CIEMAC

Congreso Internacional
sobre la Enseñanza de la Matemática
Asistida por Computadora

TEC | Tecnológico de Costa Rica

MEMORIAS

IV Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora

Cartago, Costa Rica

2005

Instituto Tecnológico de Costa Rica. Escuela de Matemática. Teléfono: (506) 2550 2225
www.tec.ac.cr/congresociemac

TALLERES

APLICACIÓN DEL PROGRAMA WINPLOT A LA ENSEÑANZA DE ALGUNOS TÓPICOS DE TRIGONOMETRÍA Y CÁLCULO DIFERENCIAL.

Alexander Hernández Quirós[1]

Federico Mora Mora

Resumen:

El taller pretende mostrar a los participantes alternativas para la visualización de algunas características particulares de las funciones trigonométricas (periodicidad y amplitud) y de importantes nociones del calculo diferencial como el teorema del valor medio (y el teorema de Rolle), puntos máximos y mínimos (relativos y absolutos) mediante el uso del programa WINPLOT (software gratuito para la graficación).

Estos temas serán abordados mediante el trabajo con un conjunto de guías para los participantes, con las cuales se desarrollarán las diversas posibilidades que ofrece el programa, enriquecidas con los aportes propios.

Al finalizar el taller se pretende que los participantes cuenten con una herramienta concreta para la enseñanza de los temas trabajados y se motiven para la elaboración de nuevas alternativas de enseñanza utilizando la tecnología.

Cronograma:

Se trabajará en un laboratorio de computo, los participantes se organizarán en parejas para la el desarrollo de las actividades.

Primer día

Se presentarán dos tipos de guías de trabajo, las primeras para la familiarización de los participantes con el software. Luego se trabajará con guías especificas con respecto al tema de trigonometría.

Segundo día

Continuará el trabajo desarrollando el material referente a cálculo diferencial, finalizando el taller con una plenaria para vislumbrar nuevas aplicaciones del software a la enseñanza de la matemática.

---

[1] Universidad Nacional, Costa Rica, alheqs@costarricense.cr, fmora@una.ac.cr

APRENDER SOBRE FUNCIONES MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE LOS DATOS

Tim Erickson

Resumen

Las funciones son más que simplemente x *y* y*(*x*). En este taller interactivo de computadora veremos cómo los estudiantes pueden usar datos reales para ayudarse a entender las funciones. Los temas incluyen funciones lineales, cuadráticas, inversas, exponenciales y trigonométricas, y leyes de potencias.*

Ajustaremos funciones a datos sin *usan regresión no lineal, usando parámetros variables para cambiar las funciones dinámicamente. Veremos cómo esta estrategia puede ayudar a los estudiantes a entender mejor las funciones y ayudarles conforme buscan significados en la matemática.*

Usaremos el programa Fathom en este taller, aunque usted puede usar estos principios con cualquier buen paquete de análisis de datos. No es necesaria ninguna experiencia.

TALLER CLIC

Profesora Alejandra Jiménez Romero. (ajimenez@itcr.ac.cr)
Escuela de Matemática, ITCR
Costa Rica

TEC
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Motivación:

"Las nuevas técnicas de comunicación ayudarán a crear mayor
comprensión de los acontecimientos,
incrementando el intercambio de ideas.
Amen la verdad dedicándose cuidadosamente
a la labor de su perfeccionamiento."

S.S.J.P.II

Introducción:

Clic es un programa libre que permite realizar diferentes tipos de actividades educativas: rompecabezas, asociaciones, sopas de letras, crucigramas o actividades de texto.

Para enriquecer estas actividades es necesario crear imágenes y sonidos propios a cada actividad, tal que respondan completamente a cada objetivo propuesto, para esto el programa Macromedia FireWorks MX como ejemplo para la edición de imágenes y el programa XXX como editor de sonidos serán de gran ayuda en este taller.

Requisitos:

Conocimiento básico de ambiente XXX y manejo de archivos, en concreto conviene estar familiarizado con operaciones como crear carpetas, copiar archivos, cambiar los nombres de archivos y carpetas, es conveniente además haber adquirido conocimientos básicos en la creación y tratamiento de imágenes.

