suficientes para cubrir las necesidades de información en el momento.
Pero la situación es más complicada cuando la necesidad informativa debe ser más especializada y se requiere de un conocimiento de las fuentes adecuadas y de sus respectivos procedimientos de búsqueda.

PROCEDIMIENTO FORMAL DE BÚSQUEDA

La información que existe en Internet es muy abundante, razón por la cual, a la hora de realizar una documentación para un trabajo de investigación o incluso para contar con una formación profesional continua, se debe realizar un proceso de búsqueda de información constituido por una serie ordenada de etapas, lo cual ayuda a que la búsqueda sea eficiente y efectiva. Un esquema dichas etapas se presenta a continuación, seguido de la explicación de cada una ellas:



Formular la pregunta de búsqueda

Es una forma gramatical, en forma de pregunta que, de manera concisa y precisa, permita saber lo que no se sabe. Para ello:

- Se debe delimitar la búsqueda (temática, temporal, etc.) para evitar que sea poco práctica.
- Seleccionar palabras significativas.

[1]Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Email: evaguero@itcr.ac.cr

- Cuando se utilicen fuentes que posean tesauro, se deben elegir las palabras que indique el propio sistema.
- Buscar sinónimos de estas palabras.
- También es útil tener en cuenta términos más amplios o más específicos para tratar de ir ajustando la búsqueda, ya sea si se encuentra poca o demasiada información.

Seleccionar la fuente de información

En función de la pregunta de búsqueda se deben seleccionar aquellas fuentes de información que mejor vayan a ayudar a responderla. Se debe, por tanto, establecer una **estrategia.** En primer lugar hay que elegir entre **calidad** y **actualidad**: las fuentes comprobadas son seguras; pero si sólo se usan éstas se puede perder la ventaja de acceder a la investigación más reciente.
Es posible recuperar información en **Internet** que, siendo muy reciente, tenga también gran calidad, pero es especialmente necesario evaluarla adecuadamente.

Formular el perfil de búsqueda

El *perfil de búsqueda* se formula partiendo de las palabras más significativas de la pregunta de búsqueda y en función de la fuente de información a la que se vaya a recurrir.
Además de los términos significativos, se usan conectores booleanos (***y***, ***o***, ***no***) y otros operadores llamados comodines.

El término "Booleano" se utiliza en honor de George Boole, matemático británico del siglo XIX, quien sugirió que el pensamiento lógico podía expresarse como álgebra. Los operadores booleanos se utilizan para **combinar palabras** o **frases** y así aumentar o reducir el número de resultados.

- **Y (AND)**: Combina los términos que deben estar simultáneamente en la descripción de un documento para que sea recuperado. Por ejemplo, *calentamiento AND global*, buscaría documentos que contengan ambos términos.
- **O (OR):** Sirve para unir los términos y ampliar el número de resultados de una búsqueda. Cada resultado de la búsqueda contendrá al menos uno de los términos utilizados en la combinación, pero no necesariamente los dos a la vez.
- **NO (NOT)**: Se utiliza para discriminar términos de los que se sabe con seguridad que no se quiere obtener nada. Por ejemplo, *aviones NOT trenes*, buscaría documentos que contengan el término *avione*s pero no el término *trene*s.

Para asegurarse que los operadores se combinen adecuadamente conviene utilizar **paréntesis**, que sirven para hacer más explícitas las reglas de precedencia y para modificarlas. Por ejemplo, *aviones AND (trenes OR barcos) NOT papel* produce resultados diferentes a *(aviones AND trenes) OR barcos NOT papel*.

Otro aspecto importante para formular perfiles de búsqueda es el uso de comodines, ya que permiten buscar texto con partes fijas y variables:

- **?**: Reemplaza un carácter cualquiera en una palabra o frase. Por ejemplo *niñ?s* puede representar tanto *niñas* como *niños*.
- *****: Reemplaza de cero a cualquier número de caracteres en determinada parte de una palabra o expresión. Por ejemplo, *casa**, representa palabras que comienzan con *casa* como *casamiento*, o bien, la misma palabra *casa*. La expresión **mática* representa palabras terminadas en *mática* como *temática* o *matemática*.
- **“”**: Se utiliza para buscar una expresión literal. Por ejemplo, compare la cantidad de resultados obtenidos al buscar *aviones papel* en comparación con “*aviones papel*”.

Un último aspecto a considerar a la hora de formular un perfil de búsqueda es la decisión sobre qué priorizar: **sensibilidad** (muchos resultados) o **precisión**.

Llevar a cabo la búsqueda

Una vez establecidos los perfiles de búsqueda adecuados para cada fuente informativa, se lleva a cabo la búsqueda en cada una de ellas. Probablemente, se deba utilizar un perfil de búsqueda diferente para cada una de las fuentes de información en que se busque, pues cada una de ellas entiende un "lenguaje". Además, en algunos casos será necesaria la traducción de los conceptos seleccionados al lenguaje de interrogación de la obra de referencia; normalmente el inglés.

Evaluar la búsqueda

Se deben evaluar los resultados y decidir si contestan la pregunta que inició el proceso, si los datos son fiables y si la cantidad de documentos obtenidos es adecuada. Si no es así, se deben revisar las etapas anteriores:

– ¿Está bien formulada la pregunta?

– ¿Se ha recurrido a las fuentes de información adecuadas?

– ¿Se han construido bien los perfiles de búsqueda correspondientes a cada una de las fuentes de información interrogadas?

Guardar los resultados y los perfiles de búsqueda

Si los resultados de la búsqueda son satisfactorios se deben guardar y también conviene guardar cómo se ha llegado a ellos (la *estrategia de búsqueda* y *los perfiles de búsqueda*). Puede suceder que más adelante sea necesario repetir la búsqueda para actualizar los resultados o seleccionar otros que se hayan desestimado en una primera instancia.

USO DE INTERNET PARA RECUPERAR INFORMACIÓN

El uso de Internet ha facilitado el acceso a enormes cantidades de información, ya que hay mucha información disponible desde diversas perspectivas, además de que experimenta un crecimiento continuo y acelerado.

Internet en un instrumento muy potente, rápido y accesible. Pero no toda la información procedente de Internet es fiable: hay que evaluar según la fuente, el avalista, los filtros de calidad previos, etc. Además, es sumamente fácil perderse entre tanta información y no saber buscar apropiadamente en las diversas fuentes que podemos acceder desde Internet. A continuación se explicarán, en forma breve, algunos recursos para recuperar información desde Internet, haciendo referencia también a sitios de interés para facilitar eventuales búsquedas de información.

Directorios

En los directorios existe una selección, una clasificación y una indización de recursos o documentos Web realizada por humanos. Posee listas de enlaces que ofrecen la información contenida en un número limitado de páginas Web previamente seleccionadas por su interés y organizada de forma jerárquica, de manera que el usuario pueda descender los niveles de especificidad necesarios para encontrar la información requerida. Además, los directorios poseen buenos filtros de calidad, pero tienen la desventaja de que el ritmo de crecimiento de Internet va dejando los directorios prácticamente obsoletos, aunque existen buscadores especializados que pueden ser útiles. Algunos son:

Google Directorio http://directory.google.com/intl/es/

YAHOO! SEARCH http://es.dir.yahoo.com/

Buscadores

Los buscadores se basan en la utilización de programas llamados arañas, robots o motores de búsqueda los que, de manera automática, recorren la red siguiendo los enlaces hipertextuales para localizar e indizar documentos.

Se han popularizado dada su rapidez, sensibilidad y relativa precisión. En cuanto a los inconvenientes, el principal de los buscadores es el inmenso número de resultados a los que el usuario debe enfrentarse, la mayor parte de los cuales no tienen ninguna utilidad. No obstante, es cierto que ofrecen una ordenación de los mismos bastante eficiente, con los documentos que más se adaptan a la petición del usuario en los primeros lugares. Además, ofrecen la posibilidad de acotar bastante las búsquedas. Algunos buscadores son:

http://www.google.co.cr/

http://www.yahoo.com/

http://www.altavista.com/

http://es.ask.com/

http://www.alltheweb.com/

Metabuscadores

Los metabuscadores no disponen de una base de datos propia que mantener, sino que utilizan las de varios buscadores para encontrar la información solicitada por el usuario. Después, muestran una combinación de las mejores páginas que ha devuelto cada buscador. También se puede ver el resultado por buscadores para comparar.

Así pues, un metabuscador es un buscador de buscadores. Otras denominaciones habituales son las de multibuscador y megabuscador.

Una de las desventajas importantes que presenta un metabuscador es que cada buscador dispone de su propia sintaxis de búsqueda y en el metabuscador no se puede hacer distinción entre las diferentes sintaxis. Por lo tanto, al buscar información muy específica, es mejor emplear buscadores de los que se conozca la sintaxis. Algunos metabuscadores son:

http://www.metacrawler.com/

http://www.dogpile.com/

http://vivisimo.com/

http://www.ixquick.com/

Internet profunda

Se llama Internet *profunda* o *invisible* a aquella que no es accesible a través de buscadores: fichas de bases de datos, algunas páginas dinámicas, etc. La World Wide Web es sólo una parte del contenido de Internet, hay otros protocolos de Internet, no indizables por los motores de búsqueda que forman la Internet Invisible: Ftp (File Transfer Protocol), email, grupos de noticias, Internet Relay Chat (IRC). Si en Internet *superficial* hay unos 2 mil millones de páginas, en la Internet profunda hay 500 mil millones de páginas potenciales. Es de 400 a 550 veces más grande que la Web y crece más rápido. Además, hay unas 500.000 bases de datos de acceso gratuito en Internet (más las de pago).

Por ejemplo, un sitio interesante para consultar es *internetinvisible.com* el cual recopila, describe y ofrece el enlace a las bases de datos existentes en Internet en un directorio organizado en grupos temáticos, los cuales se subdividen a su vez en materias más específicas. En general, ofrece recursos de acceso gratuito a información invisible en Internet. Algunos sitios interesantes son:

http://www.internetinvisible.com/ii/

http://turbo10.com/

http://www.weblens.org/invisible.html

http://aip.completeplanet.com

Bibliotecas virtuales

Los libros son una fuente fundamental de búsqueda de información, pero tienen las desventajas de lentitud en la edición, reservados para conocimiento consolidado y de difícil acceso.

Con el uso de Internet se ha difundido el recurso de las bibliotecas virtuales, las cuales contienen catálogos de libros en línea que permiten descargar versiones electrónicas gratis y, en otros casos, se muestra una visualización de una selección de páginas para que el lector decida si opta por comprarlo. Algunos sitios para acceder bibliotecas virtuales son los siguientes:

http://www.gutenberg.org

http://www.cervantesvirtual.com/

http://books.google.es/

http://www.questia.com

http://www.ciberoteca.com/

Obras de referencia o consulta

Son aquellas que por sus objetivos, plan, ordenación y forma de tratar los temas, han sido concebidas para la consulta con fines de información o de remitir a otras obras para conocer o ampliar un tema dado. Tienen como objeto facilitar datos puntuales o información muy sencilla ante determinadas demandas informativas. Entre las obras de referencia están los diccionarios, enciclopedias, anuarios y directorios.

La difusión y accesibilidad de Internet está cambiando radicalmente el ámbito de las obras de consulta ya que se está generando un trasvase del papel a la red, con integración de multimedia además de una actualización permanente. Algunos sitios de consulta son:

http://es.wikipedia.org

http://es.encarta.msn.com

http://www.eb.com/

Tesauros

Un tesauro es un instrumento terminológico que permite traducir los términos expresados en lenguaje natural al lenguaje documental que opera en un contexto informativo determinado, llámese centro de documentación o base de datos, estableciendo las relaciones jerárquicas y asociativas, es decir, los niveles de especificidad y equivalencia existentes entre los mismos. Posee listados de palabras clave con sus sinónimos y con una red de términos relacionados, de tal modo que ayuden a centrar los procesos de catalogación y las búsquedas de material, por lo que es importante consultarlos para definir preguntas o perfiles de búsqueda, como se mencionó anteriormente. Algunos sitios donde obtener tesauros son las siguientes:

- Tesauro de la UNESCO: http://databases.unesco.org/thessp/
- Tesauro de ERIC: http://www.eric.ed.gov/thesaurus
- Tesauros variados: http://pci204.cindoc.csic.es/tesauros
- Lista de Tesauros: www.absysnet.com/recursos/referencia/tesauros.html

Tesis doctorales

Las tesis doctorales representan un material muy completo de consulta, pero tienen la desventaja de que son escasamente publicadas y de difícil accesibilidad. Son de utilidad ya que orientan sobre esquemas o procedimientos a seguir en un proceso de investigación. Algunos sitios en los que se encuentran bases de datos de tesis doctorales son los siguientes:

- TESEO: http://teseo.mec.es/teseo
- TDX: www.tdx.cesca.es
- Miguel de Cervantes: http://www.cervantesvirtual.com/tesis/
- Univ. de la Rioja: http://www.unirioja.es/servicios/sp/tesis/tesis_ur.shtml

Revistas

Una revista es una publicación periódica colectiva que ofrece información especializada. Entre sus ventajas están la rapidez de edición y los filtros y criterios de calidad a los que están sometidas. Como parte de una revista, cada **artículo** puede considerarse como una publicación en sí misma. Últimamente, están teniendo gran importancia las **revistas electrónicas** y de **acceso abierto,** las cuales pueden obtenerse en los siguientes sitios:

http://www.doaj.org/

http://www.scielo.org

http://redalyc.uaemex.mx

http://www.quadernsdigitals.net

Existen otros recursos en Internet además de los mencionados anteriormente como las bibliografías comentadas, la literatura *gris*, los boletines de sumarios y los depósitos de artículos, los cuales pueden localizarse usando los recursos citados en el presente documento.

Referencias

Apuntes del curso: instrumentos básicos en investigación educativa. (2007) Doctorado en Intervención Educativa, Universidad de Valencia, España.

Barrueco, J.M. (2000). Recerques bibliogràfiques a través d'Internet: recursos electrónics especialitzats. Universitat de Valencia.

Jordá, V**.** (2002)**.** ¿Qué son los metabuscadores? Recuperado el 29 de octubre de 2007 de: http://www.consoft.es/noticias/news_text.asp?id=33219

Relevamiento de software en línea para la enseñanza-aprendizaje de métodos numéricos. Herramientas para su desarrollo

Eva Ascheri, M. [1]
Rubén Pizarro
Gustavo Astudillo
Pablo García
M. Eugenia Culla

Resumen

En un Proyecto de Investigación anterior, hemos trabajado en el diseño de un software educativo para la resolución numérica de ecuaciones no lineales con la finalidad de utilizarlo, fundamentalmente, durante el desarrollo del curso de Cálculo Numérico. Los resultados alcanzados han sido muy satisfactorios, lográndose buenas respuestas académicas, promoviendo el protagonismo del educando y facilitando el trabajo que, para alumno y profesor, supone la tarea de formación.

Siguiendo con esta línea de investigación y en el marco de un nuevo Proyecto, continuamos trabajando con el objetivo de ampliar el software educativo anterior de manera tal que abarque otros métodos numéricos que hacen a la disciplina científica antes citada.

Tanto en la instancia anterior como actualmente, realizamos una búsqueda y estudio acerca del material disponible en línea sobre las temáticas que se abordan en un curso básico de Cálculo Numérico. A partir de este análisis, llegamos a la conclusión que son muy pocas las posibilidades de acceder a páginas web que permitan, con una clara intencionalidad pedagógica, el estudio y la aplicación de los diferentes métodos numéricos que se desarrollan en esa asignatura. Sí se encuentran muchas más opciones en lo que se refiere a otros contenidos matemáticos. Pero como docentes responsables del desarrollo de esta disciplina, estamos convencidos de que sería de gran utilidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los métodos numéricos, disponer de este tipo material en línea como complemento del desarrollo de las clases presenciales o de los cursos en la modalidad a distancia, semipresenciales, sin tener la necesidad de instalar en el ordenador personal un software costoso o que demande características de hardware de las que no se disponen.

En este trabajo, presentamos una breve descripción de los resultados obtenidos a partir del relevamiento realizado sobre las herramientas que se pueden instalar en la PC y las aplicaciones que están disponibles en línea, y destinadas a la enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos que se estudian en un curso básico de Cálculo Numérico.

Luego, mostramos algunas de las distintas herramientas existentes de carácter libre que permiten desarrollar este tipo de aplicaciones, con el objetivo de implementar un sitio web en el cual se puedan aplicar los diferentes métodos numéricos e interpretar gráficamente cada uno de ellos, lo que sin duda redundará en beneficio del proceso de enseñanza y aprendizaje de los mismos.

INTRODUCCIÓN

En el curso de Cálculo Numérico, se estudian diferentes métodos numéricos para la resolución de ecuaciones no lineales, sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, aproximación e interpolación, derivación e integración numérica. El desarrollo de estos temas demanda a los alumnos el aprendizaje de una gran cantidad de contenidos, que incluyen métodos y fórmulas.

Esto hace que, frecuentemente, los alumnos realicen los cálculos matemáticos aplicando las fórmulas sin efectuar un análisis detallado del comportamiento de cada método, según la situación problemática

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa - Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa – Argentina, mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

abordada y los resultados obtenidos. Este análisis es de gran importancia para facilitar la comprensión y permitir un aprendizaje significativo [3], en beneficio del uso de estas temáticas en aplicaciones futuras.

Sin duda, la aplicación de software educativo como el que ya hemos elaborado y que los alumnos utilizan en la realización de sus actividades, es de gran importancia para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las temáticas que se abordan en Cálculo Numérico [1, 2, 8].
No obstante, el software que hemos desarrollado presenta ciertos inconvenientes en lo que se refiere a su distribución y a su funcionamiento óptimo. Esto se debe, fundamentalmente, en el primer caso, a los costos del software adicional que se requiere para su uso y en el segundo, a los escasos o nulos conocimientos informáticos específicos que los alumnos poseen, ya que pertenecen a los primeros años de carreras universitarias no informáticas (Matemática, Física e Ingeniería).

Por otro lado, en la actualidad, un gran número de alumnos, además de realizar las actividades que son propias de un estudiante universitario, están insertos en diferentes sectores laborales, lo que hace que dispongan de menos tiempo libre en los horarios convencionales de cursado. Contar con un software de acceso por medio de Internet, les proporcionaría una oportunidad muy valiosa de poder desarrollar sus actividades académicas en el horario que dispongan o crean más conveniente, sin tener que instalar software muy costoso o incluso adquirir equipos de computación con requerimientos de hardware elevados. Además, una interfase en línea es más familiar para el estudiante actual, habituado a la utilización de los servicios de chat, correo electrónico, navegación y demás, y a la que puede acceder en **una mayor disponibilidad horaria.**

EXPERIENCIA PREVIA

En los últimos años hemos desarrollado un software educativo utilizando el paquete MatLab. Este paquete cuenta con un potente lenguaje de programación, en el cual los cómputos, la visualización y la programación se integran en un mismo ambiente, donde problemas y soluciones son expresadas en notación matemática familiar [9]. El software educativo que hemos diseñado, permite acceder a diferentes métodos numéricos para la resolución de ecuaciones no lineales. Esta aplicación aporta no sólo la resolución numérica de este tipo de ecuaciones, sino que también muestra la interpretación gráfica de cada uno de los métodos numéricos utilizados y proporciona una breve ayuda teórica sobre cada técnica numérica empleada [1, 2, 8].
En la Figura 1, mostramos, a modo de ejemplo, la implementación del método de Newton. Como se puede observar, el usuario debe ingresar los datos para aplicar el método en cuestión (intervalo de análisis, función, valor inicial, iteraciones máximas, error admisible). Seguidamente, el software realizará la aproximación numérica. Estos resultados se muestran a la izquierda de la pantalla y simultáneamente, se representa gráficamente la forma en que el método obtiene los valores iterados sucesivos, mostrando el valor final en otro color.

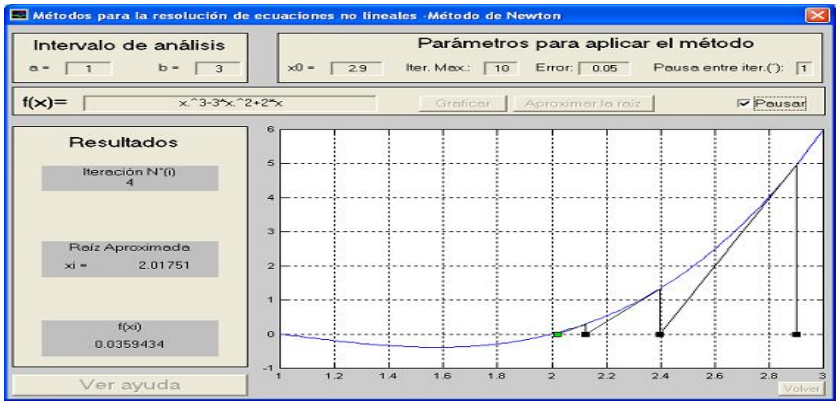


Figura 1: Método de Newton

El software demostró ser muy útil tanto para la enseñanza como para el aprendizaje del tema abordado, ya que facilitó a los docentes el desarrollo de sus clases y significó para los alumnos una herramienta que

promovió la comprensión de los métodos numéricos como así también, la solución de ecuaciones no lineales a partir de las gráficas de las funciones que las representan. Venimos usando esta aplicación como soporte pedagógico de las clases teórico-prácticas desde el año 2005 y hemos detectado, con la utilización del software, la aparición de algunos inconvenientes:

- **Portabilidad.** Si bien el software desarrollado es de dimensiones pequeñas en cuanto al espacio que ocupa en disco, el usuario debe adquirir una licencia de MatLab para instalarlo, lo cual es costoso, según nuestra realidad. Además, resulta particularmente engorroso convertir esas aplicaciones a programas ejecutables "standalone".

- **Acceso en línea.** El software educativo no fue diseñado para ser utilizado a través Internet. Por ello es que buscamos una herramienta que cubra esta expectativa, de manera que funcione como recurso para actividades en la modalidad a distancia o semipresencial, y también como complemento del desarrollo de las clases presenciales. El surgimiento de MatLab Server, con MatLab 7, podría resultar una solución a este problema, pero el costo del mismo es demasiado elevado y sólo poseemos la versión 6 de MatLab licenciada. En cualquier caso, la plataforma de desarrollo utilizada en el Proyecto de Investigación anterior no permite generar aplicaciones que puedan utilizarse en línea.

ACCIONES A DESARROLLAR

Retomando los aportes logrados por la experiencia recabada a través de la implementación del software educativo que elaboramos en el Proyecto de Investigación anterior, pretendemos ahora desarrollar una nueva aplicación a la que pueda accederse de manera remota y con la menor cantidad de limitaciones posibles desde el punto de vista del hardware y del software. Con la concreción de este nuevo software educativo, buscamos favorecer las actividades de consolidación de los saberes enseñados y aprendidos, puesto que se le proveerá al alumno de una herramienta mediante la cual podrá realizar actividades complementarias experimentales.

Cabe mencionar que uno de los objetivos principales del actual Proyecto de Investigación es el de construir un software educativo que permita no solamente hallar soluciones a problemas específicos, sino también mostrar gráficamente cómo opera el método empleado para que pueda ser utilizado como herramienta educativa de apoyo a la labor docente.

Resulta evidente que la aplicación de elementos gráficos realiza un importante aporte al proceso de enseñanza-aprendizaje. El volumen de información que el estudiante recibe es mayor y de mejor calidad en determinados casos. Por ejemplo, podemos invertir mucho tiempo en describirle a un estudiante un paisaje determinado, pero mostrarle material fotográfico generará un nivel de percepción enormemente mayor, además de proporcionar una calidad de aprendizaje diferente.

En informática, se han utilizado y desarrollado herramientas gráficas con el objetivo de facilitar las tareas de análisis y diseño de sistemas por consideraciones similares. En matemática, el análisis de la forma gráfica en que se comportan las funciones se encuadra en el mismo renglón.

Como dice Cordero [4], la graficación permite articular el uso de la modelación y de la tecnología en actividades matemáticas. Adicionalmente, según Zazkis et al [10], mostrar el comportamiento analítico y visual de forma integrada, puede ser necesario para comprender mejor ciertos conceptos matemáticos.

ESTADO DEL ARTE

Existe una cantidad importante de herramientas desarrolladas que una vez instaladas en la PC del usuario, permiten trabajar con contenidos matemáticos y visualizar resultados. Entre ellas, podemos citar:

- **QUEEN MAGIC LANGUAGE.** Aplicación científico-matemática orientada a estudiantes y docentes cuyas principales características son: gráficas en modo rectangular y polar,

determinación de raíces, integración, derivación, lenguaje de programación asociado, entre otras. Totalmente desarrollado en Java.

- **ABAKO.** Calculadora científica con biblioteca de funciones, editor de texto y representación gráfica de funciones.
- **ADVANTIX CALCULATOR.** Resuelve expresiones matemáticas con números complejos, polinomios, funciones racionales en base binaria, octal, decimal y hexadecimal.
- **ALGEBRUS.** Herramienta de cálculo y análisis de funciones, programada en xpascal.
- **DERIVE.** Herramienta muy completa y popular para cálculo.
- **EUCLIDES.** Herramienta de cálculo para la resolución de sistemas lineales, derivación, integración y demás.
- **FERMAT.** Potente sistema de computación algebraico polinomial y matricial.
- **FLEXPDE.** Sistema para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.
- **MUPAD.** Paquete del estilo a MatLab.
- **OCTAVE.** Lenguaje de alto nivel para cálculo numérico compatible con MatLab.
- **MATHEMATICA.** Es un software muy poderoso con muchas características favorables para realizar cálculos numéricos y simbólicos, como así también trabajar con gráficos. Al integrarlo con tecnología Java Servlets aparece WebMathematica, que toma todas las funciones originales y las hace disponibles en un sitio web.
- **CALIPSO FOR LINEAR ÁLGEBRA.** Paquete para el aprendizaje del álgebra lineal.
- **RANDOM SAMPLER.** Aplicación del método de Monte Carlo.
- **SIMSTAT.** Completo paquete estadístico.
- **XLSTAT.** Paquete de macros en VBA para EXCEL.
- **CINDERELLA.** Software interactivo para el aprendizaje de la geometría.
- **EUCLIDRAW.** Programa para representar figuras basado en geometría euclidiana.
- **GNUPLOT.** Programa para la representación de gráficas en 2D y en 3D.

También existen algunos recursos en línea disponibles. Entre ellos, podemos citar Métodos Numéricos [6]. Esta es una interesante herramienta a partir de la cual se puede acceder a la resolución de ecuaciones no lineales mediante varios métodos numéricos como, por ejemplo, Newton, bisección y demás. En esta aplicación, se muestra una tendencia a la obtención de resultados numéricos más que a la visualización gráfica de la forma exacta sobre cómo el método funciona. Esto es, se prioriza la resolución en sí misma por sobre el aprendizaje de la técnica numérica empleada.

Motivados por esta situación, emprendimos la tarea de desarrollar un software que apunte a actuar como soporte pedagógico en la enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos con un fuerte apoyo visual y acceso en línea. Pretendemos desarrollar el software con herramientas de licencia GNU.

ALTERNATIVAS

Nuestra búsqueda ha arrojado la existencia de diferentes opciones para el desarrollo del software educativo en el marco de las condiciones antes planteadas. Entre ellas podemos mencionar:

- **PHP.** Es un lenguaje de programación de estilo clásico. No es un lenguaje de marcas como podría ser HTML. Está más cercano a JavaScript o a C. Pero a diferencia de Java o JavaScript que se ejecutan en el navegador, PHP se ejecuta en el servidor. Por lo tanto, nos permite acceder a los recursos que tenga el servidor como, por ejemplo, podría ser una base de datos. El programa PHP es ejecutado integralmente en el servidor y el resultado enviado al navegador. El resultado es normalmente una página HTML. El agregado de la librería **JPGRAPH**, le aporta un tono matemático muy apropiado para el software que pretendemos desarrollar.

- **JAVA.** Implementa la tecnología básica de C++ con algunas mejoras y elimina algunas cuestiones para mantener el objetivo de la simplicidad del lenguaje. Java trabaja con sus datos como objetos y con interfaces a esos objetos. Soporta las tres características propias del paradigma de la

orientación a objetos: encapsulamiento, herencia y polimorfismo. También aparece como una alternativa válida.

- **OCTAVE.** Utilizar esta herramienta tiene la ventaja de ser muy similar a MatLab, con el cual se desarrolló el software que elaboramos en el Proyecto de Investigación anterior. Además, recientemente apareció **QTOCTAVE**, que es un front-end para Octave. Su objetivo es, mediante menús y ventanas, facilitar algunas tareas y hacer más simple el manejo de Octave.

CONCLUSIÓN

El software educativo que nos proponemos elaborar tiene como meta final disponer de una aplicación gratuita que corra en un entorno web con mínimos requerimientos y que permita ser utilizada como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de métodos numéricos, donde se muestre de forma numérica y visual el comportamiento de éstos.

Teniendo presente este objetivo y a partir del análisis que hemos realizado sobre el material disponible en línea, decidimos optar por emprender la tarea de elaborar el producto con PHP agregando la utilización de la librería JPGRAPH que potencia las posibilidades gráficas.
Con respecto a la plataforma, consideramos apropiado aplicar el software sobre Linux y un servidor Apache, por su carácter gratuito y eficiente, además de que la Institución en la cual desarrollamos estas tareas de investigación ya cuenta con ese soporte.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. 2005. *Software para la enseñanza - aprendizaje de algunos métodos numéricos*. VII Edumat, EMAT Editora, Autores: J. E. Sagula, N. Hein y otros. Compilador: J. E. Sagula. Editor literario: P. C. Chale. CD-ROM ISBN Nº 987-20239-3-X, 10 pp. Chivilcoy, Buenos Aires, Argentina.

[2] Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. 2006. *Uso de tecnología en la enseñanza-aprendizaje de temas de Cálculo Numérico*. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. CMM-040505-IC7. CLAME. Vol. 19, ISBN 970-9971-08-05, pp. 879-885. México.
También disponible en: http://www.clame.org.mx

[3] Ausubel, D. P. y Novak, J. D. 1978. *Educational Psychology: "A Cognitive View"*. Holt, Rinerhart and Winston. New York.

[4] Cordero, F. 2004. *La modelación y la enseñanza de las matemáticas*. Artículo Innovación Educativa 21 IPN.

[5] Mathews, J. y Fink, K. 2000. *Métodos Numéricos con MATLAB*. Prentice – Hall. Madrid. España. (Trad. de *Numerical Methods using MATLAB*. 1999. Prentice - Hall).

[6] *Métodos Numéricos*. Centro de Investigación y Desarrollo de Software Educativo del Instituto Tecnológico de Costa Rica.
Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO. Visitado el: 29/08/2007.

[7] Nakamura, S. 1997. *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB*. Pearson Educación. México. (Trad. de *Numerical Analysis and Graphic Visualization with MATLAB*. 1996. Prentice-Hall).

[8] Pizarro, R. A. y Ascheri, M. E. 2007. *Diseño e implementación de un software educativo en Cálculo Numérico*. II Congreso de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología, TE&ET 07. CD-ROM, 9 pp. La Plata. Buenos Aires. Argentina.





Universidad Nacional de La Pampa

Relevamiento de software en línea para la enseñanza-aprendizaje de métodos numéricos. Herramientas para su desarrollo

ASCHERI, M. Eva; PIZARRO, Rubén; ASTUDILLO, Gustavo; GARCÍA, Pablo; CULLA, M. Eugenia

Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa - ARGENTINA

mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

RESUMEN

Presentamos una breve descripción de los resultados obtenidos a partir del relevamiento realizado sobre las herramientas que se pueden instalar en la PC y las aplicaciones que están disponibles en línea, y destinadas a la enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos que se estudian en un curso básico de Cálculo Numérico.

Mostramos algunas de las herramientas existentes de carácter libre que permiten desarrollar este tipo de aplicaciones, con el objetivo de implementar un sitio web en el cual se puedan aplicar los diferentes métodos numéricos e interpretar gráficamente cada uno de ellos, lo que sin duda redundará en beneficio del proceso de enseñanza y aprendizaje de los mismos.

EXPERIENCIA PREVIA

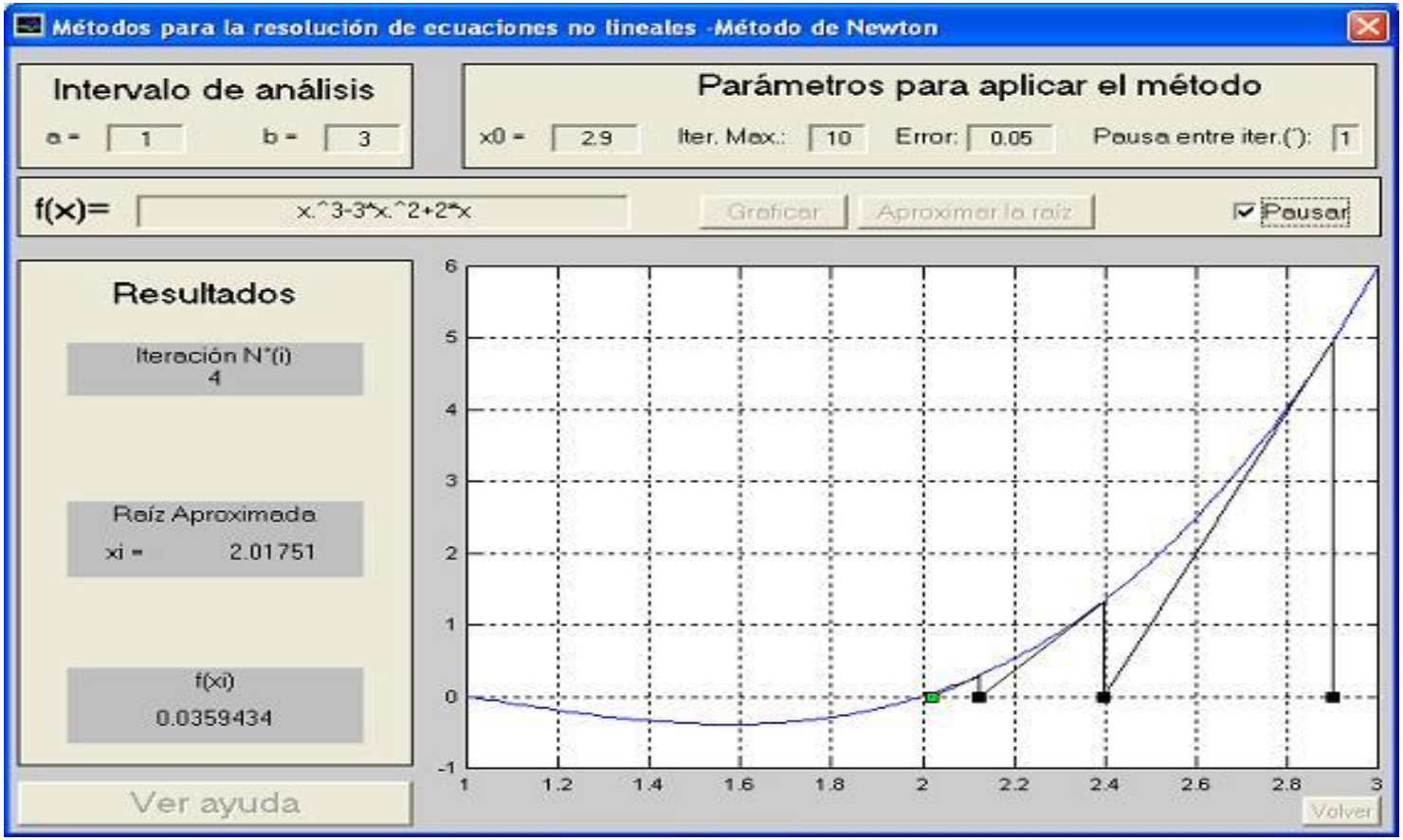
Hemos desarrollado e implementado un software educativo para temas de Cálculo Numérico, con los ***objetivos*** de:

- *Facilitar la enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos por medio de la interpretación gráfica de los mismos.*

- *Brindar una herramienta que aporte al aprendizaje de los diferentes métodos numéricos, tratando de evitar un estudio memorísticos de reglas y fórmulas, y la copia de los resultados obtenidos sin interpretarlos de acuerdo al problema tratado.*

CARACTERÍSTICAS DEL SOFTWARE DESARROLLADO

- Realizado en MatLab
- Permite la interpretación gráfica y numérica de los diferentes métodos de resolución de ecuaciones no lineales



En la figura se muestra la implementación del método de Newton

INCONVENIENTES DETECTADOS

- ***Portabilidad***

  Si bien el software desarrollado es de dimensiones pequeñas en cuanto al espacio que ocupa en disco, el usuario debe adquirir una licencia de MatLab para instalarlo, lo cual es costoso, según nuestra realidad. Además, resulta particularmente engorroso convertir esas aplicaciones a programas ejecutables “standalone”.

- ***Acceso en línea***

  El software no puede ser utilizado a través Internet. Por ello es que buscamos una herramienta que cubra esta expectativa, de manera que funcione como recurso para actividades en la modalidad a distancia o semipresencial, y también como complemento del desarrollo de las clases presenciales.

ACCIONES A DESARROLLAR

- A partir del software educativo que elaboramos y de la experiencia obtenida a través de su uso, pretendemos desarrollar una nueva aplicación a la que se pueda acceder de manera remota y con la menor cantidad de limitaciones de hardware y software.

- Con este nuevo software educativo buscamos favorecer las actividades de consolidación de los saberes enseñados y aprendidos, aportándole al alumno una herramienta para realizar actividades complementarias y experimentales.

- El software educativo a desarrollar permitirá mostrar gráficamente cómo opera el método numérico usado. La aplicación de elementos gráficos realiza un importante aporte al proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Se pretende que el usuario de este software solo requiera una PC con conexión a Internet, sin la necesidad de instalar algún software complementario.

ESTADO DEL ARTE

Existe una cantidad importante de herramientas desarrolladas que permiten trabajar con contenidos matemáticos y visualizar resultados.

Entre algunas de sus principales características podemos citar las siguientes:

- *La mayoría de las herramientas se deben bajar e instalar en la PC*
- *Existen herramientas libres y comerciales*
- *Permiten trabajar con diversos contenidos temáticos de matemática*

Existen pocos recursos disponibles que se puedan utilizar en línea. Uno de los encontrados y con características similares al que nos proponemos desarrollar (aunque en nuestro caso deseamos priorizar la visualización gráfica de la forma exacta sobre cómo el método numérico funciona), se encuentra en:

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO/

ALTERNATIVAS

Ante esta situación, emprendimos la tarea de desarrollar un software que actúe como soporte pedagógico en la enseñanza y el aprendizaje de los métodos numéricos con un fuerte apoyo visual y acceso en línea, utilizando herramientas de licencia GNU.

Nuestra búsqueda ha arrojado la existencia de diferentes opciones para el desarrollo del software educativo en el marco de las condiciones antes planteadas.

Entre ellas podemos mencionar las siguientes:

➢**PHP.** Es un lenguaje de programación de estilo clásico. A diferencia de Java o JavaScript que se ejecutan en el navegador, PHP se ejecuta en el servidor. Esto permite acceder a los recursos que tenga el servidor. El programa PHP es ejecutado integralmente en el servidor y el resultado enviado al navegador. El agregado de la librería **JPGRAPH**, le aporta un tono matemático muy apropiado para el software que pretendemos desarrollar.

➢**JAVA.** Implementa la tecnología básica de C++. Trabaja con sus datos como objetos y con interfaces a esos objetos. Soporta las tres características propias del paradigma de la orientación a objetos: *encapsulamiento*, *herencia* y *polimorfismo*.

➢**OCTAVE.** Utilizar esta herramienta tiene la ventaja de ser muy similar a MatLab, paquete con el cual desarrollamos el software educativo anterior. Además, con **QTOCTAVE** se facilitan algunas tareas y hace más simple el manejo de este software.

CONCLUSIÓN

✓*El software educativo que nos proponemos elaborar tiene como meta final disponer de una aplicación gratuita que corra en un entorno web con mínimos requerimientos y que permita ser utilizada como una herramienta para la enseñanza y el aprendizaje de métodos numéricos, donde se muestre de forma numérica y visual el comportamiento de éstos.*

✓*Teniendo presente este objetivo y a partir del análisis que hemos realizado sobre el material disponible en línea, decidimos optar por emprender la tarea de elaborar el producto con* ***PHP*** *agregando la utilización de la librería* ***JPGRAPH*** *que potencia las posibilidades gráficas.*

✓*Con respecto a la plataforma, consideramos apropiado aplicar el software sobre* ***Linux*** *y un servidor* ***Apache****, por su carácter gratuito y eficiente, además de que la Institución en la cual desarrollamos estas tareas de investigación ya cuenta con ese soporte.*

BIBLIOGRAFIA

Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. 2005. *Software para la enseñanza - aprendizaje de algunos métodos numéricos*. VII Edumat, EMAT Editora, Autores: J. Sagula et al. ISBN 987-20239-3-X, 10 pp. Bs. As., Argentina.

Ascheri, M. E. y Pizarro, R. A. 2006. *Uso de tecnología en la enseñanza-aprendizaje de temas de Cálculo Numérico*. CLAME. Vol. 19, ISBN 970-9971-08-05, pp. 879-885. México. http://www.clame.org.mx

Ausubel, D. P. y Novak, J. D. 1978. *Educational Psychology: "A Cognitive View"*. Holt, Rinerhart and Winston. New York.

Cordero, F. 2004. *La modelación y la enseñanza de las matemáticas*. Artículo Innovación Educativa 21 IPN.

***Métodos Numéricos*.** Centro de Investigación y Desarrollo de Software Educativo del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Disponible en: www.cidse.itcr.ac.cr/cursos-linea/NUMERICO. Visitado el: 29/08/2007.

Nakamura, S. 1997. *Análisis Numérico y Visualización Gráfica con MATLAB*. Pearson Educación. México.

Zazkis, R., Dubinsky, E. y Dautermann, J. 1996. *Coordinating visual and analytic strategies: a student's understanding of the Group D4*. Journal for Research in Mathematic Education 27 (4), 435-457.

Rendimiento Académico en Matemática: un estudio con estudiantes de ingeniería en los cursos de Matemática General y Cálculo Diferencial e Integral en el Instituto Tecnológico de Costa Rica

Greivin Ramírez Arce[1],
Cruz Barahona Pereira[2]

Resumen

Este artículo presenta los resultados obtenidos sobre un trabajo realizado para atender la problemática del rendimiento académico en cursos de Matemática General y Cálculo Diferencial e Integral a lo interno de una universidad pública en Costa Rica (Instituto Tecnológico de Costa Rica). El objetivo general de la investigación es contribuir con el mejoramiento del rendimiento académico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática en el Sistema Educativo Costarricense. Para contribuir con dicho rendimiento se utilizaron las experiencias de aprendizaje mediadas propuestas por Feuerstein (en Kozulin, 2000).

1. Problema de Investigación

Cada año miles de estudiantes ingresan a las universidades con la perspectiva de cumplir con una meta profesional, sin embargo inmediatamente en el primer año se ven a sí mismos con debilidades importantes para enfrentarse a las exigencias de los estudios. Una de estas debilidades es el abordaje de las matemáticas, que va desde las malas bases académicas que arrastran desde secundaria hasta las emociones involucradas en el proceso de aprendizaje de dicha disciplina. Además, entra en juego la metodología de enseñanza que aplican los profesores, la cantidad de temas que tienen que verse en cada ciclo lectivo, y las opciones de apoyo académico, humanista y personalizado que ofrecen las universidades.

Así, surge la iniciativa de convocar a los profesores y profesoras de las Escuelas de Enseñanza de la Matemática de las cuatro universidades estatales de Costa Rica, para que de manera conjunta y coordinada realicen acciones en procura de buscar soluciones para el problema del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. A la fecha, este equipo se ha planteado trabajar en tres grandes temáticas, a saber:

- El bajo rendimiento académico a lo interno de las universidades estatales, en los cursos de matemáticas.
- Proyección social de las universidades estatales hacia las comunidades del país en las que existen carencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas.
- Formación de valores en nuestros futuros profesionales en Enseñanza de las Matemáticas para que contribuyan eficazmente a erradicar los males que aquejan el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, principalmente en las regiones de nuestro país con mayores debilidades en este aspecto.

El objetivo general del proyecto es contribuir con el mejoramiento del rendimiento académico en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática en el Sistema Educativo Costarricense.

A partir de Agosto de 2006, se da prioridad a dos proyectos, los cuales son: el trabajo interno de las universidades para mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas y el proyecto de fortalecer el aprendizaje de esta materia en comunidades de bajos índices sociales donde existan carencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica. gramirez@itcr.ac.cr
[2] Instituto Tecnológico de Costa Rica, cruci8516@costarricense.cr

Este artículo reporta los resultados obtenidos sobre el trabajo realizado para atender la problemática del rendimiento académico en cursos de Matemática General y Cálculo Diferencial e Integral a lo interno de una universidad estatal (Instituto Tecnológico de Costa Rica).

Algunos datos relacionados con la situación Rn (estudiantes que pierden algún curso al menos una vez) se presentan a continuación. La promoción de estudiantes en los cursos de Matemática General y Cálculo Diferencial e Integral en los últimos siete semestres es la siguiente:

Promoción de estudiantes Rn en Matemática General

	I-2007	II-2006	I-2006	II-2005	I-2005	II-2004	I -2004
Matriculados totales	585	213	625	221	630	272	700
Rn matriculados	116	184	125	168	176	201	119
% Rn matriculados del total	20%	86%	20 %	76%	28 %	74 %	17 %
Aprobados Rn	34	92	37	79	74	104	43
Porcentaje Aprobados Rn	29%	50%	29%	47%	42%	52%	36%
Aprobados totales	332	108	324	107	342	132	367
% de Aprobación Total	57%	51%	52%	48%	54%	49%	52%

Fuente: Datos brindados por Edgar Guillén, Departamento de Orientación y Psicología.

Promoción de estudiantes Rn en Cálculo Diferencial e Integral

	I-2007	II-2006	I-2006	II-2005	I-2005	II-2004	I -2004
Matriculados totales	297	528	319	597	386	636	315
Rn matriculados	161	185	172	221	220	191	129
% Rn matriculados del total	54%	35%	54 %	37 %	57 %	30 %	41 %
Aprobados Rn	81	67	68	104	112	82	66
Porcentaje de Aprobados Rn	50%	36%	39.5%	47%	51%	43%	51%
Aprobados totales	139	277	136	324	104	308	182
% de Aprobación Total	47%	53.5%	45%	54%	27%	48%	58%

***Fuente**: Datos brindados por Edgar Guillén, Departamento de Orientación y Psicología.*

2. Marco Conceptual

El marco conceptual consta de cuatro componentes a las que se les ha llamado variables y que están relacionadas con la teoría de la experiencia de aprendizaje mediada propuesta por Feuerstein (en Kozulin, 2000).

Una experiencia de aprendizaje mediada es una interacción mediada entre el estudiante y los estímulos del entorno que posee una calidad especial. Esta calidad especial se consigue mediante la interposición de un adulto iniciado e intencionado entre los estímulos del entorno y el estudiante (Feuerstein en Kozulin, 2000). Se dice que hay una experiencia de aprendizaje mediada cuando hay una intencionalidad, se logra una trascendencia y un significado.

Intencionalidad: el profesor (tutor) es el mediador humano que hace que la actividad interactiva sea intencional más que accidental o incidental. Esta intencionalidad está dirigida hacia el objeto (conocimiento) y hacia el estudiante. Así, el profesor modifica algunas características del objeto para que el individuo lo experimente en forma activa más que pasiva. El objetivo principal de la interacción mediada no es el objeto, si no los procesos cognitivos que se desarrollen y que en esta investigación se estarán evaluando las formas de pensamiento que se muestran en esos procesos. Así, el objeto pierde su forma natural, y se convierte en un constructo educativo, el individuo perpetúa la experiencia del aprendizaje mediada y el profesor adquiere experiencia como mediador.

Cada una de las actividades desarrolladas por los estudiantes en este estudio, tenía una intencionalidad propuesta previamente por el investigador (tutor). En la planificación de cada actividad el profesor investigador (mediador) transforma el objeto (los contenidos) sugiriendo la utilización de una serie de instrumentos materiales (la construcción gráficas, detección de errores, entre otros) con el fin de que los estudiantes expresen sus interpretaciones, comparaciones y conjeturas (funciones psicológicas de nivel superior) a través del lenguaje, símbolos y escritura (instrumentos psicológicos) sobre diversos temas de Matemática General y Cálculo Diferencial e Integral.

Trascendencia: en esta teoría es fundamental que la influencia cognitiva adquirida en la experiencia mediada vaya más allá de la tarea inmediata. Para que sea eficaz la trascendencia, la mediación no necesariamente debe ser ni consciente ni deliberada. Los conocimientos previos que se adquirían en cada actividad, eran fundamentales para que el estudiante pudiera transferir esos objetos a nuevas tareas. Por ejemplo, el dominio de las técnicas de factorización es fundamental para el cálculo de límites. La construcción de gráficas de funciones elementales y su análisis completo (domino, rango, monotonía, concavidad, entre otros) es fundamental para la obtención de límites de una función dada su gráfica o construcción de una gráfica de una función dados algunos límites, o bien, analizar y comprender la continuidad de una función.

Significado: cuando el mediador imbuye de significado los estímulos, los sucesos o la información, se habrá logrado una experiencia de aprendizaje mediado. Según Carpenter y Hiebert (1992), decimos que se adquiere el significado de un concepto cuando relacionamos esos conceptos con múltiples elementos. Por ejemplo, la solución de problemas que están relacionados con eventos de la vida real como la razón de cambio del volumen del agua de un prisma con respecto al tiempo, mezclas de sustancias químicas, ganancias máximas al realizar un negocio, entre otros.

La National Council of Teachers of Mathematics (2000) con los Principios y Estándares para la Educación Matemática pone de relieve cómo con los estándares de procesos se pueden alcanzar la intencionalidad, la trascendencia y el significado que se pretende. Por ejemplo, con el estándar de conexiones apunta:

> Cuando los estudiantes pueden conectar ideas matemáticas, su comprensión es más profunda y duradera. Pueden ver conexiones en la rica interacción entre sus temas, en contextos que relacionan las matemáticas con otras disciplinas y en sus propios intereses y experiencias. A través de la enseñanza que resalte la interrelación de las ideas matemáticas, no sólo aprenden la asignatura sino que también se dan cuenta de su utilidad. (p. 68)

Dado que la experiencia de aprendizaje mediada tiene una intensión, se define la variable *aspectos matemáticos* que contempla los objetivos y conocimientos teóricos por alcanzar en la investigación. El alcance de procesos cognitivos y las formas de pensamiento que los estudiantes muestren en el desarrollo de las actividades mediadas, además de la trascendencia que se pueda lograr serán analizados con la variable *procesos metacognitivos*. La *motivación y el ambiente* serán fundamentales para que se dé esa trascendencia y significado en los estudiantes que repiten cursos durante la experiencia de aprendizaje mediada.

Definición de variables

Las variables que se contemplan en el estudio son:

***Motivación*:** es el interés mostrado por el estudiante para con el taller.

***Ambiente*:** son los elementos del entorno que se dan en el taller y propician la comunicación y la seguridad en los estudiantes.

***Aspectos matemáticos*:** son los conocimientos previos mostrados por los estudiantes, el lenguaje matemático y los aspectos teóricos mostrados durante las sesiones.

***Procesos metacognitivos*:** operaciones, actividades y funciones cognoscitivas internas de un individuo que le permiten recabar, producir y evaluar información, que a la vez hacen posible que dicha persona pueda conocer, controlar y autorregular su propio funcionamiento intelectual (González, 1998).

El esquema del marco conceptual que guía la investigación es:



3. Metodología

3.1 Participantes en la investigación

La investigación se trabajó durante el II semestre del 2006 y el I semestre del 2007 con estudiantes universitarios que han perdido al menos una vez los cursos de Matemática General y Cálculo Diferencial e Integral en el Instituto Tecnológico de Costa Rica. A continuación se presenta el número de estudiantes atendidos por curso y semestre:

Semestre	Curso	
	Matemática General	Cálculo Diferencial e Integral
II - 2006	29	24
I- 2007	21	28

Trabajaron 12 tutores que son estudiantes avanzados de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora que se brinda en la misma universidad. Cada tutor imparte un taller por semestre. El número de talleres por semestre y curso son:

Semestre	Curso	
	Matemática General	Cálculo Diferencial e Integral
II - 2006	5	5
I- 2007	4	5

Además, dos profesores coordinan la investigación, un profesor de matemática que se encarga de preparar a los tutores en el cumplimiento de los objetivos y contenidos matemáticos y una psicóloga encargada de atender a los estudiantes de los talleres que requieren ayuda psicoeducativa, esto por las características de la población de estudiantes que se atienden.

3.2 Instrumentos de recolección de datos y procedimiento de trabajo

Al ser esta una investigación cualitativa se utilizaron como instrumentos de recolección de datos los siguientes: cuestionarios, notas de campo, entrevistas (a estudiantes, tutores y profesores), bitácoras y reportes escritos de los planeamientos utilizados por los tutores.

3.3 Procedimiento de trabajo

La propuesta particular de este proyecto es ofrecer talleres para los cursos de Matemática General y Cálculo Diferencial e Integral, impartidos por estudiantes avanzados de la carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora. Los talleres se imparten semanalmente (tres horas por semana cada uno), y se desarrollan con una metodología participativa para la revisión de conceptos y procedimientos, desarrollo de ejercicios, preparación para las pruebas y retroalimentación posterior a la

realización de las pruebas. Así mismo, se brinda atención personalizada, por esta razón, el cupo es limitado y sólo se atiende un máximo de 10 estudiantes por tutor(a). Además, en los casos requeridos, se brinda consulta individual.

4. Análisis de resultados

El aporte de los tutores en cada uno de los talleres, para propiciar las experiencias de aprendizaje mediadas, se ve reflejado a través de la reducción de las bitácoras, cuyo análisis toma como referencia las variables definidas en la investigación. Así, los resultados que arrojan el análisis de las bitácoras y las notas de campo se presenta a continuación.

Para los talleres del curso de Matemática General:

Ambiente

En los talleres se propicia la confianza, comunicación, participación activa, respeto y compañerismo entre ellos mismos y el tutor o la tutora, logrando seguridad sin temor al error y promoviendo el pensamiento crítico.

Motivación:

La motivación de los estudiantes en los talleres está relacionada con el ambiente propiciado, reflejándose en su participación continua, asistencia y mejorando el rendimiento académico. La seguridad que se logra en sus estudiantes lo refleja Wilberth y José: "¡Ve! Ahora si paso este curso" (W). "Le voy a demostrar a esa profe que yo si puedo" (J). Erick y David manifiestan: "estamos tranquilos, hemos estudiado bastante, y el examen no debería estar tan difícil"

Es fundamental el esfuerzo del tutor por motivar y a la vez sentirse motivado pues esto hará que plantee retos; como lo dicen los estudiantes Erick y David.

Procesos metacognitivos

El tutor pone especial atención a los errores cometidos y en los buenos procedimientos desarrollados, de tal manera que esta práctica también la hagan entre los estudiantes como en el caso del estudiante Marco que dice: "debemos resolver la ecuación para hallar el valor de *x*". El ejercicio era: $\frac{34-2x}{3}+9<\frac{3x-8}{4}-x$

Javier reconoce el error y corrige a Marco diciéndole: "No es una ecuación, sino una inecuación".

Además se promueve en los estudiantes que pongan en práctica los conocimientos previos y tener claro los conceptos, por ejemplo, Diana da como concepto de ecuación: "una expresión donde hay variables", la tutora cuestiona su definición para que ella la corrija por sí misma.

Es importante que el estudiante conozca sus potencialidades, limitaciones y conocimientos previos con el fin de regular su funcionamiento intelectual y retroalimentarse.

Aspectos Matemáticos

Algunos estudiantes no tienen suficientes conocimientos previos mostrando errores en los números reales, leyes de potencia, radicación y factorización, por ejemplo, Andrey no sabe que hacer con los exponentes negativos en la expresión: $\frac{\left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}\div\left(x^{-2}-y^{-2}\right)^{-1}$

También se cometen errores como: $\frac{5x^3+9x^2-7x+1}{10x^3+13x-3}=\frac{\left(x-\sqrt{2}-1\right)\left(x-\sqrt{2}+1\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)}{\left(x-\frac{1}{5}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)}$

El lenguaje matemático utilizado por los estudiantes es coloquial tal es el caso de Julio en el que $\log_a b$ lo lee como: "logaritmo en base a elevado a la b" o en el caso del estudiante Marco que al definir la ecuación indica: "está igualado a algo". También tienen dificultades para definir el dominio máximo de una función como Fabián que en el ejercicio: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-5x+6}}+\frac{5}{\sqrt[3]{2x-7}}$ mencionó que: "el dominio es el conjunto de los números reales, por que está definido para reales, y que las raíces del denominador nunca se hacían cero".

Para Erick era diferente los logaritmos naturales de los logaritmos en otras bases, por lo que no estaba seguro si estos logaritmos tenían las mismas propiedades, el mismo estudiante preguntaba: "¿Por qué se aplica logaritmo natural en ecuaciones exponenciales donde la base es *e*?"

El uso de la calculadora refleja que los estudiantes saben cómo utilizarla, pero esto provoca que menosprecien la teoría y se les dificulte la realización del ejercicio sin el uso de la misma. Todas estas dificultades y procesos matemáticos fueron fortalecidos en los talleres.

Para los talleres de Cálculo Diferencial e Integral:

Ambiente

Utilizar diferentes estrategias por parte de los estudiantes en la realización de los ejercicios propuestos: haciendo preguntas directas, retroalimentarse de los errores, participando activamente, apoyándose mutuamente, entre otros, los beneficia para que tomen confianza y seguridad.

Los estudiantes sienten la libertad en los talleres de opinar sobre sus profesores, como mencionan Giovanna y Luis: "el profesor hacía las cosas suponiendo que ellos ya deben saber los temas, aún cuando están llevando el curso por primera vez".
Jorge y Victor: "¡cómo es posible que mis compañeros hayan visto tanta materia y temas que no hemos empezado a ver!"

Los estudiantes comprenden que el taller es un complemento al curso para satisfacer las necesidades como las que manifiestas Jorge y Victor.

Motivación

El interés del estudiante hacia el taller les permite aclarar sus dudas, buscar prácticas extras y ver temas nuevos, ya que previamente no había acabado el semestre completo; como el caso de Alvaro que estaba ansioso por empezar el tema de optimización, otros con sumas de Riemann e integrales.

Procesos metacognitivos

La capacidad que van adquiriendo los estudiantes para reconocer y corregir sus errores son indicadores de madurez en ciertos temas, como el buen uso del lenguaje matemático y el evitar seguir una serie de procedimientos repetitivos en aras del análisis, como por ejemplo Juan manifiesta que: "él no había leído esa parte" refiriéndose a la construcción de una caja con tapa en un problema de optimización.

El reconocimiento visual de los estudiantes es fundamental para que ellos se percataran que en $\int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}dx$ se debe hacer sustitución trigonométrica, sin embargo esto debe conectarse con conocimientos previos, pues solo Marilyn sabía cuál sustitución era la correcta.

Aspectos Matemáticos

Las dificultades con conocimientos previos: radicales y potencias, función lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica y trigonométrica repercute en el cálculo de límites, continuidad, integrales, entre otros; por ejemplo, Marta menciona: "no sé que hacer con $\ln^2 x$" cuando se le presenta el siguiente ejercicio $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}dx$.

Además, intentan factorizar x^2+1, no entienden por qué $x^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^4$ y no saben leer $-3 \le f(x) \le 2 \ \forall x \in]-\infty,-3]$. Los estudiantes muchas veces fijaron su atención en procedimientos repetitivos teóricos más que en análisis, por ejemplo en integración por partes:

Juan realiza $\int udv = uv - \int udv$

Mientras que Xiomara realiza $\int udv = uv - \int vdv$

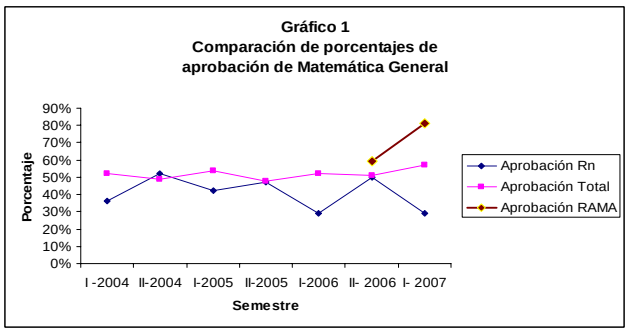
Luis en el límite $\lim_{x \to -\frac{5}{4}} \frac{5}{\left|6x+\frac{15}{2}\right|}$ evalúa únicamente por la izquierda de $-\frac{5}{4}$ sin hacer análisis de la forma del límite y observar que se requiere definir el valor absoluto para hacer el cálculo de límites laterales.

Cuando al estudiante se le presenta un ejercicio teórico tiene dificultades ya que conoce los resultados pero no lo que significa su contenido, por ejemplo Roy, Marilyn y Fabian tienen problemas en los ejercicios

- Determine el valor de *k* de modo que el límite $\lim_{x \to k^-} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{4k+1}{4k^2-1}} = 0$
- Sea *f* una función integrable, si *f* cumple que $\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 t^2 f(t)dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C$, *C* constante

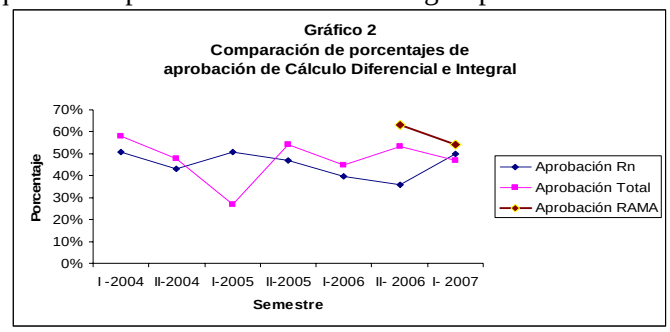
a) Determine el criterio de *f*.
b) Determine el valor de *C*, que satisface la igualdad anterior.

Gráficamente se muestra que el porcentaje de aprobación de los estudiantes que asisten a los talleres RAMA (Rendimiento Académico en Matemática) es muy superior al porcentaje de aprobación general de los demás estudiantes:



Fuente: Datos de tabla 1

En matemática General el porcentaje de aprobación de los estudiantes Rn no alcanza al porcentaje de aprobación total, por lo que es una población vulnerable a seguir perdiendo el curso.



Fuente: Datos de tabla 2

En este curso, el porcentaje de aprobación es muy variante, sólo en el I semestre de 2005 la aprobación Rn fue muy superior al porcentaje de aprobación total. Además, en el I semestre de 2007 hubo una leve diferencia a favor de los Rn, éxito que se lo atribuimos al proyecto RAMA, pues contribuye de manera significativa en el porcentaje de aprobados totales.

5. Conclusiones y Recomendaciones

Las experiencias de aprendizaje se lograron muchas veces con éxito cuando el mediador intervenía adecuadamente, gracias a la atención individual, para modificar el objeto (conocimiento) de tal manera que el estudiante autorregula su aprendizaje trayendo los conocimientos previos a las nuevas situaciones; además, en la medida que los estudiantes lograron relacionar los conceptos con problemas en contexto, como los problemas de optimización. El ambiente de confianza y comunicación propiciado por los tutores en los talleres contribuye a que los estudiantes reconozcan sus limitaciones y potencialidades con el fin de que la autorregulación sea constante.

Algunas veces los estudiantes atendidos se hacen dependientes del mediador por lo que el tiempo dedicado en los talleres puede llegar a ser más del requerido. La falta de un aula especializada para dar lecciones asistidas por computadora, así como la poca comunicación entre el trinomio tutor-profesor-estudiante repercute en el buen funcionamiento de los talleres. Además, hay problemas de arraigo de errores en sus conocimientos previos, dependencia de la calculadora y la repetición de procedimientos sin razonamiento por parte de los estudiantes. El proyecto representa una oportunidad formativa para los tutores.

Según los estudiantes, iniciar tardíamente, la inestabilidad de las aulas y la falta de coordinación con los profesores repercute en el dinamismo del taller, ya que se dispone de poco tiempo para resolver las prácticas de los cursos. Comprender adecuadamente los contenidos del curso, la disposición del tutor para aclarar las dudas y propiciar el reconocimiento de errores influye de manera positiva en el rendimiento académico de los estudiantes.

Recomendaciones para los talleres RAMA desde distintos puntos de vista:

Según los estudiantes: se debe coordinar con anticipación con el profesor de cada grupo, pues esto permitirá implementar metodologías de enseñanza que sean más dinámicos; estos grupos deberían ser pequeños para aumentar el número de horas semanales, lo que mejoraría la calidad y el nivel de dificultad de los ejercicios que se resuelvan; así como disponer de horarios más accesibles permitiría realizar una segunda etapa de incorporación de estudiantes después del primer examen parcial.

Según los tutores; se debe divulgar más el proyecto, crear horarios más flexibles de los talleres y contar con un aula equipada permitiría aplicar los conocimientos adquiridos en la carrera de Enseñanza de

la Matemática Asistida por Computadora para desarrollar prácticas con un nivel de dificultad mayor. Se sugiere un curso hacia el tratamiento de errores y faltas graves que comenten los estudiantes que vienen de secundaria; además, los estudiantes y profesores deben conocer las bases matemáticas que poseen; por ejemplo, podría aplicarse un examen diagnóstico a parte del examen de admisión que sea revelador de esas dificultades.

Según los coordinadores, la participación del Departamento de Matemática y Orientación y Psicología debería detectar problemas que presentan los estudiantes Rn, que no son necesariamente académicos, sino también problemas psicosociales, económicos, familiares, entre otros.

6. Referencias bibliográficas

- Biggs, J. & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. En H. A. H. Rowe (ed). *Intelligence: Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). Hillsdale, NJ. USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T. & Hiebert, J. (1992). Learning and Teaching With Understanding. En Douglas A. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematic Teaching and Learning* (pp. 65-91). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Primera edición. Barcelona: Paidós.
- Miles, M. & Humberman, M. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook.* 2^{a} edición. London: Save Publications.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Vygotsky, L. (1960). The instrumental method in psychology. *Razvitie vysshikh psikhicheskikh fuktsii*. Moscow. Krupskaya Academy of Communist Education, 134-143.

Palabras clave: rendimiento académico**,** experiencia de aprendizaje mediada, Matemática General, Cálculo.

Agradezco al Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) y a la Comisión Nacional de Rectores (CONARE) por su apoyo económico. A la psicóloga Alejandra Alfaro y a los tutores Sarita Cubero, Cinthya Arce, Susan Mora, Evelyn Núñez, Randy Wynta, Donald Herrera, Alejandro Salas, Dere Elizondo, Viviana Santamaría, Rocío Arguedas, Manuel Zapata y Jorge Mata por su aporte significativo a la investigación.

Simulación y optimización[1]

Carlos E. Azofeifa[2]

Resumen

Se presenta el complemento de Excel, @Crystal Ball como una herramienta eficaz en problemas típicos de optimización de modelos bajo presencia de incertidumbre. Para ello se utiliza el OptQuest de @Crystal Ball el cual encuentra mediante técnicas avanzadas de optimización la combinación correcta de variables para producir el mejor resultado posible en modelos de simulación. Se resolverá primeramente el problema usando Solver, luego se comparan y analizan los resultados obtenidos con lo realizado en OptQuest.

Palabras claves: pronóstico, optimización, estadística, riesgo, incertidumbre, Montecarlo, hipercubo latino

Introducción

Un problema relevante de un administrador o de un ingeniero en un ambiente altamente globalizado es realizar excelentes pronósticos del futuro, sobre todo en presencia de riesgo e incertidumbre. Por ejemplo, en problemas cotidianos de nuestro entorno como maximizar un portafolio de inversiones. Al considerar el modelo matemático de este portafolio, observamos que no es difícil encontrar una solución de manera que el retorno esperado sea máximo, esta posible solución del problema puede ser encontrada usando programación lineal en el caso en que el modelo se comporte como tal, o bien utilizando un método alternativo. Sin embargo esta solución solamente es una respuesta al momento presente, ¿seguirá siendo válida dentro de un año, un mes o tres años?, o ¿a largo plazo cuál será la mejor inversión?

Observemos que no solamente queremos hacer un buen pronóstico de las inversiones, sino además queremos que éstas sean máximas en determinado tiempo, es decir que alcancen valores óptimos. Así esperaremos al final del proyecto de inversión un retorno máximo.
Por tanto al hacerse más complejo el mundo de los negocios, ha aumentado la necesidad de asegurar, sobre cierta base racional, el futuro. Se necesitan planear ventas, tasas de interés para futuras inversiones, indicadores económicos para planeamiento financiero, niveles de ingreso, inventarios, tasas de natalidad, desempleo, etc.

En el caso de optimizar un modelo lineal usando Solver de Excel y realizando el estudio de sensibilidad, podríamos mantener válida nuestra solución siempre y cuando, nuestras variables tengan un dominio adecuado dentro de los rangos asignados en el estudio de sensibilidad, de lo contrario tendríamos que volver a optimizar en cada caso y por tanto cambiar de nuevo nuestra inversión para posibles cambios del dominio de las variables.

Optimización

Un ejercicio cotidiano es elegir la opción más adecuada entre varias opciones, es decir, encontrar la mejor solución a un problema determinado, entre un conjunto factible de soluciones. La mayoría de las veces se nos presenta un conjunto grande de posibles restricciones y debemos obtener un modelo matemático del problema para poder resolverlo, desde luego también queremos que este modelo sea lo más cercano a la descripción del problema real.

La teoría que nos proporciona los resultados y herramientas adecuadas para estudiar este tipo de problemas se llama ***Optimización Matemática***. Las aportaciones de esta teoría se remontan a los años cuarenta y cincuenta del siglo pasado. Entre sus ramas importantes podemos mencionar la Programación

[1] Este artículo fue financiado por el Proyecto No 820-A2-115, inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la U.C.R
[2] Profesor Escuela de Matemática U.C.R – U.N.A

lineal y no lineal, Programación entera, Programación Convexa, Optimización Dinámica, etc, siendo indispensable también un conocimiento general en Algebra Lineal y Análisis Matemático.

En este tipo de problemas podemos encontrar optimización sin restricciones y con restricciones, sin embargo podemos observar que todos estos problemas sean con más o menos componentes matemáticos son determinísticos, es decir, cada uno de ellos se puede resolver con la técnica adecuada. Si no existen restricciones o bien la restricción es de igualdad y con un número menor o igual de variables que la función objetivo, entonces la respuesta al problema es el cálculo diferencial, pues solamente lo que necesitamos es buscar los extremos de una función; esto es, lo que conocemos como ***Optimización clásica*.** En cambio, si las restricciones contienen una cantidad mayor de variables que la función objetivo o hay restricciones de desigualdad, es fácil encontrar métodos de resolución. Por ejemplo, si las restricciones y la función objetivo son lineales se utiliza la Programación Lineal y el Solver de Excel (Optimización no clásica).

Por el contrario, si las condiciones no se cumplen, tenemos las llamadas Condiciones de Khun-Tucker, que en algunos casos funcionan para localizar puntos críticos. En otros casos cuando fallan por ejemplo las condiciones anteriores se pueden usar en caso de tener información imperfecta (la función objetivo puede no conocerse) métodos numéricos, como por ejemplo el método de Runge Kuta (Matemática borrosa).

Estos procesos de optimización tienen como propósito central asignar de la mejor manera posible los recursos para lograr el máximo de una función objetivo, teniendo en cuenta pocas o muchas restricciones. Es decir, debemos escoger los mejores valores para el conjunto formado por las variables de decisión con el fin de minimizar o maximizar una función objetivo satisfaciendo limitaciones o restricciones de estas variables, usualmente las restricciones se aplican mediante ecuaciones o inecuaciones.

Por tanto debemos tener un modelo matemático que especifique la variable objetivo, por ejemplo:
1-.Maximizar utilidades o la producción, minimizar costos o recursos.
2-.Un conjunto de restricciones, y
3-.Un conjunto de variables de decisión.
Ahora vamos a resolver un problema determinístico, a saber: optimizar un portafolio de inversiones usando Solver

Problema de administración de cartera de valores

El gerente de cartera de una administradora de pensiones, se le ha pide invertir $1000000 del fondo de pensiones. El departamento de investigación de Inversiones ha identificado 6 fondos con estrategias de inversión variables, resultando en diferentes rendimientos potenciales, como se resume en la siguiente tabla:

Tasa esperada de rendimiento de seis fondos de inversión ubicados en						
Fondos						
	Ml Antonio	Nicoya	B Drake	Escazú	Jacó	Parrita
Devolución esperada %	20	18	15	22	25	14

Una manera de controlar el riesgo es limitar la cantidad de dinero invertido en los diversos fondos. Para ese fin, la administración ha especificado las siguientes pautas:

1. La cantidad invertida en Manuel Antonio debe ser al menos de un 30% de la cartera.
2. La cantidad total invertida en Nicoya no debe ser mayor al 40% de la cartera.
3. La cantidad total invertida en Jacó no debe ser mayor al 25% de la cartera
4. La cantidad total invertida en Escazú no debe ser mayor al 25% de la cartera
5. La cantidad invertida en Parrita debe ser al menos de un 10% de la cartera

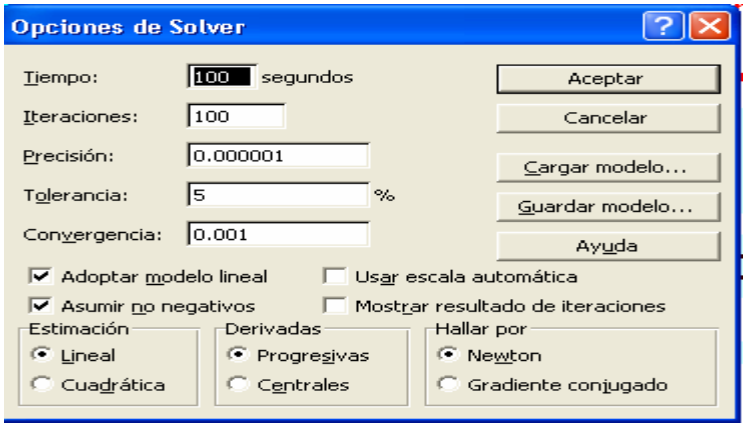
De acuerdo a las pautas anteriores, ¿qué cartera debería recomendar el gerente para maximizar la tasa esperada de retorno? Planteamos y resolvemos el problema primeramente usando la hoja electrónica Excel. Su presentación y solución en la hoja se puede observar de la siguiente manera

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		Modelo de PL para administración de cartera de valores										
2	Utilidad global											
3	0,2115											
4	FONDOS:	MIAnt	Nicoya	B Drake	Escazú	Jacó	Parrita	← Variables de decisión				
5	UTILIDAD MARGINAL	0,2	0,18	0,15	0,22	0,25	0,14	← Margen contributivo unitario				
6												
7		MIAnt	Nicoya	B Drake	Escazú	Jacó	Parrita					
8	PLAN DE INVERSION	0,4	0	0	0,25	0,25	0,1					
9												
10	Restricciones de limitación							totales		disponible		
11	de inversión											
12	Manuel Antonio	1	0	0	0	0	0	0,4	>=	0,3		
13	Nicoya	0	1	0	0	0	0	0	<=	0,4		
14	Escazú	0	0	0	1	0	0	0,25	<=	0,25		
15	Jacó	0	0	0	0	1	0	0,25	<=	0,25		
16	Parrita	0	0	0	0	0	1	0,1	>=	0,1		
17												
18												
19	Restricciones lógicas	todas las variables >=0										
20	Cartera total	1	1	1	1	1	1	1	=	1		
21												

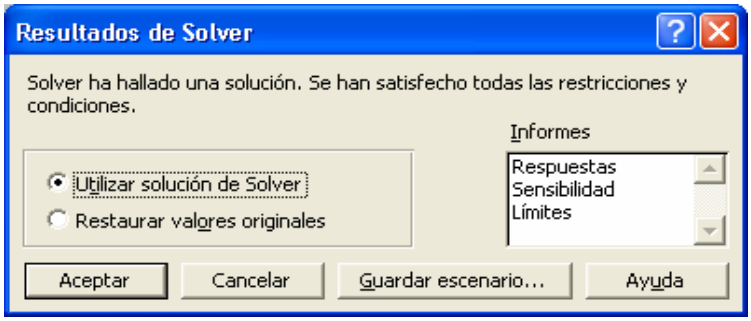
Para su resolución utilizamos Solver el cual se encuentra en ***Herramientas***. Llenamos la información pedida de la siguiente manera:



Haciendo clic en ***Opciones*** de Solver, ponemos además la siguiente información:



Una vez que Solver ha resuelto el problema, coloca el siguiente mensaje:



Observamos que podemos marcar tres informes: Informe de Respuestas, Sensibilidad y de Límites, en el caso de marcar el informe de sensibilidad se obtiene la siguiente información:

Microsoft Excel 11.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [carteraproyecto.xls]cartera (2)
Informe creado: 12/08/2007 21:03:17

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Decremento permisible
B8	PLAN DE INVERSION MIAnt	0,4	0	0,2	0,02	0,02
C8	PLAN DE INVERSION Nicoya	0	-0,02	0,18	0,02	1E+30
D8	PLAN DE INVERSION B Drake	0	-0,05	0,15	0,05	1E+30
E8	PLAN DE INVERSION Escazú	0,25	0	0,22	1E+30	0,02
F8	PLAN DE INVERSION Jacó	0,25	0	0,25	1E+30	0,05
G8	PLAN DE INVERSION Parrita	0,1	0	0,14	0,06	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Decremento permisible
H16	Parrita totales	0,1	-0,06	0,1	0,1	0,1
H13	Nicoya totales	0	0	0,4	1E+30	0,4
H14	Escazú totales	0,25	0,02	0,25	0,1	0,25
H15	Jacó totales	0,25	0,05	0,25	0,1	0,25
H12	Manuel Antonio totales	0,4	0	0,3	0,1	1E+30
H20	Cartera total totales	1	0,2	1	1E+30	0,1

cartera | Informe de sensibilidad 1 | cartera (2)

Podemos observar en las celdas G9:G14 el aumento permitido a los coeficientes de rentabilidad de manera que la solución no cambie, de igual manera se tienen en las celdas H9:H14 los decrementos permitidos a los coeficientes de rentabilidad para mantener la solución. En caso de que los coeficientes tomen valores fuera de estos dominios, tendríamos que volver a resolver el problema y posiblemente retomar el nuevo plan de inversión.

En presencia de incertidumbre

Ahora bien, por lo general los modelos de optimización no son completamente determinísticos, en la mayoría de los casos los datos presentan incertidumbre, lo que implica un riesgo el uso de la solución del problema.

En el caso en que algunas variables tengan un comportamiento de alguna distribución de probabilidad, entonces los métodos anteriores se vuelven ineficientes, necesitan complementarse para poder tomar decisiones acertadas en caso de incertidumbre.

Una ventaja de aplicar el método de simulación al proceso de optimización es que permite abordar problemas con incertidumbre, por eso los valores que arroja el proceso de optimización para las variables de control son valores óptimos.

Además en un modelo de optimización probabilística las variables pronosticadas tendrán funciones de distribución condicionadas al conjunto de variables de decisión.

Desarrollo

Hoy día con ayuda del computador, podemos realizar todas las actividades anteriores de manera fácil en hojas electrónicas como Excel, con ayuda de sus complementos @Risk y @Crystal Ball. Estos softwares combinan simulación y optimización para encontrar el óptimo de modelos que contienen factores de incertidumbre. Algunos problemas que no se pueden resolver por métodos de optimización estándar lineales y no lineales, pueden ser resueltos por ejemplo, con @RISK, el RISKOptimizer el cual combina toda la tecnología de @RISK , análisis de riesgo, y Evolver, algoritmos genéticos de Palisade basados en Solver. ¿Cuándo debemos usar RISKOptimizer? ¿Cuándo debemos encontrar soluciones óptimas en problemas que contienen variables fuera de nuestro control y las cuales toman valores no conocidos?

Variables de decisión

Las variables de decisión requieren para su definición:
1.Límites: Estos determinan el rango que puede asumir la variable
2.Tipo: Si es discreta o continua
3.Pasos: Define las diferencias entre valores sucesivos de la variable. En algunos casos las variables continuas también requieren esta determinación.

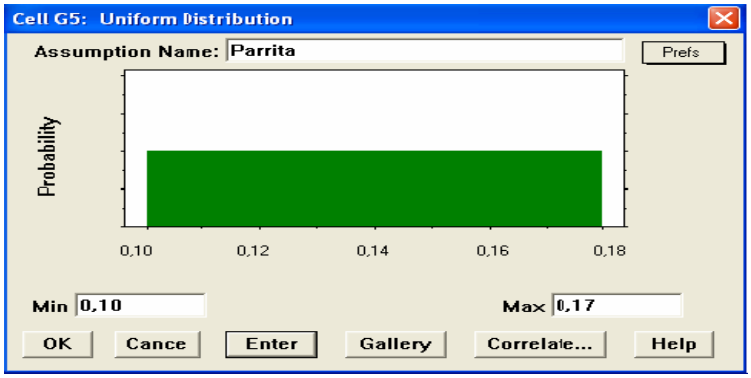
Mediante simulaciones se encuentra el mejor valor de estas variables. En el caso de Crystal Ball se tiene el complemento de Decisioneering: ***OptQuest*** para encontrar soluciones óptimas para hojas de cálculo con simulaciones. Esta técnica también está diseñada para encontrar soluciones que satisfacen una amplia variedad de limitaciones o restricciones.

Proceso básico para la ejecución de *OptQuest*
Crear el modelo de Crystal Ball de la variable de decisión
Defina las variables de decisión con Crystal Ball
Use ***OptQuest*** para seleccionar las variables a optimizar
Especifique las restricciones de las variables de decisión
Seleccione el pronóstico objetivo y defina todos los requerimientos
Seleccione opciones de optimización
Interprete los resultados.

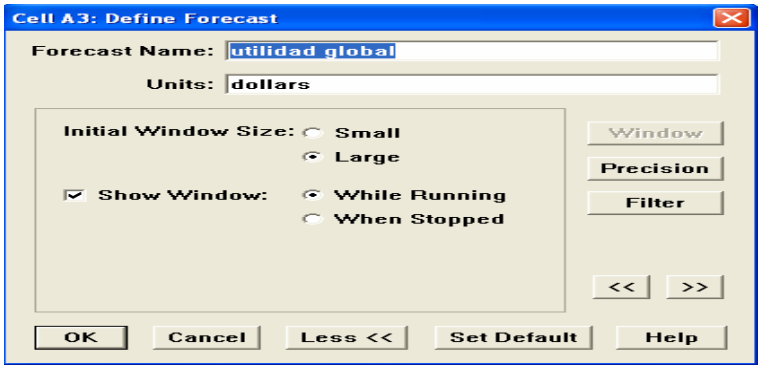
Con Crystal Ball el ***CB Predictor*** puede ser usado solamente para analizar los efectos de incertidumbre en pronósticos. Para el caso de optimizar con Crystal Ball se tiene ***OptQuest***, con este producto se puede analizar el riesgo de nuevos mercados, evaluar experimentos e hipótesis, maximizar el tiempo, el dinero, etc. Lo más interesante es que para usar el ***OptQuest*** no se necesita mucho conocimiento estadístico, matemático o computacional para lograr el uso adecuado de la herramienta, lo cual podría ser tedioso y consumirle mucho tiempo en el caso de querer hacerlo manualmente. Para ilustrar el proceso retomaremos el problema anterior y le aplicaremos esta herramienta.

Haciendo pruebas de bondad de ajuste tenemos los siguientes supuestos para los retornos de los fondos de inversión:
Celda B5: una distribución uniforme con un mínimo de un 17% y un máximo de un 25%
Celda C5: una distribución uniforme con un mínimo de un 18% y un máximo de un 23%
Celda D5: una distribución uniforme con un mínimo de 16% y un máximo de 22%
Celda E5: una distribución triangular con un mínimo de 12% y un máximo de 18%
Celda F5: una distribución uniforme con un mínimo de 17% y un máximo de 25%
Celda G5: una distribución uniforme con un mínimo de 10% y un máximo de 17%

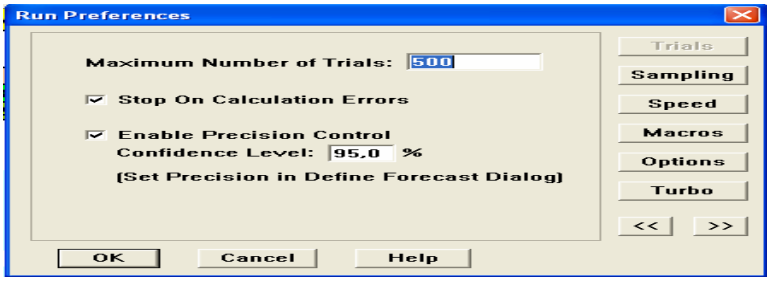
Por ejemplo, la información en la celda G5 se vería así:

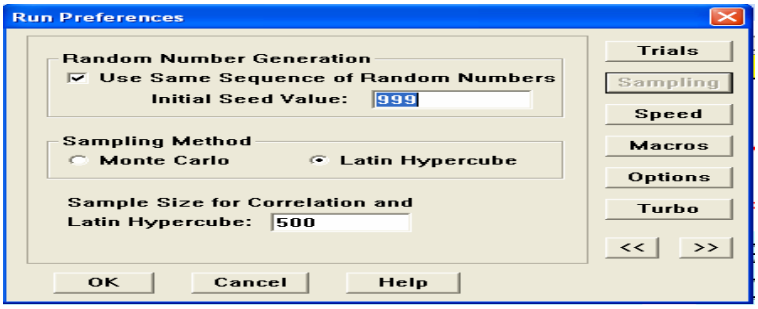


De igual manera para las otras celdas. En el caso de la celda de salida, se tiene:

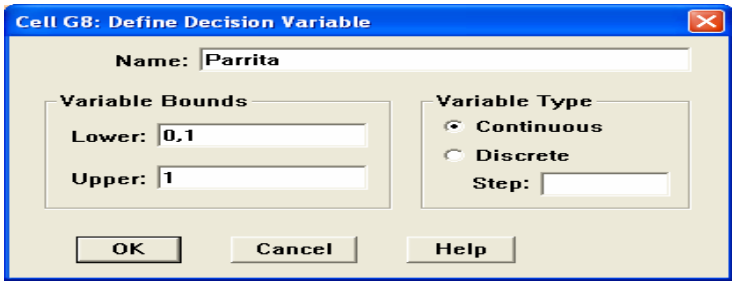


En correr preferencias marcamos

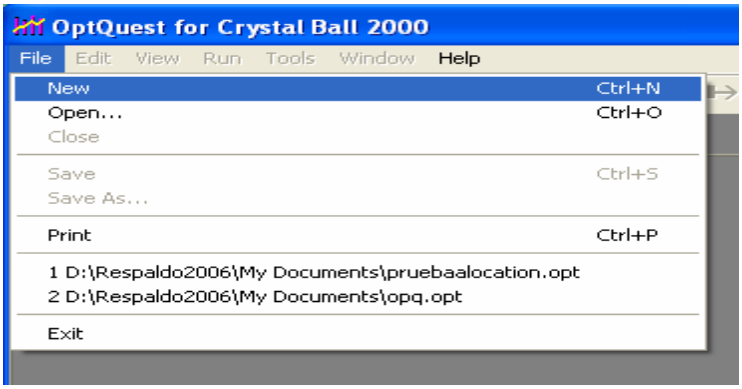




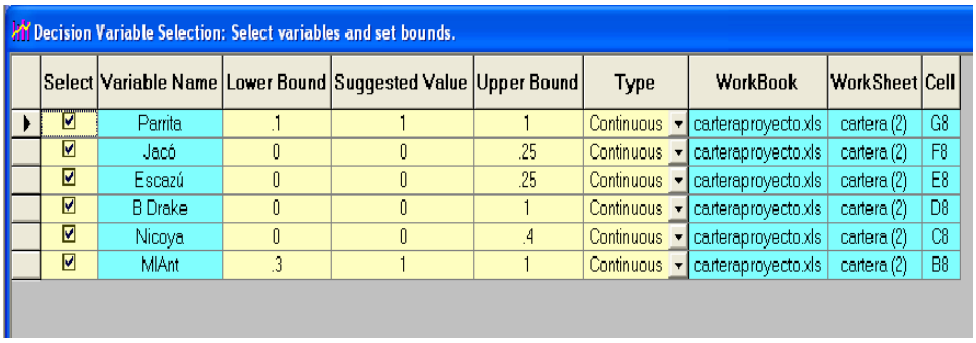
Para definir las variables de decisión, como por ejemplo en el caso de Parrita, nos posesionamos en la celda de interés en este caso G8, luego vamos a ***Cell | Define decision*** y colocamos la información necesaria acerca del fondo de Parrita con las restricciones necesarias como se muestra en la siguiente figura.



Ahora hacemos clic en ***OptQuest / New***

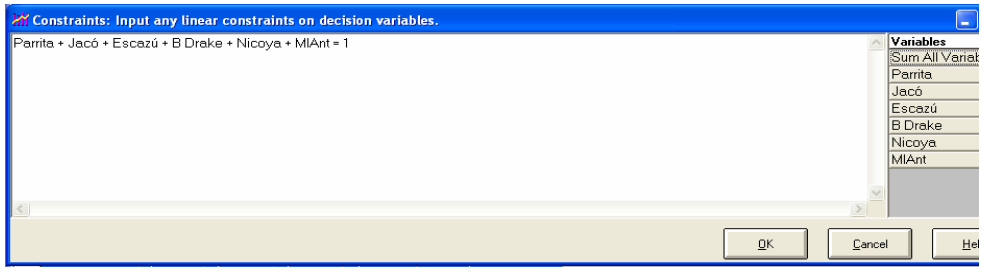


Y creamos un archivo nuevo de optimización, donde se declaran los nombres de las variables así como sus limitaciones y naturaleza:

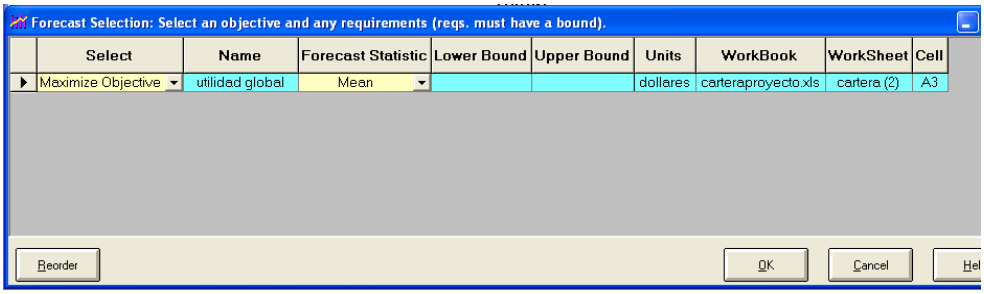


Select	Variable Name	Lower Bound	Suggested Value	Upper Bound	Type	WorkBook	WorkSheet	Cell
☑	Parrita	.1	1	1	Continuous	carteraproyecto.xls	cartera (2)	G8
☑	Jacó	0	0	.25	Continuous	carteraproyecto.xls	cartera (2)	F8
☑	Escazú	0	0	.25	Continuous	carteraproyecto.xls	cartera (2)	E8
☑	B Drake	0	0	1	Continuous	carteraproyecto.xls	cartera (2)	D8
☑	Nicoya	0	0	.4	Continuous	carteraproyecto.xls	cartera (2)	C8
☑	MIAnt	.3	1	1	Continuous	carteraproyecto.xls	cartera (2)	B8

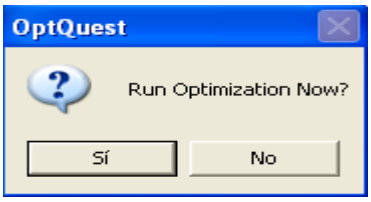
Hacemos clic en ***Aceptar*****,** también debemos especificar las restricciones, en este caso damos clic en ***Sum All variables***, luego insertamos el uno. La pantalla debe verse así:



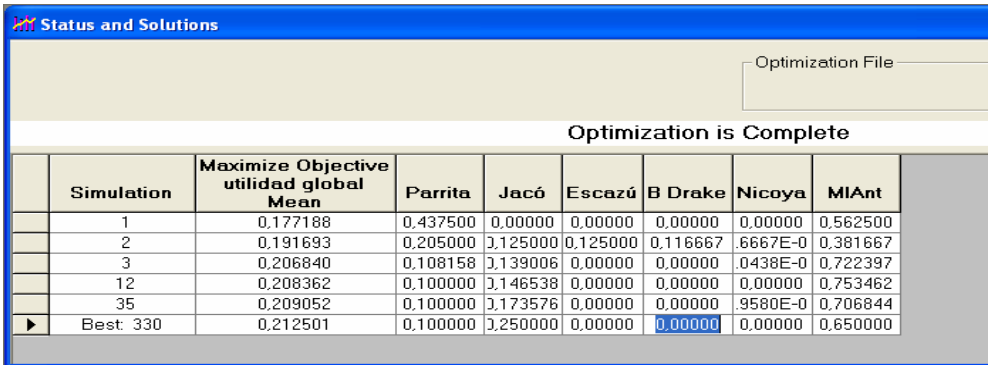
Haciendo clic en ***Aceptar,*** seleccionamos en ***Select: Maximize Objective*** y como pronóstico estadístico ***el promedio o media.***



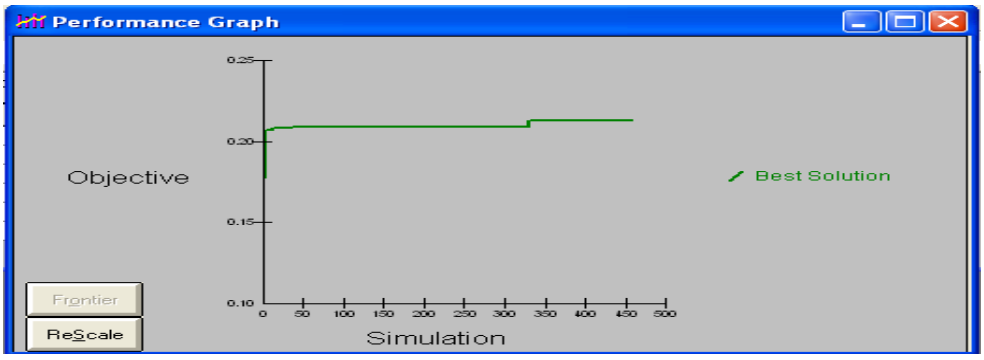
Si hacemos clic en ***Aceptar*,** luego ***OptQuest*** nos pregunta si corremos la optimización

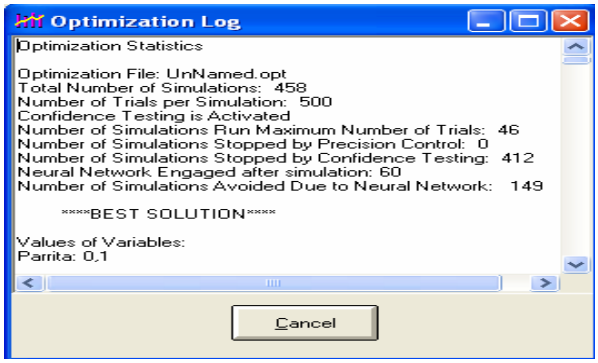


Escogemos ***Sí***, para obtener las siguiente información acerca del progreso de la optimización. También se ofrece de manera simultánea un progreso gráfico del proceso, así como un resumen del trabajo realizado. Digitamos un tiempo de optimización de cinco minutos, veamos los resultados:



Simulation	Maximize Objective utilidad global Mean	Parrita	Jacó	Escazú	B Drake	Nicoya	MIAnt
1	0,177188	0,437500	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,562500
2	0,191693	0,205000	0,125000	0,125000	0,116667	.6667E-0	0,381667
3	0,206840	0,108158	0,139006	0,00000	0,00000	.0438E-0	0,722397
12	0,208362	0,100000	0,146538	0,00000	0,00000	0,00000	0,753462
35	0,209052	0,100000	0,173576	0,00000	0,00000	.9580E-0	0,706844
Best: 330	0,212501	0,100000	0,250000	0,00000	0,00000	0,00000	0,650000



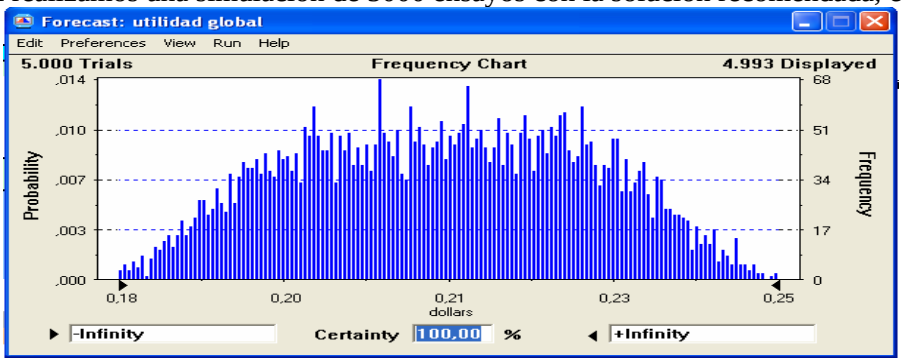


Interpretación de resultados

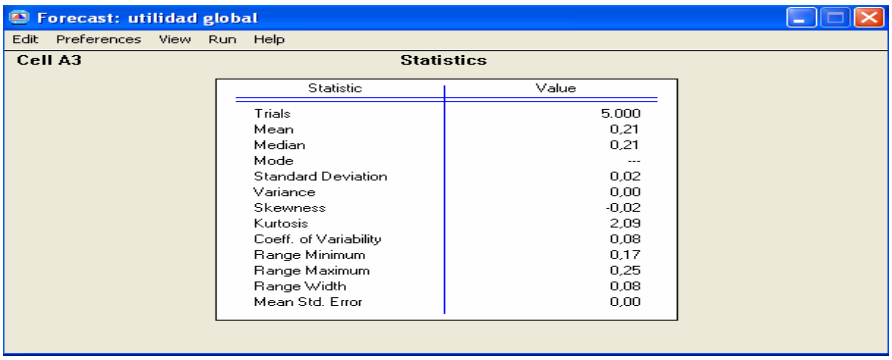
Puede suceder que la mejor solución identificada en el proceso no sea la solución verdadera del problema, pero esperamos que esté lo suficientemente cercana a la solución óptima. También la calidad de los resultados depende del tiempo seleccionado de búsqueda, la velocidad de la computadora, el número de variables de decisión y de hecho, de la complejidad del problema a resolver. Podemos observar que en la resolución del problema determinístico con Solver el rendimiento esperado del portafolio (optimizado por Solver) es del 21,15%, invirtiendo $400000 en Ml Antonio, $250000 en Escazú, $250000 en Jacó y $100000 en Parrita, además, no se debe invertir en Nicoya y B Drake. Esta inversión es para el momento presente, en cambio para el caso resuelto con ***OptQuest*** entendemos que es una inversión a largo plazo y por tanto se recomienda invertir $650000 en Ml Antonio, $250000 en Jacó, $100000 en Parrita y no invertir en B Drake, Escazú y Nicoya. Lo interesante es que al trasladar la inversión de Escazú a Ml Antonio, el retorno esperado del portafolio es mayor a largo plazo (0,2125). También aquí se recomienda no invertir en Nicoya y B Drake.
Por supuesto que todo lo anterior es la respuesta a los rendimientos presentes (en el caso de Solver) y otros rendimientos posibles (a largo plazo) de acuerdo al comportamiento probabilística de los retornos en los fondos de inversión (en el caso de ***OptQuest***). Se deben considerar otras variables que podrían también influir en los montos a invertir en los distintos fondos, como por ejemplo: cambios políticos, otros proyectos turísticos, marinas, centros comerciales, complejos habitacionales, cambios climáticos, bonanza económica, tratados de libre comercio, mano de obra disponible, etc. Todo lo anterior forma parte del conjunto de información para una toma de decisiones acertada, en escenarios donde hay presencia de incertidumbre de las variables consideradas.

Una vez obtenida la solución óptima del problema nos gustaría también examinar el proceso de Simulación con @Crystal Ball usando los valores de la solución óptima para tener una idea del riesgo asociado al usar la solución recomendada por OptQuest.

A continuación realizamos una simulación de 5000 ensayos con la solución recomendada, en efecto;



Observamos que el retorno esperado del rendimiento del portafolio es de un 21%, valor bastante cercano al valor óptimo encontrado por ***OptQuest***, en efecto:



Aquí podemos obtener también mucha información valiosa usando la distribución normal de la salida del pronóstico, por ejemplo ¿cuál es la probabilidad de que el retorno de la cartera se encuentre entre un 19% y un 22%?, o ¿cuál es la probabilidad de que éste sea mayor al 20%?, o menor al 16% , ¿cuál es el retorno menor o cuál es el más alto?, etc. Información sobre la variabilidad del proceso es importante, para nuestro caso observamos una variabilidad pequeña observando la desviación estándar.

Conclusión

Para obtener información adecuada bajo un respaldo estadístico con el fin de escoger el modelo más confiable de pronóstico de una manera rápida y fácil tenemos un aliado: @Crystal Ball, él nos proporciona las herramientas adecuadas cuando Solver no puede resolver nuestros problemas, ya sea por tener incertidumbre, o bien por no cumplir las características necesarias, para ello contamos con: la simulación Montecarlo para efectos de riesgo de inversión, el CB Predictor para realizar pronósticos con los estudios estadísticos correspondientes que respaldan la escogencia del método adecuado, y, el OptQuest para encontrar la solución o inversión adecuada a largo plazo optimizando el retorno del portafolio

Bibliografía

1. Anderson, Sweeney, Williams. *Métodos cuantitativos para los negocios*. Séptima edición. México. Editorial Thomson.1999.
2. Azarang,M-García, E. *Simulación y análisis de modelos estocásticos.* McGraw-Hill. México. 1996.
3. Bierman, Bonini, Hausman. *Análisis cuantitativo para la toma de decisiones.* Editorial McGraw-Hill. México. 2000.
4. Crystal Ball. *OptQuest 2.1 User Manual* Decisioneering. Denver, Colorado. 2004.
5. Eppen, F/ Gould, G/ Schmidt, C.P/ Moore, J/ Weatherford, L. *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa.* Prentice Hall. México. 2000.
6. Evans J-Olson D. *Introduction to Simulation and Risk Analysis.* Prentice Hall.New Jersey. 2002.
7. Hanke / Reitsch. *Pronósticos en los negocios*. Prentice Hall. México.1996.
8. Hillier /Hillier/Lieberman*. Métodos cuantitativos para administración*. Un enfoque y casos de estudio, con hoja de cálculo. McGraw-Hill, Inc. México. 2000.
9. Makridakis.S. *Forcasting in the 21st Century*, Internacional Journal of forcasting, 7(2)(1991): 123-126.
10. Mathur, K/ Solow, D. *Investigación de operaciones. El arte de la toma de decisiones.* Prentice Hall. México. 1996.

Sucesiones, caos y fractales

Edison De Faria Campos[1]

Resumen

En este minicurso desarrollaremos los temas de sucesiones, series y estudiaremos algunas aplicaciones relacionadas con estos contenidos, como los fractales y sucesiones que presentan un comportamiento caótico. Para realizar los cálculos y graficar las sucesiones y las aproximaciones mediante polinomios de Taylor para las series de potencias, utilizaremos el software Mathematica y calculadoras graficadoras con CAS como la Voyage 200, la TI89.

Introducción

A finales del siglo XIX y principios del siglo XX, matemáticos como Cantor, von Koch, Peano, Hilbert, Sierpinski, Riemann y Weierstrass entre otros, construyeron conjuntos y curvas extrañas, denominadas "monstruos" y " patológicas" por los matemáticos más tradicionales. En la década de los sesenta, se descubrió que tales conjuntos monstruosos eran bastante usuales en matemática y la evolución de la tecnología digital ha ayudado mucho en estos descubrimientos. Benoit Mandelbrot utilizó la palabra fractales para algunos de estos objetos matemáticos extraños.

La palabra fractal etimológicamente proviene del adjetivo fractus que el latín significa roto, partido, fragmentado o fraccionado. Torres (1994) proporciona una definición no técnica para fractal: si la estimación de la longitud de una curva se hace arbitrariamente grande conforme la regla con la que medimos se hace más y más pequeña, entonces la llamamos una curva fractal. Otra definición informal de fractal podría ser la siguiente: la dimensión fractal de un objeto es una medida de su grado de irregularidad, considerada en todas las escalas, y puede ser mayor que la dimensión clásica del objeto. Así, el valor de la dimensión fractal está asociado a qué tan rápido la estimación de la medida del objeto aumenta conforme el dispositivo de medición se hace cada vez más pequeño. Una dimensión fractal grande significa que el objeto es muy irregular.

Los fractales son figuras geométricas que se caracterizan por su autosemejanza, ya que cada una de sus partes es semejante al todo. Son estructuras infinitas contenidas en una superficie finita y resultan de utilidad en el análisis de una gran diversidad de fenómenos como turbulencias, bolsa de valores, modelos poblacionales, compresión de imágenes entre otros. Las figuras fractales se obtienen mediante procesos iterativos, al repetir un mismo procedimiento. En algunos casos ciertos valores de los parámetros que aparecen en las relaciones de recurrencia generadas por el proceso iterativo producen efectos inesperados y exhiben comportamiento caótico. Todo esto lo aclararemos durante el desarrollo del minicurso de una manera no formal para que estudiantes sin mucho conocimiento matemático puedan entender el contenido.

La órbita de un punto bajo una función

Dado una función f y un punto a de su dominio, llamaremos la *orbita del punto* a bajo la función f a la sucesión de valores

$$a, f(a), f(f(a)) = f^2(a), f(f(f(a))) = f^3(a), \cdots, f^n(a), \cdots$$

es decir, la sucesión obtenida al componer la función consigo misma infinitas veces, bajo la hipótesis de que los valores $f^k(a), k = 1, 2, \cdots$ también pertenecen al dominio de f .

[1] Universidad de Costa Rica, edefaria@cariari.ucr.ac.cr

La órbita de un punto a bajo la función f es un proceso iterativo que puede ser descrito como:

$$\begin{cases} x_0 = a \quad (valor\ inicial) \\ x_{n+1} = f(x_n),\ n = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

De esta forma, $x_1 = f(a),\ x_2 = f(x_1) = f^2(a),$ y en general $x_n = f^n(a).$

La *gráfica de la órbita* de un punto a bajo la función f es el conjunto de puntos del plano $G = \left\{(n, f^n(a)) = (n, x_n) \mid n = 0,1,2,\cdots\right\}$.

Ejemplos

1. Sea la función $f(x) = x + 1.$ La órbita de $a = -3$ bajo f es la sucesión de valores

$$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots$$

La órbita tiende al infinito cuando n tiende al infinito y decimos que dicha órbita *diverge*.

2. Para la función $g(x) = 2x + 1$, la órbita de $a = 1$ bajo g es la sucesión de valores

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, \cdots$$

En este caso el término general de la sucesión es $x_n = g^n(1) = 2^{n+1} - 1.$ Como antes, la órbita diverge (tiende al infinito cuando n tiende al infinito).

3. Si $h(x) = \frac{x}{2} - 1$ la órbita de $a = 2$ bajo h es la sucesión de valores

$$2, 0, -1, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}, -\frac{15}{8}, -\frac{31}{16}, \cdots$$

El término general de la sucesión es $x_n = h^n(2) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2$. En este caso la órbita converge a -2 cuando n tiende al infinito. Es importante destacar que por lo general no podemos obtener el término general x_n de una órbita. Por esto es muy importante utilizar una computadora o bien una calculadora graficadora con CAS para poder analizar la órbita de un punto bajo una función de un modo más rápido.

4. Consideremos la función $F(x) = k\cos x,\ k$ es un parámetro. Para $a = 0$ las órbitas de a bajo F dependen del valor de k.

Al ejecutar las siguientes líneas en Mathematica, para $k = 1, 1.5, 1.9, 2.5$, podremos conjeturar respecto al comportamiento de las órbitas correspondientes.

```
a[1]:=0
a[n_]:=a[n]=Cos[a[n-1]]
N[Table[a[n],{n,50}]]
```

{0.,0.540302,0.857553,0.65429,0.79348,0.701369,0.76396,0.722102,0.750418,0.731404,0.744237,0.735605,0.741425,0.737507,0.740147,0.738369,0.739567,0.73876,0.739304,0.738938,0.739184,0.739018,0.73913,0.739055,0.739106,0.739071,0.739094,0.739079,0.739089,0.739082,0.739087,0.739084,0.739086,0.739085,0.739086,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085,0.739085}. La órbita para $k = 1$ pareciera converger al valor 0.739085. Reemplazando a[n_]:=a[n]=Cos[a[n-1]] en el programa anterior por a[n_]:=a[n]=1.5*Cos[a[n-1]] veremos que la órbita para $k = 1.5$ parece bifurcar (fluctuar) entre dos valores cuando n crece: 0.123076 y 1.48865. Utilizando ahora a[n_]:=a[n]=1.9*Cos[a[n-1]] notamos que la órbita para $k = 1.9$ parece bifurcar entre cuatro valores cuando n crece: -0.61261, 1.55449, 0.0309893 y 1.89909. Finalmente si utilizamos a[n_]:=a[n]=2.5*Cos[a[n-1]]l a órbita para $k = 2.5$ tiene un

comportamiento extraño pues pareciera no acercarse a ningún conjunto de valores fijos. No es convergente y decimos que el comportamiento es caótico.

Decimos que una órbita *no escapa* cuando existe un intervalo que la contiene (no se va al infinito). En otras palabras, cuando los valores absolutos de los términos de una órbita son acotados entonces la órbita *no escapa*, caso contrario decimos que la órbita *escapa*.

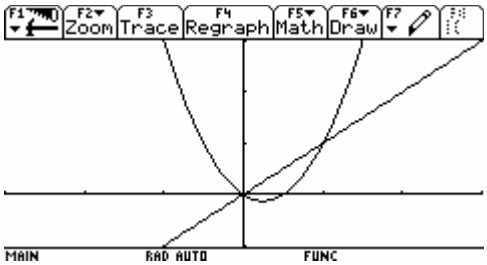
Los ejemplos anteriores nos muestran que la órbita de un punto bajo una función puede tener distintos comportamientos. Puede acercarse a un número real (converger), fluctuar entre dos o más valores (bifurcar o oscilar), tender al infinito (divergir) o tener un comportamiento caótico.

Definición: Un valor x_0 en el dominio de una función f se denomina un *punto fijo* si y sólo si $f(x_0) = x_0$. La órbita de un punto fijo se llama *órbita fija*.

Para determinar los puntos fijos de una función f dada hay que resolver una ecuación de la forma $f(x) = x$. Es claro que los puntos fijos de f también son puntos fijos de la composición f^n, $n = 1, 2, 3, \cdots$. Una función puede no tener punto fijo en un dominio dado, tener un único punto fijo, una cantidad finita de puntos fijos o bien infinitos puntos fijos. Gráficamente los puntos fijos de f ocurren en donde se intersecan la gráfica de f con la recta identidad $y = x$.

Ejemplos

1. $f(x) = 2x^2 - x$ tiene dos puntos fijos que se obtienen al resolver la ecuación $2x^2 - x = x$. Así los puntos fijos son $x = 0,\ x = 1$.

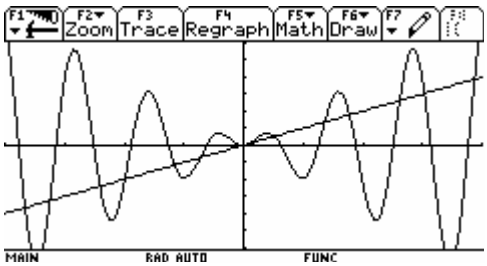


2. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ tiene un único punto fijo real, conforme vemos en la solución dada por Mathematica:

$$\mathbf{Solve}\left[x^3 - 6x^2 + 11x - 6 == x,\ x\right]$$

El punto fijo (real) es $x = 2 + \dfrac{\left(27 - 3\sqrt{57}\right)^{1/3}}{3} + \dfrac{\left(9 + \sqrt{57}\right)^{1/3}}{3^{2/3}} \approx 3.769292354$.

3. $h(x) = 2x\sin(x)$ tiene infinitos puntos fijos reales y el cálculo de los mismos requiere el uso de algún programa de computadora o bien una calculadora con CAS.



4. $F(x) = x^2 + 2x + 1$ no tiene ningún punto fijo real pues la ecuación $F(x) = x$ no tiene solución real.

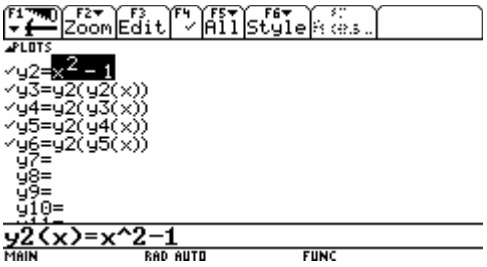
Teorema: Sea $f:[a,b]\to\square$ una función continua. Si f satisface $a\le f(x)\le b$ para toda $x\in[a,b]$ entonces f posee un punto fijo en $[a,b]$. Si además f es derivable en el intervalo abierto $]a,b[$ y satisface la desigualdad $|f'(x)|\le k<1$ para alguna constante k positiva entonces el punto fijo es único.

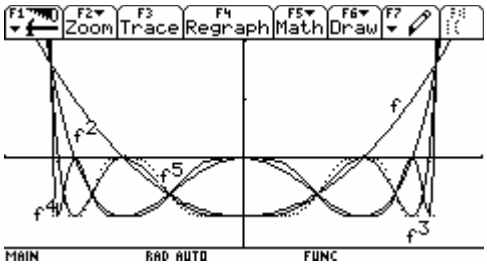
Análisis de las órbitas

Una forma de analizar gráficamente la órbita de un punto a bajo la función f consiste en graficar $y=f^n(x),\ n=1,2,\cdots$ y posteriormente trazar la recta vertical $x=a$. Los puntos de intersección de las curvas con la recta vertical son los puntos de la órbita.

Ejemplo

1. La función $f(x)=x^2-1$ con las gráficas de $y=f^n(x),\ n=1,2,3,4,5$ son dadas abajo.





Podemos notar por ejemplo que la órbita de $x=0$ oscila entre dos valores: $0,-1$. Existen otros valores de x para los cuales la órbita converge a un único valor.

El método anterior es complicado. Por esto veremos un método más sencillo para analizar la órbita de un punto bajo una función dada.

Método del rebote

Para determinar la órbita del punto x_0 bajo f, lo que es equivalente a resolver el problema

$$\begin{cases} x_0 \quad (\textit{valor inicial dado}) \\ x_{n+1}=f(x_n),\ n=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

proceda de la siguiente forma:

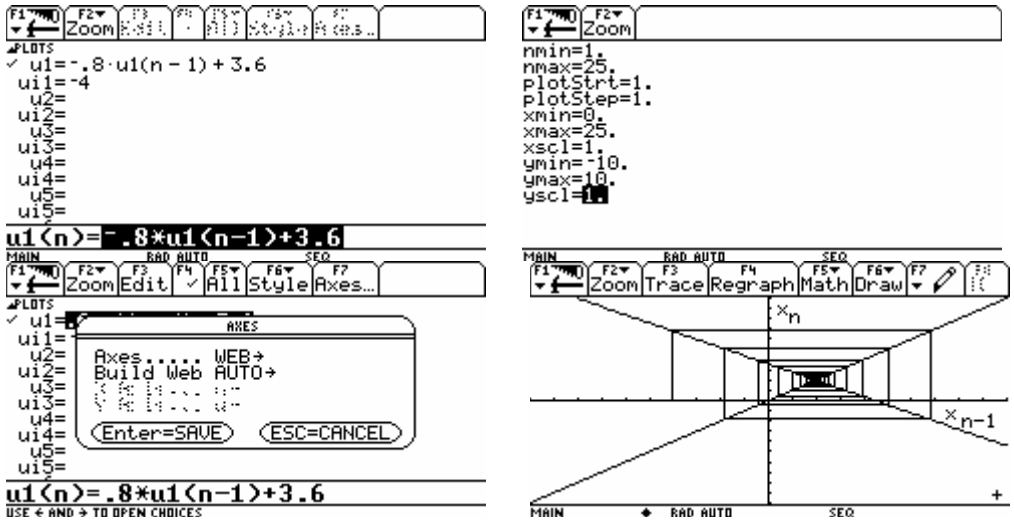
1. Grafique la función $y=f(x)$ juntamente con la función identidad $y=x$. Los puntos de intersección de las dos gráficas (si existen) son los puntos fijos de f.
2. Desde el punto de abscisa x_0 del eje x, trace una recta vertical L_0. Sea $P_0(x_0,x_0)$ el punto de intersección de L_0 con la recta $y=x$, y $Q_0(x_0,x_1)$ el punto de intersección de L_0 con la curva $y=f(x)$, es decir, $x_1=f(x_0)$.
3. Desde Q_0 se "rebota" horizontalmente en el punto $P_1(x_1,x_1)$ de la recta $y=x$, y de este se "rebota" verticalmente hacia la curva en el punto $Q_1(x_1,x_2)$ con $x_2=f(x_1)=f^2(x_0)$. Seguimos este procedimiento para construir la sucesión de rebotes $P_0,Q_0,P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots$. Así obtenemos sobre la recta $y=x$ los puntos de la órbita de $x_0: x_1,x_2,\cdots,x_n=f^n(x_0)$.

La calculadora Voyage 200 tiene en el modo sequence la configuración WEB que permite graficar con el procedimiento anterior. En el eje "y" tenemos x_n, y en el eje "x" tenemos x_{n-1}.

Ejemplos

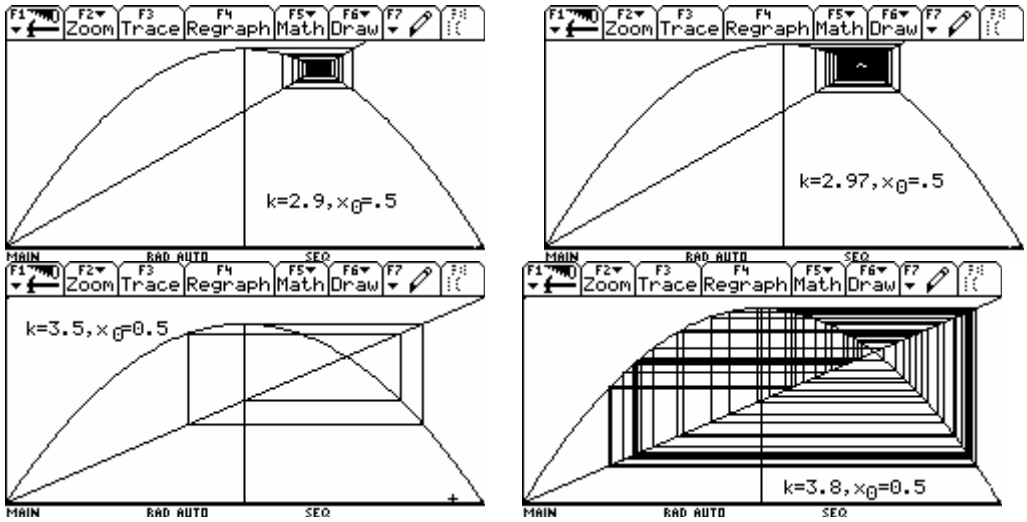
1. Sea $f(x) = -0.8x + 3.6$. ¿Cuál es la órbita del punto $x_0 = -4$?

La relación de recurrencia para el problema es: $x_n = -0.8x_{n-1} + 3.6,\ x_0 = -4.$



En este ejemplo la órbita converge al punto fijo (intersección de la recta $y = -0.8x + 3.6$ con la recta $y = x$). En este caso decimos que el punto fijo (único en este caso) es *atractor* de la órbita.

2. Sea $g(x) = k\,x(1-x)$, y consideremos distintos valores del parámetro k (por falta de espacio mostraremos algunas graficas generadas por la calculadora).



La órbita del punto $x_0 = 0.5$ bajo g con $k = 2.3$ converge al punto fijo positivo (atractor de la órbita). El origen es punto fijo pero repulsor de esta órbita. La órbita del punto $x_0 = 0.5$ bajo g con $k = 2.9$ es atraída por el punto fijo positivo y repelida por el punto fijo negativo. Lo mismo sucede para $k = 2.93$ y para $k = 2.97$, pero el comportamiento de la órbita para $k = 3$ cambia drásticamente. Dicha órbita oscila alrededor del punto fijo positivo de forma errática produciendo caos. En la gráfica se observa una ventana centrada en el punto fijo que no se cierra. La órbita para $k = 3.3$ tiene un comportamiento interesante pues la misma se bifurca alrededor del punto fijo positivo: una subsucesión de puntos de la órbita

converge al valor 0.47943 mientras que otra subsucesión converge al valor 0.82360. Decimos que hay una duplicación del período. La órbita del punto $x_0 = 0.5$ bajo g con $k = 3.5$ oscila entre cuatro valores (se vuelve a bifurcar), ninguno de ellos es el punto fijo de g. En este caso decimos que hay una nueva duplicación del periodo, es decir, una cuadruplicación del periodo.

Definición: El valor x_0 es un punto *finalmente fijo* de la función f si existe un número entero $N > 1$ tal que $f^N(x_0)$ es un punto fijo de f. En este caso la órbita se denomina *finalmente fija*.

Ejemplos

1. Si $f(x) = \sin x$ entonces la órbita $\pi, 0, 0, \cdots$ de $x_0 = \pi$, es finalmente fija.

Definición: Una órbita de un punto x_0 bajo la función f es *periódica o cíclica* si existe $N \in \mathbb{N}$ El menor de los números N con esta propiedad se denomina *periodo principal* de la órbita y decimos que x_0 es un punto periódico de periodo N. Es claro que si x_0 es un punto periódico de periodo N para la función f entonces x_0 es un punto fijo de f^N.

2. Sea $g(x) = \dfrac{2}{x}$. Para el valor $x_0 = 2$ tenemos que $g^n(2) = 2$ para n par y $g^n(2) = 1$ para n impar. La órbita de $x_0 = 2$ es *periódica* y el punto $x_0 = 2$ es *periódico* de periodo 2.

Definición: Una órbita del punto x_0 bajo f es *finalmente periódica o finalmente cíclica* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x_0)$ es un punto periódico.

En el ejemplo anterior la órbita de $x_0 = 2$ es finalmente periódica (o finalmente cíclica).

Iteración en el plano complejo

Consideremos la función compleja de variable compleja $f(z) = z^2 + c,\ z, c \in \mathbb{C}$. Queremos determinar la órbita de un valor z_0 para un valor fijo del parámetro c.

Definición: Decimos que una órbita *no se escapa* cuando el módulo de cada punto de la misma es acotado, caso contrario decimos que la órbita *se escapa*. Si la órbita se acerca a un punto determinado, a tal punto lo llamamos *punto fijo atractor*. Una órbita que converge a más de un punto se denomina *periódica* y su periodo depende de la cantidad de puntos hacia los que se aproxima. Una órbita que no converge a un punto fijo ni a un ciclo periódico pero los módulos permanecen acotados se denomina *órbita caótica*.

Si $c = 0$, la órbita del punto $z_0 = (|z_0|, \theta)$ dado en forma polar es:

$$(|z_0|, \theta), (|z_0|^2, 2\theta), (|z_0|^3, 3\theta), \cdots, (|z_0|^n, n\theta), \cdots$$

La órbita escapa si y sólo si $|z_0| > 1$. Además, si $|z_0| < 1$ la órbita converge al origen del plano complejo. Los puntos que satisfacen $|z_0| = 1$ producen órbitas que quedan sobre la circunferencia unitaria centrada en el origen.

El conjunto de Julia

Utilizaremos una aplicación computacional gratuita conocida como fractint para analizar las órbitas de cada punto de $f(z) = z^2 + c,\ z, c \in \mathbb{C}$ para un valor particular del parámetro c. El programa "pintará" en el plano complejo (pantalla de la computadora) los puntos de las órbitas que no escapan.

La frontera entre los puntos cuyas órbitas escapan y aquellos otros que no escapan se define como *conjunto de Julia*. En el caso particular de la función $f(z) = z^2$, el conjunto de Julia es la circunferencia unitaria centrada en el origen del plano complejo. Para conocer un conjunto de Julia para un valor particular de c, será necesario considerar los infinitos números complejos y para cada uno de ellos calcular los infinitos puntos de sus órbitas para finalmente "pintar" aquellos cuyas órbitas no se escapan.

El problema es que la computadora no puede iterar infinitamente, tampoco puede analizar todos los puntos del plano complejo. Para solventar este problema procederemos de la siguiente forma: seleccionar una región del plano complejo y hacer una partición de la región generando una cuadrícula obtenida con los puntos de intersección de los segmentos verticales y horizontales de la partición; iterar la función un número finito de veces, digamos n veces, en puntos interiores a los elementos de la cuadrícula.

Utilizaremos como criterios de parada los siguientes: la iteración se detiene cuando algún punto de la ℂórbita tenga módulo mayor que 2, o bien parar cuando se alcanza el número máximo de iteraciones (n), sin que ninguno de los módulos supere a 2. En este caso se "pinta" el punto debido a que en este caso aceptaremos que su órbita no escapa (es claro que la órbita podría escaparse con un número de iteraciones mayor que n, en este caso podríamos experimentar aumentando el valor de n). Por lo tanto "pintamos" todos los puntos cuyas órbitas no se escapan. El conjunto obtenido con el procedimiento anterior se conoce como conjunto de *Julia rellenado*.

El conjunto de Mandelbrot

Regresemos a nuestra función compleja cuadrática $f(z) = z^2 + c$. La órbita correspondiente a $z_0 = 0$ es la sucesión $0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \left((c^2 + c)^2 + c\right)^2 + c, \cdots$, y se conoce como órbita crítica. El punto $z_0 = 0$ se llama punto crítico.

Definición: El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de puntos c del plano complejo para los cuales las órbitas críticas de f no escapan.

Podemos verificar, mediante la utilización del fractint, que los puntos que pertenecen al conjunto de Mandelbrot corresponden a los valores de c para los cuales el conjunto de Julia es conexo, es decir $|c| \leq 2$. Si c no pertenece al conjunto de Mandelbrot, el conjunto de Julia correspondiente es desconexo y se llama polvo fractal. Así, el conjunto de Maldelbrot se encuentra en un disco de radio 2 centrado en el origen del plano complejo. Para obtener el conjunto de Mandelbrot seleccionamos una región en el plano complejo y un valor del paso, que llamaremos h, para la cuadrícula. Cada punto c corresponderá a un cuadrado de lado h de la malla formada y será utilizado para decidir si su órbita crítica escapa o no. Aquellos puntos cuyas órbitas no escapan serán pintados en la pantalla.

Algoritmo para determinar el conjunto de Mandelbrot

Cuadricular la región $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{C} \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2\right\}$. Tratar a cada punto de D como un valor de c. Comprobar, para cada c, si la órbita de 0 escapa o no dentro de las n primeras iteraciones. Si la órbita no

escapa, pintar c. Para acelerar el proceso podemos utilizar la simetría del conjunto de Mandelbrot. Así, si la órbita crítica de f escapa para un valor determinado de c entonces se escapará para su conjugado $\bar{c}$.

En fractint se pinta con un cierto color (azul) los puntos del conjunto de Mandelbrot (para los que la órbita de 0 no escapa) y el resto de los puntos se pintan con otros colores que se eligen arbitrariamente en función del número de iteraciones necesarias para que la órbita se escape del disco de radio 2 centrado en el origen. De esta forma tendremos una idea la velocidad de escape de la órbita de 0 para cada valor de c.

El conjunto de Julia y el de Mandelbrot son ejemplos de objetos matemáticos conocidos como fractales (Barnsley, 1988; Peitgen, Jurgens y Saupe, 1992). En el curso veremos otros ejemplos de fractales como el conjunto de Cantor, el copo de nieve de Koch, el triángulo de Sierpinski, la función blancmange (curva fractal de Takagi) y calcularemos algunas dimensiones fractales (De Faria, 2004).

Referencias

Barnsley, M. (1988). *Fractals everywhere*. Academia Press.

De Faria, E. (2004*). Sucesiones, fractales y caos*. Guatemala: Memorias del IX Congreso Nacional de Matemática Educativa, pp. 338-358.

Peitgen, H., Jurgens, R. Saupe, D. (1992). *Fractals for the classroom*. Springer Verlag.

Torres, V. G. (1994). *Sistemas dinámicos: caos y fractales*. México: Avance y Perspectiva número 13, mayo-junio.

Tratamiento Instrumental de la Percepción Espacial, en Tareas de Predicción

Elizabeth Hernández Arredondo[1]

Resumen:

Después de una introducción por las diferentes direcciones que toma el estudio de la Percepción Visual en los últimos años, el artículo se organiza en los siguientes puntos: un análisis de cuestiones básicas en el cual se aclara el concepto de Percepción Espacial, las habilidades de la Percepción Espacial, la forma en cómo se establecen Representaciones e Imágenes Mentales y la manera en cómo las herramientas se transforman en Instrumentos; el segundo punto consiste en la descripción de la metodología y los resultados obtenidos; y finalmente se establecen conclusiones y planteamientos para futuras investigaciones.

Planteamiento del Problema

En los últimos años a crecido el interés por parte de los investigadores en la percepción espacial como un elemento importante en infinidad de actividades matemáticas, primordialmente en la solución de problemas (Gutiérrez, 1991; Flores, C. y Moretti, M., 2005). Aunque aún los diversos investigadores no se ponen de acuerdo en el nombre que debe recibir esta actividad humana, nombrándola: habilidad espacial, sentido espacial, percepción espacial, imaginación espacial, visión espacial o visualización; entre otros.

Gutiérrez (1998) y Arrieta (2003); han realizado una exploración de las tendencias de investigación que se han hecho en este sentido en geometría, así encontraron que existe una amplia variedad de paradigmas, metodologías y problemas de estudio; concluyendo que existen tres principales líneas de investigación, a saber: *el desarrollo* (Contenidos y objetivos), *la estructura* (Factores, estrategia y diagnostico) y *la propuesta* (situaciones didácticas, errores y recursos).

En este estudio se presentan las habilidades, tratamientos, estrategias y formas de comunicación seguidas por un grupo de estudiantes de secundaria que se enfrentan a tareas de percepción espacial.

Marco Teórico

Por *percepción espacial* debe entenderse en el sentido de Grande, J. (1990), como la actividad que se lleva acabo a través de los ojos, localizando objetos o patrones, identificando formas y moviendo objetos.

En la percepción espacial se tienen las siguientes habilidades:
- Coordinación ojo motor; que consiste en coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.
- Percepción figura Tierra (Figure-ground): consiste en identificar un elemento en específico y que involucra cambios en la percepción de la figura.
- La constancia del perceptor: es la reorganización de ciertas figuras geométricas presentando una variedad de tamaños, texturas, posiciones y discriminación de figuras similares.
- Percepción de la posición en el espacio: es la capacidad de relacionar un objeto en el espacio consigo mismo o en relación con cada uno de los otros.
- Parentesco en la percepción espacial: es la habilidad de ver dos o más objetos en relación consigo mismo o en relación con cada uno de los otros.
- Discriminación visual: Es la habilidad de identificar similitudes y diferencias entre objetos.

[1] DME, Cinvestav, México., EPO No. 92, Edo. de México, CONALEP No 263, Edo. de México, eli_hernandez_arredondo@hotmail.com

- Memoria visual: Es la habilidad de analizar, nombrar características los objetos no observados.

En opinión de Yakimanskaya (1980), citado en Gusev, V. y Safuanov, I (2003), el pensamiento con imágenes debe considerarse como un proceso complejo de transformación visual de la información (*representación mental*[2] del objeto); para analizar este proceso de transformación, se hará uso de los dos tipos de habilidades visuales planteadas por Bishop (1983):

1) *Interpretación la Información figural*[3] *(IFI): Involucra el conocimiento de convenciones visuales y vocabulario especial; se usa en el trabajo geométrico en la realización de graficas, diagramas, en la lectura e interpretación. Esta se considera una habilidad de contenido y contexto; pues involucra a la forma en como es presentado el material.*
2) *Procesamiento Visual (VP): Involucra ideas de visualización, la traslación o abstracción de datos no figurales*[2] *en términos visuales, la manipulación y extrapolación de la percepción visual y la transformación de una imagen visual en otra. Se le considera una habilidad de proceso.*

A continuación se muestra el proceso de construcción de una Imagen Mental[4], transformando y obteniendo información que ayude en la solución de una tarea.

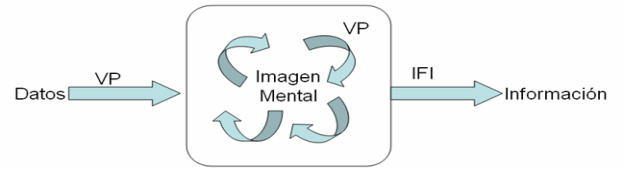
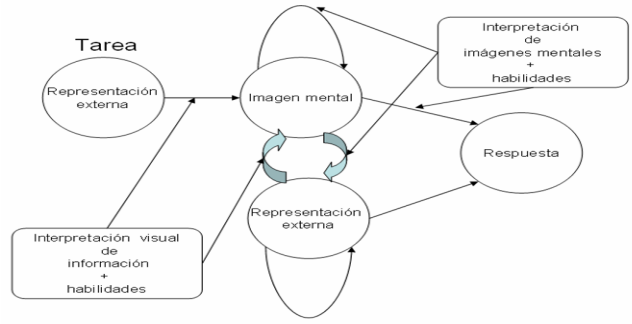


Figura 1. Representa la relación entre ente las habilidades de:
Interpretación la información figural y Procesamiento Visual

En conclusión la habilidad de Proceso Visual (VP) consiste en convertir lo abstracto y datos no figurales en imágenes visuales, o incluso en imágenes mentales. Mientras la Interpretación Figural de la Información (IFI) es un proceso de análisis, lectura y comprensión de la representación espacial como una representación externa[5] plana o imagen mental.



[2] Representación Mental: Es una imagen formada, por una figura mental y que refleja la mayoría de características esenciales y puede ser no solo visual, acústica, emocional, etc. Gusev, V and Safuanov, I. (2003).
[3] Figural y figurales; extiéndase en el sentido de figuras geométricas que incluye características de abstracción y generalización; pero también elementos como color tamaño y forma. Fischbein (1993), citado en Dvora, T. and Dreyfus, T. (2004).
[4] Imagen Mental: es un tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática visual de elementos espaciales.
[5] Representación externa: consiste en una representación grafica verbal que representa conceptos a través de figuras, dibujos y diagramas.

Figura 2. Representación de la solución de una tarea de Percepción espacial

Para las tareas que tenían como propósito final que el alumno realizara predicciones, teniendo interacciones con material manipulable (hojas, tijeras, pegamento, lápiz y su cuerpo); para el análisis de las actividades se tomo en cuenta el uso de estas herramientas y su transformación como un instrumento, lo cual permitió a los estudiantes a desarrollar habilidades espaciales (el transito entre VP y IFI), estrategias predicativas y de comunicación.

Aclarando un poco las ideas, se elegirá un acercamiento instrumental para el análisis de las actividades, las herramientas teóricas relevantes en nuestro estudio será la interacción Humano-Herramienta, en este sentido es importante distinguir entre Herramienta e Instrumento. De acuerdo con Verillon y Rabardel (1995), citados en Trouche (2004), una Herramienta es el objeto material, mientras que el Instrumento no existe en si mismo, es una construcción sicológica que se logra cuando el sujeto se apropia de él, lo convierte y lo integra a sus actividades (cuando le da un sentido al uso); es decir, se convierte en una extensión del cuerpo.

Para las descripciones que realicen los estudiantes sobre papel, retomaremos las descripciones verbales propuestas por Gutiérrez (1988):

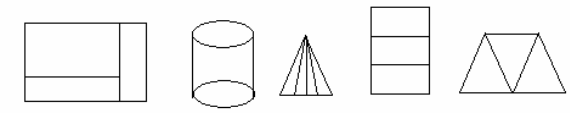
1) *Representaciones graficas: En las que si hay algo de texto, este es irrelevante y no ofrece ninguna información adicional, de manera que podría eliminarse sin que se pierda información.*
2) *Representaciones verbales. En la que los dibujos si aparecen, tiene un valor secundario y puede omitirse sin que se pierda información.*
3) *Representaciones mixtas: Formadas por un dibujo y un texto que se complementan. En este caso, el dibujo como el texto, aportan información importante, por lo que suprimir uno de los dos supone perder parte de la información contenida en la descripción.*

Para el análisis propio del dibujo en perspectiva se clasificara según la clasificación de Mitchelmore (1976,1980) citada en Gutierrez (1988):

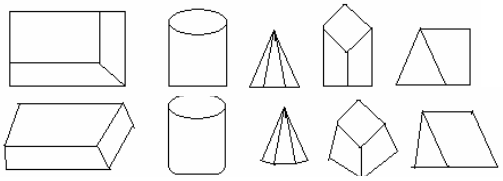
Etapa 1. Esquemática plana: Se presentan figuras dibujando una de sus caras ortogonalmente.



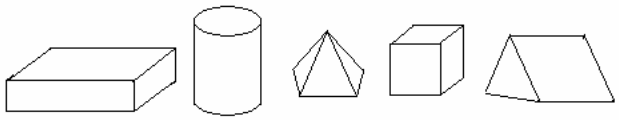
Etapa 2. Esquemática espacial.: Las figuras se representan dibujando varias de sus caras ortogonalmente y a veces incluyendo caras ocultas. Las representaciones siguen sin dar sensación de profundidad.



Etapa 3. Pre-realista: Los dibujos muestran intentos de presentar los cuerpos de una manera realista y de dotarlos de profundidad, aunque sin conseguirlo plenamente.



Etapa 4. Realista. Los dibujos son bastante correctos y siguen, aunque sean aproximadamente, las reglas del dibujo en perspectiva, en particular las referentes a las líneas que convergen en un punto infinito



Metodología

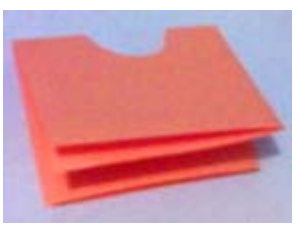
Participantes: los sujetos que participaron en el estudio, fueron 11 Estudiantes de tercer grado, de una Secundaria Federal del Estado de México; con edades entre 13 y 15 años.

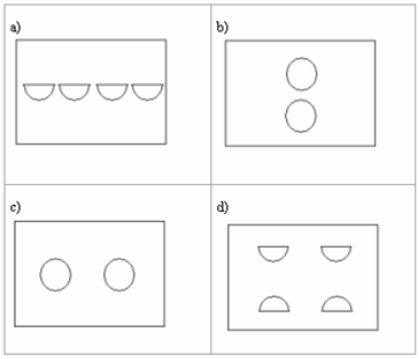
Realizaron cinco actividades en sesiones de una hora y media alrededor de 3 semanas. Las actividades planteadas se pueden observar en la siguiente tabla:

	Actividad 1	Actividad 2	Actividad 3	Actividad 4	Actividad 5
Objetivo	Test Exploratorio para conocer tareas visuales que presentaran dificultades en su solución	Introducir y Explorar las propiedades del Papel	Proponer técnicas de Corte	Proponer técnicas de Doblado y Corte	Conocer cómo piensan y solucionan tareas
Tarea	Resolver un cuestionario	Analizar situaciones en 3D y dibujarlas en 2D además de plantear conjeturas	Analizar una situación en 2D y hacer propuestas de corte, realizar conjeturas (2D o 3D) y predicciones	Realizar propuestas de corte y doblado Hacer un tratamiento de percepción espacial a las figuras	Entrevista grabada con diversas tareas para observar sus estrategias y habilidades

La Actividad 1, que consistió en un cuestionario exploratorio, nos permitió observar dificultades en problemas con el manejo y comprensión de la simetría, el siguiente problema dio origen y sentido a las actividades que se plantearon.

1. Una pieza rectangular de papel se dobla dos veces y se corta la mitad de un círculo como se muestra en la figura
Si se desdobla la pieza de papel, el corte que obtienes es... ( )





La actividad 2, consistió en el análisis de las propiedades del papel, con respecto al doblarlo, perforarlo y recortarlo; además de imaginar y representar lo imaginado.

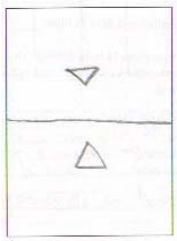
El propósito fue hacer que el estudiante se familiaricé con el doblado y cortado de figuras. La tarea cognitiva a desarrollar: Manipulación espacial de 3D del doblado, cortado y la elaboración de diagramas en 2D.





Para la pregunta 5 y 6 de esta actividad se le solicito al estudiante que doblara su hoja en dos partes y que realizara perforaciones en el centro de la hoja. Además de realizar una representación del suceso en un recuadro, como el que se observa en la figura de abajo.
Pregunta 5 ¿Qué observas?

Estudiante 10: "Se forma la misma perforacion a la misma distancia ya que es la simetría, ya que se doblo por igual"



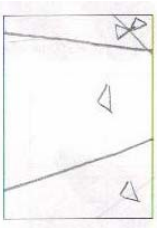
Pregunta 6 ¿A que se debe?
Estudiante 10: "a la simetria, se refleja en la misma forma pero de sentido opuesto (▽△)"

Se puede observar que el estudiante 10 usa una representación mixta para informar de sus resultados, y que esta representación pertenece a las esquemáticas planas; uno de los resultados importantes es que el estudiante da información sobre el sentido de orientación de la perforación.

En estas respuestas se puede observar como el estudiante pasa de una habilidad VP a una IFI con ayuda de la hoja de papel como herramienta.

A continuación se mostrara un resultado que obtiene el estudiante solo imaginando la siguiente situación: se le solicita que imagine que dobla una hoja en 4 partes diferentes, que realiza una perforación, y una vez que imagino esta situación, se le pide que represente la figura que imagino y explique su bosquejo.

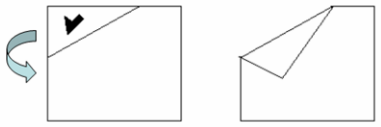
El alumno 10 presenta en esta parte un análisis sobre sus perforaciones haciendo el siguiente comentario: "*deben de ser iguales pero en diferente posición*"



Aquí se puede notar como el estudiante, en esta parte de la relación humano-herramienta, termina apropiándose de la hoja de papel como un instrumento, logrando establecer más habilidades de percepción espacial, al proveer de posiciones en el espacio a las figuras estableciendo un símil de parentesco, con las experimentaciones anteriores llegando finalmente al uso de una habilidad IFI.

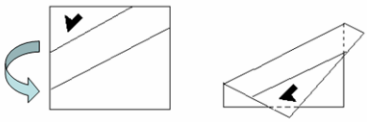
A continuación se presenta imágenes de la última actividad en donde el estudiante 10 muestra el tratamiento que da a tareas como la que se presentan a continuación.

2. Imagina que en un trozo de papel tienes la siguiente figura, la línea que aparece es una línea de reflexión,



- ¿Cual es la imagen de la figura que se refleja bajo esa línea en la hoja de papel?

- Ahora imagina que tenemos una segunda línea de reflexión (que es paralela a la primer línea de reflexión)



- ¿Cual es la imagen de la figura que se refleja bajo esa línea en la hoja de papel?
- Dibuja como se verían las tres figuras en la hoja de papel

En esta primera secuencia se muestra al alumno realizando el diagrama solicitado.



Imagen 1



Imagen 2



Imagen 3

En la segunda secuencia se puede notar como el alumno usa su cuerpo como Instrumento (Embodiment) para comunicar sus resultados e interiorizar sus conclusiones.



Imagen 4



Imagen 5



Imagen 6



Imagen 7



Imagen 8

Imagen 4, 5:
El alumno explica del por qué hay simetría entre las figuras *"Al doblar es como si hubiera una sombra y las figuras son iguales opuestas"*.

Imagen 6
El alumno hace referencia a los ejes de simetría como un factor que influye para que suceda, lo que explico, *"y es que aquí hay rectas que son paralelas"*.

Imagen 7 y 8
El alumno rescata propiedades de la figura "*siguen siendo de igual tamaño"*; además de señalar que las distancia de las figuras respecto al eje de simetría son iguales, "*de aquí a aquí siguen teniendo la misma distancia"*.

En las secuencias se puede observar como en la primera parte el estudiante hace uso de una Habilidad VP y logra establecer una representación mental que llega a dibujar, y de la cual posteriormente retoma elementos de una habilidad espacial IFI, en donde incorpora su cuerpo a la explicación e interiorización de resultados.

Conclusiones

El alumno 10 fue uno de los que pudo incorporar y mostrar elementos de cómo interioriza una Herramienta y la transforma como Instrumento para el desarrollo y presentación de Habilidades Espaciales VP o IFI según lo fuera requiriendo.

La percepción espacial, es un elemento importante a rescatar y analizar de las tareas matemáticas. Comúnmente se considera que una imagen dice más que mil palabras, pero esto no es tan cierto dentro del ejercicio escolar.
Aquí se mostró el desarrollo cognitivo que lleva un estudiante al analizar una tarea de percepción espacial en especifico. Dentro de este caso de investigación aun hay un sin numero de pregunta por contestar. A continuación presento algunas de las de Adda (1998), citado en Presmeg (2006), que sirven para una amplia reflexión del tema.

¿Que aspectos de la pedagogía son significantes en la promoción de la fuerza y obviando las dificultades de uso de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas?, ¿Qué aspectos del uso de diferentes tipos de imágenes mentales y visualización son efectivas en la resolución de problemas en varios niveles?, ¿Cuál es el rol de los gestos en la visualización matemática?, ¿Qué procesos de conversión son involucrados en la flexibilidad de movimiento entre varios registros matemáticos, incluyendo la visión natural, así combinando el fenómeno de **compartmentalization** *(división de algo)?, ¿Cuándo puede el profesor ayudar con el aprendizaje haciendo conexiones entre lo visual y lo simbólico de las inscripciones de las mismas ideas matemáticas?, ¿Cuándo pude ser usada una imagen mental y las inscripciones visuales facilitan o impiden la verificación de procesos de objetos matemáticos?, ¿Cuándo los aspectos visuales de la tecnología computacional cambian la dinámica de aprendizaje de las matemáticas?*

Bibliografía:

Arrieta M. (2003) Línea de Investigación : Capacidad Espacial y Educación Matemática. *Didáctica de las matemáticas SEIM.*

Bishop, A. J. (1983) Spatial abilities and mathematical thinking. In *proceedings of the fourth International Congress of Mathematical Education,* 176-178.

Del Grande, J. (1990). Spatial Sense, *Arithmetic Teacher*, 37, 14-20.

Dvora, T. And Dreyfus, T. (2004). Unjustified Assumption Based on diagrams in geometry. Proceedings of the 28th Conference of the International Group the psychology of Mathematics Education.(Vol. 2, pp. 311-318).

Flores, C. Y Moretti, M. (2005). O movimento da figura na resolução de problemas matemáticos: o uso da reconfiguração em problemas históricos. *REREMAT*, 14 -25.

Gutiérrez, A. (1988). Las Representaciones Planas del Cuerpo 3-Dimensional en la Enseñanza de la Geometría Espacial. *Revista EMA*, 3(3), 193-220.

Gutierrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación Matemática*; Valencia.

Gusev, V. A. and Safuanov, I. S. (2003). Thinking in Images and its Role in Learning Mathematics. *In N. Pateman, B. J. Dougherty, & Zillox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference*, 4, 87-94.

Presmeg, N. (2006) Research on visualization in learning and teaching mathematics, En editor Gutierrez, a. y Boero, P.(Eds), *Handbook of Research on the psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, (205-235). The Netherlands: Sense publisher.

Trouche, L. (2004). Managing the Complexity of Human/Machine Interactions inComputerized Learning Enviroments: Guiding students` Command Process Though Instrumental Orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.

UNA EXPERIENCIA DE DESARROLLO UTILIZANDO TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN: SITIO WEB PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DEL TEMA LÍMITES Y CONTINUIDAD

A EXPERIENCE OF DEVELOPMENT UTILIZING TECHNOLOGIES OF INFORMATION AND COMMUNICATION: I LAY SIEGE TO WEB FOR THE TEACHING AND THE LEARNING OF THEME LÍMITES AND CONTINUITY

Enrique Vílchez Quesada[1]
Eric Padilla Mora[2]

Resumen: desde hace muchos años la Red Internet se ha convertido en uno de los principales medios de comunicación masiva a nivel mundial, ofreciendo conectividad en múltiples ámbitos de interacción social. Como producto de estos procesos, muchos investigadores en Costa Rica han venido desarrollando recursos basados en el uso de TIC's para contribuir con la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. Mediante el presente artículo se explica el diseño y desarrollo de una experiencia de TI, cuyo objetivo principal fue ofrecer una alternativa teórico-práctica a estudiantes matriculados en un curso de cálculo diferencial. Se describe el proceso de investigación llevado a cabo y la propuesta de solución.

Palabras clave: ENSEÑANZA, APRENDIZAJE, MATEMÁTICA, SITIOS, WEB, TECNOLOGÍA, CAMBIO.

Abstrac: From the Red does many years Internet has become one of principal means of communication massive worldwide, offering connectivity in multiple spaces of social interaction. As the product of these processes, many researchers at Costa Rica have come developing resources based in the use of TIC 's to contribute with the teaching and the learning of Mathematics. By means of the present article he understands the design and development of experience of YOU, it was whose principal objective to offer students registered at a course of differential calculus a theoretic practical alternative. The fact-finding process accomplished and the proposal of solution are described.

Key words: TEACHING, LEARNING. MATHEMATICS, PLACES, WEB, CHANGE.

I. INTRODUCCIÓN

La actual diversidad de las tecnologías de la información y la comunicación así como sus usos en el ámbito educativo, ha abierto de forma masiva nuevas posibilidades de interacción en el aula, nuevos roles discente-docente, nuevos entornos de comunicación, nuevos entornos de enseñanza-aprendizaje, y por qué no, profundos cambios didácticos y metodológicos.

El presente artículo expone una experiencia de diseño y desarrollo de un Sitio Web para la enseñanza y el aprendizaje del tema límites y continuidad, como base de cualquier curso de cálculo diferencial. En particular el estudio se realizó con estudiantes de la Universidad del Valle en Costa Rica y profesores de matemática con experiencia en el área, en las distintas universidades estatales del país.

II. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

[1] Máster en Tecnología e Informática Educativa y Licenciado en Enseñanza de la Matemática. Profesor de la Escuela de Matemática, Escuela de Informática y la División de Educología de la Universidad Nacional de Costa Rica. Email: evq1529@yahoo.com
[2] Máster en Tecnología e Informática Educativa y Bachiller en Enseñanza de la Matemática. Profesor de la Universidad del Valle de Costa Rica y del Colegio Universitario de Cartago. Email: ermmm@costarricense.cr

Desarrollar un Sitio Web, para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la teoría y las aplicaciones del tema límites y continuidad, mediante el enfoque de la resolución de problemas.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Determinar las ventajas ofrecidas por el desarrollo de Sitios Web como recurso para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática.
- Investigar los temas donde los estudiantes presentan mayores niveles de deficiencias y dificultades cognitivas, fundamentales para el desarrollo de los contenidos del tema límites y continuidad.
- Determinar las necesidades educativas requeridas para la elaboración de un Sitio Web que apoye y favorezca los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema límites y continuidad.
- Analizar dos Sitios Web activos en la red que traten el tema límites y continuidad, para valorar aspectos como estructura, diseño gráfico, tratamiento pedagógico y metodológico de la información, forma de presentación de los contenidos y empleo de recursos multimediales entre otros.
- Investigar acerca del aporte ofrecido por el enfoque de resolución problemas a los procesos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática.
- Plantear y desarrollar soluciones a algunas de las dificultades presentes en la enseñanza y el aprendizaje del tema límites y continuidad.
- Elaborar el material teórico y práctico para el Sitio Web, de acuerdo con los contenidos desarrollados en el curso de Cálculo I de la Universidad del Valle.
- Elaborar problemas que utilicen la teoría de límites y continuidad para su solución.
- Elaborar el diseño educativo y de comunicación del Sitio Web.
- Generar actividades de carácter tanto algorítmico como heurístico, que combinen los modelos pedagógicos lineales e integradores, así como los enfoques epistemológicos academicistas y constructivistas.
- Desarrollar el Sitio Web.

III. TIPO DE ESTUDIO

El estudio realizado consiste en un análisis sobre las necesidades cognitivas que presentan los y las estudiantes de la Universidad del Valle en el curso de Cálculo I, integrando una estrategia de solución mediante el diseño y desarrollo de un Sitio Web.

IV. REFERENTE TEÓRICO

1. Recursos tecnológicos computarizados y la enseñanza-aprendizaje de la Matemática en Costa Rica

Los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en Costa Rica se han caracterizado, en todos los niveles, por ser algorítmicos, rígidos, lineales y metódicos; usan una metodología tradicional, donde el educador asume un rol protagónico de transmisor de información, mientras el estudiante tiene el papel de receptor pasivo.

Algunas investigaciones, como la realizada por los profesores Dr. Luis Gerardo Meza Cascante y M.Ed. Fabio Hernández del Instituto Tecnológico de Costa Rica, acerca de las dimensiones culturales en aulas universitarias donde se desarrollan procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ratifican que los procesos continúan siendo iguales. Dicha investigación confirma el predominio de las clases magistrales en combinación con el método interrogativo.

En el artículo “Enseñanza de la Matemática en el ITCR; patrones de interacción en el aula”, Meza y Hernández señalan: “Los procesos que ordinariamente se desarrollan en la enseñanza de la matemática, se caracterizan por clases magistrales, presentación secuencial de contenidos,

prácticas adicionales, trabajo individualizado como norma general y comunicación entre las y los estudiantes escasa" (2001 : p.32). Por otra parte, una revisión y análisis de los materiales didácticos elaborados para apoyar o desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, entre ellos los libros de texto, no escapan a esta estructura formal y rígida, ofrecen pocas posibilidades de formatos y elementos motivadores producidos con carácter informativo, pocos recursos de apoyo para los usuarios y centrados en la parte numérica y algebraica, esto hace considerar a la Matemática tediosa y aburrida.

Los avances tecnológicos apuestan a un cambio en dichos procesos de enseñanza y aprendizaje, con miras a utilizar nuevos métodos y estrategias didácticas; aprovechan todas las potencialidades ofrecidas por estos, donde elementos como imágenes, interactividad, dinamismo y recursos multimediales, sean utilizados al máximo. Al respecto el profesor Mario Marín del Instituto Tecnológico de Costa Rica plantea: "Es necesario que las opciones que la tecnología ofrece amplíen el horizonte de posibilidades que se tienen y permitan enseñar una mejor matemática y en una mejor manera" (1999 : p.288). De esta forma, el profesor debe considerar la tecnología como un soporte en la enseñanza que aventaja a otros medios por su alto nivel de interacción, al verla no sólo como una herramienta de apoyo sino como aquella transformadora de los métodos tradicionales de enseñanza, porque permite generar procesos más dinámicos y agradables gracias a sus capacidades gráficas, rapidez en cálculos numéricos y facilidades de manipulación y dinamismo, entre otras.

Silvia Calderón, en su artículo, "Una experiencia con el asistente matemático Derive", expresa: "La tecnología nos proporciona una herramienta para incursionar en la Matemática, mucho de lo que antes no podíamos hacer: como gráficas inimaginables o muy difíciles de realizar. Cálculos interminables y tediosos, son ahora de fácil realización con su ayuda, y esto ha facilitado la comprensión y aprehensión de conceptos y resultados matemáticos." (1999 : p.55) Harel y Papert (citados por Calderón) también afirman: "La tecnología permite el uso de representaciones simbólicas, el acceso a representaciones numéricas y visuales dinámicas, y puede ser utilizada como medio de exploración y donde los alumnos pueden expresar ideas" (Ídem).

Se evidencia, a partir de lo anterior, la relación o influencia entre la Tecnología y la Matemática, caracterizada por aportes con respecto a representaciones gráficas y simbólicas, dinamismo, interactividad y rapidez de cálculos que pueden contribuir a favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, sobre todo la construcción de significados involucra el uso de representaciones. De esta manera, el aprendizaje de un concepto puede facilitarse cuando hay oportunidades de construir e interactuar con las mismas, así como la elaboración de cálculos de forma rápida y eficaz, los cuales pueden favorecer la comprensión de conceptos, resultados y permitir el desarrollo de capacidades de intuición, deducción y observación.

Para algunos teóricos, el empleo de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, ofrece una serie de ventajas dentro de las cuales, según ellos, se destacan (Meza, Garita y Villalobos[3]):
"

- La incorporación de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática permite aumentar la eficacia y eficiencia de algunas estrategias que el docente utilizaba antes de incorporarla.
- El empleo de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática permite diseñar algunas estrategias didácticas que no es posible desarrollar con otros medios, dentro de estas están los laboratorios de descubrimiento y exploración dinámicos. " (2001 : p.67)

Por su parte Manuel Área[4] agrega:

[3] Meza. Garita y Villalobos en Estrategias didácticas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática asistidos por computadora. Del documento "Elementos para Enseñar Matemática", del Doctor Luis Gerardo Meza Cascante. Artículo publicado también en el libro memorias del II CIEMAC de diciembre de 2001.

- "La diversidad de recursos multimediales permiten presentar la información en una amplia variedad de formatos de texto y gráficos, permitiéndole al estudiante poder acceder a la información de múltiples formas.
- Se puede generar información conectada hipertextualmente, lo cual le ofrece al estudiante el acceso a la información de una manera interactiva y dinámica. Dando flexibilidad al proceso de enseñanza y aprendizaje, logrando que este no sea tan lineal.
- Ofrece la posibilidad de desarrollar materiales flexibles e interactivos." (2003 : p.35)

Siegfried Carranza[5] sugiere:

- "Posibilita la utilización de hipertextos, con los cuales si no entiende un término hace clic sobre este y obtiene una explicación adicional o se envía donde está la información que necesita (vínculos que no se logran cuando uno esta leyendo un libro y que ocasiona mucha pérdida de tiempo y aburrimiento y es la causa fundamental de muchos fracasos)." (1999 : p.53)

Otra ventaja es la posibilidad de generar procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de actividades como laboratorios de exploración y descubrimiento, los cuales permiten a los estudiantes construir el conocimiento a partir de la interacción, intuición y razonamiento, además posibilita efectos de rotación, giro y visualización de figuras y gráficas, actividades imposibles de lograr mediante métodos tradicionales.

A pesar de estas ventajas, algunos teóricos advierten la conveniencia de tomar en cuenta factores que pueden incidir en su empleo y, a la postre, generan procesos de enseñanza aprendizaje que no contribuyan con su mejoramiento. Galvis por ejemplo (citado por Meza), indica: "Si la informática ha de tener un papel importante en el enriquecimiento de la labor educativa, es indispensable tener claro qué tipo de educación deseamos impulsar y cómo se puede favorecer tal enfoque educativo" (1997 : p.208). De esta manera, es necesario considerar la incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje, enmarcada dentro de un proceso planeado y estructurado, donde contribuya con la solución de problemas concretos. Meza, por su parte, asegura: "La tecnología debe incorporarse sólo cuando sea más eficaz o más eficiente que otros medios" (Ídem : p.211).

Lo anterior sugiere plantearse ¿Cuáles consideraciones deben tomarse en cuenta al apoyar, con tecnología, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática? Ante esta interrogante, Meza, Garita y Villalobos, indican: "El empleo de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática debe estar basado en los siguientes principios:

- El uso de la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática debe enmarcarse en un planeamiento educativo. Con fines claros y bien definidos.
- Debe responder a la solución de problemas bien definidos y no ser empleada con un fin en sí misma.
- La tecnología debe incorporarse en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática solo cuando sea más eficaz o más eficiente que otros medios." (2006: p.67)

La tecnología se convierte en un agente de cambio para los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, gracias a la posibilidad de manejar dinámicamente los objetos en múltiples sistema de representación, dentro de esquemas interactivos abre espacios para que los estudiantes puedan vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr con medios tradicionales como lápiz y papel) donde se puedan manipular directamente los objetos dentro de un ambiente de exploración; la inserción de texto, imágenes y gráficos. Estas experiencias serán fructíferas si tienen en cuenta la complejidad del contenido matemático por enseñar, las dificultades y necesidades de los estudiantes, dentro de un proceso planeado, inmerso en un contexto educativo.

---

[4] Manuel Área en el artículo en De los Webs educativos al material didáctico Web. Disponible en: <http://dewey.uab.es/pmarques/EVTE/webseducativos.pdf> [2006, enero 29]

[5] Siegfried Carranza en De la Matemática mediante computador: CD de Matemática Básica 1. Memoria del I Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora.

2. Tecnología, procesos de enseñanza y aprendizaje y el tema de límites y continuidad

Se realizó una revisión preliminar sobre tecnología, procesos de enseñanza y aprendizaje, y su relación con el tema de límites y continuidad, utilizando como fuente principal la red Internet. Esta revisión desprendió un conjunto de conclusiones muy importantes para efectos de este trabajo. Se encontró sitios y páginas con fines netamente informativos, cargadas de contenido en formato de texto, donde predominaban los cálculos algebraicos y aritméticos; páginas sin un aporte significativo en cuanto a estrategias metodológicas y pedagógicas, idénticas a las encontradas en un libro de texto.

Si se realiza una caracterización de estos Sitios Web educativos, referidos a los temas de límites y continuidad, tenemos que:

- Existe una carencia de los mismos.
- Los sitios encontrados ofrecen una cantidad de páginas Web únicamente con fines informativos, donde la información es muy estructurada y lineal.
- No tienen una lógica hipertextual y los documentos carecen de una propuesta de actividad y estrategia tanto pedagógica como metodológica creativa.
- La información se brinda de una manera expositiva y lineal, sin dar al usuario la posibilidad de recordar conocimientos previos, indispensables para el logro de una mejor comprensión acerca de la temática. Es decir, no tienen vínculos con páginas que le permitan al estudiante o usuario recordar aquellos conocimientos previos fundamentales.
- Los Sitios Web no hacen uso de los recursos multimediales. Los materiales son simplemente una trascripción electrónica de documentos escritos en papel (característica predominante en las páginas encontradas). Solo se ofrece información de modo expositivo y no se incorporan actividades facilitadoras de un aprendizaje por descubrimiento. Dicho de otro modo, los procesos de aprendizaje se caracterizan por ser pasivos y memorísticos, no se encuentra diferencia destacable entre este tipo de Sitio Web y un libro de texto.

2.1 Dificultades que presenta la enseñanza y el aprendizaje del tema límites y continuidad

En el apartado 1 se ha mencionado que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática están caracterizados por ser rígidos, lineales, metódicos y dirigidos, donde el rol del profesor es protagónico y el del estudiante receptor pasivo, situación que en muchos casos impide lograr un proceso exitoso. Por su parte, en los centros de educación superior la enseñanza del tema de límites y continuidad no se aleja de esta estructura, la cual imposibilita a la mayoría de estudiantes comprender y aplicar dichos contenidos.

Este tema, impartido en el curso de Cálculo I para las distintas carreras en los centros de educación superior, es la base central y fundamental sobre la cual se construye el cálculo diferencial e integral, además tiene un carácter instrumental para la resolución de problemas no solo en la Matemática, sino también en otras áreas tales como la Física, la Administración y las Ingenierías. La enseñanza de la teoría de límites y continuidad puede contribuir con el desarrollo simultáneo de la intuición, experimentación y lógica, situaciones que han hecho indispensable su enseñanza y comprensión, lo planteado por algunos teóricos permite asegurar que la enseñanza y el aprendizaje de dicho tema ha sido y es una tarea realmente difícil, esto provoca que los estudiantes, en muchos de los casos, pierdan los cursos o deserten.

Diversos autores plantean que la enseñanza y aprendizaje del tema de límites y continuidad conlleva serias dificultades. Al respecto Ana Cecilia Medina, estudiante del Programa de Maestría en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional, en su artículo “Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas” plantea: “El concepto de límite ocupa una posición central en el campo conceptual del Cálculo y su complejidad resulta ser fuente de dificultades tanto en la enseñanza como en el aprendizaje. Primero por su carácter estructural que lo constituye el eje central y concepto básico sobre el cual se construye la

estructura del cálculo diferencial e integral y otros conceptos de otras ramas de la Matemática, también por su carácter instrumental como herramienta para la solución de problemas tanto al interior de las Matemáticas como de ciencias aplicadas, finalmente, como objeto matemático gestado en diferentes contextos: geométrico, aritmético, métrico, topológico y asociado a otros objetos matemáticos." (sdf : p.2).

Las investigaciones realizadas por diversos teóricos, permiten hacer una lista de dificultades presentes en la enseñanza y aprendizaje del tema, relacionadas con contenidos sobre funciones, álgebra, aritmética y algunas propias de límites y continuidad, por tanto, hemos considerado necesario hacer una clasificación temática.

1. Dificultades asociadas al tema de funciones

- "Los estudiantes presentan serias dificultades para identificar lo que es realmente una función. Los criterios establecidos por los mismos para comprobar el carácter funcional de un objeto matemático no corresponde necesariamente a la definición formal de la noción de función, aún cuando ellos pueden citar correctamente esta definición formal (Vinner y Dreyfus, citados por Artigue, 1998 : p.3)." Al respecto, Artigue establece: "Los criterios dependen más de los ejemplos que frecuentemente encuentran los estudiantes y que adquieren la posición de prototipos y de asociaciones, esto les hace creer por ejemplo que $f(x) = 4$, no es una función pues la expresión no depende de "x", pero si se grafica sí se considera como tal pues está representada por una recta." De esta manera, autores como Tall y Vinner citados por Artigue hablan de la diferenciación entre "definición del concepto" e "imagen del concepto". (Idem)
- Héctor Lara en el artículo "Los problemas alrededor del concepto de límite y su enseñanza a través del uso de computadora" plantea "A los estudiantes les es difícil comprender el concepto de variable. Estos no hacen la distinción entre variable dependiente e independiente. Además de dificultades relacionadas con los subconceptos de función, dominio y rango, así como con la graficación de funciones y el establecimiento de relaciones entre criterios y tipos".
- "La dificultad para transitar entre diferentes sistemas simbólicos de representación, por ejemplo, del gráfico al numérico, del numérico al algebraico, del algebraico al gráfico, del verbal al algebraico, entre otros. Para autores como Schoenfeld, Smith, Arcavi, Dagher citados por Artigue, esto se evidencia principalmente en las dificultades de traducción de la forma gráfica a la forma algebraica" (1998 : p.4).
- Stella Nora en su artículo "La importancia del registro gráfico en el cálculo de límite de una función" plantea: "La resolución de problemas que requieran de su aplicación es pobre, sobre todo en aquellas que no se indican expresamente la acción que se debe realizar." (sdf : p.1)

2. Dificultades asociadas al tema de álgebra

- Héctor Lara (Ídem), plantea la existencia de errores tales como

$$\sqrt{x^2+3^2} = \sqrt{x^2}+\sqrt{3^2}, \qquad (x+y)^2 = \left(x^2\right)+\left(y^2\right),$$

$$\frac{(2x-1)+(x-1)}{x-1} = (2x-1) \text{ o } \frac{sen(x+1)}{(x+1)} = sen(1)$$

Estos errores generan en los estudiantes la imposibilidad de comprender una serie de procedimientos que les permitan aplicar la teoría correctamente. Resulta preocupante incurrir en errores de esta naturaleza, pues impiden al estudiante desarrollar y comprender otros temas relacionados con el álgebra y la Matemática en general.

- Dificultades para factorizar o comprender este concepto, racionalizar numeradores y denominadores.

- Dificultades para trabajar y manipular expresiones con valor absoluto.

3. Dificultades de tipo numérico

- Errores de tipo numérico como por ejemplo: $\frac{0}{0} = 0$ ó $\frac{0}{1} = \infty$.
- Errores al hacer evaluaciones o cálculo de valores numéricos de expresiones algebraicas.
- Dificultades para representar números en la recta real, en los sistemas de coordenadas y por ende de representar y reconocer pares ordenados.

4. Dificultades asociadas propiamente a los conceptos

- Al respecto, Stella Nora[6] menciona "por tratarse de una noción que requiere altos niveles de abstracción, su aprendizaje se reduce a una memorización de la definición del concepto, la cual es fácilmente olvidable, dado la falta de interpretación de la misma, a pesar de ello algunos estudiantes saben como resolver ejercicios de tipo cálculo, pero están muy lejos de comprender el concepto". (sdf : p.2)
- No se comprende que el límite mide el comportamiento de una función en un punto o cerca de un punto. Por tanto, si la función está definida o no en dicho punto puede el límite existir.
- No se entiende la determinación de un límite como un proceso que va más allá de una simple sustitución.
- Los estudiantes pueden resolver ejercicios de tipo numérico y algunas veces los algebraicos, pero fracasan o no tienen buen desempeño al desarrollar actividades en materias posteriores que requieran de la reflexión y uso adecuado de la noción.
- Se presentan dificultades asociadas con la manipulación algebraica de las funciones cuyos límites se desean determinar.
- Es difícil comprender los conceptos de límites infinitos o al infinito.

V. METODOLOGÍA

Este apartado contempla las estrategias metodológicas utilizadas para obtener la información que sirvieron de fundamento para el desarrollo de esta propuesta. La metodología se baso en dos procedimientos:

- Aplicar, revisar y analizar un cuestionario presentado a profesores universitarios de Matemática en Costa Rica, con experiencia en el curso de Cálculo I en los últimos cinco años, así como a estudiantes de Ingeniería de la Universidad del Valle que se encontraban matriculados en el curso de Cálculo I durante el II cuatrimestre del período lectivo 2006.
- Un análisis a dos Sitios Web que trataban el tema de límites y continuidad.

1. Información requerida

Ante el objetivo general de este proyecto era necesario realizar algunas investigaciones para sustentar las afirmaciones planteadas en el referente teórico, con respecto a los temas donde los y las estudiantes presentan mayores niveles de deficiencias y dificultades cognitivas fundamentales en el desarrollo del tema de límites y continuidad. Se consideró necesario aplicar tanto a estudiantes de Ingeniería de la Universidad del Valle como a distintos profesores de diversas Universidades Públicas y de la Universidad del Valle, un cuestionario con el fin de:

- Determinar los temas de la teoría límites y continuidad, donde los estudiantes presentan deficiencias y dificultades cognitivas, de acuerdo con el criterio de algunos profesores que

[6] Stella Nora, La importancia del registro gráfico en el cálculo de límite de una función. Artículo que puede encontrarse en la dirección: http://www.fceco.uner.edu.ar/cpn/catedras/matem1/matenmat/a08gmcer.doc> [2006, enero 24].

han impartido dicha temática, así como de estudiantes de cursos anteriores o actuales. Deficiencias y necesidades que van desde los contenidos propios del tema hasta los conocimientos previos requeridos por el y la estudiante.

- Investigar si los profesores y los estudiantes han utilizado Sitios Web como recurso para generar procesos de enseñanza y aprendizaje en algún curso impartido o recibido, así como en cursos que traten sobre el tema de límites y continuidad, para determinar algunas características generales de los sitios utilizados y los aportes ofrecidos a los procesos de enseñanza y aprendizaje.
- Determinar el nivel de aceptación, por parte de profesores y estudiantes, de un Sitio Web como recurso de apoyo para los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema de límites y continuidad, que considere los contenidos donde los estudiantes presentan deficiencias y dificultades cognitivas.

Como segundo aspecto se consideró necesario buscar dos sitios en Internet que trataran el tema de límites y continuidad, con el fin de hacer una valoración acerca de su estructura, forma de presentación de los contenidos, tratamiento pedagógico y metodológico de la información, empleo de recursos multimediales y diseño gráfico, entre otros aspectos. Elementos que permitieron establecer parámetros comparativos para mejorar lo mostrado y, a su vez, dar sustento a lo expuesto en el referente teórico.

2 Técnica y procedimiento para la elaboración de los documentos de recolección de información y obtención de la misma

La información se obtuvo mediante datos primarios, recolectados por los investigadores a partir de un cuestionario aplicado a doce profesores universitarios de Matemática, de los cuales tres tienen el grado académico de maestría y nueve de licenciatura, graduados de la Universidad Nacional (UNA), el Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR), la Universidad de Costa Rica (UCR) y la Universidad Estatal a Distancia (UNED); así como a dieciocho estudiantes de Ingeniería de la Universidad del Valle. Esto da una muestra total de treinta encuestados.

Los profesores seleccionados tenían como requisito haber impartido el curso de Cálculo I en los últimos cinco años, así se garantizó obtener la información en función de vivencias recientes de los procesos de enseñanza. Dicha muestra estuvo conformada por seis profesores de la UNA, dos de la UNED, uno del ITCR, uno de la UCR y dos de la Universidad del Valle (UVA). Por su parte, la totalidad de los estudiantes encuestados corresponde a las carreras de Ingeniería de la Universidad del Valle y como requisito debieron llevar o están llevando el curso de Cálculo I, garantizando así, una opinión consistente dada su experiencia con el tema.

Dichos cuestionarios fueron revisados y avalados por la Licenciada Patricia Delvó Gutiérrez[7], Estadista y académica de la Universidad de Costa Rica. Contribución sumamente significativa para garantizar la efectiva recolección de la información a partir de los objetivos, del problema propuesto y facilitar el análisis estadístico posterior. Dicha revisión fue mediante el Programa de la Unidad de Servicios Estadísticos[8] de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Costa Rica.

Por su parte, el documento para la evaluación de los dos Sitios Web fue revisado y corregido por la Máster Carolina Víquez Martínez, profesora en la Maestría en Tecnología e Informática Educativa de la Universidad Nacional, revisiones y correcciones sumamente importantes y oportunas en términos de contenido.

Cabe resaltar el gran aporte de la Doctora Maite Capra Puertas en la elaboración y revisión de estos documentos, así como su aprobación para la respectiva aplicación.

---

[7] La Licenciada Patricia Delvó Gutiérrez, es graduada como Licenciada en Estadística de la Escuela de Estadística de la Universidad de Costa Rica, donde es profesora de cursos en esa especialidad.

[8] Este programa ofrece servicios de consultoría estadísticos a cualquier persona o entidad y forma parte de un programa de extensión de servicios de la Universidad de Costa Rica.

3. Análisis estadístico de los cuestionarios

Antes de proceder al análisis de los datos de los cuestionarios aplicados es necesario plantear algunas consideraciones importantes:

- En el análisis de los datos se considera únicamente la frecuencia absoluta (número de veces que se repite un determinado valor de una variable discreta o cualitativa, será abreviada con F. A), la cual brinda la información necesaria y suficiente para los objetivos planteados en esta investigación.
- Serán considerados como temas con mayores niveles de dificultades o deficiencias cognitivas, todos aquellos cuya frecuencia absoluta, en la interpretación de los datos sea superior o igual a doce[9], esto representa una frecuencia relativa porcentual superior o igual al 40%, dicha frecuencia está por debajo de la mitad de la muestra cuestionada.
- Para los análisis gráficos, los temas están representados por números correspondientes en su orden a los de la tabla de frecuencias que antecede al mismo.

3.1 Descripción de la población

Dentro de las características más sobresalientes de la población participante en la aplicación de los instrumentos se tienen:

En cuanto a los profesores:

- El 66,6 % es de género masculino y el 33,4 % femenino.
- El 75% son licenciados y el 25% máster. Todos graduados de las diferentes universidades estatales de Costa Rica.
- Las edades de los profesores participantes oscilaron entre los 23 y 46 años, con un promedio de 30 años y 7 meses.
- El número de veces que los profesores han impartido el tema límites y continuidad en los últimos cinco años osciló entre 1 y 20. Con un promedio de 5.

En cuanto a los estudiantes:

- El 61,1 % es de género masculino y el 38,9 % femenino.
- Las edades de los participantes oscilan entre los 18 y 45 años, con un promedio de 26 años y 7 meses.
- 9 estaban llevando el curso de Cálculo I y 9 ya lo habían llevado durante el período lectivo 2005.
- 9 estudiantes cursaban la carrera de Ingeniería Industrial y 9 de Ingeniería en Informática.

3.2 De su experiencia en los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema de límites y continuidad, dificultades y deficiencias cognitivas

Para este punto se solicitó tanto a estudiantes como profesores y de acuerdo con su experiencia en el curso de Cálculo I, indicar aquellos temas con mayores niveles de deficiencias y dificultades cognitivas fundamentales para el desarrollo de los contenidos del tema de límites y continuidad. Los temas fueron divididos en dos partes; en primera instancia se consideraron aquellos que son conocimientos previos fundamentales y, posteriormente, los propios del tema de límites y continuidad. La estructura de este apartado fue de selección múltiple con la posibilidad de escribir algún otro tema no contemplado en la lista.

1. Con respecto a los conocimientos previos del curso

[9] Dicho dato de acuerdo con el criterio de la Licencia Delvó es establecido por el o los investigadores, por tanto puede estar sujeto a discusión de acuerdo con el criterio de otros especialistas.

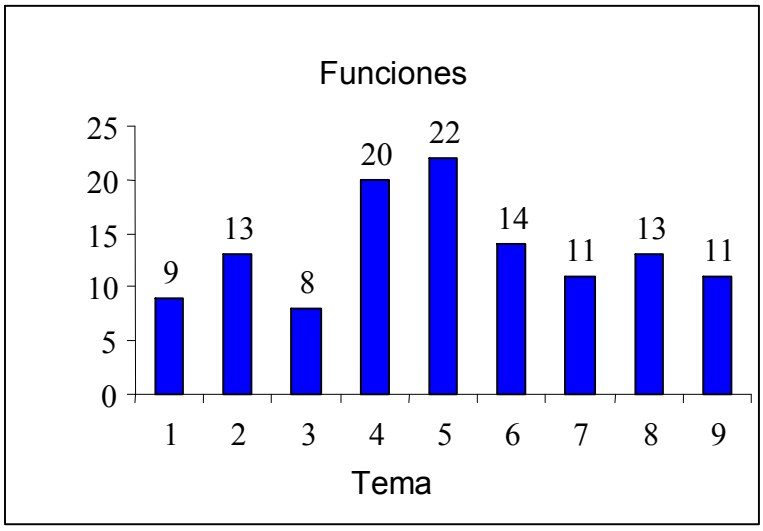
a) Del tema de funciones

Tabla número 1
F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones

Tema	F. A
1. Concepto de función	9
2. Concepto de variable dependiente e independiente (imagen y preimagen).	13
3. Dominio, codominio y ámbito.	8
4. Construcción de gráficas de funciones.	20
5. Análisis de gráficas de funciones.	22
6. Pasar de la representación gráfica al análisis numérico.	14
7. Pasar de la representación gráfica a la simbólica.	11
8. Pasar de la representación simbólica a la gráfica.	13
9. Pasar de la representación algebraica a la gráfica.	11

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 1
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

De acuerdo con los datos obtenidos se considera, con respecto al tema de funciones, que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en las siguientes áreas:

1. Análisis de gráficas de funciones.
2. Construcción de gráficas de funciones.

3. Pasar de la representación gráfica al análisis numérico.
4. Concepto de variable dependiente e independiente (imagen y preimagen).
5. Pasar de la representación simbólica a la gráfica.

b) Del tipo de funciones

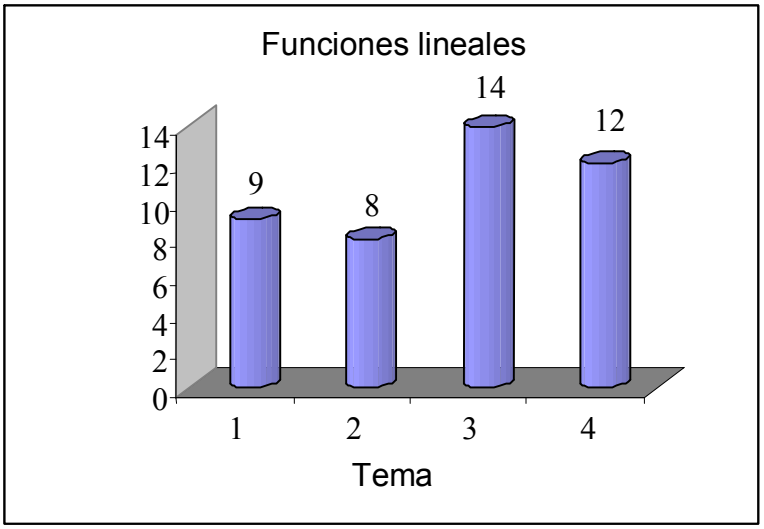
b.1 Funciones lineales

Tabla número 2
F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones lineales

Tema	F. A
1. Reconocer funciones lineales a partir de su criterio.	9
2. Características de una función lineal a partir de su criterio.	8
3. Graficar funciones lineales.	14
4. Características de una función lineal a partir del análisis de su gráfica.	12

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y profesores universitarios

Gráfico número 2
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones lineales



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y profesores universitarios

De acuerdo con los datos obtenidos, se considera con respecto al tema de funciones lineales que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en:

1. Graficar funciones lineales.
2. Características de una función lineal a partir del análisis de su gráfica.

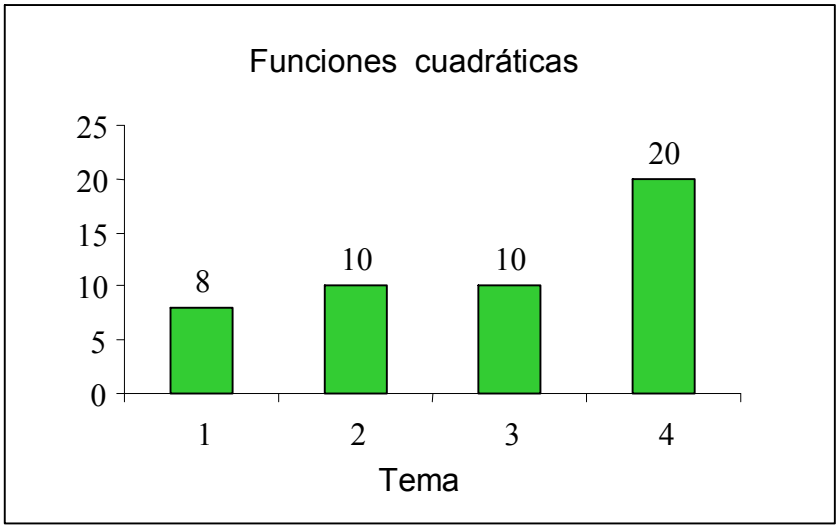
b.2 Funciones cuadráticas

Tabla número 3
F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones cuadráticas

Tema	F. A
1. Reconocer funciones cuadráticas a partir de su criterio.	8
2. Características de una función cuadrática a partir de su criterio.	10
3. Graficar funciones cuadráticas.	10
4. Características de una función cuadrática a partir del análisis de su gráfica.	20

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 3
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones cuadráticas



Fuente: información de los cuestionarios a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Con respecto al tema de funciones cuadráticas se puede inferir que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias únicamente en las características de una función cuadrática a partir del análisis de su gráfica.

b.3 Funciones exponenciales

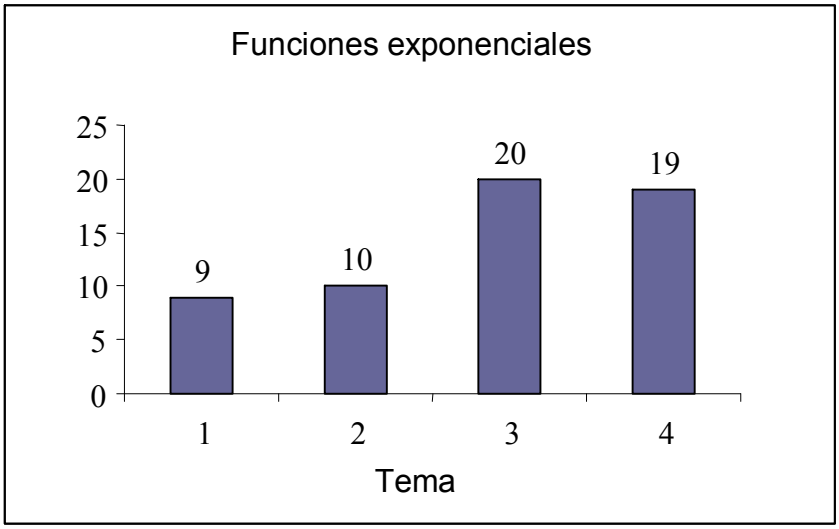
Tabla número 4
F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones exponenciales

Tema	F. A
1. Reconocer funciones exponenciales a partir de su criterio.	9

2. Características de una función exponencial a partir de análisis de su criterio.	10
3. Graficar funciones exponenciales.	20
4. Características de una función exponencial a partir del análisis de su gráfica.	19

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 4
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones exponenciales



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

De acuerdo con los datos obtenidos se considera con respecto al tema de funciones exponenciales, que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en:

1. Graficar funciones exponenciales.
2. Características de una función exponencial a partir del análisis de su gráfica.

b.4 Funciones logarítmicas

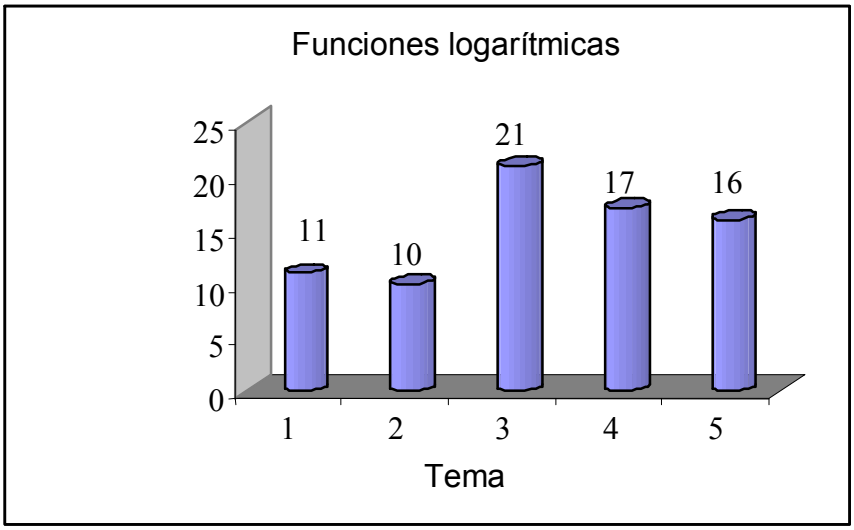
Tabla número 5
F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones logarítmicas

Tema	F. A
1. Reconocer funciones logarítmicas a partir de su criterio.	11
2. Características de una función logarítmica a partir del análisis de su criterio.	10
3. Graficar funciones logarítmicas.	21
4. Características de una función logarítmica a partir del análisis de su gráfica.	17

5. Propiedades de las funciones logarítmicas.	16

Fuente: información de los cuestionarios aplicado a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 5
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones logarítmicas



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Con respecto al tema de funciones logarítmicas, se considera que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en:

1. Graficar funciones logarítmicas.
2. Características de una función logarítmica a partir del análisis de su gráfica.
3. Propiedades de los logaritmos.

b.5 Funciones trigonométricas

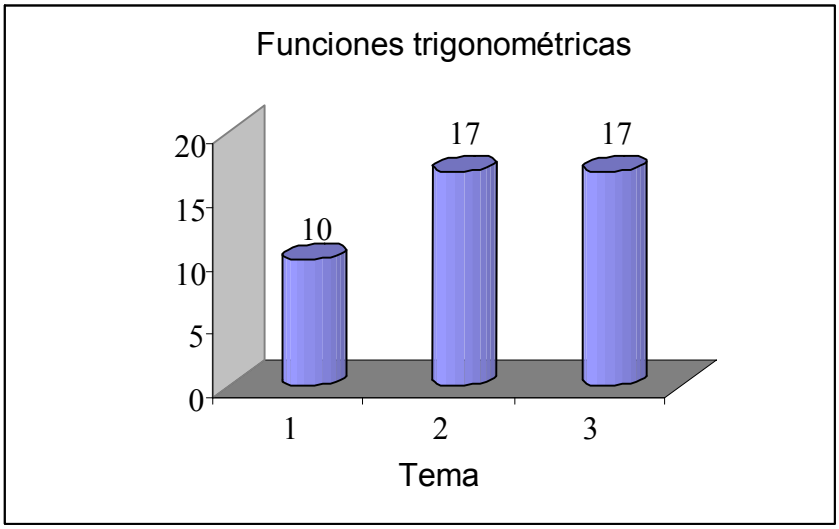
Tabla número 6
F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones trigonométricas

Tema	F. A
1. Reconocer funciones trigonométricas a partir de su criterio.	10
2. Graficar funciones trigonométricas.	17
3. Características de una función trigonométrica a partir del análisis de su gráfica.	17

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 6

Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones trigonométricas



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

De acuerdo con los datos obtenidos, se considera, con respecto al tema de funciones trigonométricas, que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en:

1. Graficar funciones trigonométricas.
2. Características de una función trigonométrica a partir de su gráfica.

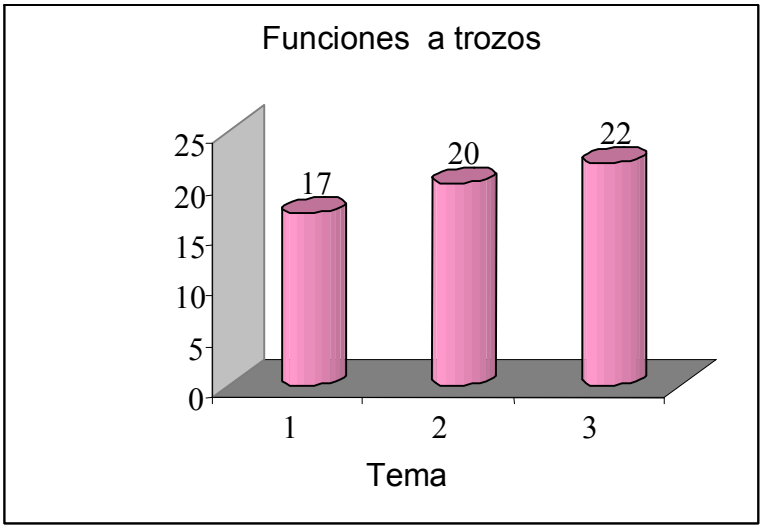
b.6 Funciones a trozos o por partes.

Tabla número 7
F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones a trozos o por partes

Tema	F. A
1. Reconocer funciones por partes a partir de su criterio.	17
2. Graficar funciones a trozos.	20
3. Análisis de la gráfica de una función a trozos.	22

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 7
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de funciones a trozos o por partes



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Se considera, con respecto al tema de funciones a trozos o por partes, que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en:

1. Reconocer funciones por partes a partir de su criterio.
2. Graficar funciones a trozos.
3. Análisis de la gráfica de una función a trozos.

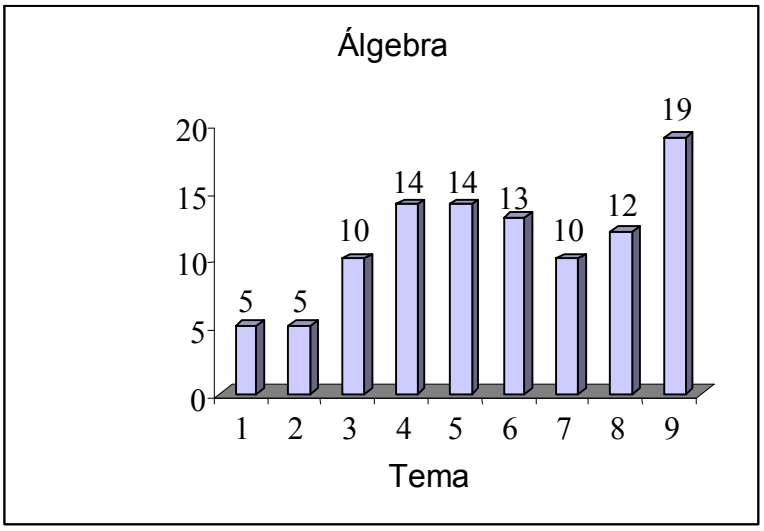
c) Del tema de álgebra

Tabla número 8
F. A: dificultades y deficiencias del tema de álgebra

Tema	F. A
1. Calcular el valor numérico de expresiones algebraicas.	5
2. Operaciones con polinomios.	5
3. Reconocimiento y utilización de fórmulas notables.	10
4. Factorización.	14
5. Simplificación de expresiones racionales.	14
6. Racionalización de numeradores y denominadores.	13
7. Resolución de ecuaciones de diversos grados en una incógnita.	10
8. Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.	12
9. Resolución de operaciones con expresiones algebraicas que contengan valor absoluto.	19

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 8
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de álgebra



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Los datos obtenidos revelan, con respecto al tema de álgebra, que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en:

1. Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
2. Racionalización de numeradores y denominadores.
3. Factorización.
4. Simplificación de expresiones racionales.
5. Resolución de operaciones con expresiones algebraicas que contengan valor absoluto.

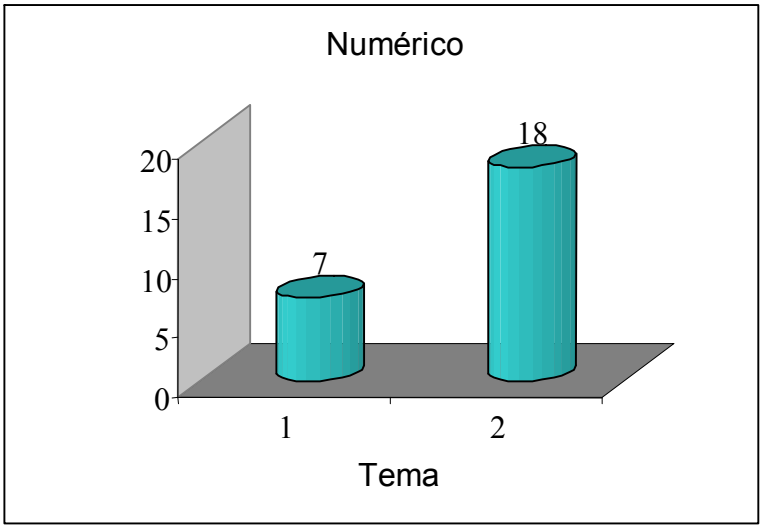
d) De cálculos de tipo numérico

Tabla número 9
F. A: dificultades y deficiencias de cálculos de tipo numérico

Tema	F. A
1. Resolver operaciones aritméticas.	7
2. Comprender y trabajar con expresiones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{0}{\infty}$ entre otras.	18

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 9
Gráfico de la F.A: dificultades y deficiencias de cálculos de tipo numérico



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

De acuerdo con los datos obtenidos, se considera con respecto a cálculo de tipo numérico, que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en comprender y trabajar con expresiones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{0}{\infty}$ entre otras.

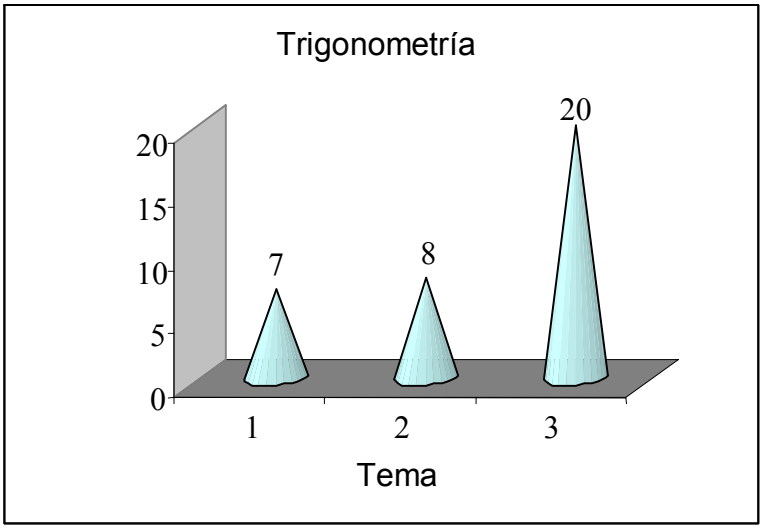
e) Del tema de trigonometría

Tabla número 10
F. A: dificultades y deficiencias del tema de trigonometría

Tema	F. A
1. Cálculo numérico de expresiones trigonométricas.	7
2. Reconocer las relaciones trigonométricas fundamentales.	8
3. Trabajar con expresiones trigonométricas que requieran del empleo de las relaciones trigonométricas fundamentales, tales como la simplificación.	20

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 10
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema de trigonometría



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios.

Los datos revelan, con respecto al tema de trigonometría, que los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en trabajar con expresiones trigonométricas que requieran del empleo de las relaciones trigonométricas fundamentales, tales como la simplificación.

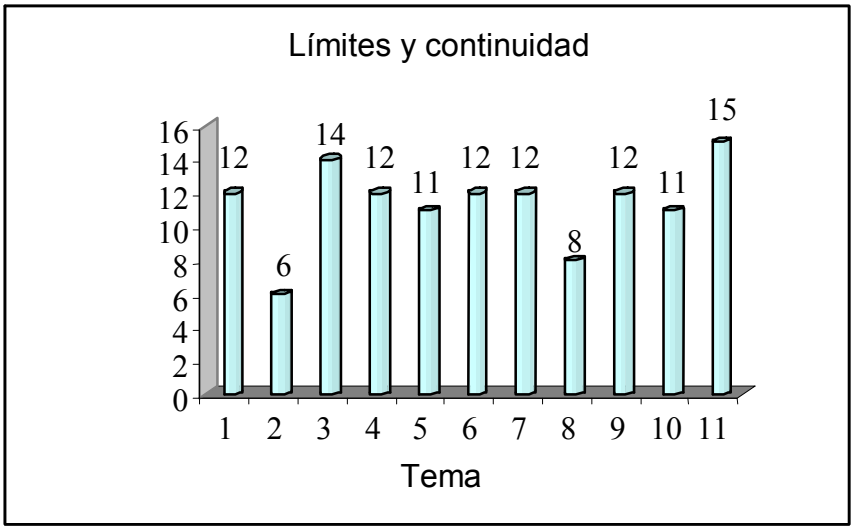
2. Con respecto al tema de límites y continuidad.

Tabla número 11
F. A: dificultades y deficiencias del tema límites y continuidad

Tema	F. A
1. Calcular límites a partir de la definición.	12
2. Calcular límites a partir de la elaboración de tablas de valores.	6
3. Analizar gráficamente el concepto de límite.	14
4. Calcular límites al pasar de la representación gráfica a la numérica.	12
5. Calcular límites al pasar de la representación gráfica a la algebraica.	11
6. Calcular límites que requieran comprender y trabajar con expresiones indeterminadas.	12
7. Comprender los límites infinitos y al infinito.	12
8. Comprender el concepto de continuidad en un punto.	8
9. Analizar gráficamente el concepto de continuidad.	12
10. Reconocer funciones continuas.	11
11. Aplicar la definición de continuidad y discontinuidad.	15

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Gráfico número 11
Gráfico de la F. A: dificultades y deficiencias del tema límites y continuidad



Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Con respecto al tema de límites y continuidad los estudiantes presentan mayores niveles de dificultades y deficiencias en:

1. Aplicar la definición de continuidad y discontinuidad.
2. Analizar gráficamente el concepto de límite.
3. Calcular límites a partir de la definición.
4. Calcular límites al pasar de la representación gráfica a la numérica.
5. Calcular límites que requieran comprender y trabajar con expresiones indeterminadas.
6. Comprender los límites infinitos y al infinito.
7. Analizar gráficamente el concepto de continuidad.

Al plantearles; ¿Considera usted la existencia de algún otro tema no contemplado en este cuestionario con respecto al tema de límites y continuidad donde presenta deficiencias o dificultades? ¿Cuál? Ningún encuestado mencionó otros temas.

3.3 Utilización de Sitios Web para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje

En este apartado se analiza desde dos perspectivas el uso de Sitios Web; por parte de los profesores como material de apoyo durante el proceso de enseñanza y, por otro, el empleo de Sitios Web por los estudiantes como material de apoyo durante su proceso de aprendizaje. Se analiza también las características generales de los Sitios Web utilizados por estos. En las tablas se introduce el valor estadístico de la frecuencia relativa porcentual, para expresar los resultados mediante un porcentaje y facilitar la compresión, será abreviada con F.R.

3.3.1 Perspectiva de los profesores

1. Ha utilizado con los estudiantes, en algún curso impartido, Sitios Web para apoyar su labor docente.

Tabla número 12

F. A y F. R: empleo de Sitios Web como apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje

Opciones	F. A	F. R
1. Sí.	3	25%
2. No.	9	75%

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a profesores universitarios

De acuerdo con los datos se infiere que los profesores emplean muy poco los Sitios Web como material de apoyo a los procesos de enseñanza y aprendizaje, una razón de ello obedece a la falta de infraestructura que les permita llevar a los estudiantes a un laboratorio de cómputo.

2. El Sitio Web que utiliza o utilizó únicamente

Tabla número 13
F. A y F. R: condiciones de la utilización del sitio

Opciones	F. A	F. R
1. Fue por decisión voluntaria.	2	66,6%
2. Fue parte de la estructura curricular del curso.	1	33,4%
3. Fue una decisión de la coordinación de cursos de servicios o de la carrera.	0	0%

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a profesores universitarios.

Lo anterior evidencia que el uso de Sitios Web es decisión voluntaria del profesor, recordemos que estos datos corresponden a 3 de los encuestados.

3. El sitio era utilizado

Tabla número 14
F. A y F. R: lugar de uso del Sitio Web

Opciones	F. A	F. R
1. Desde Internet.	3	100%
2. Desde un disco compacto o un DVD.	0	0%

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a profesores universitarios

Los datos muestran que Internet es la forma mediante la cual se hace uso de los sitios.

4. De su experiencia en términos del mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes

Se solicitó a los profesores marcar con una **x** dentro de la casilla correspondiente a la opción que más se adecuara a cada una de las afirmaciones presentadas.

Tabla número 15
F. A: experiencia y mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje

Proposición	Frecuencia absoluta				
De su experiencia en términos del mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.	**1. Muy de acuerdo**	**2. De acuerdo**	**3. Ni de acuerdo ni en desacuerdo**	**4. En desacuerdo**	**5. Muy de Acuerdo**
1. La motivación hacia el estudio de la materia, por parte de los estudiantes se vio incrementada al utilizar el Sitio Web como material de apoyo.	1	1	1	0	0
2. El Sitio Web contribuyó o contribuye con la explicación y desarrollo de los contenidos del curso.	1	2	0	0	0
3. El uso del Sitio Web contribuyó con el mejoramiento académico de los estudiantes.	0	0	3	0	0

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a profesores universitarios

La muestra tiende a indicar que el empleo de los Sitios Web contribuye con el incremento de la motivación para el estudio de la materia, la explicación y el desarrollo de los contenidos, pero no a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes.

3.3.2 Perspectiva de los estudiantes

1. Ha utilizado o utiliza algún Sitio Web como apoyo a su proceso de aprendizaje en algún curso

Tabla número 16
F. A y F. R: empleo de Sitios Web como apoyo al proceso de aprendizaje

Opciones	F. A	F. R
1. Si.	5	27,7%
2. No.	13	72,3%

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle.

Del total de la muestra de estudiantes, solamente una población muy reducida ha empleado Sitios Web como material de apoyo en su proceso de aprendizaje.

2. El sitio que utiliza o utilizó únicamente

Tabla número 17
F. A y F. R: condiciones de la utilización del sitio

Opciones	F. A	F. R
4. Fue parte de la estructura curricular del curso.	3	60%
5. Fue por decisión voluntaria.	2	40%
6. Fue una decisión tomada por parte del profesor del curso.	0	0%

Fuente: Información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle

El uso se dirige a ser parte de la estructura del curso, sí es rescatable que dos lo hacen por decisión voluntaria.

3. El sitio es o era utilizado

Tabla número 18
F. A y F. R: usado desde

Opciones	F. A	F. R
1. Desde Internet.	5	100%
2. Desde un disco compacto o un DVD.	0	0%

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle

En su totalidad los estudiantes utilizaron el sitio desde Internet.

4. De su experiencia en términos del mejoramiento del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Se solicitó a los estudiantes marcar con una **x** dentro de la casilla correspondiente a la opción que más se adecuara a cada una de las afirmaciones presentadas.

Tabla número 19
F. A: experiencia y mejoramiento de aprendizaje

Proposición	Frecuencia absoluta				
De su experiencia en términos del mejoramiento de su proceso de aprendizaje.	**1. Muy de acuerdo**	**2. De acuerdo**	**3. Ni de acuerdo ni en desacuerdo**	**4. En desacuerdo**	**5. Muy de Acuerdo**
1. La motivación hacia el estudio de la materia se vio incrementada al utilizar el Sitio Web como material de apoyo.	0	3	2	0	0
2. El Sitio Web contribuyó o contribuye con la explicación y desarrollo de los contenidos del curso.	0	5	0	0	0
3. El uso del Sitio Web contribuyó con el mejoramiento de su	1	3	1	0	0

rendimiento académico.					

Fuente: información de los cuestionarios a estudiantes de la Universidad del Valle

Los datos mostrados tienden a indicar motivación para el estudio de la materia, al emplear Sitios Web; estos contribuyen con la explicación y desarrollo de los contenidos de los cursos y al mejoramiento del rendimiento académico.

3.3.3 Profesores y estudiantes

De su experiencia en términos del Sitio Web utilizado como material de apoyo con los estudiantes. Se solicitó tanto a los profesores como a los y las estudiantes, marcar con una **x** dentro de la casilla correspondiente a la opción que más se adecua a cada una de las afirmaciones presentadas.

Tabla número 20
F. A: características generales de Sitio Web utilizado

Proposición	Frecuencia absoluta				
De su experiencia en términos del Sitio Web utilizado como material de apoyo.	**1. Siempre**	**2. Casi Siempre**	**3. Algunas veces**	**4. Rara vez**	**5. Nunca**
1. Los objetivos educativos están claramente definidos.	1	2	5	0	0
2. La información es completa y esta de acuerdo con los objetivos planteados para el curso.	2	2	3	1	0
3. La información es estructural-mente similar al formato que encontramos en los libros de texto.	0	3	4	1	0
4. Dentro del Sitio Web se ofrece la posibilidad de repasar conocimientos previos de cada temática, sea con breves explicaciones o con enlaces a otras páginas.	1	2	1	4	0
5. La información es presentada solamente mediante formato de texto.	0	3	3	2	0
6. El material ofrecido le permite interactuar para construir su conocimiento.	1	2	4	1	0

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Estos datos tienden a ofrecer una serie de conclusiones dentro de las cuales destacan:

1. La mayoría de los Sitios Web utilizados no definen claramente los objetivos educativos propuestos.
2. La información ofrecida, de acuerdo con los objetivos planteados para los cursos, en algunos casos es completa.
3. La información es en su mayoría similar a la encontrada en los libros de texto.
4. Los Sitios Web utilizados no ofrecen la posibilidad de repasar conocimientos previos ni tienen enlaces con otras páginas que brinden explicaciones.
5. Es muy poca la interacción ofrecida con el fin de poder construir conocimiento.

3.4 Utilización de Sitios Web para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje del tema de límites y continuidad

Se analizó por parte de los profesores durante el proceso de enseñanza y de los estudiantes, el empleo de Sitios Web referidos al de tema límites y continuidad como material de apoyo, durante su proceso de aprendizaje. Se consideró importante conocer las características generales de los Sitios Web empleados de acuerdo con el criterio de los encuestados.

Debido a la unificación de las preguntas dirigidas a profesores y a estudiantes, la información fue tabulada conjuntamente.

1. ¿Ha utilizado algún Sitio Web que trate el tema de límites y continuidad?

Tabla número 21
F. A y F. R: utilización de Sitios Web sobre límites y continuidad

Opciones	F. A	F. R
1. Sí.	0	0%
2. No.	30	100%

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

De acuerdo con los datos anteriores, se puede concluir que tanto profesores como estudiantes no han utilizado Sitios Web que versen sobre el tema de límites y continuidad.

3.5 En relación con el método de enseñanza empleado para desarrollar el tema de límites y continuidad

Se solicitó tanto a los profesores como a los estudiantes, indicar la forma empleada para enseñar y aprender el tema de límites y continuidad. Los resultados fueron:

Tabla número 22
F. A: método empleado para enseñar el tema límites y continuidad

Durante el proceso de enseñanza del tema límites y continuidad el profesor generalmente utiliza.	1. Siempre	2. Casi siempre	3. Algunas veces	4. Rara vez	5. Nunca
La definición.	18	10	2	0	0
Métodos numéricos.	18	6	3	0	3
Métodos gráficos.	17	9	3	1	0
Métodos algebraicos.	20	8	2	0	0

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Los datos revelan que el método más utilizado para enseñar y aprender el tema límites y continuidad es el algebraico, seguido por la definición, métodos numéricos y, por último, los gráficos.

3.6 Empleo de un sitio que contemple los temas donde los estudiantes presentan mayores niveles de deficiencia y dificultades cognitivas

Fue necesario conocer la posición tanto de los profesores como de los estudiantes acerca de ¿En un curso de Cálculo I, recomendaría la utilización como material de apoyo de un Sitio Web que trate los temas con mayores dificultades en cuanto al aprendizaje del tema de límites y continuidad?

Tabla número 23
F. A y F. R: recomendación de uso del Sitio Web

Opción	F. A	F. R
1. Sí.	27	90%
2. No.	3	10%

Fuente: información de los cuestionarios aplicados a estudiantes de la Universidad del Valle y a profesores universitarios

Se obtuvo que tanto profesores como estudiantes sí recomiendan el empleo de un Sitio Web sobre los temas con mayores dificultades en cuanto al aprendizaje del tema de límites y continuidad como material de apoyo. Cabe destacar que el 100% de los profesores indicaron que sí lo recomendarían. Dentro de las anotaciones del por qué, se citan:

De los estudiantes:

1. "Es una ayuda extra, uno tiene dudas y no hay quien se las aclare en el hogar o en un grupo de estudio."
2. "El conocimiento puede expandirse y provocaría un mejor entendimiento con respecto al tema."
3. "Permite al estudiante realizar una investigación sobre el tema tratado, además despierta mucho interés."
4. "Considero que el material de clases no es suficiente, lamentablemente es estos cursos no se cuenta con un libro de texto que ayude al estudiante. El uso de un Sitio Web es muy recomendado."
5. "Para tener otra opción de información extra."
6. "El tema es muy amplio y hay temas que uno no recuerda."

De los profesores:

1. "Tendría la oportunidad de investigar y así también podrían ser estos interactivos y aprender más."
2. "Hace que el aprendizaje se vuelva más interactivo y por ende más significativo para los estudiantes."
3. "Permite mayor dinamismo."
4. "Considero que eso ayuda a ser las clases más dinámicas y más motivadoras, menos repetitivas y puedan visualizar más los conceptos."
5. "Podría dar dinamismo y ser novedoso, pero deber ser diferente a lo que se hace en la clase magistral."

4. Conclusiones del análisis estadístico de los cuestionarios

De acuerdo con los datos ofrecidos en los cuestionarios se pueden hacer los siguientes planteamientos:

1. Listado de temas sobre mayores niveles de deficiencias y dificultades

Un listado de los temas donde los estudiantes presentan mayor nivel de deficiencia y dificultad cognitiva fundamental para el desarrollo de los contenidos del tema límites y continuidad, revela lo siguiente:

Con respecto a los conocimientos previos del curso

a) Del tema de funciones.

1. Análisis de gráficas de funciones.
2. Construcción de gráficas de funciones.
3. Pasar de la representación gráfica al análisis numérico.
4. Concepto de variable dependiente e independiente (imagen y preimagen).
5. Pasar de la representación simbólica a la gráfica.

b) Del tipo de funciones.

b.1 Funciones lineales.

1. Graficar funciones lineales.
2. Características de una función lineal a partir del análisis de su gráfica.

b.2 Funciones cuadráticas.

1. Características de una función cuadrática a partir del análisis de su gráfica.

b.3 Funciones exponenciales.

1. Graficar funciones exponenciales.
2. Características de una función exponencial a partir del análisis de su gráfica.

b.4 Funciones logarítmicas.

1. Graficar funciones logarítmicas.
2. Características de una función logarítmica a partir del análisis de su gráfica.
3. Propiedades de los logaritmos.

b.5 Funciones trigonométricas.

1. Graficar funciones trigonométricas.
2. Características de una función trigonométrica a partir de su gráfica.

b.6 Funciones a trozos o por partes.

1. Reconocer funciones por partes a partir de su criterio.
2. Graficar funciones a trozos.
3. Análisis de la gráfica de una función a trozos.

c) Del tema de álgebra.

1. Resolución de sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
2. Racionalización de numeradores y denominadores.
3. Factorización.
4. Simplificación de expresiones racionales.
5. Resolución de operaciones con expresiones algebraicas que contengan valor absoluto.

d) De cálculos de tipo numérico.

1. Comprender y trabajar con expresiones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{0}{\infty}$ entre otras.

e) Del tema de trigonometría.

1. Trabajar con expresiones trigonométricas que requieran del empleo de las relaciones trigonométricas fundamentales, tales como la simplificación.

Los datos anteriores destacan y advierten que la graficación y análisis de las gráficas de cualquier tipo de función es una deficiencia y dificultad presente en los estudiantes. Así como cometer errores de tipo numérico, temas fundamentales para poder calcular y analizar el límite y la continuidad de una función. Esto permite comprobar las dificultades encontradas por Héctor Lara

Chávez, a raíz de su investigación realizada con estudiantes en México y enunciadas, tanto en la introducción como en el marco teórico de este documento.

Con respecto al tema límites y continuidad.

1. Aplicar la definición de continuidad y discontinuidad.
2. Analizar gráficamente el concepto de límite.
3. Calcular límites a partir de la definición.
4. Calcular límites al pasar de la representación gráfica a la numérica.
5. Calcular límites que requieran de comprender y trabajar con expresiones indeterminadas.
6. Comprender los límites infinitos y al infinito.
7. Analizar gráficamente el concepto de continuidad.

Los datos anteriores refuerzan las dificultades y deficiencias encontradas por diversos investigadores y descritas en el marco teórico, una vez más el análisis gráfico y el trabajo con expresiones indeterminadas son recalcadas.

2. Con respecto a la utilización de Sitios Web para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje

Se puede concluir que el empleo de Sitios Web contribuye a incrementar la motivación hacia el estudio de la materia, la explicación y el desarrollo de los contenidos. A pesar de ello, su uso es escaso.

3. De su experiencia en términos del Sitio Web utilizado como material de apoyo con los estudiantes

De este análisis se puede destacar que a pesar de las consideraciones planteadas por algunos autores como Manuel Área y Siegfried Carranza, acerca de la diversidad de recursos ofrecidos por la tecnología, los documentos siguen siendo transcripciones del material de libros de texto, donde no se aprovechan las ventajas y bondades de la Web.

Se subutiliza la globalización de conocimiento ofrecido por la Web y no se establecen conexiones entre Sitios que contribuyan con la ampliación de conocimientos o brinden material de apoyo en cuanto a las nociones previas y propias de los temas.

Las posibilidades de generar procesos interactivos para favorecer la construcción del conocimiento son escasas.

VI. ESTRATEGIAS PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Lo planteado en los capítulos anteriores convierte los medios digitales en aliados ante la solución del problema identificado, a través del diseño de un Sitio Web para la enseñanza y aprendizaje del tema límites y continuidad, bajo el enfoque de la resolución de problemas.

La investigación dio insumos que condujeron a elaborar un Sitio Web que contempla los siguientes aspectos:

1. El desarrollo teórico y práctico de materiales con contenidos fundamentales para el desarrollo del tema límites y continuidad, donde los estudiantes presentan mayores deficiencias y dificultades cognitivas.
2. El desarrollo teórico y práctico del contenido propio del tema límites y continuidad.
3. Los materiales elaborados deben incluir diversos tipos de registros de representación, para favorecer las diversas formas de aprendizaje.
4. Los materiales propuestos deben tomar en cuenta los diversos recursos multimediales ofrecidos por la Web: textos, imágenes, gráficas, cuadros y tabulaciones. Así como la combinación acertada de estos.

5. El sitio debe vincular los temas de conocimientos previos, para contribuir con la explicación de los mismos, en los momentos indicados.
6. El sitio debe vincularse con otros sitios en la Web que contribuyan a explicar, ampliar o profundizar la temática tratada.
7. El sitio debe brindar ejemplos de problemas que permitan la aplicación de los contenidos, no solo del tema límites y continuidad sino además de sus conocimientos previos. La resolución considerará las recomendaciones teóricas y prácticas de los diversos autores, establecidas en el marco teórico.
8. Definir claramente los objetivos y contenidos planteados para cada tema.
9. Considerar aspectos de accesibilidad y usabilidad.
10. Poseer una navegación fluida y comprensible.
11. Un diseño gráfico agradable.
12. Fomentar el empleo de estrategias metodológicas y pedagógicas propicias al aprendizaje por descubrimiento, mediante la manipulación, el dinamismo y las actividades propuestas, en los temas que lo permitan. Esto se puede lograr a través de la implementación de algunos JavaScripts con actividades de corte heurístico. Se incluyen vínculos con software libre para graficar funciones y generar actividades que faciliten la construcción del conocimiento.

Considerando lo anterior, el material va más allá de lo ofrecido en los libros y las lecciones magistrales; con actividades, estrategias pedagógicas y metodológicas para propiciar el aprendizaje por descubrimiento o verificación.

1. Solución del problema

Como respuesta a las consideraciones anteriores y a los objetivos planteados en este proyecto, se elabora y diseña el Sitio Web titulado "**Límites, Continuidad y sus Conocimientos Previos**" (puede visitar el sitio en la dirección electrónica: www.ermate.com), se toma en cuenta lo anterior y plantea una serie de actividades enmarcadas bajo una metodología de tipo heurístico, donde es factible construir y comprobar conclusiones o teorías matemáticas de una forma dinámica. Estas actividades, como el tratamiento de la información y los problemas aplicados marcan la diferencia entre lo ofrecido en los libros, las lecciones de aula y este sitio.

1.1 Objetivo general y su operacionalización en el sitio "Límites, Continuidad y sus Conocimientos Previos"

Objetivo general

Apoyar, mediante el enfoque de la resolución de problemas, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la teoría y las aplicaciones del tema límites y continuidad.

Operacionalización del objetivo general

- Definir claramente los objetivos y contenidos propuestos para cada tema.
- Brindar la teoría y práctica de los contenidos fundamentales para el desarrollo del tema límites y continuidad, donde los estudiantes presentan mayores deficiencias y dificultades cognitivas, al considerar los diversos tipos de registros de representación tales como tablas, gráficas y texto, para favorecer las distintas formas de aprendizaje.
- Ofrecer la teoría y práctica de los contenidos del tema límites y continuidad, donde se incluya una variedad de registros de representación, actividades y metodologías de tipo tanto lineal como heurístico que favorezcan el proceso de aprendizaje.
- Emplear diversos recursos multimediales: textos, imágenes, gráficas, cuadros y tabulaciones; así como la combinación acertada de estos.
- Establecer, en los momentos indicados para contribuir con la explicación de los mismos, vínculos con los temas de conocimientos previos, así como a otros sitios en la Web para explicar, ampliar o profundizar la temática tratada.

- Incluir ejemplos de problemas que permitan la aplicación de los contendidos no solo del tema límites y continuidad, sino además de sus conocimientos previos.
- Considerar aspectos de accesibilidad y usabilidad que generen una navegación fluida y comprensible, en dicho sitio.
- Ofrecer un diseño gráfico agradable.
- Propiciar, cuando el contenido lo permita, actividades facilitadoras del aprendizaje por descubrimiento, interacción y dinamismo, así como fomentar el empleo de estrategias metodológicas y pedagógicas propicias para el aprendizaje por descubrimiento, mediante la manipulación, el dinamismo y las actividades propuestas.

1.2 Descripción de la operacionalización

Como respuesta a los objetivos anteriores se explicará cada una de las estrategias empleadas para su solución.

- *Definir claramente los objetivos y los contenidos propuestos para cada tema.*

Al inicio de cada uno de los temas se definen los objetivos por alcanzar y contenidos desarrollados, de esta manera, se hace público lo que se va aprender, cómo y sus alcances.

- *Brindar la teoría y práctica de los contenidos fundamentales para el desarrollo del tema límites y continuidad, donde los estudiantes presentan mayores deficiencias y dificultades cognitivas, al considerar los diversos tipos de registros de representación tales como tablas, gráficas y texto, para favorecer las distintas formas de aprendizaje.*

Parte del logro de este objetivo se verifica en el marco metodológico donde, a partir de la encuesta aplicada tanto a estudiantes como profesores, se enlistan aquellos temas en que los estudiantes presentan mayores deficiencias y dificultades cognitivas. Así, para el sitio se diseñó el material teórico y práctico de dichos contenidos, llamados "Conocimientos previos". Cada uno de estos cuenta con un análisis bibliográfico exhaustivo para seleccionar los contenidos, la metodología, estructura y enfoque mediante la cual se ofrecerían en el sitio. Cada uno contiene teoría, práctica, en algunos casos laboratorios de verificación y problemas de aplicación, entre otros. En el sitio la página que muestra las temáticas sobre conocimientos previos corresponde a:



Ilustración 1. Página del sitio donde se muestra la lista de los temas en los cuales los estudiantes presentan mayores deficiencias y dificultades cognitivas.

El empleo de varios registros de representación como cálculos aritméticos, algebraicos, tablas, texto y gráficas de una manera ordenada es importante para favorecer el proceso de aprendizaje, un ejemplo de ello se obtiene en el capítulo de **funciones cuadráticas en gráficas**, veamos:

Ejemplos graficar las siguientes funciones

Ejemplo1

Sea $f: IR \to IR$, tal que $y = -6x^2 - x + 2$

Siguiendo los pasos anteriores se tiene

a. **Concavidad:** $a = -6 < 0$, la gráfica es cóncava hacia abajo.

b. **Corte con el eje "y":** $(0, c) = (0,2)$

c. **Valor del discriminante asociado a la función:**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot -6 \cdot 2 = 49$$

d. **Calcular los cortes con el eje "x"**: como el valor del discriminante es menor que cero indica que la gráfica corta el eje "x" en dos puntos que corresponden a la solución de la ecuación

$$-6x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow (-2x+1)(3x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

Los puntos son $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $y\left(\frac{-2}{3}, 0\right)$

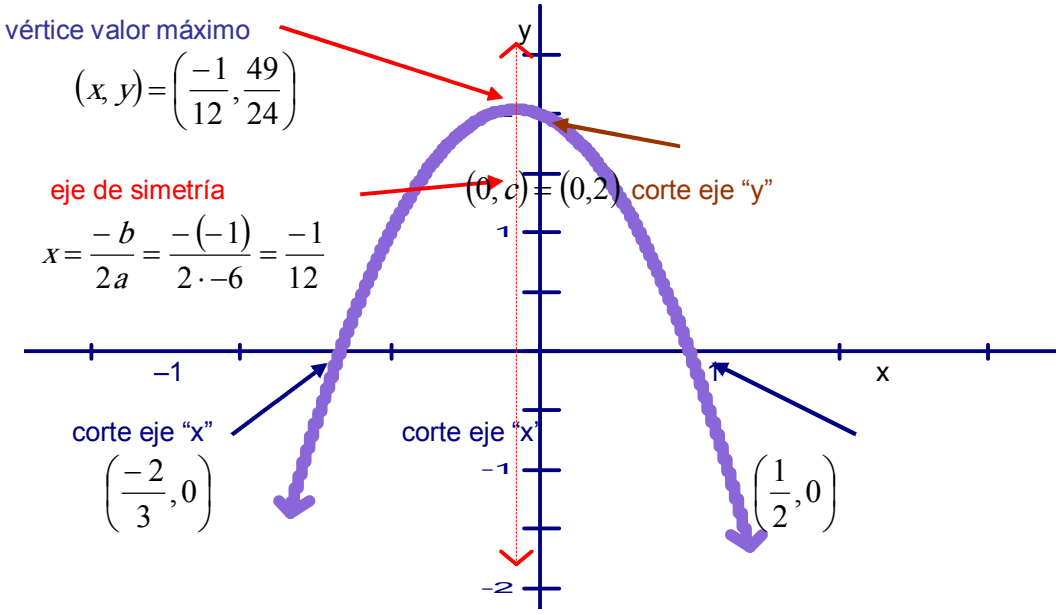
e. **Calcular el valor del vértice**

$(x, y) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{-(-1)}{2 \cdot -6}, \frac{-49}{4 \cdot -6}\right) = \left(\frac{1}{-12}, \frac{-49}{-24}\right) = \left(\frac{-1}{12}, \frac{49}{24}\right)$, este valor es máximo por que la función es cóncava hacia abajo.

f. **Determinar el valor del eje de simetría**

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2 \cdot -6} = \frac{-1}{12}$$

g. **Gráfica de la función** $y = -6x^2 - x + 2$



Otro recurso importante es el empleo de señalización en las diversas gráficas construidas, para indicar elementos importantes mencionados en la parte teórica, esto permite aclarar y explicar diversos conceptos.

Por su parte, la investigación sobre los temas donde los estudiantes presentan mayores niveles de deficiencias y necesidades cognitivas, destacó el análisis y graficación de funciones, para solucionar este problema se recurrió a la implementación de cuatro recursos detallados a continuación:

Teoría, ejemplos y práctica sobre graficación de funciones
Cada uno de los tipos de funciones ofrece la teoría básica y fundamental para ser graficadas correctamente, mediante una metodología de carácter netamente algorítmico. Hace un análisis de las diversas gráficas a partir de las ya construidas, esto permite hacer una integración entre lo algebraico, aritmético y gráfico de forma constructivista.

Laboratorios de verificación
El profesor Walter Mora Flores[10] refiriéndose a los laboratorios en el artículo "Ideas sobre la lección laboratorio asistida por computadora" plantea: "El objetivo de la lección laboratorio es llevar a cabo el aprendizaje por medio de la experimentación, la observación y el descubrimiento, en forma individualizada o en pequeños grupos homogéneos" (1997: p.220). Mora siguiendo con la temática afirma: "Un profesor de matemática debe preparar el ambiente y dirigir el aprendizaje de tal manera que los estudiantes tengan las experiencias necesarias para desarrollar intuiciones según la naturaleza de un nuevo proceso o idea" (1997: p.221) Agrega: "El propósito fundamental de la lección laboratorio es el de ofrecer experiencias significativas, el profesor debe guiar al estudiante hacia generalizaciones, estimulándolas de diferentes maneras" (Ídem).

[10] Profesor en el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Mora señala que el empleo de la lección laboratorio logra el éxito en los siguientes aspectos:
“

1) Es un medio que ofrece oportunidad de alcanzar el dominio en el uso de abstracciones, al estudiante que no lo ha logrado. Por esta razón las lecciones laboratorio son particularmente adecuadas para considerar las diferencias individuales.
2) Las posibilidades de trabajo individual e independiente hacen que la lección laboratorio sea llamativa y provechosa para estimular la creatividad.
3) Como resultado de la independencia del laboratorio, las actitudes positivas hacia las matemáticas y hacia el profesor de matemáticas constituye uno de los principales logros.” (Ídem).

Ante la problemática de la graficación, el análisis de gráficas de funciones y lo expuesto; es indispensable generar algún tipo de laboratorio que permita interacción y propicie experiencias significativas para establecer o comprobar inferencias y conjeturas a partir de la manipulación, el descubrimiento y la observación. Estos fueron generados a partir de JavaScripts con lenguaje de programación en Java, permiten verificar y determinar de forma dinámica las características obtenidas en la parte teórica acerca de las gráficas de las funciones, además de plantear objetivos claros, brinda una guía de trabajo de corte heurístico que permite comprobar, de forma dinámica e interactiva, las características de las diversas funciones. Los laboratorios van más allá del análisis de gráficas de las funciones clásicas como $f(x) = sen(x)$ y $f(x) = a^x$, entre otras. Estos permiten, además, el estudio de funciones de la forma $f(x) = sen(ax) + b$, $f(x) = a^x + b$, y $f(x) = \sec(ax) + b$ para lograr con ello un análisis más detallado y profundo de la temática.

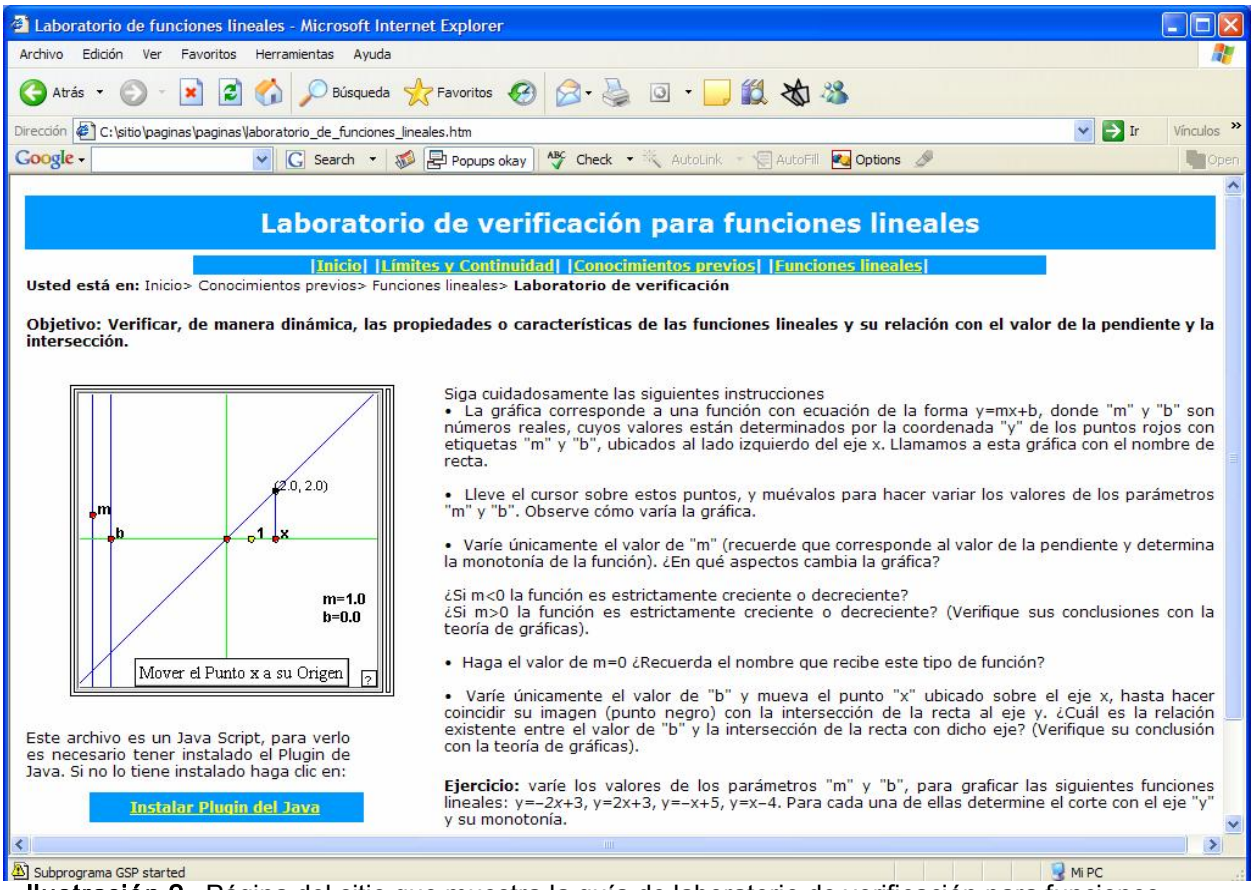


Ilustración 2. Página del sitio que muestra la guía de laboratorio de verificación para funciones lineales. En esta puede observase claramente el objetivo, el JavaScript y la guía de trabajo.

Prácticas sobre gráficas

Una vez revisada la teoría sobre gráficas y realizado el respectivo laboratorio, se ofrece una serie de ejercicios para graficar funciones donde se aplique los conocimientos adquiridos. Si existe alguna duda puede acceder a los temas anteriores y corroborar sus conclusiones sin salirse de la página o del sitio.

Programa Winplot

Otro recurso en la graficación de funciones es la inserción del programa Winplot, un software libre diseñado por Richard Parris; con este programa pueden construirse las gráficas de la práctica para verificar su corrección. Para el uso de este programa se diseñó la guía ¿Cómo usar el graficador? La cuál se presenta en las páginas correspondientes. También se diseñó otra sobre la forma de escribir el nombre de las funciones en dicho programa.

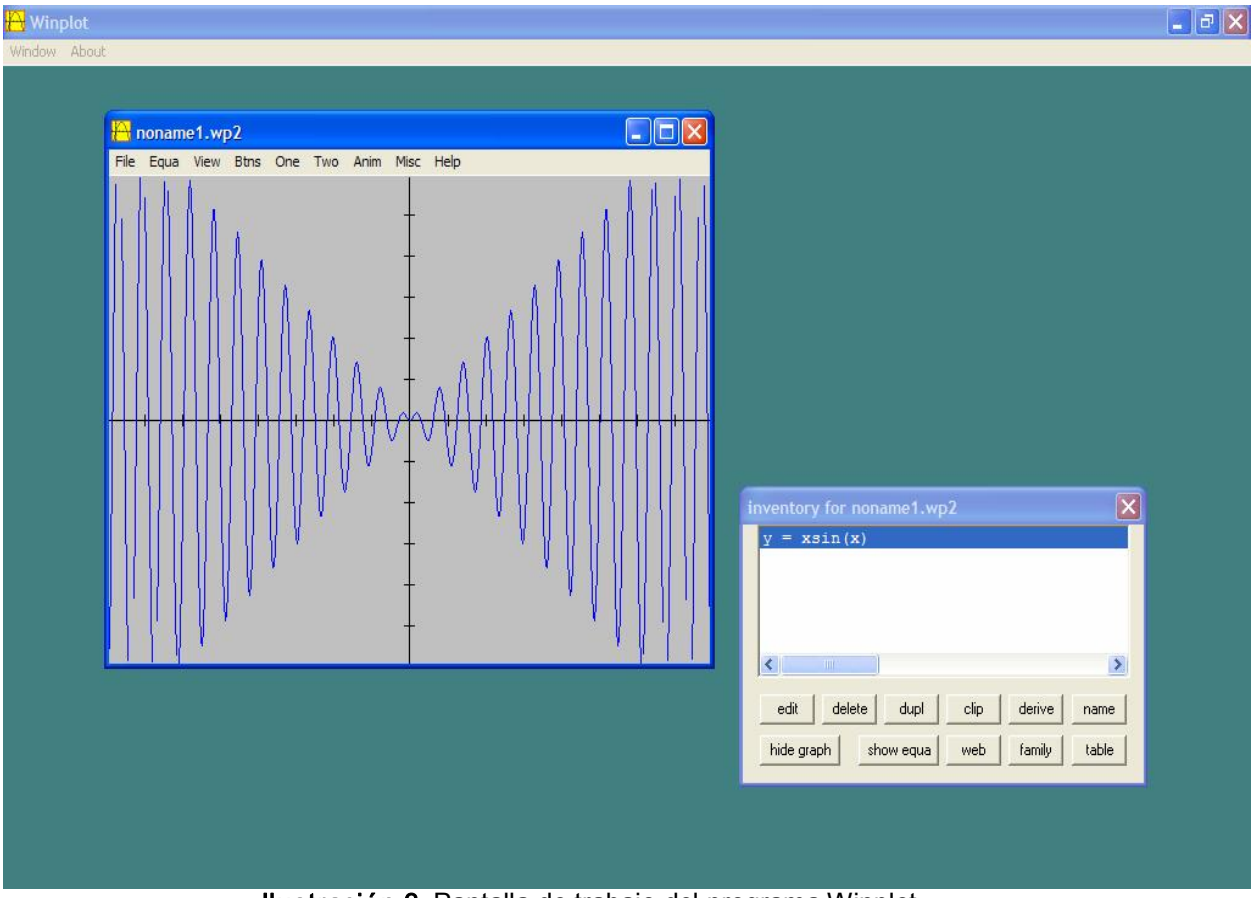


Ilustración 3. Pantalla de trabajo del programa Winplot.

El empleo de estos cuatro recursos de forma conjunta garantiza el aprendizaje sobre graficación de funciones y permite el análisis y comprensión de las mismas.

- *Ofrecer la teoría y práctica de los contenidos del tema límites y continuidad, donde se incluya una variedad de registros de representación, actividades y metodologías de tipo tanto lineal como heurístico que favorezcan el proceso de aprendizaje.*

En el logro de este objetivo, además de una adecuada y selecta revisión bibliográfica, fueron empleadas diversas estrategias de aprendizaje, desde el empleo de metodologías de tipo tanto algorítmico como heurístico. Algunos ejemplos que permitan corroborar lo planteado son:

- En el capítulo de límites en "**definición precisa de límite**", la metodología empleada para este eje temático es netamente algorítmica, propia del contenido y de un enfoque lineal, donde el manejo algebraico y abstracto de expresiones tienen un papel fundamental. La combinación teoría-práctica evidencia, de forma marcada, dicho enfoque.

- En "**cálculo del valor del límite a partir de tablas y gráficas**", se plantea una metodología que permite inferir el valor de un límite a partir del empleo de una tabla de valores o una gráfica, mediante un procedimiento que va de lo particular a lo general, característica propia de una metodología heurística, a partir de la exploración, indagación y formulación de conjeturas. Posteriormente, los cálculos numéricos (mediante tablas de valores), algebraicos y gráficas, se combinan en el logro del mismo objetivo, esto hace que el empleo de diversos registros de representación permitan construir el conocimiento. Debe destacarse el empleo acertado de diversos recursos multimediales para el logro del proceso de aprendizaje durante el desarrollo del contenido.

- *Establecer, en los momentos indicados, vínculos con los temas de conocimientos previos, para contribuir con la explicación de los mismos, así como a otros sitios en la Web que contribuyan a explicar, ampliar o profundizar la temática tratada.*

El sitio permite una navegación fluida y consistente, puede ir hacia al tema requerido desde cualquier lugar con hacer no más de tres clic, por tanto, al no recordar un conocimiento específico este se puede acceder desde cualquier página donde se esté. Además, se realizó una búsqueda en Internet sobre páginas y sitios que permitan ampliar la información tratada, para cada tema se hace una lista de direcciones y una breve descripción sobre su temática, de esta manera, si se requiere profundizar o ampliar algún contenido puede accederse desde el sitio. Así se logra lo que Manuel Área menciona en su artículo "De los Webs educativos al material didáctico Web", citado en el referente teórico, acerca de generar información conectada hipertextualmente.

- *Incluir ejemplos de problemas, que permitan la aplicación de los contendidos no solo del tema límites y continuidad sino además de sus conocimientos previos.*

En el capítulo de conocimientos previos para los temas de funciones y en álgebra en resolución de sistemas de ecuaciones, se incluyen ejercicios resueltos y prácticas sobre problemas de aplicación, estos han sido seleccionados de forma muy minuciosa y tienen como objetivo aplicar la teoría en la resolución de problemas referidos a situaciones prácticas o cotidianas, lo que da un sentido de aplicabilidad a lo aprendido, en la resolución de los mismos serán puestas en juego todas las capacidades y conocimientos desarrollados en el capítulo.

Los problemas planteados versan sobre diversas temáticas entre las cuales se destacan: Economía, Finanzas, Administración, Ingenierías y Biología. Las soluciones se plantean bajo un proceso de comprensión, análisis e interpretación, de acuerdo con las recomendaciones planteadas por diversos autores, con ello se quiere motivar la búsqueda y solución de diversos problemas prácticos, emplear la teoría matemática y diversas estrategias para generar planes de trabajo, estructuras mentales, interpretar enunciados y aplicar los procedimientos en la resolución de otros problemas.

Para los capítulos límites y continuidad, los problemas son fundamentales en el tratamiento de la información, en temas como límites al infinito, límites infinitos y continuidad; juegan un papel importante. Es a partir de ellos que se generan estructuras para dar pasos a la formulación de teoremas, de esta manera, se emplea una metodología de inferencias que va de lo particular a lo general; el conocimiento se construye a partir de la solución de problemas aplicados y da con ello mayor significado y contextualización en el manejo de la temática. Un ejemplo de ello se puede encontrar en la parte de límites específicamente en **Límites al infinito**, veamos:

Límites al infinito

Considere las siguientes situaciones

1. Cuando el precio unitario de un artículo es "x", el proveedor ofrece una cantidad $S(x)=\dfrac{105x^2}{5x^2+48}$ de unidades por semana. ¿A cuánto se aproxima la oferta del proveedor cuando el precio tiende a infinito?

Solución

Debemos calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{105x^2}{5x^2+48}\right)$$

Evaluando directamente se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{105x^2}{5x^2+48}\right)=\frac{\infty}{\infty}$$

la cual corresponde a una expresión determinada. Para resolver este problema, saquemos a factor común x^2 en el denominador

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{105x^2}{x^2\left(5+\dfrac{48}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{105}{\left(5+\dfrac{48}{x^2}\right)}\right)$$

Faltaría analizar $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{48}{x^2}\right)$, todo lo demás son constantes.

Construyendo una tabla de valores

$x>0$	$f(x)$
0,01	480000
5	1,92
10	0,48
20	0,12
40	0,03
100	0,0048
10023	0,000000477
124567	0,000000003

Esta nos permite establecer que $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{48}{x^2}\right)=0$, así

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{105x^2}{x^2\left(5+\frac{48}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{105}{\left(5+\frac{48}{x^2}\right)}\right)=\frac{105}{\left(5+\lim_{x\to+\infty}\frac{48}{x^2}\right)}=\frac{105}{5+0}=21$$

R/ Si el precio del artículo es muy elevado, la oferta del proveedor es de 21 artículos.

2. Si el costo de producir "q" unidades de un producto esta dado por $C(q)=800+6q$, y el costo promedio por unidad es $\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}$ ¿A cuánto tiende el costo promedio por unidad, conforme el número de unidades tiende a infinito?

Solución
Debemos calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{C(q)}{q}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{800+6q}{q}\right)=\frac{\infty}{\infty}\text{ (indeterminada)}$$

Al sacar "q" a factor común $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{q\left(\frac{800}{q}+6\right)}{q}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{800}{q}+6\right)$

Ahora se debe calcular

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{800}{q}+6\right)$$

De forma similar al problema anterior, se puede verificar que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{800}{q}\right)=0$$

Con lo cual

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{800}{q}\right)+\lim_{x\to+\infty}6=0+6$$

R/ El costo promedio de producir "q" unidades tiende a 6.

Las dos conclusiones de los ejercicios anteriores $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{48}{x^2}\right)=0$ y $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{800}{q}\right)=0$, nos permiten plantear cierta conclusión con respecto a los límites cuando estos tienden al infinito, la cual en palabras sería: "siempre que el límite tienda al infinito y nuestra función sea una constante entre infinito, el límite tiende a cero".

Lo anterior será enunciado matemáticamente de la siguiente manera:

Teorema

Si f es una función tal que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ *entonces* $\lim_{x\to a} \frac{k}{f(x)} = 0,\ con\ k \in IR - \{0\}$

Se puede establecer además que:

Si $\lim_{x\to a} f(x) = k$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ *entonces* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,\ con\ k \in IR - \{0\}$

Esto muestra el manejo metodológico de un problema aplicado a administración e ingeniería, donde a partir del empleo de varios tipos de registros de representación como son manejo algebraico, aritmético y tablas numéricas, se establecen conjeturas para llegar a formular conclusiones matemáticas de una forma constructiva y no como se emplea en los libros de texto y clases magistrales: primero el teorema y luego los ejercicios.

VII. CONCLUSIONES

Los recursos tecnológicos computarizados se han venido diversificando y especializando sorprendentemente en la última década, gran parte de este proceso obedece a las posibilidades de comunicación masiva que ha ofrecido la red Internet a nivel mundial.

La tecnología y sus recursos multimediales permiten generar procesos de enseñanza y aprendizaje más allá de la simple transcripción de documentos, los cuales empleados a partir de estrategias metodológicas y pedagógicas adecuadas, pueden contribuir positivamente con dichos procesos.

Generar recursos que favorezcan la enseñanza y el aprendizaje en cualquier área, requieren de un estudio profundo y detallado no solo de sus necesidades sino además de sus requerimientos, metodologías y enfoques.

La enseñanza de la matemática asistida por materiales educativos computarizados, está beneficiando notablemente a la población estudiantil mediante nuevas formas de representación simultánea de los contenidos y nuevas formas de apropiación de conceptos y propiedades matemáticas.

VIII. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Área, M. (2003). De los Webs educativos al material didáctico Web. [En línea] <http://dewey.uab.es/pmarques/EVTE/webseducativos.pdf> [2006, enero 29].

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares?. [En línea] <http://www.clame.org.mx/bdigital/relime/pdf/1998-1-1/3.pdf> [2006, enero 24].

Batista, E. (2003). Uso didáctico del Internet. [En línea] <http://nogal.cnice.mecd.es/~lbag0000/html/teoria_1.HTM> [2006, febrero 3]

Calderón, S. (1999). Una experiencia con el asistente matemático Derive. Memoria del I Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora. 55-60.

Carranza, S. (1999). Enseñanza de la Matemática mediante computador: CD de Matemática Básica 1. Memoria del I Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora. 52-54.

Lara, H. Los problemas alrededor del concepto de límite y su enseñanza a través del uso de computadora. [En línea] <http://www.fismat.umich.mx/mateduca/Carlos/mem9sem/lara/lara.htm>[2006, enero 29].

Marín, M. (1999). La reforma del cálculo. ¿Qué debemos aprender?. Memoria del I Congreso Internacional de Enseñanza de Matemática Asistida por Computadora. 285-289.

Medina, A. (sdf). Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas" [El línea] <http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted09_08arti.pdf.> [2006, febrero 17].

Meza, L. y Hernández, F. (2001). Enseñanza de la Matemática en el ITCR; patrones de interacción en el aula. Del Documento Elementos para enseñar matemática.

Meza, L. Garita, G. y Villalobos. (2001). Estrategias didácticas para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática asistidos por computadora. Del documento Elementos para enseñar matemática. 66-75

Meza, L. (1997). Planeamiento de procesos de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistido con software matemático. Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemáticas. 208-216.

Nora, S. (sdf). La importancia del registro gráfico en el cálculo de límite de una función. [En línea] < http://www.fceco.uner.edu.ar/cpn/catedras/matem1/matenmat/a08gmcer.doc> [2006, enero 24].

Pastor, A. (sdf). Utilización didáctica de los recursos de Internet. Recursos didácticos de la World Wide Web. [En línea] <http://www.ucm.es/info/doe/carmenal/usodidac.doc.> [2006, febrero 3].

Mini Curso: Una experiencia en la enseñanza de los elementos para la simulación de procesos de colas con el uso de la tecnología.

Iveth V. Martínez[1]

Resumen

Cuando los modelos determinísticos y no determinísticos fallan, ante la resolución de un problema real, la simulación resulta ser una de las técnicas fundamentales que se utiliza para reducir el riesgo en los procesos de toma de decisiones, fundamentada en áreas como: el análisis de sistema, la investigación de operaciones, la modelación matemática, la probabilidad, la estadística y la computación. Por tal razón dentro de los elementos básicos que los estudiantes deben manejar encontramos las técnicas de generación de las variables aleatorias, así como la identificación de la distribución de probabilidad asociada a los datos obtenidos, en donde el uso de la tecnología juega un papel importante para llegar a un mejor entendimiento y a la vez ver la importancia de estas teorías.

INTRODUCCIÓN

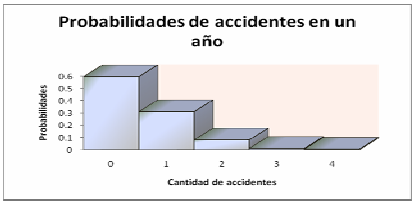
La simulación es un área de la Investigación de Operaciones que se estudia en las carreras de Ingeniería principalmente en Informática e Industrial, aunque consideramos que debe ser objeto de estudio en todas sus ramas. La simulación, según Kelton, se refiere a una amplia colección de métodos y aplicaciones para imitar la conducta de un sistema real o propuesto, usualmente en una computadora, utilizando el software apropiado; es una de las herramientas de análisis más poderosas que permite experimentar con sistemas (reales o propuestos) que de otra manera sería imposible o impráctico. Se fundamente, principalmente, en la informática, la matemática, la probabilidad y la estadística.

Dentro del desarrollo de las fases para el estudio de un sistema, utilizando la simulación, se tiene la resolución de problemas con información y datos recolectados de fenómenos físicos, que hoy día está adquiriendo un auge como medio de enseñanza en el aula de clases. El hecho integra diversas áreas, ya mencionadas, que involucra el manejo de herramientas del cálculo y la estadística, lo que en muchas ocasiona provoca la pérdida del objetivo en sí que es la incorporación de los resultados en los distintos pasos de la simulación del fenómeno.
Las funciones juegan un papel predominante en el análisis de la conducta de los elementos que intervienen en el sistema (clientes, recursos, entre otros) lo que permite desarrollar el proceso de simulación y modelación así como que los estudiantes entiendan la aplicación de estos conocimientos matemáticos.

En este contexto la simulación y la modelación matemática y la matemática y en contexto y la incorporación de la tecnología con herramientas como Excel, Arena y otras, son alternativas de transferencia dinámica del conocimiento desde situaciones físicas y simbólicas hasta la estructuración mental en el proceso de aprendizaje.

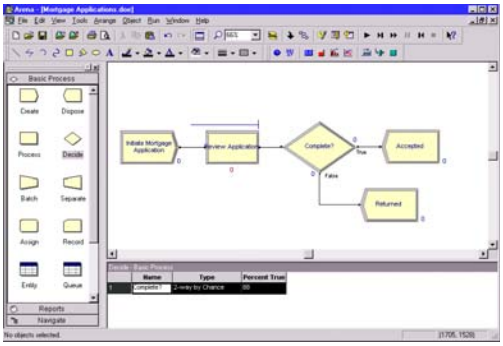
Contenido

1. Introducción a la Simulación de Sistemas
2. Análisis de datos en Excel
    a. Datos de un caso real
        i. Determinación de los parámetros para el análisis
    b. Identificación de la distribución de probabilidad



[1] Universidad de Panamá, Profiveth24@yahoo.es

   c. Generación de Variables aleatorias
      i. Descripción de la función
3. Conceptos fundamentales de la Simulación
   a. Entidades, Atributos y Procesos.
   b. Colas
   c. Acumuladores estadísticos
   d. Eventos
   e. Reloj de Simulación
4. Manejando de Entrada - Eventos en Simulación
5. Animación
6. Generación de Análisis y Reportes
7. Panel de procesos Avanzados



Bibliografía

1. **ARENA** Template Guide, 1992.
2. **ARENA** User's Guide, 1992.
3. **Introduction to Simulation using ARENA**, Pegden, C. Dennis; Robert E. Shanon; Randall P. Sadowski.
4. **Simulacion de Sistemas Productivos con ARENA**. Fábregas Ariza, Aldo. Wadnipar Rojas, Rodrigo. Paternita Arboleda, Carlos. Mancilla Herrara, Alfonso. Universidad del Norte, Colombia, 2004.
5. **Simulationn with Arena**, W David Kelton, Randall Sadowski, David T. Sturrock, Mc Graw – Hill, 2004.
6. **Simulación,** Ross, Sheldon, Prentice Hall
7. **Simulación de Sistemas,** Shannon, Robert, Editorial Trillas

-PLANCHART, Orlando. La Modelación Matemática: Alternativa Didáctica en la Enseñanza del Precálculo. Revista de Investigación 360° [en línea], 2005. Disponible en: **http://cremc.ponce.inter.edu/360/inde.htm**

Una introducción al aprendizaje de la teoría de matrices[1]

Carlos E. Azofeifa[2]

Resumen

Se propone una manera de presentar y desarrollar una teoría tan rica en aplicaciones, como lo es la teoría de matrices. El interés central es el de suavizar el impacto matemático en el estudiante y despertar su interés motivándolo en su aprendizaje, mostrando una gran diversidad de aplicaciones presentes en diversas ramas del conocimiento, principalmente dentro del área de ingeniería, economía y finanzas. Utilizando herramientas en Aplicaciones del álgebra, Historia de la matemática y Cómputo

Introducción

Posiblemente si quisiéramos hablar sobre las aplicaciones de las matrices llenaríamos libros enteros no solo por la gran cantidad de libros y artículos, sino también de la diversidad de aplicaciones en distintas disciplinas. El objetivo ahora posiblemente no es éste, sino, el uso adecuado de algunas de esas aplicaciones para interesar, motivar, ilustrar e informar al estudiante cuando estemos presentando la teoría sobre estos temas afines, a saber: sistemas de ecuaciones, matrices, determinantes, diagonalización de matrices y forma canónica de Jordán, etc. Tal vez debemos escoger el momento propicio para utilizar aquellas aplicaciones relevantes y que tienen mucho "pegue" en los muchachos, como por ejemplo: diseño de automóviles, telecomunicaciones, aplicaciones financieras actuales, etc. En fin se pretende orientar técnicamente al alumno de manera que reciba no solo los fundamentos teóricos sino que también pueda familiarizarse con una gran cantidad de aplicaciones incorporadas directamente a los desarrollos teóricos, al igual que valorar algunos conceptos numéricos necesarios para implementar luego la teoría en una computadora.

Un poco de historia

Posiblemente no vamos a realizar ninguna referencia en estas memorias de la Historia de la matemática en el tema de matrices, sino que basándonos en la estrategia mencionada anteriormente de motivar e incentivar el aprendizaje en los estudiantes del tema en cuestión, podemos realizar bosquejos históricos en donde posiblemente no ocuparíamos más de diez minutos, y, sin embargo esto nos permitirá localizar el tema en el tiempo y poder realizar una regresión hasta nuestros días. Esto será una buena manera de introducir el tema, permitiendo además posteriores investigaciones de los estudiantes al respecto en temas vinculantes al tema central desarrollado. En fin, la Historia de la Matemática se constituye en Herramienta Metodológica para nuestros propósitos.

La teoría de matrices

Muchas veces al presentar una teoría matemática, en este caso la teoría de matrices; por lo general el profesor hace derroche de su "profundo conocimiento matemático" y comienza directamente al grano al definir el concepto de matriz, diciéndole al estudiante: Una matriz real es un arreglo rectangular de la forma $A = \left(a_{ij}\right)$ donde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ con $a_{ij} \in IR$, o bien se le decimos el estudiante que la matriz A es el siguiente arreglo:

[1] Este artículo fue financiado por el Proyecto No 820-A2-115, inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la U.C.R

[2] Profesor Escuela de Matemática U.C.R – U.N.A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

El estudiante principiante podría preguntarse ¿qué es toda esta cosa tan rara y para qué me irá a servir en lo que quiero estudiar? Sin embargo el profesor continúa desarrollando a su gusto nuestra teoría sin ni siquiera tener idea si el estudiante tiene claro el concepto de lo que es una matriz y cuáles son sus usos y creemos que con explicarle también el asunto de los subíndices, tampoco nos garantiza que el estudiante entienda lo que es una matriz y para que sirve. Pero ¿De dónde nacen las matrices y para qué se usan?

En este apartado más bien tenemos una oportunidad rica de indagar primeramente tanto el profesor como el estudiante en la historia de la matemática como mencionamos anteriormente. Sin embargo, antes de entrar en materia también podemos presentar aplicaciones apropiadas, por ejemplo:

Gráficos de computador en diseño de automóviles

Los diseños asistidos por computador han revolucionado la industria automovilística, de manera que los gráficos generados por computador constituyen el corazón, y el álgebra lineal el alma del diseño moderno de automóviles. Aquí los ingenieros diseñan y construyen el modelo matemático: un modelo de alambre el cual está disponible en las terminales de exhibición de gráficos y en el disco duro del computador. Luego este diseño se va perfeccionando por los ingenieros a cargo, se esculpen las líneas de carrocería, como van colocados los asientos, producción de los planos de ingeniería para los miles de componentes que fabricarán los proveedores, se toma el modelo matemático para realizar pruebas de carretera como por ejemplo la suspensión del auto, se realizan también pruebas de choque o colisión con el modelo matemático con el fin de garantizar la seguridad de los futuros usuarios en caso de un accidente.

¿Y qué papel juegan las matrices? Pues bien, resulta que el modelo de alambre se almacena en muchas matrices de datos para cada una de las componentes principales. Cada una de las columnas de una matriz sirve para enumerar las coordenadas de un punto sobre la superficie del componente respectivo. También las piezas del interior del automóvil se almacenan en matrices de datos. Los componentes más pequeños son trazados con software de gráficos por computador usando las pantallas, y las piezas más grandes se forman ensamblando matemáticamente los componentes más pequeños.

Observemos que bien podríamos hablar en todo el artículo solamente de este tema y aún así no acabaríamos. Pero como indicamos al principio se trata de implementar estrategias de aprendizaje y motivación. Así por ejemplo esta aplicación se puede complementar con videos afines a la temática desarrollada, como: observar y comentar la construcción de los modelos de alambre o bien usar la Simulación en la fabricación de automóviles, se podría presentar un video sobre el uso del software Arena por la firma automotriz Ford en la fabricación del automóvil Fiesta, etc. Además de mostrar el uso de las matrices estamos mostrando otras herramientas tecnológicas complementarias al estudio pertinente. Todo esto será una ayuda idónea para conseguir los objetivos trazados al principio de este trabajo.

Personalmente he tenido buenos resultados usando la metodología anterior, aún con personas profesionales y con un conocimiento previo sobre los temas investigados. También todo esto nos puede ayudar a orientar al estudiante desde la secundaria en lo que le gustaría estudiar posteriormente en su vida profesional, y en el caso en que el curso sea de nivel universitario también serviría para aumentar las expectativas y alcances en la carrera escogida. Para el educador es una manera también de mantenerse vigente y aumentar su cultura proporcionado al educando un conocimiento más sólido y con un mayor alcance.

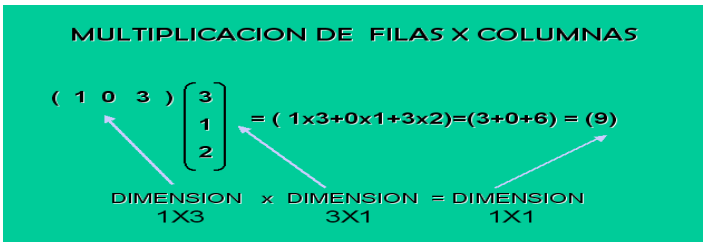
Desarrollo matemático de la teoría

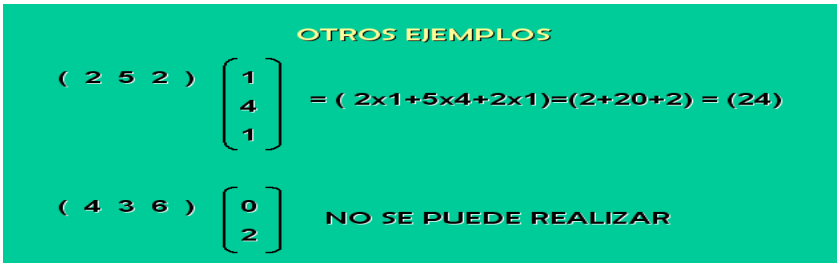
Antes de definir el modelo matemático[1] inclusive es conveniente introducir algunos ejemplos de matrices las cuales son comunes en la resolución de problemas y además nos servirán para que el estudiante se familiarice con ellos, en efecto, podemos usar presentaciones en multimedia y, presentar diapositivas como:



Observemos que no se trata de recargar las diapositivas con mucho texto y figuras, sino mostrar lo que nos interesa a saber, solamente las matrices, por eso podemos colocar diferentes tipos de matrices para que el estudiante aprenda a reconocerlas. Después de esto podemos comenzar a desarrollar nuestra teoría matemática con más tranquilidad y seguridad, creyendo que el estudiante tendrá menos dificultad en su aprendizaje.

Como hemos visto los ejemplos aplicados se basan en desarrollos del álgebra matricial, para lo cual debemos tener una diapositiva que ilustre la multiplicación de vectores como un paso previo a la multiplicación de matrices, veamos:





Aunque podríamos hablar del producto euclidiano no es conveniente en este momento, en lugar de ello podemos hacer práctica manual o computacional de la multiplicación de filas por columnas, también podemos usar la función de Excel "=sumaproducto( )", la cual hace las veces de la operación anterior o bien usar un software libre y bastante competitivo como Silab. Al final del documento nos vamos a referir a las bondades de este software en la enseñanza del álgebra lineal. Ahora antes de definir las operaciones de suma y multiplicación de matrices de manera formal es el momento para presentar la multiplicación de manera informal, veamos:

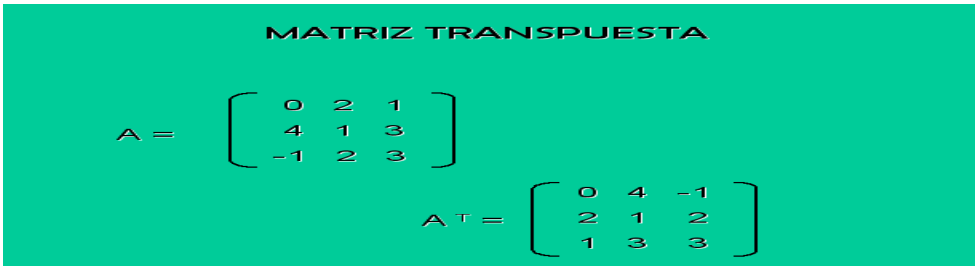
[1] Desde luego que debemos tomar en cuenta nuestra población meta para obtener mejores resultados deseados



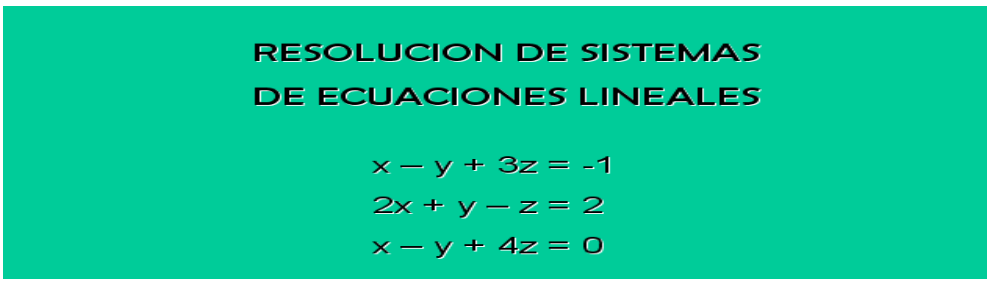
también podemos ser más específicos con los cálculos, por ejemplo:



Para el caso de la matriz transpuesta ponemos

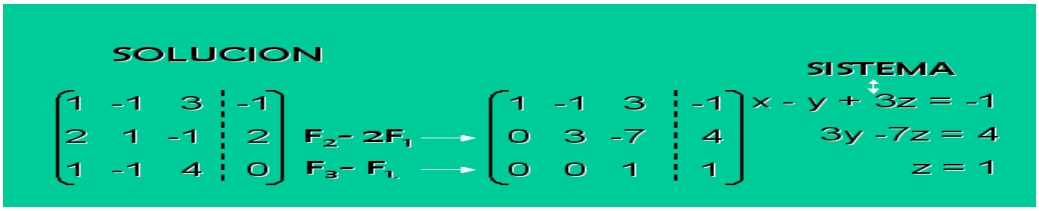


Posteriormente se pueden exponer más diapositivas con operaciones relativas a esta propiedad y luego presentarlas de manera general. En el caso de resolución de sistemas de ecuaciones lineales tenemos:



También podemos presentar secuencialmente la solución del sistema, en efecto:







Posteriormente podríamos complementar con el uso de un software adecuado como Matlab o Silab con el fin de fortalecer los conceptos anteriores, así como la necesidad de éstos en la resolución de problemas grandes, ya sea en el área de la programación lineal o más general como en la Investigación de Operaciones. Es interesante notar que las matrices que surgen de problemas aplicados son usualmente grandes, incluso matrices de tamaño de 10000 × 10000 no son raras. También hay aplicaciones que dan lugar a matrices con una forma muy especial, es una matriz cuadrada en que todas sus entradas distintas de cero están cerca o en la diagonal, ejemplos de estas matrices se pueden encontrar en la programación de la estructura de soporte de un puente y se llama *matriz de banda*. Con esta metodología podemos seguir hasta concluir nuestra exposición.

Otra alternativa en la presentación de aplicaciones puede ser la presentación de pequeñas aplicaciones, con el fin de mostrar mucha variedad y que los estudiantes puedan escoger aquellas aplicaciones que más les interesan y tratar posteriormente de investigarlas y presentarlas en grande, veamos:

Matrices y códigos

Los códigos secretos han acompañado a la humanidad desde épocas remotas. Se emplean diferentes términos, para indicar que un mensaje ha sido escrito de manera que en principio sólo el destinatario lo pueda leer. Entre las palabras utilizadas para ello están: codificación, cifrado, encriptamiento, etc.

Se define la criptografía (del griego kryptos, "escondido", y graphein, "escribir") como el arte de enmascarar los mensajes con signos convencionales que sólo cobran sentido a la luz de una clave secreta. Para mayor precisión, señalemos que se llama cifrado (codificación o transformación criptográfica) a una transformación del texto original que lo convierte en el llamado texto cifrado o criptograma. De manera análoga, se llama descifrado a la transformación que permite recuperar el texto original a partir del texto cifrado.



La máquina Enigma era un dispositivo para codificar mensajes empleado por los alemanes en la II Guerra Mundial. El artefacto consistía de las siguientes partes:

• Un teclado con 26 letras
• Un tablero con 26 letras
• 3 ruedas con 26 letras cada una sobre un eje

Luego de la obtención por parte de los aliados de algunas de estas máquinas, el equipo polaco conformado por Jerzy Rozycki, Henryk Zygalski y Marian Rejewski, dedujeron el código. A raíz de esto, los alemanes complicaron el proceso mediante una doble codificación. Este nuevo proceso fue decodificado, en 1941, por el equipo de Bletchley Park encabezado por el matemático Alan Turing (Inglaterra, 1912-1954).

Redes neuronales

Los campos de aplicación de las redes neuronales son habitualmente todos aquellos en los que se utilizan o pueden utilizarse modelos estadísticos y/o lineales. En general la utilización de las redes neuronales proporciona resultados mucho mejores. Algunos campos donde se aplican las redes neuronales:

- Finanzas.
- Predicción de índices
- Detección de fraudes.
- Riesgo crediticio, clasificación
- Predicción de la rentabilidad de acciones
- Negocios
- Marketing
- Venta cruzada
- Campanas de venta
- Tratamiento de textos y proceso de formas.
- Reconocimiento de caracteres impresos mecánicamente.
- Reconocimiento de gráficos.
- Reconocimiento de caracteres escritos a mano.
- Reconocimiento de escritura manual cursiva.
- Alimentación
- Análisis de olor y aroma.
- Perfilamiento de clientes en función de la compra.
- Desarrollo de productos.
- Control de Calidad.
- Energía.
- Predicción consumo eléctrico
- Distribución recursos hidráulicos para la producción eléctrica
- Predicción consumo de gas ciudad
- Industria manufacturera.
- Control de procesos.
- Control de calidad.
- Control de robots.
- Medicina y salud
- Ayuda al diagnostico.
- Análisis de Imágenes.
- Desarrollo de medicamentos.
- Distribución de recursos.
- Ciencia e Ingeniería.
- Análisis de datos y clasificación
- Ingeniería Química.
- Ingeniería Eléctrica.
- Climatología.
- Transportes y Comunicaciones.
- Optimización de rutas.
- Optimización en la distribución de recursos

¿Qué es la inteligencia Artificial?

La Inteligencia Artificial es la ciencia que estudia cómo lograr que las máquinas realicen tareas que, por el momento son realizadas por los mejores seres humanos del planeta. Sin embargo esto no implica que puedan resolver problemas que aún no han sido resueltos por el hombre o las mismas máquinas.

Ejemplos de Software con IA (Inteligencia Artificial)



La línea de programas PANDORA de Prosoniq, esta diseñada para extraer, de una señal de audio completa, los componentes músicales mas básicos. Esto se logra utilizando Procesamiento Digital de Señales y Redes Neuronales.

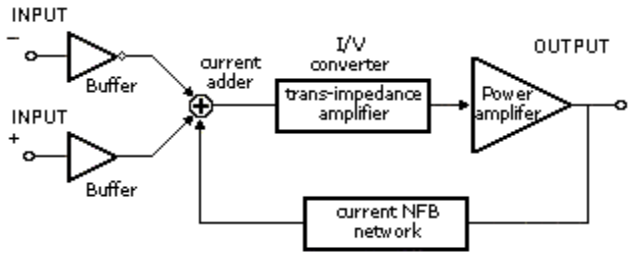


Neural Stock es un programa desarrollado por Infosel Financiero, en México. Combina las Redes Neuronales Artificiales, junto con tecnologías como Algoritmos Genéticos y Lógica Difusa, para obtener una capacidad de análisis acertada, recomendando operaciones de compra y venta en el mundo financiero y bursatil.

Uso de sistemas lineales en los sistemas de sonido stereo (Ecualizadores).

Mucha gente encuentra la caracterización en términos de frecuencia en forma intuitiva. Y en muchos casos hemos visto gráficos que describen los sistemas de esta forma. Los sistemas de sonido stereo, por ejemplo, son una buena variante de sistemas lineares. Estos pueden ser medidos usando métodos de muestreo de la señal en diferentes frecuencias. Además, los controles de sonido stereo, están diseñados alrededor de la representación de la frecuencia. Esto lo vemos día a día cuando ajustamos los niveles de bajos y altos en cualquier ecualizador de un equipo de sonido. Los ecualizadores dividen la señal en varias diferentes frecuencias para dar el control más exacto.

Figura que muestra un sistema de control del funcionamiento de la frecuencia en un ecualizador.



Uso de matrices para modelar riesgos de crédito en la cartera comercial bancaria.

Las técnicas para el otorgamiento y seguimiento de los créditos que hace el sector financiero a sus clientes han tenido importantes desarrollos en los últimos años. Las matrices de transición son una de ellas y permiten estimar la probabilidad de pasar de un estado (i) en el cual se encontraba la deuda del individuo en un cierto periodo de tiempo t, a un estado (j) en el periodo siguiente t+1.

Las técnicas para el otorgamiento y seguimiento de los créditos que hace el sector financiero a sus clientes han tenido importantes desarrollos en los últimos años. Sin embargo, el objetivo final de medir el riesgo de crédito sigue siendo el mismo: prever anticipadamente las pérdidas potenciales en las que podría incurrir una institución en el otorgamiento de créditos. Las diferentes metodologías que existen en la literatura para determinar el riesgo crediticio buscan calcular la probabilidad de incumplimiento o de default de un deudor frente a un acreedor; en otras palabras, es el riesgo asociado con la habilidad de un individuo de cumplir con sus obligaciones una vez que ha asumido una deuda.

Las matrices de transición son una de estas metodologías. Ellas permiten estimar la probabilidad de pasar de un estado (i) en el cual se encontraba la deuda del individuo en un cierto periodo de tiempo t, a un estado (j) en el periodo siguiente t+1.

Conclusiones

Las estrategias presentadas aquí pueden servir de base para generar más y mejores metodologías de aprendizaje utilizando la Historia de la Matemática, las aplicaciones y los elementos computaciones como herramientas pilares en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. Se pueden presentar más variedad de aplicaciones utilizando mini aplicaciones (resúmenes). Sin embargo creo que vale la pena comenzar por lo menos con dos aplicaciones bien completas y el resto con aplicaciones pequeñas. Desde luego que se deben valorar los objetivos trazados en el estudio y tomar en cuenta también a la población meta, todo esto nos ayudará a escoger y valorar la mejor metodología a utilizar.

Bibliografía

1. Anderson, Sweeney, Williams. ***Métodos cuantitativos para los negocios***. Séptima edición. México. Editorial Thomson.1999.
2. Hill Richard. ***Álgebra lineal elemental con aplicaciones***. Prentice Hall. México. 1997.
3. Kolman Bernard. ***Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab.*** Prentice Hall. México. 1999.
4. Lay David. ***Álgebra lineal y sus aplicaciones.*** Prentice Hall. México. 2001.

Referencias en Internet:

- http://www.monografias.com/trabajos12/redneuro/redneuro.shtml
- http://www.monografias.com/trabajos/redesneuro/redesneuro.shtml
- http://www.fortunecity.com/skyscraper/chaos/279/articulos/redesneuronales.htm
- http://electronica.com.mx/neural/informacion/index.html
- http://www.answermath.com/neural-networks/tutorial-esp-1-contenido.htm
- http://ccc.inaoep.mx/~emorales/Cursos/KDD/node76.html
- http://www.gte.us.es/ASIGN/SEA/TranspRN/redesneur.pdf
- http://econpapers.repec.org/paper/col001047/001985.htm
- http://es.wikipedia.org/wiki/Matrices

Uso del GEOMETRA para la Enseñanza de la Geometría

Yuri Morales López[1]
Ricardo Poveda Vásquez[2]

Resumen

El Geometra Sketchpad® es un paquete comercial de Geometría Dinámica que permite representar y manipular objetos matemáticos y sus relaciones. La manipulación de estos objetos, se realiza mediante la operación de arrastrar el ratón, de tal manera que se pueden identificar las propiedades que permanecen invariantes cuando cambian las propiedades de los objetos. Particularmente, la forma de estudiar Geometría se caracteriza por la formulación de conjeturas y la realización de exploraciones que representen los casos posibles.

A través de estas exploraciones, el estudiante puede ir "descubriendo propiedades geométricas", con la finalidad de que se construya el conocimiento ya sea en forma colectiva o individual por parte de los estudiantes.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza aprendizaje de la matemática en Costa Rica tiene diferentes aristas y todas estas repercuten en el quehacer de esta actividad. Dentro de este quehacer se encuentra las metodologías que se utilizan para lograr los objetivos propuestos en los programas educativos.

Hoy, en comparación a hace 25 años, es más común escuchar discusiones en torno a las nuevas tecnologías de la información y la comunicación. En particular, el uso de la computadora como medio para enseñar y aprender.
Algunos resultados a nivel nacional e internacional parecen arrojar que el uso adecuado de esta herramienta puede ser beneficioso en el proceso educativo. Aunque no se ha de dejar de lado que la brecha en acceso a este instrumento es aún una problemática vigente en el país.

En general, este cambio conlleva la necesidad de introducir una actitud positiva hacia las matemáticas en los alumnos. De esta manera, se profundiza en guiar al alumno para que no conciban la matemática de manera aislada de la realidad, sino como una herramienta para la vida.

MARCO DE REFERENCIA.

El interés por implementar las tecnologías digitales en el proceso educativo ha generado una gran cantidad de software destino mejorar este proceso. La enseñanza aprendizaje de la matemática cuenta, también, con algunas herramientas que pueden potenciar un aprendizaje más significativo en el estudiante.

Mediante el programa Geómetra SketchPad se puede desarrollar varios tipos de actividades; puede mejorar la representación y cálculo e inclusive algunos trabajos se han centrado en actividades dirigidas con el apoyo de este software.

En este sentido, Gutiérrez y Martínez (2002) exponen una lista de 27 objetivos de secundaria desarrollados con el uso de la herramienta basados en estrategias diseñadas por ellas mismas. En otros ámbitos, Carrera (2007) ofrece una serie de aplicaciones para el estudio de fractales, isoclinas y área bajo la curva.

[1] Universidad Nacional. Costa Rica. yurimoralesl@yahoo.com
[2] Universidad Nacional. Costa Rica. rpoveda@una.ac.cr

Dentro de las características más relevantes de este tipo de software se encuentran: la facilidad para hacer representaciones de figuras geométricas; la potencialidad (como herramienta) para la construcción de conocimiento; puede despertar interés y motivación, y dado su programación, cuenta con muchas facilidades para crear actividades distintas.

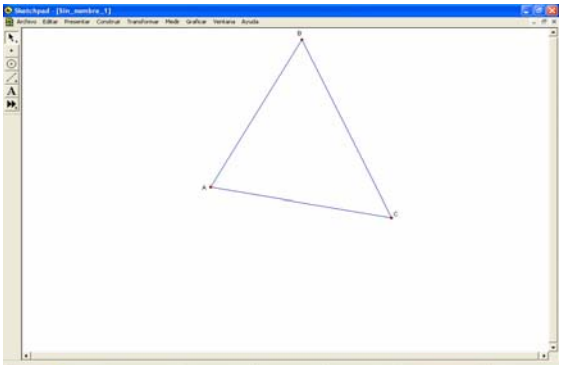
Otros resultados sugieren que las potencialidades de esta herramienta pueden ser explotadas en nuestro contexto. Por ejemplo, en una investigación desarrollada por Barrantes, Ugalde y Morales (2006) se determinó que el Geómetra SketchPad es un software geométrico pertinente para implementar en el laboratorio de Matemática de la Universidad Nacional basados en varias métricas y un análisis de sus características en comparación otros tres software seleccionados.

Por las razones expresadas anteriormente, en el siguiente apartado se pretende dar a conocer las principales experiencias obtenidas en el uso de un software específico como medio no tradicional. El uso concreto del Geómetra SketchPad para la mediación en los procesos educativos.

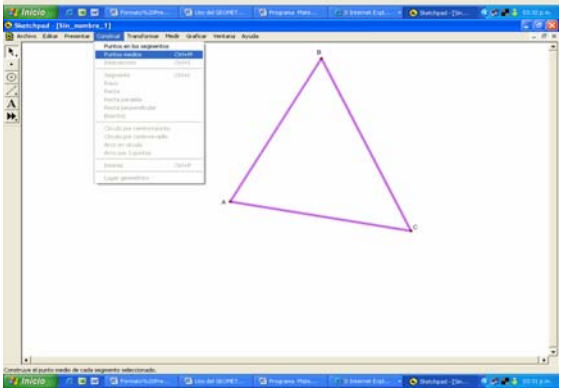
PRIMERA APLICACIÓN

Para profundizar en la potencialidad de la herramienta se desarrolla el objetivo: caracterizar las rectas notables en triángulos (mediatrices) para aplicarlas en el trazo círculos inscritos y circunscritos a un triángulo. Dicho objetivo corresponde al I trimestre de sétimo año. Se puede realizar una guía en donde se pidan los siguientes pasos.

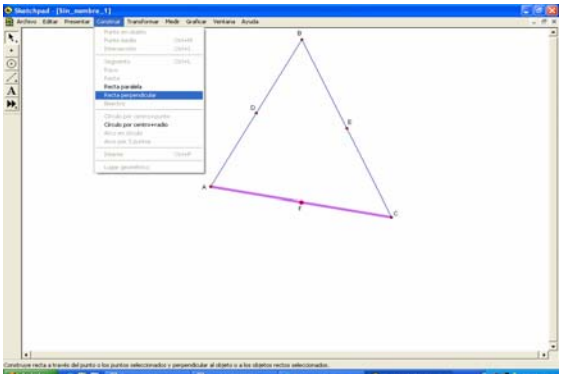
1er paso: Construir un triángulo y denotar cada vértice. Denotarlos con A, B y C



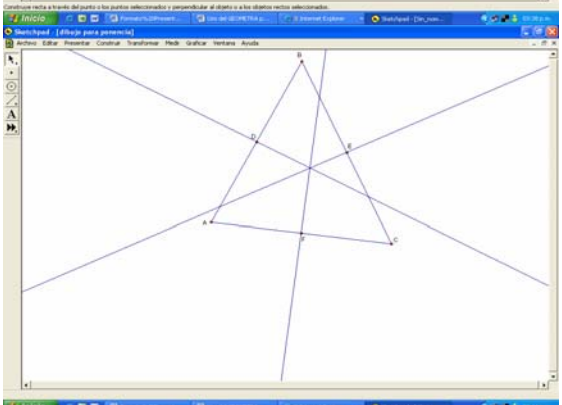
2do paso: Seleccionar los lados del triángulo y en el Menú escoger “construir” y elegir “Puntos medios”. Denotarlos con D, E y F



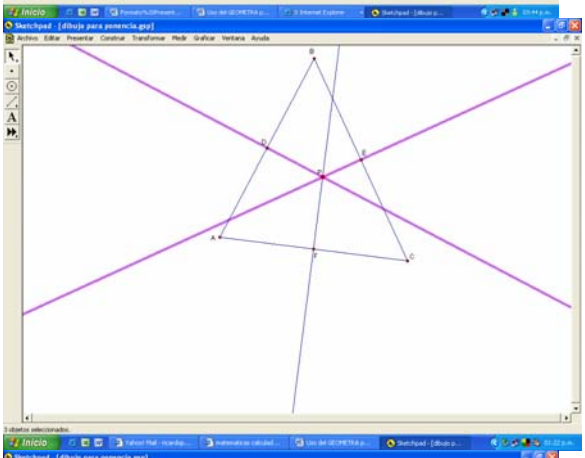
3er paso: Seleccionar un lado del triángulo y el punto medio correspondiente. En el Menú escoger “construir” y elegir “Recta perpendicular”.



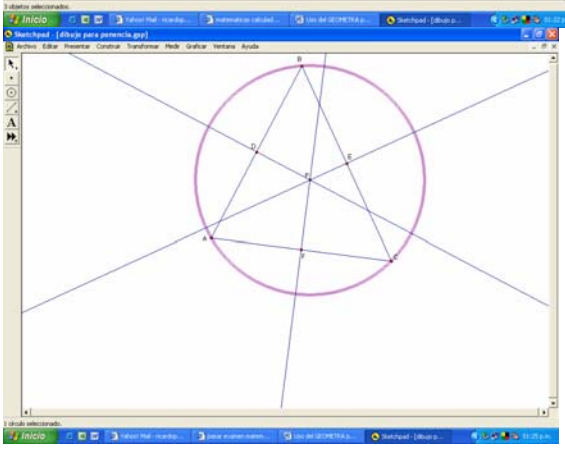
4to paso: Repetir el paso 3 para los otros dos lados. Podemos observar en este paso que las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto.



5to paso: Seleccionar dos cualesquiera de las mediatrices y en el Menú escoger “construir” y elegir “Intersección”. Denotarla con P



6to paso: Seleccionar el punto P y uuno de los vértices del triángulo. En el menú escoger “construir” y elegir “Circulo por centro+punto”.

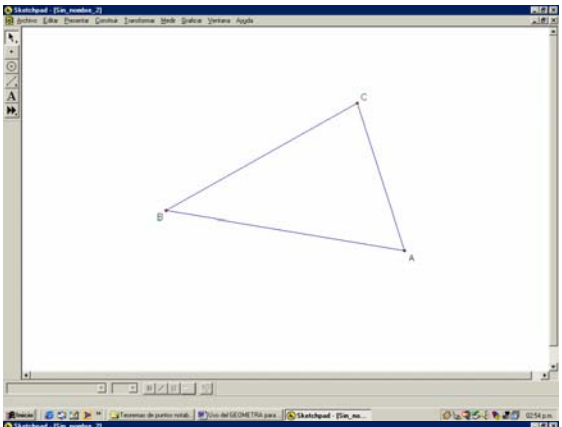


Se puede mover cualquiera de los vértices del triángulo y siempre se cumple que las tres mediatrices concurren en un punto y además el circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

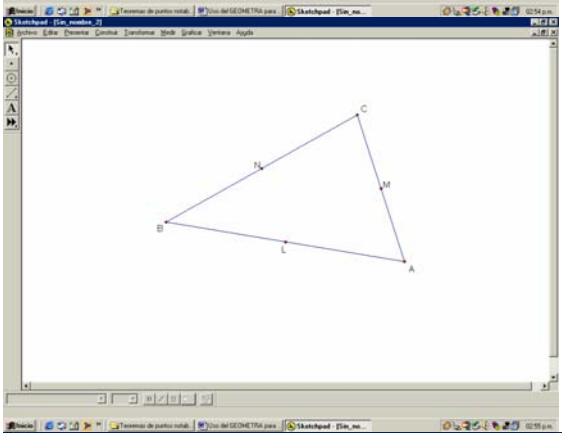
SEGUNDA APLICACIÓN

Otra aplicación es el verificar que dado un triángulo cualquiera, existe una circunferencia que contiene a los puntos medios de los lados del triángulo, los pies de las alturas sobre los lados del triángulo y a los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo.

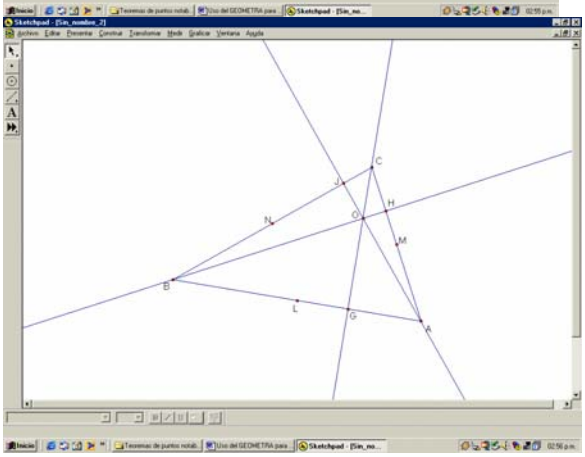
1er paso: Construir un triángulo y denotar cada vértice con A, B y C



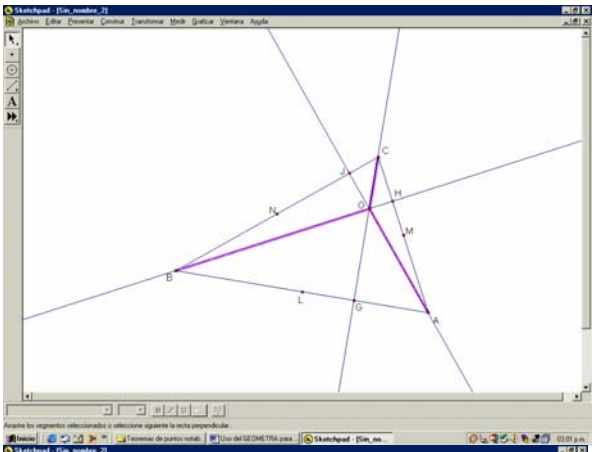
2do paso: Seleccionar los lados del triángulo y en el Menú escoger "construir" y elegir "Puntos medios". Denotarlos con N, L y M.



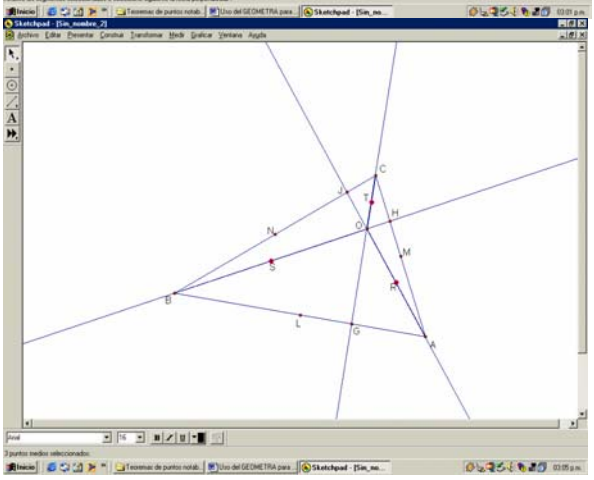
3er paso: Seleccionar un lado del triángulo y el vértice opuesto. En el Menú escoger "construir" y elegir "Recta perpendicular". Repetir esto para los otros dos lados del triángulo. Denotar los pies de las alturas con G, H y J y la intersección de las tres alturas con O (Ortocentro).



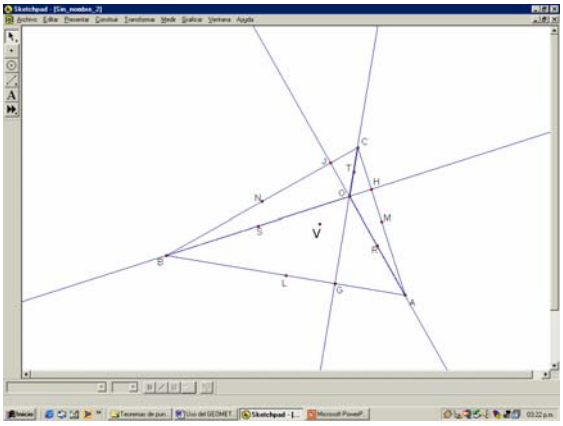
4to paso: Construir los segmentos determinados por el ortocentro y cada uno de los vértices del triángulo.



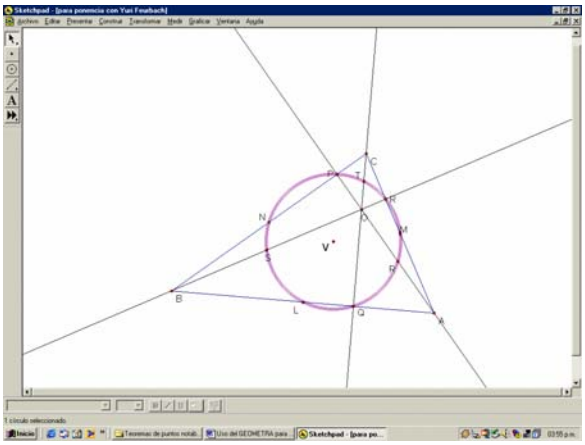
5to paso: Construir los puntos medios de los segmentos construidos en el paso anterior y denotarlos con R, S y T .



6to paso: Determinar el circuncentro del ΔNLM . Para ello puede guiarse con la primera aplicación de este documento. Lo denotamos con V .



7mo paso: Marcar el punto V y uno de los puntos medios de los lados del triángulo (en este orden). En el Menú escoger "construir" y elegir "círculo por centro y punto".



Se puede mover cualquiera de los vértices del triángulo y verificar que siempre está circunferencia contiene los puntos medios de los lados del triángulo, los pies de las alturas sobre los lados del triángulo y a los puntos medios de los segmentos determinados por el ortocentro y los vértices del triángulo. Dicha circunferencia se llama Circunferencia de Feuerbach o Circunferencia de los nueve puntos.

CONCLUSIÓN

La utilidad del Geometra Sketchpad® no es solamente hacer que el estudiante realice una serie de dibujos geométricos, y pensar que con solo el hecho de usar tecnología (particularmente este software) se están alcanzando los objetivos propuestos. Se debe guiar al estudiante a través de una serie de pasos que lo lleven al "descubrimiento" de propiedades geométricas y así lograr un aprendizaje significativo con el uso de la tecnología.

BIBLIOGRAFÍA

Barrantes H., Ugalde A., Morales Y. (2006) Implementación de software geométrico en la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional. MATIE - UNA. No publicado

Carrera, L. (2007) Calcular el área bajo una curva utilizando El Geómetra Sketchpad ®. Revista digital Matemática Educación e Internet, Volumen 8, número 1. Recuperado de [http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/ Sketchpad/sketchpadV4n3.html] en la fecha [21/09/2007]

Martínez, M., Gutiérrez, G. (2002) Aplicaciones del programa el geómetra en la enseñanza del tema de funciones en secundaria. ITCR, Cartago.

Utilizando invariantes de Transformaciones en un contexto dinámico para probar propiedades geométricas

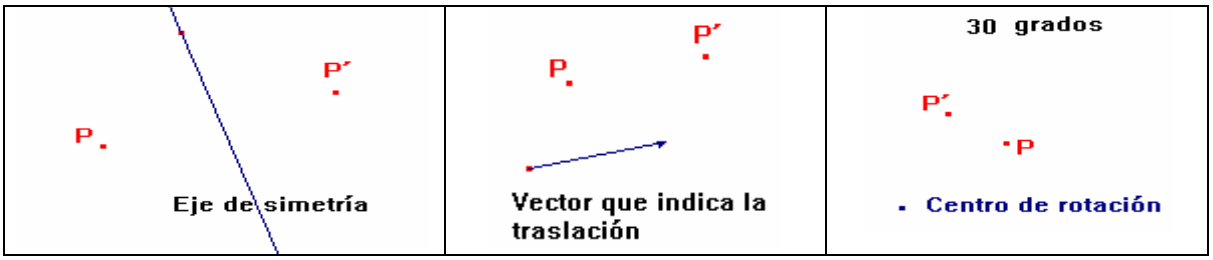
Gonzalo Zubieta Badillo[1]

Resumen

Con un paquete de geometría dinámica que contiene las transformaciones simetría axial, traslación y rotación, se conjeturan invariantes de ellas, que al validarlas, permiten dar pruebas de propiedades en figuras geométricas. Se presentan dos ejemplos de ello, quedando de manifiesto el movimiento como elemento imprescindible en el aprendizaje de la geometría.

Introducción

Antes de entrar en el tema conviene aclarar que el paquete que utilizaremos de geometría dinámica es *Cabri Géomètre*; cada vez que hagamos referencia a los comandos de dicho paquete, los subrayaremos para indicar que estamos en el contexto de una geometría experimental, en la pantalla de la computadora. Iniciaremos nuestro estudio utilizando los comandos simetría axial, traslación *y* rotación para ver lo que le ocurre a un punto *P* elegido en la pantalla con el comando punto y después utilizar uno de los comandos mencionados para obtener su imagen *P´*, y al pasear o arrastrar el punto *P* por la pantalla con el comando puntero, observar como se mueve *P´*



En cada una de las tres instantáneas anteriores, el punto *P* debe moverse al usar el comando puntero y el usuario debe observar cómo se mueve *P´*, de lo cual podría obtenerse la definición correspondiente de la *simetría axial, la traslación* y *la rotación*, respectivamente, si el usuario realiza observaciones pertinentes. A su vez el eje de simetría puede moverse, con el comando puntero y en ese caso observar lo que le ocurre a *P* y *P´* en el cuadro a la izquierda; mover el vector que indica la traslación, con el comando puntero, para ver lo que le ocurre a *P* y *P´* en el caso del cuadro de en medio; finalmente en el cuadro a la derecha, mover el centro de rotación con el comando puntero o cambiar el número de grados al usar el comando edición numérica, para ver lo que le ocurre a *P* y *P´*. Lo realizado con un punto dado *P* podría hacerse con una figura dada, que proponga el usuario, en este caso, cada punto *M* de la figura dada tiene una imagen *M´* en la figura transformada, que corresponde al movimiento considerado.

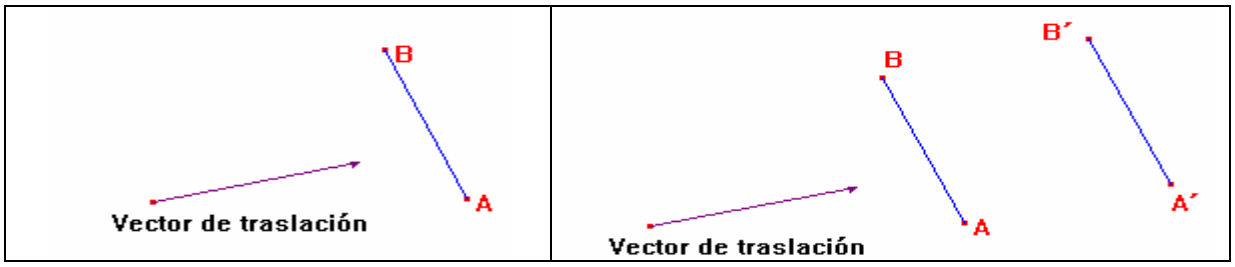
Ahora, al revés: si damos dos puntos *P* y *Q*, sabiendo que *Q* es el transformado de *P* por un eje de simetría, trazar el eje de simetría que cumpla con lo solicitado; o si *Q* es el transformado de *P* por una traslación, trazar el vector de traslación que lleve a *P* en *Q*; o si *Q* es el transformado de *P* por una rotación, localizar el centro de rotación y el ángulo de rotación que cumple con lo pedido; los elementos encontrados –eje de simetría, vector de traslación, centro y ángulo de rotación- ¿son únicos o existen varios?

[1] México; gzubieta@cinvestav.mx

Invariantes de las transformaciones mencionadas

De las transformaciones mencionadas, esto es, *simetría axial*, *traslación* y *rotación*, en cada caso, se trata de averiguar qué es lo que no cambia, al aplicarle dicha transformación a un objeto geométrico (que podría ser una recta, una circunferencia, un segmento, una semirrecta, un par de rectas paralelas o un par de rectas perpendiculares, un ángulo dado, un triángulo, un polígono, etc.), es decir ¿se mantiene alguna característica entre el objeto original y el objeto transformado?

Si la respuesta es afirmativa, decimos que la característica encontrada es un *invariante* de la transformación utilizada. Veamos un ejemplo, eligiendo como transformación a la *traslación* y como objeto dado, un segmento



En el cuadro de la izquierda el segmento *AB* y el vector de traslación; ahora, con el comando traslación se acerca el cursor al objeto por transformar, se hace click en el botón izquierdo del ratón y luego se acerca al vector que representa a la traslación, para hacer click como antes, obteniéndose la figura transformada. El segmento dado *AB* y su transformado *A´B´*, que al parecer también es un segmento, en la ilustración anterior a la derecha. ¿Qué característica común tienen *AB* y *A´B´*? Para contestar a la pregunta, con el comando puntero arrastre un extremo del segmento *AB* y observe lo que le ocurre a *A´B´*, ¿podrías conjeturar que característica comparten *AB* y *A´B´*?

Otras opciones de arrastre con el comando puntero serían: elegir un punto intermedio entre *A* y *B* para arrastrar *AB* o mover un extremo del vector de traslación. Si eliges alguna de éstas, ¿podrías contestar a la última pregunta planteada?

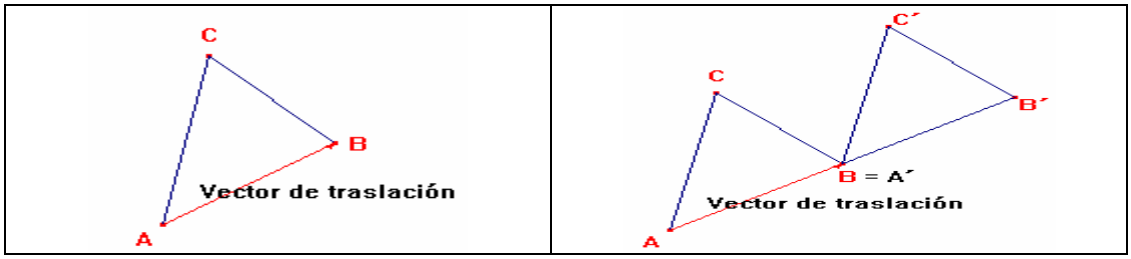
De la manera indicada, el paquete de geometría dinámica da la posibilidad de conjeturar *invariantes* para cada una de las tres transformaciones mencionadas y posteriormente, pasaríamos a validar dichas conjeturas, con lo cual tendríamos los invariantes de cada una de las transformaciones consideradas, que nos permitirían probar propiedades de las figuras usuales de la geometría, como veremos en el siguiente apartado.

Propiedades de figuras geométricas

Utilizando los invariantes validados de las transformaciones consideradas podemos *probar* propiedades de las figuras geométricas, por ejemplo, que en todo triángulo la suma de sus ángulos interiores es 180 grados, para ello utilizaremos la transformación de *traslación* y los invariantes validados correspondientes que son:

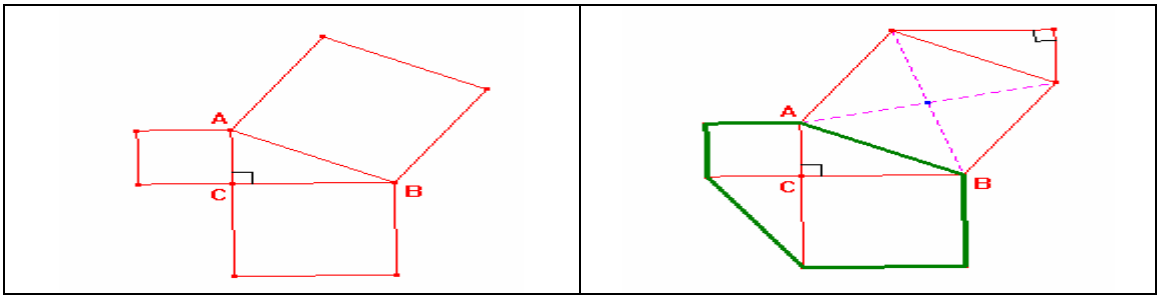
- Un triángulo es transformado por la traslación en otro triángulo, congruentes ambos.
- Los dos triángulos mencionados en el punto anterior tienen sus lados correspondientes paralelos.
- Un ángulo es transformado por la rotación en otro ángulo, siendo congruentes los dos ángulos.

La prueba de la propiedad mencionada es

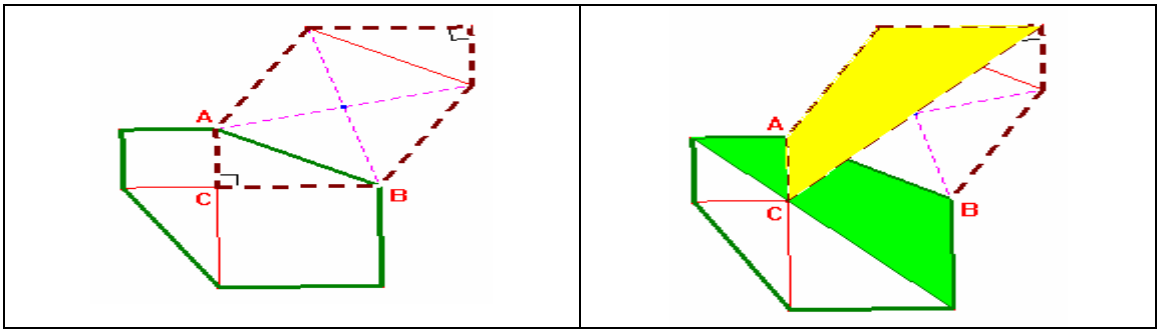


En la instantánea de la izquierda, el triángulo *ABC* y el vector de traslación considerado, esto es el que va del vértice *A* al vértice *B*; en la instantánea a la derecha, el triángulo *ABC* y su transformado *A´B´C´*; Ahora, por el primer invariante señalado, el ángulo en el vértice *A* del triángulo *ABC* es congruente al ángulo en el vértice *A´* del triángulo *A´B´C´*; los lados *AB* (en el Δ *ABC*) y *A´B´* (en el Δ *A´B´C´*) por el segundo invariante mencionado son paralelos, pero como tienen un punto en común (*B* = *A´*) entonces están sobre una misma recta y finalmente, por el tercer invariante citado, el ángulo en el vértice *C* del triángulo *ABC* es congruente al ángulo *CBC´*, si el centro de rotación es el punto medio de *BC* y el ángulo de rotación es 180 grados. Es decir, en el vértice común de ambos triángulos *B* = *A´* están los tres ángulos interiores del triángulo *ABC* formando un ángulo de media vuelta.

Otro ejemplo sería la prueba del teorema de Pitágoras atribuida a Leonardo D´Vinci, que inicia de la construcción típica, conocida por todos

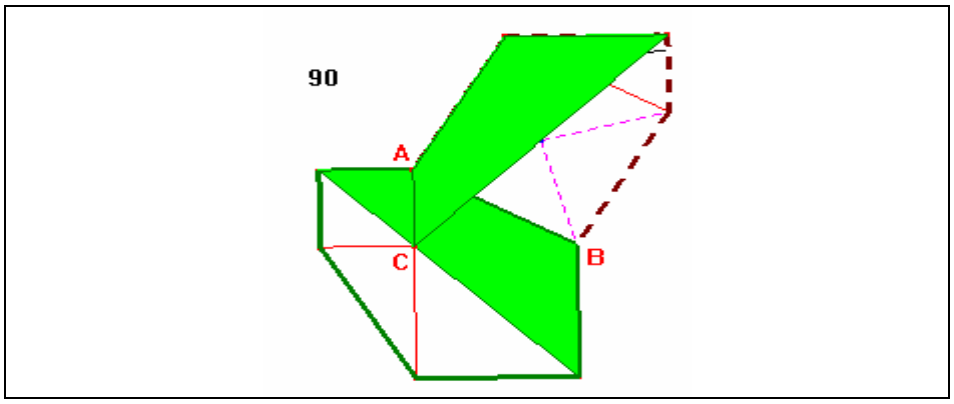


En el cuadro a la derecha construye el hexágono (trazo grueso) que contiene a los cuadrados de los dos catetos y dos triángulos congruentes al dado originalmente. Además, con una rotación cuyo centro es la intercepción de las diagonales del cuadrado de la hipotenusa y un ángulo de 180 grados, construye un triángulo congruente al dado inicialmente, en el lado opuesto a *AB* del cuadrado de la hipotenusa.



A la izquierda, en la ilustración de arriba construye otro hexágono (trazo grueso punteado) que contiene al cuadrado de la hipotenusa y dos triángulos congruentes al dado inicialmente. En el cuadro a la derecha, considera las dos mitades de cada hexágono construido (sombreados) y al realizar una rotación de centro *A*, cuyo ángulo es de 90 grados, de la mitad del primer hexágono construido, tenemos que dicha mitad del

hexágono es congruente con la otra mitad del segundo hexágono construido, como se aprecia a continuación



De lo anterior se deduce que: $(AC)^2 + (CB)^2 = (AB)^2$.

Conclusiones

Las transformaciones presentadas, que podemos interpretarlas como movimientos en el plano, son fundamentales y deseables en el aprendizaje de la geometría. Recordemos que Euclides en sus *Elementos* no pudo resistir la tentación del movimiento, a pesar de que no estaba contemplado en sus axiomas. Otro argumento a favor del movimiento es que en nuestro entorno, está presente y también se contempla en materias como Física.

Los cursos de geometría estática se enriquecen con los paquetes de geometría dinámica que significa agregarle movimiento a nuestros objetos de estudio.

Bibliografía

- Pantógrafos para cada una de las transformaciones consideradas pueden consultarse en: http://roble.pntic.mec.es/jarran2/cabriweb/mprotpant.htm
- Zubieta Gonzalo y Rivera Mario (2006) *Más sobre geometría dinámica*; Zubieta Gonzalo y Alfonso Martínez (2000) *Geometría dinámica*; ambos libros de actividades para estudiantes de Secundaria, del Proyecto "Enseñanza de las matemáticas con tecnología" (EMAT) en línea, dirección electrónica http://www.efit-emat.dgme.sep.gob.mx

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

CONCURSO MATEMÁTICA

CONCURSO MATEMÁTICA

Como parte de las actividades de integración entre los participantes del CIEMAC, el Comité Organizador programó la realización de un concurso denominado **1er CONCURSO MATEMÁTICA RECREATIVA CIEMAC.**

Este concurso tiene la finalidad de promover las relaciones entre profesores y estudiantes de enseñanza de la matemática de las universidades buscando estrechar lazos de amistad y generar una competencia amigable y constructiva. Se plantearán ejercicios cuya solución se obtenga a partir de conocimientos correspondientes al programa del MEP con la particularidad de que la solución represente un reto a la creatividad y al trabajo en equipo de lo participantes.

La competencia consta de dos sesiones de tres ejercicios cada una y se desarrollará entre las 4:30 PM y las 7:30 PM de los días 5 y 6 de diciembre.

El certamen se planteará en equipos conformados por cuatro personas (estudiantes o profesores en enseñanza de la matemática). La inscripción se realizará por equipos, y se contará con premios a los ganadores del concurso.

Fecha límite de inscripción: 5 de diciembre antes de las 3 de la tarde, en las Oficinas del CIEMAC (Aula del CRV, segundo piso de la Escuela de Matemática)

Esta actividad está a cargo del MSc. Geovanni Sanabria.

QUINTO CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA

INFORME FORO DE REFLEXIÓN

CALIDAD EN LA EDUCACIÓN EN COSTA RICA

EDICIÓN FINAL

MARIO MARÍN SÁNCHEZ,
COORDINDADOR 5º CIEMAC
ALCIDES ASTORGA MORALES,
EDITOR CIENTÍFICO 5º CIEMAC

COORDINADORES DE GRUPOS:

ANA ISABEL AGUILAR
CARMEN Ma. GONZÁLEZ
GERARDO MEZA
IVONNE SÁNCHEZ
JOSEFA GUZMÁN
LAURA SÁENZ
LEONEL CHAVES
NORMA ADOLIO
SILVIA CALDERÓN
VERA SANCHO
VICENTE GÓMEZ

.

CARTAGO, 2008

Introducción

Como parte de las actividades del ***5º Congreso Internacional sobre Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora,*** se organizó una jornada de reflexión sobre la calidad en la enseñanza de la matemática en Costa Rica. El principal objetivo de esta actividad fue promover la integración y la participación de los docentes en la identificación de los problemas centrales que afectan el desarrollo de la matemática en Costa Rica y ofrecer posibles soluciones a los mismos. Se trabajó siguiendo un esquema que agrupó a los docentes alrededor de varios temas predefinidos y se contó con la valiosa colaboración de un grupo distinguido de coordinadores que facilitaron las actividades en cada uno de los temas. A continuación se presenta un resumen de la información obtenida de este proceso, los resultados sintetizados de cada uno de los grupos de trabajo y algunas conclusiones o interpretaciones que a juicio del redactor de este informe resultan pertinentes.

Justificación

Tradicionalmente el CIEMAC y otras actividades de esta naturaleza se convierten en escenarios desde los cuales los y las investigadoras ofrecen a los y las participantes sus puntos de vista sobre el tema de la enseñanza de la matemática, en un esquema unidireccional en el que los y las participantes juegan un rol pasivo como receptores de información. Para la organización del 5º CIEMAC es claro que los y las docentes tienen mucho que decir respecto a la situación actual de la Enseñanza de la Matemática en Costa Rica. A través de este foro la organización ofreció a los y las participantes un espacio para que pudieran expresar sus opiniones respecto a su diario quehacer y esas opiniones fueran transmitidas a las organizaciones o personas que deben conocerlas. Este ejercicio permitió obtener información valiosa que puede ser muy importante al momento de plantear actividades de capacitación y extensión universitaria en el área de la enseñanza de la matemática.

Objetivo: Promover la discusión con miras a definir prioridades en la búsqueda de la calidad en la Enseñanza de la Matemática.

Metodología de trabajo

Se planificaron varias conferencias preparatorias a esta sesión de reflexión. En estas conferencias se abordaron aspectos centrales a la enseñanza de la matemática utilizando como ejes centrales la formación universitaria, la capacitación y uso de tecnologías en educación. Los grandes temas en los que se agruparon los participantes fueron:

1. Programas de Matemática del MEP.

2. Condiciones laborales y salariales de los y las docentes.

3. Condiciones familiares y sociales de los y las estudiantes de secundaria.

4. Condiciones de infraestructura y servicios de apoyo

5. Metodologías, recursos de apoyo y capacitación

6. Formación Profesional, Normas de contratación del Servicio Civil

7. Tecnologías de información

8. Pruebas Nacionales

Cada grupo de trabajo debería identificar los problemas importantes en cada temática y ofrecer propuestas para la solución de los mismos. Algunos de los grupos identificaron mucho más de los tres problemas indicados y en la mayoría de los casos fueron reducidos a tres por el redactador de este informe. A nombre de la coordinación del CIEMAC y de la Escuela de Matemática del ITCR deseamos agradecer a los profesores que cooperaron como coordinadores de grupo así como un agradecimiento a la profesora Gabriela Roldán quien colaboró en la coordinación de la logística de esta actividad. Un agradecimiento especial a la profesora Josefa Guzmán por sus valiosos comentarios y apoyo en esta experiencia.

Tema de análisis 1

PROGRAMAS DE MATEMÁTICA DEL MEP

Coordinadora: Lic. Ana Isabel Aguilar D. (Educación Media, jubilada)

Problemas y soluciones planteados por el grupo de análisis:

<u>Inexistencia de un proceso de capacitación para la correcta implementación de los programas de matemática.</u>

Muchos docentes requieren de capacitación y apoyo para poder desarrollar de manera adecuada los requerimientos planteados en el programa del MEP

Solución planteada

El MEP debe elaborar un plan nacional para la correcta implementación de los programas de estudio de Matemática.
En este plan se deben promover espacios para la reflexión y capacitación, y se pueden seguir algunos de los siguientes lineamientos:

- Las Universidades Públicas deben comprometerse en la capacitación de maestros y profesores.
- El MEP debe reprogramar el curso lectivo, de tal manera que incluya espacios para dicha capacitación (Esta capacitación se puede realizar en la primera semana del curso lectivo)
- El MEP debe autorizar a los directores de las instituciones y crear condiciones apropiadas para que se programen espacios para la capacitación docente al menos dos veces al año.

- Se pueden tomar en cuenta las diferentes empresas privadas, nacionales o extranjeras para que colaboren con el MEP en estas capacitaciones.
- El MEP debe tener una Biblioteca Virtual para que el educador pueda hacer las consultas.
- El MEP debe promover capacitaciones de calidad para poder obtener calidad en la educación matemática, para esto puede capacitar a los asesores regionales para que sean los voceros y los guías en este proceso. No sólo debe realizarse una sesión de trabajo al inicio del curso lectivo, sino debe haber un seguimiento por lo menos dos veces al año y al final del curso lectivo una evaluación del proceso.

Los programas de matemática de primaria y secundaria están mal diseñados

Solución planteada

Rediseñar los programas de estudio de primaria y secundaria tomando en cuenta los siguientes aspectos.

- La secuencia lógica de los contenidos
- Relacionar los contenidos de matemática con los contenidos de otras materias.
- Agregar los contenidos que faltan, para desarrollar los objetivos propuestos con el nivel de dificultad requerido para estudios universitarios.
- Eliminar los objetivos innecesarios y repetidos del programa.
- Diseñar los distintos programas tomando en cuenta la opinión de los educadores de primaria y secundaria y la participación de las Universidades Públicas.
- Diseñar un programa especial para las adecuaciones curriculares, tanto para estudiantes talentosos como para aquellos que tienen problemas de aprendizaje.
- Tomar en cuenta el tiempo real que se necesita para enseñar cada uno de los contenidos y objetivos del programa.
- Incluir el tema de Lógica Matemática.

El Programa de Matemática del MEP no se adecúa a la realidad nacional actual

No contempla las diferencias que existen en las distintas regiones de nuestro país, tipo de población, recursos, características del entorno, y por ende, no propone estrategias específicas de la puesta en práctica. No contempla la realidad e intereses de los estudiantes. Es débil en cuanto a considerar sus condiciones de implementación (aula, posibilidades de los estudiantes, recursos disponibles)

Solución planteada

Regionalizar el programa de estudios.

- Considerando la realidad del entorno, dificultades, potencialidades e intereses de la población meta.
- Promoviendo la contextualización del programa de acuerdo al entorno donde se implementa.

- Implementando temática “específico- general” en vez de general como lo es actualmente.

Tema de análisis 2

CONDICIONES LABORALES Y SALARIALES DE LOS DOCENTES

Coordinadora: M.Sc. Laura Sáenz (UNED)

Problemas planteados por el grupo de análisis:

Los problemas puntualizados por los participantes fueron:

- Los grupos de estudiantes son muy numerosos y no se toma en cuenta cuando hay estudiantes de adecuación curricular significativa.
- Violencia de los estudiantes
- Los bajos sueldos de los educadores, que no están acordes con todo el trabajo que ser educador conlleva. Ya que se necesita planificar, elaborar material, evaluar, entre otras cosas y esto demanda tiempo extra.
- Los problemas de pagos
- Estructura rígida e ineficiente del MEP.
- El menosprecio y la falta de respeto que tiene la sociedad de la figura del docente.
- Exceso de lecciones laboradas
- Grandes cantidades de materia que hay que abarcar en poco tiempo
- Problemas de nombramientos y traslados
- El exceso de lecciones laboradas no le permite al docente capacitarse, o actualizarse.
- La falta de capacitación por parte del MEP, dirigida exclusivamente a los profesores de matemática.

Salarios no competitivos

Los docentes son muy mal pagados, en relación con otros profesionales.

Solución planteada

Cambiar el sistema actual de pagos por lección y pagar al educador por jornada laboral. Además aplicar la misma escala salarial del sector público al sector educativo.

Imagen profesional

Menosprecio a la figura del docente por parte de la sociedad (directores, MEP, estudiantes, padres de familia), además del desprestigio que se adquiere cuando profesionales con formación en otras carreras ejercen la profesión de profesores de matemática.

Solución planteada

Fomentar valores, a través de campañas por diferentes medios de comunicación, ya que esta formación viene desde el hogar.

Fomentar el aprecio por la labor docente, desde el ámbito administrativo de la institución, por medio de talleres de motivación. Erradicando los nombramientos de profesionales no calificados en esta disciplina.

Tamaño de Grupos

La gran cantidad de estudiantes en un mismo grupo afecta la calidad de la educación desde varios puntos de vista:

- *No reproduce aprendizaje significativo, solo conductista.*
- *No se puede dar la atención individualizada que muchos estudiantes necesitan*
- *La inclusión de estudiantes con adecuaciones curriculares significativas y no significativas, sin reducir el grupo proporcionalmente.*
- *Los estudiantes no tienen el espacio físico adecuado por lo menos 1,5 m^2 para un estudiante de 13 a 18 años.*
- *El esfuerzo extra que debe hacer el profesor y los mismos estudiantes para lograr el objetivo.*

Solución planteada

Solicitar a las autoridades que consideren la reducción del número de estudiantes por grupo, para favorecer un aprendizaje significativo y una atención más individualizada.

Tema de análisis 3

CONDICIONES FAMILIARES Y SOCIALES DE LOS Y LAS ESTUDIANTES DE SECUNDARIA.

Coordinadora: Lic. Norma Adolio Cascante (UNA, jubilada)

Problemas planteados por el grupo: Este grupo no planteó soluciones concretas.

Nuevo concepto de familia

Se han alterado los valores en la familia. Situación de familias desintegradas (inestabilidad en los jóvenes, problemas económicos, drogas, etc.). Familias que no se involucran con la institución de sus hijos. La calidad de tiempo que se dedica a los hijos por parte de los padres. Carencia de comunicación entre padres e hijos. Falta de autoridad por parte de los padres. Irrespeto al docente por parte de estudiantes y padres de familia que se refleja en la sociedad actual.

Actitud del estudiante y docente

Situación económica. Familias que no atienden responsablemente la vida académica y las inquietudes de sus hijos. Actitud del docente en algunas ocasiones no da seguridad al estudiante afectando su desarrollo intelectual y social.

Las exigencias institucionales y cambios de paradigmas

*Incorporación de nuevas tecnologías. **N**o se le da importancia en las instituciones por trabajar con currículos obsoletos. Los planes de estudio de secundaria no promueven el desarrollo integral del estudiante.*

Comentario del grupo

Existe un cambio social que no se está considerado en el currículo costarricense, por ejemplo se habla de incorporar la tecnología en la educación sin embargo, no se dan las condiciones apropiadas a nivel de infraestructura, equipo, capacitación y el mismo sistema actual no favorece esta incorporación.

Consideramos que las necesidades e intereses de los jóvenes no se reflejan en los planes de estudio, esto provoca que muchas de ellas y ellos vean en el sistema educativo algo que los limita a los intereses de otro. Como consecuencia no existe una identificación verdadera en el proceso ya que no se consideran parte del mismo.

El joven moderno requiere incorporarse casi de inmediato al mercado laboral, por lo que requiere una formación útil, sin disminuir la calidad. Lamentablemente existe una "cultura" de facilismo que les hace creer en lograr resultados con el mínimo esfuerzo. Esto hace que el bachillerato de secundaria se convierta en un atractivo para las instituciones privadas que lucran con las necesidades de los y las jóvenes.

Pese a todo ello, existen jóvenes comprometidos con el cambio y tienen también a su lado a docentes que creen en su capacidad para transformar la sociedad

Tema de análisis 4

CONDICIONES DE INFRAESTRUCTURA Y SERVICIOS DE APOYO

Coordinadora: M.Sc. Carmen María González Argüello (UNA, jubilada)

Problemas planteados por el grupo de análisis:

Infraestructura en general

Existen serios problemas de infraestructura: vidrios rotos o inexistentes, pupitres en mal estado o faltante de ellos, paredes rayadas y sucias, aulas en pésimas condiciones falta de aulas o aulas muy llenas de estudiantes, instalaciones deportivas inexistentes o en mal estado, etc.

Solución planteada

1. Concienciar al estudiante y la familia sobre el valor y el privilegio de la educación para que colabore, cuide y respete la infraestructura y los recursos materiales de los que disfruta gratuitamente. Puede ser mediante campañas publicitarias.
2. Solicitar al gobierno cumplir plenamente con asignar los fondos destinados a la educación.

Servicios al profesorado

No existe una atención adecuada a las necesidades del docente para cumplir de manera adecuada con su trabajo, hay carencia de suministros, materiales de apoyo, capacitaciones, horarios apropiados, etc.

Solución planteada

1. Planificar al inicio del período lectivo la cantidad de estudiantes que puede manejar la institución y la cantidad de estudiantes que se debe establecer por grupo para que los estudiantes se atiendan de la mejor manera.
2. Integrar a la comunidad para búsqueda de recursos y apoyo
3. Crear páginas donde se dé información para cada asignatura que se imparte a nivel nacional. En ello podrían ayudar los estudiantes de computación de las diferentes universidades.

Servicios al estudiantado

Hay pocos servicios orientados a los estudiantes y los que hay deben mejorarse, bibliotecas, comedor, fotocopias, etc.

Solución planteada

Mayor integración de la comunidad, Juntas de Educación y Asociación de Padres de Familia para apoyar integralmente la educación. Un mayor compromiso de todos para con los estudiantes, brindando suficiente información sobre becas, mayor asistencia de parte de orientadores, profesores y administrativos.

Tema de análisis 5

METODOLOGÍAS, RECURSOS DE APOYO Y CAPACITACIÓN

Coordinador: M.Sc. Vicente Gómez (ITCR, jubilado)

Problemas planteados por el grupo de análisis:

Ausencia de planificación

No existe un ente competente que investigue sobre las necesidades de los educadores en las áreas cognoscitivas que además dé seguimiento y evalúe el impacto producido.

Solución planteada.

1. Invertir más recursos en educación ofreciendo además tiempos para la investigación que genere mejores y nuevas estrategias para los procesos de enseñanza y aprendizaje.

2. Crear un ente especializado que analice y planifique las capacitaciones de acuerdo con las necesidades de los educadores por zona educativa, temática, áreas de formación docente y matemática.

3. Capacitar capacitadores preferiblemente siendo estos educadores activos.

Politización de las capacitaciones

La politización de las capacitaciones no permite definir con claridad, bajo un adecuado diagnóstico, cuáles son las necesidades reales de capacitación, cuáles las áreas prioritarias y quienes son los encargados con capacidad reconocida para la ejecución de un proyecto exitoso.

Soluciones planteadas.

1. Es un grave obstáculo para el adecuado desarrollo de los procesos de capacitación, se considera necesario que la capacitación esté en manos de entes no gubernamentales.

2. Debe darse un mejor proceso de planificación y coordinación entre los entes que actualmente se encuentran ejecutando procesos relacionados con capacitación a los docentes.

3. Es deseable que entes centralizados como CONARE desarrollen proyectos interinstitucionales que permitan, después de un adecuado diagnóstico, ofrecer oportunidades de titulación de docentes, abrir espacios para desarrollar nuevas áreas cognitivas, determinar y adecuar intereses de capacitación por sectores y regiones.

Deficientes aspectos metodológicos y poca innovación tecnológica

No existe una adecuada relación de los procesos metodológicos ni de recursos y tecnologías con quienes son sujeto de capacitación. Existe un gran descuido hacia los colegios nocturnos.

Solución planteada

1. Desarrollar, en los procesos de capacitación, metodologías acordes con lo que se requiere implementar en el aula.

2. Abrir más posibilidades de conocimiento, accesibilidad y uso de nuevas tecnologías para el desarrollo académico y profesional de los docentes que redunde en beneficio de los estudiantes.

3. Que se realicen más esfuerzos del MEP por dotar de equipo tecnológico a los colegios.

Tema de análisis 6

FORMACIÓN PROFESIONAL

Coordinadora: Lic. Silvia Calderón (ITCR, jubilada)

Problemas y soluciones planteados por el grupo de análisis:

Integración de diversas áreas del plan

Separación entre los cursos de Matemática y Pedagogía que se imparten en las universidades en la formación docente, que implica falta de didácticas específicas, entre otras.

Solución planteada

1. Que la impartición de los cursos en el área de Pedagogía esté en manos de profesionales que tengan conocimientos en esa área y en Matemática. Además se requiere que tengan experiencia en la enseñanza de la matemática de modo que sean capaces de implementar situaciones de aprendizaje aplicadas a los contenidos de estudio.

2. Buscar la calidad y la excelencia en la formación docente a través de los procesos de acreditación. Los resultados de la misma permitirán a la Institución replantear, si fuese necesario, los programas de estudios de las carreras formadoras de docentes en la Enseñanza de la Matemática.

Formación en temas complementarios adicionales

Ausencia de temas complementarios o necesidad de replanteamiento de cursos en la formación docente.

Entre estos:

- *Necesidades educativas especiales*
- *Legislación educativa*
- *Técnicas metodológicas y su diversidad*

Por otro lado, es necesario replantear aquellos cursos con demasiada carga teórica, con el fin de que se orienten más hacia situaciones reales.

Solución planteada.

1. Abrir o mejorar los canales de comunicación entre las universidades que forman docentes, buscando una unificación en los planes de estudio.

2. Replantear los cursos con gran contenido teórico permitiendo la experiencia de aula. Propiciar el desarrollo de cursos o talleres alrededor de temas como : adecuaciones curriculares, aprendizaje del lesco y del braille, el manejo de estudiantes talentosos.

Formación deficiente

Docentes de la Enseñanza de la Matemática a nivel de secundaria con formación deficiente en Matemática y Pedagogía.

Consideración

Existe diferencia entre los planes de estudio de las universidades públicas y las privadas, sin embargo, ambas ofrecen un título académico equivalente. Entre las diferencias cabe señalar el tiempo de duración de la carrera, el énfasis con que se imparten los cursos y la cantidad de contenidos en estos.

Solución planteada

1. Que exista un ente calificado que supervise y regule periódicamente los programas de estudio.

2. Los encargados de la formación de los futuros docentes deben procurar el desarrollo de una actitud auto didacta en el estudiante.

3. En lo posible, los profesionales formadores de docentes a nivel de enseñanza secundaria deben tener experiencia de aula. Asimismo mantenerse renovados académicamente.

Tema de análisis 7

ADECUACIONES CURRICULARES

Coordinadora: Lic. Vera Sancho (UCR y Educación Media, jubilada)

Problemas y soluciones planteadas por el grupo de análisis:

Necesidad de capacitación integral en el tema

Falta de capacitación a los profesionales con respecto a las adecuaciones curriculares por parte del MEP y de las universidades formadoras de educadores, así como desconocimiento de la reglamentación y de la legislación existente sobre las adecuaciones curriculares.

Solución planteada

1. Asignar por parte del MEP a cada una de las instituciones educativas un responsable en la asesoría de Educación Especial de manera que este sea el responsable de canalizar todas las regulaciones existentes y cualquier innovación que se haga, estableciendo al año como mínimo un taller informativo.

2. Talleres de capacitación a los docentes por parte de profesionales en el área de las matemáticas.

    - Diagnóstico, que ayude al educador a detectar cuales son las necesidades educativas especiales que podría ocupar un estudiante dado.
    - Implementación, que ayude a aplicar en forma correcta y eficiente algunas adecuaciones.

3. Incorporar en los programas de formación docente el tema de las adecuaciones curriculares e introducir diferentes necesidades educativas (lesco, braylle, etc) o recursos de apoyo.

Planificación errónea

No es nada funcional para un docente que le faciliten una lista de estudiantes con necesidades educativas especiales, es irrespetuoso que además se le imponga cómo se le debe aplicar y cuales mecanismos o metodologías se le van a implementar, todo esto siguiendo los lineamientos que un agente externo con un machote pre-establecido da o que el comité de adecuaciones define.

Solución planteada

1. Toda la comunidad educativa debe estar clara de que el docente en el área específica es el responsable de dictaminar con argumentaciones válidas si un estudiante requiere o no de adecuación curricular, para ello podrá, si así lo amerita el caso, solicitar el análisis de un experto que le permita ayudarse en su decisión final.

2. El comité de adecuaciones curriculares de la institución en conjunto con cada educador establecerá las políticas a seguir con cada estudiante que requiera de una adecuación.

Tiempo insuficiente

El docente no cuenta con el tiempo necesario para atender la gran cantidad de estudiantes que solicitan adecuaciones curriculares significativas.

Solución planteada

1. Promover la participación de estudiantes de las carreras de matemática, enseñanza especial , psicología, etc, en trabajos comunales, programas de extensión o servicio social para que den apoyo a las instituciones aportando sus conocimientos y trabajo con los estudiantes que requieren de adecuaciones curriculares.

2. Hacer cumplir la ley 7600 en lo referente al número máximo de estudiantes por grupo.

3. Asignar a cada docente que tenga estudiantes con adecuación curricular una o dos lecciones para la atención de estos.

Un recurso mal usado

Muchos padres de familia interpretan equivocadamente la figura de la adecuación curricular.

Solución planteada

1. Concienciar y educar a los padres de familia y encargados sobre el significado real de las adecuaciones curriculares, condicionándolos a asistir a talleres de formación.

2. Los padres de familia o encargados de los estudiantes que tengan adecuación curricular deben comprometerse a dar seguimiento en sus casas a los trabajos que se les asignen a sus hijos así como fijar y llevar a la práctica horarios de estudio y otros consejos que el comité de adecuación curricular les asigne.

3. Mayor y mejor control tanto al otorgarle al estudiante esta condición, como al momento de la clasificación de la misma.

Tema de análisis 8

PLAN PARA EL MEJOR APROVECHAMIENTO DE LOS 200 DÍAS LECTIVOS

Coordinador: Lic. Leonel Chaves Salas (UNA)

Problemas y soluciones planteados por el grupo de análisis:

Falta de interés o compromiso

Poca asistencia por parte de los estudiantes a los colegios para el cumplimiento de los 200 días.

Solución planteada

1. Mejorar la programación de las actividades como Pruebas Nacionales, evaluaciones etcétera, para lograr el cumplimiento concreto de los 200 días.
2. Mayor información y motivación para estudiantes y profesores sobre el "Plan 200". Se trata de un plan para mejorar la educación que reciben nuestros estudiantes y no de un mero formalismo.
3. Definir y aplicar mecanismos de control de asistencia para alumnos y profesores.

Planificación no apropiada del Plan 200

Falta de planificación integral del Plan 200, con una deficiente información y poca coordinación del MEP hacia cada institución educativa.

Solución planteada

1. Mayor coordinación referente al plan de aprovechamiento de los 200 días entre MEP - Direcciones Regionales - Instituciones Educativas - Entes encargados de las capacitaciones.
2. Abrir espacios efectivos de evaluación del proceso, de modo que haya una retroalimentación para mejorar en los años siguientes.
3. Crear una comisión, formada por representantes de todos los agentes involucrados, encargada de coordinar y evaluar el plan.

Planificación no apropiada en general

Mala planificación de las diferentes actividades distribuidas durante todo el curso lectivo: Inicio y final del curso lectivo, Pruebas Nacionales, capacitaciones y actividades del Plan 200.

Solución planteada

1. A nivel macro: Creación de una comisión de enlace que confeccione y de seguimiento al calendario escolar. Se pretende que este calendario contenga solamente los elementos indispensables (inicio y final del curso lectivo, Pruebas Nacionales)
2. A nivel meso: Cada institución educativa adapte sus actividades de acuerdo al plan macro, y acorde con su dinámica interna. Esto porque no todas las instituciones educativas tienen el mismo funcionamiento, por razones de tamaño, ubicación geográfica, tipo de población estudiantil que atiende, entre otras; por lo que se debe dar libertad para una planificación anual institucional.
3. A nivel micro: Planificación por departamento y por nivel, en donde se le dé seguimiento (cumplimiento) real durante el período lectivo. De acuerdo a la planificación institucional, se programen actividades por departamento y por nivel, que se adapten a las necesidades de la población estudiantil y docente.

Tema de análisis 9

TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN

Coordinadores: Dr. Gerardo Meza Cascante (ITCR)
Bach. Ivonne Sánchez (UNED)

Problemas planteados por el grupo de análisis:

Algunos de los problemas puntualizados por los participantes fueron:

- A nivel de Costa Rica y en educación se aplican tecnologías que en otros países ya están actualizadas o mejoradas mientras que aquí se continua con tecnologías obsoletas.

- No existe suficientes recursos tecnológicos (Internet, computadoras, proyectores) para poder utilizarlos en la enseñanza o la mayoría están dañados debido a los recursos muy limitados
- Falta conocimiento sobre el uso de herramientas tecnológicas que se pueden utilizar en las aulas de instituciones con muchas carencias,
- Resistencia al cambio, presente en los docentes, estudiantes o parte administrativa de la institución. Algunos no saben utilizar tecnología, otros saben pero no la utilizan y continúan con la misma receta de siempre
- En las universidades existen muchos recursos tecnológicos que facilitan el aprendizaje de la matemática, por ejemplo foros, cursos en línea, consultas vía Internet, etc.
- Uso inadecuado de la calculadora. Uno de los grandes problemas que presentan en secundaria es el uso inadecuado de la calculadora por parte del estudiante tratando de evitar procesos indispensables como las multiplicaciones o bien determinar los ceros de los polinomios

Actualización, acceso y conectividad

A pesar de existir un discurso político intenso respecto al uso de las tecnologías de información en educación la situación real refleja situaciones relacionadas con equipamiento y acceso que es prioritario resolver

Solución planteada

1. Planificar con los encargados la parte de disponibilidad y distribución de equipos

2. Realizar realimentaciones continuas

3. Dar capacitación a profesores

4. Crear convenios con gobierno, empresas privadas y otros para obtener fondos necesarios y así poder crear un proyecto semilla para equipamiento de laboratorios.

Desarrollo de capacidades

Existen deficiencias importantes en el uso de la tecnología así como percepciones incompletas o incorrectas sobre la misma y su potencial

Solución planteada

Sensibilización sobre uso de recursos computacionales como apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje, mediante acciones como:

1. Fomentar la autocapacitación

2. Llevar al laboratorio metodologías apropiadas

3. Poner en práctica y dar seguimiento a las capacitaciones recibidas.

4. La tecnología se impondrá entre estudiantes y profesores cuando ellos estén convencidos de bondades del uso de la misma.

5. Hacer evaluaciones de las capacitaciones recibidas

6. Mirar la tecnología como un medio y no como un fin en sí misma.

Uso adecuado de los recursos tecnológicos

Dimensionar apropiadamente el uso de la tecnología, cuándo, dónde, cómo, etc.

Solución planteada

1. Crear conciencia en el profesor de para qué (cuál es el objetivo) de insertar el uso de la tecnología en el aula.

2. Coordinación adecuada entre los docentes del área de computación

Tema de análisis 10

PRUEBAS NACIONALES

Coordinadora: Lic Josefa Guzmán León (ITCR, jubilada)

El objetivo de las pruebas se ha desvirtuado

El objetivo de la Prueba de Bachillerato se ha desvirtuado, puesto que ésta se ha convertido en un fin de la educación secundaria, cuando debería ser un instrumento de control, que permita diagnosticar la calidad del aprendizaje por parte de los estudiantes.

Solución Planteada

Se debe replantear el propósito de la prueba y los parámetros de medición, de manera que dicha prueba permita diagnosticar el nivel cognitivo de los estudiantes, las bases matemáticas, sus necesidades, limitantes, ventajas, entre otros. Y que permita fomentar en ellos la inferencia lógica, el razonamiento y sobre todo el deseo de superación.

La prueba tiene efectos colaterales peligrosos

La aplicación de la prueba de Bachillerato limita la cantidad de objetivos y contenidos vistos en clase, pues se prepara a los alumnos pensando en este examen, el cual consta de ítems de selección única, cuando en realidad son de desarrollo, lo cual conlleva más tiempo del establecido.

Las Pruebas Nacionales hacen que las metodologías utilizadas en clase sean limitadas debido al tiempo disponioble. Lo cual muestra una clase repetitiva sin cambio alguno y el alumno pierde el interés hacia la materia.

Solución planteada

1. Trasladar las Pruebas Nacionales a fin de año o por lo menos a noviembre y así lograr un poco más de tiempo para cambiar un poco la metodología y abarcar más temas.

2. Una solución más de fondo es eliminar por completo estas pruebas que son a nivel nacional, pues limitan a muchas personas a continuar con estudios superiores. Estas pruebas deben mantenerse como instrumentos para la evaluación del Sistema Educativo.

Aspectos de formación y actualización de docentes

Falta de preparación académica y capacitación de los docentes que preparan a los estudiantes para enfrentarse a las Pruebas Nacionales, provocando por esta razón inseguridad en los educandos; además de la desmotivación y desinterés. Incluyendo, así mismo, a todos los demás docentes que preparan a los futuros profesores de matemática en secundaria.

Solución planteada

1. Búsqueda de nuevas estrategias pedagógicas a través de congresos y capacitaciones por parte de los docentes, con el propósito de obtener métodos novedosos que le permitan motivar, captar la atención de los estudiantes y así mismo preocuparse por actualizar sus conocimientos; lo cual enseña al estudiante a reflexionar y ser creativo.

2. Romper el temor de aplicar técnicas novedosas que alejen la idea de una clase magistral, ejecutando talleres que permitan aplicación de juegos, construcción de conocimientos, elaboración de guías didácticas en donde se complementen los tres fines de la educación matemática, así como dramatizaciones que involucren la diversidad de estudiantes, afiancen los conocimientos obtenidos y colaboren con el fortalecimiento cultural de los mismos.

Igualdad de oportunidades

El problema de igualdad con respecto a las Pruebas Nacionales es muy extenso, no existe conciencia en Control de Calidad a la hora de hacer las pruebas ya que no toman en cuenta las necesidades educativas tanto de estudiantes como de los educadores, la falta de tecnología en muchos lugares, la unificación inapropiada de los modelos de educación como: CINDEA, Nuevas Oportunidades, Educación para Adultos, Colegios Diurnos, Nocturnos y Técnicos.

Solución planteada

El Ministerio de Educación Pública debe tener profesionales que investiguen las necesidades educativas de las diferentes comunidades, tomar en cuenta las modalidades educativas para la elaboración de las Pruebas Nacionales y sobre todo la falta de integración entre docentes y el Ministerio de Educación Pública.

REFLEXIONES FINALES.

Pensar que la añeja problemática de la enseñanza matemática en Costa Rica, puede resolverse con ajustes menores en el corto o mediano plazo es ser muy optimista, pero renunciar a un proceso incansable en la búsqueda de alternativas, a la discusión productiva y sustantiva y al análisis serio de la realidad cotidiana del educador en su contexto de aula es irresponsable. En este documento hemos recogido los puntos de vista de un grupo importante de educadores costarricenses que han querido compartirlos con la esperanza de que su voz sea escuchada. La mayor parte de los aportes resultan ya conocidos y de alguna manera afianzan la necesidad de que sean tomados en cuenta por quienes planifican y dirigen la educación en nuestro País. En cada uno de los apartados se ha respetado la propuesta de los participantes del grupo sin importar lo extremas, visionarias o simples que puedan parecer.

Estas reflexiones son el punto de vista que queda después de haber leído cada una de las partes de este informe y es absolutamente natural que algunas de las mismas estén influenciadas por las experiencias del redactor.

Llama la atención que a pesar de la separación que se realizó de los grupos de análisis existen temas o problemas que se tornan recurrentes y que es importante resaltar. Existe una constante preocupación por la capacitación, todos los grupos de una u otra manera resaltan la importancia de generar espacios para la capacitación y que esta capacitación debe ser oportuna. No solo en la temática, la que debe responder a un análisis apropiado de las necesidades más apremiantes de los y las educadoras, por ejemplo en tecnologías, metodologías. También, debe ser adecuada en la planificación y programación de manera que existan condiciones mínimas que permitan al docente aprovechar plenamente las mismas. Se insiste en este punto en la pertinencia de una despolitización de las capacitaciones y una mayor integración de las universidades y organizaciones diferentes al MEP.

Un problema también recurrente es la necesidad de buscar que el MEP se convierta en un ente flexible, comprometido y dinamizador de la calidad a partir de un modelo de gestión basado en proveer condiciones que garanticen la calidad, salarios, infraestructura, estabilidad, programación oportuna de actividades, entre otras. La calidad depende de muchos factores y empieza por el desarrollo y consolidación de la cultura de la calidad que debe surgir del ministerio mismo e involucrar a los estudiantes los docentes, los administrativos y la familia. Esencial pareciera la dignificación integral del docente reflejada en su salario, en el reconocimiento profesional que recibe, ésta debe manifestarse en apoyo concreto, en mejorar su imagen pública, en el respeto de la tarea docente erradicando conceptos erróneos, tal como, que cualquiera puede ser profesor en educación media.

Temas como Pruebas Nacionales y Plan de los doscientos días, lejos de promover la calidad se desvían de su origen, a veces por cuestiones administrativas otras por la falta de claridad y voluntad política, contribuyendo a generar inconformidad y a

deteriorar la imagen del docente. Estos dos ejemplos en particular, que deberían ser pilares para la búsqueda de la calidad en la educación han venido perdiendo la credibilidad producto de la mala administración, la politización y de la falta de compromiso, en muchos casos, de los estudiantes, la familia y docentes.

Finalmente, el docente en general, cree en la calidad y busca por sus medios lograrla. Muchas veces contra la corriente, lucha con el desinterés de autoridades y otros colegas, contra las condiciones adversas que surgen, contra conceptos cada vez más arraigados como la búsqueda de promover sin aprender y sin complicarse la vida y contra la presión social en la que pareciera prevalecer el promover sobre el aprender.

Es importante reconocer y atender algunas de las posibles debilidades en el docente tales como:

- Formación erosionada por el tiempo
- Falta de conocimiento en algunos temas centrales relacionados con su quehacer.
- Desinterés, producto del cansancio de la lucha cotidiana, o de sus propias debilidades.

Además es fundamental no obviar y atender reclamos legítimos como :

- Mayor reconocimiento a su trabajo
- Más apoyo
- Mejor capacitación.

Estos son elementos prioritarios para generar y fortalecer la cultura de la calidad. La educación es un asunto de todos y no de un pequeño grupo de docentes por lo que, la búsqueda de la necesaria calidad que debe ofrecer la educación nos involucra a todos.

FORO DE DE REFLEXIÓN:

CALIDAD EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Viernes 7 de diciembre

Objetivo:
Promover un espacio para la reflexión y discusión de temas relacionados con la calidad de la enseñanza de la matemática en el contexto costarricense.

Justificación
Tradicionalmente el CIEMAC se ha presentado como un escenario para que investigadores e investigadoras presenten a los y las participantes sus puntos de vista sobre la enseñanza de la matemática. El CIEMAC ha permitido ofrecer capacitación en el uso de software para educación y ha sido una ventana desde la cual se han presentado las más variadas posiciones sobre el tema de la enseñanza de la matemática. Como complemento esta tradición, en el Quinto CIEMAC hemos incorporado una actividad participativa desde la cual los y las participantes puedan también ser partícipes en la discusión y esclarecimiento de la problemática de la enseñanza de la matemática y puedan tener un foro desde el cual presentar y defender algunos de sus puntos de vista sobre el tema.

La jornada de reflexión sobre "Calidad en la Educación Matemática" es ante todo una espacio para discutir, ordenar y expresar puntos de vista de los participantes sobre este tema: una invitación para que como grupo identificado por un fin y por metas comunes pensemos y expresemos nuestras posiciones, buscando con ello contribuir con las transformaciones que un modelo de educación de calidad requiere.

Metodología general de la actividad.

La actividad se iniciará con una conferencia motivadora sobre le tema, impartida por investigadores previamente seleccionados. Esta actividad ocupará entre las 8 AM y las 9 AM. Después del receso los participantes se organizarán en grupos focales de discusión en temas seleccionados previamente. Esta dinámica les llevará a establecer tres problemas centrales en la temática correspondiente al grupo y una estrategia de solución, lo mas realista posible, para cada uno de los problemas identificados. Estas actividades serán coordinadas por un docente previamente elegido cuya tarea central será la de moderar la sesión de trabajo y transmitir los acuerdos a la coordinación de la actividad.

Metodología de Trabajo en Grupo[1].

- Individualmente cada participante identifica tres problemas y tres soluciones, cada uno es escrito en una tarjeta. Un problema por tarjeta (tarjeta de media hoja de 8,5 por 11 pulgadas –carta- horizontal escritas en letra imprenta con pilot negro) (10 minutos).

[1] Gracias a los investigadores Wendy Jiménez y Marcelo Gaete del Departamento de Estudios e Investigación Educativa del MEP por la propuesta de trabajo.

- El facilitador le solicita a un participante que lea sus tres problemas, pegando las tarjetas en la parte inferior de la pizarra y en la superior la solución. El facilitador le pide al resto del grupo que observe si los problemas expuestos en la pizarra coinciden con los que identificaron, en ese caso los agreguen en la columna del problema correspondiente hacia arriba. Luego se pide a los y las participantes, que si alguno tiene un problema distinto a los expuestos en la pizarra sea incorporado a la lista de problemas colocándolo al lado del último problema identificado. Se conforma así un histograma grupal. (20 minutos). Luego se les pide que si hay tarjetas con problemas que corresponden con el nuevo problema identificado se coloque en la misma columna, de abajo para arriba. Las soluciones identificadas para cada problema se ubican arriba de la columna en donde se ubicaron cada uno de los problemas y el respectivo numero de tarjetas correspondientes.

- En sub- grupos escogerán tres de los problemas con mayor frecuencia, máximo cuatro–y conjunto de tarjetas que lo identifican- para analizar las soluciones y agregar nuevas si fuera necesario. (30)

- Cada sub- grupo elige un relator, que expone la solución al problema analizado, iniciándose una plenaria. (30)

- Una vez finalizada esta plenaria cada subgrupo, incorporará si fuera necesario los aportes del plenario y entregará los problemas y las propuestas de soluciones respectivas. En todo caso los grupos deben velar por la viabilidad de las propuestas de solución que propongan (30)