Objetivos del taller:

- Conocer el entorno Clic 3.0.
- Conocer el entorno de programas especiales para la creación y manejo de imágenes y sonido (Macromedia FireWorks MX y XXXX)
- Adquirir conocimientos básicos en la creación y tratamiento de imágenes y sonido digital.
- Crear materiales didácticos en las diversas modalidades que ofrece el programa.
- Integrar recursos multimedia en materiales didácticos.

Estructura del curso:

El curso consta de tres sesiones, de tres horas de duración cada una. Cada sesión tendrá un módulo de trabajo el cual consta de:

- Una guía de trabajo donde se explican los contenidos básicos y actividades a realizar.
- Un conjunto de prácticas sugeridas.

Bibliografía / Sitios de consulta:

- Busquets Burguera, Francesc. Curso de creación de materiales educativos multimedia con Clic 3.0. Setiembre 1999.

- http://www.xtec.es/recursos/clic

  Éste es el nombre que recibe el espacio de Internet dedicado a recopilar todo tipo de información y materiales relacionados con el programa Clic. Allí encontrará las últimas versiones del programa, documentación, utilidades, una página con las preguntas más frecuentes y miles de actividades que han sido creadas por los usuarios del programa. Las actividades se organizan en tres índices: por áreas temáticas, por niveles educativos y por idiomas.

" ¿CÓMO ELABORAR PLANES INDIVIDUALES DE MATEMÁTICA PARA ALUMNOS CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES?"

María de los Ángeles Carpio Brenes[1]

DESCRIPCIÓN DEL TALLER

El taller parte del concepto de Necesidades Educativas Especiales para introducir al profesorado en la determinación de la competencia curricular de los alumnos en el área de la matemática; y así identificar el tipo de adecuación curricular y planeamiento individualizado correspondientes.

OBJETIVO GENERAL.

El propósito fundamental de este taller es brindar al docente elementos teórico-prácticos que le permitan formular el perfil y la programación individual para la atención de las adecuaciones curriculares de los alumnos que presentan necesidades educativas especiales en el área de la matemática.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Como resultado de la participación en este taller, los y las docentes lograrán:

1. Identificar y comprender las necesidades educativas inherentes al proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.
2. Analizar las competencias curriculares de los alumnos(as) en el área de la matemática para determinar el tipo de adecuación curricular correspondiente.
3. Elaborar un perfil de competencia curricular en matemática para un alumno(a) con necesidades educativas especiales.
4. Elaborar un plan individual de matemática para la atención de un alumno(a) con adecuación curricular significativa.

CONTENIDOS BÁSICOS.

1. Necesidades educativas especiales: concepto, tipos y estrategias para su detección.
2. Adecuación curricular: concepto, tipo y estrategias para su identificación.
3. Perfil de competencia curricular.
4. Planeamiento individualizado.

METODOLOGÍA.

El taller es de naturaleza teórico-práctico, de una duración de 2 horas, por lo que, dentro de un enfoque participativo, se facilitará la construcción del conocimiento mediante la discusión de los temas relacionados con la atención de las necesidades educativas especiales, en el contexto de los propios participantes, y del abordaje teórico de la facilitadora. En el aspecto práctico, los docentes irán elaborando, en grupos, un "expediente escolar" conforme se desarrollan los temas

[1] Docente de Educación Especial, Universidad de Costa Rica

del taller, que dará como resultado el perfil de competencia curricular de matemática y el planeamiento individual correspondiente de un estudiante con necesidades educativas especiales al que se le aplica adecuación curricular significativa.

CREACIÓN DE APLICACIONES INTERACTIVAS CON DESCARTES 3D

Cristhian Páez Páez[1]

Resumen

Descartes es un proyecto promovido y anunciado por el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte de España. El principal objetivo de dicho proyecto es la innovación en Educación, donde se utilicen las ventajas de la computadora e Internet para ofrecer, tanto a los profesores, a las profesoras, a los estudiantes y a las estudiantes formas diferentes de enfocar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, promoviendo metodologías de trabajo más activas, creativas, participativas, motivadoras y personalizadas.

Las aplicaciones Descartes pueden tener aspectos diferentes, ya que los profesores y las profesoras pueden crear aplicaciones nuevas, o bien, modificar aplicaciones ya existentes, con la ventaja de poder accederlas desde Internet, desde el disco duro de la computadora o desde un CD. Específicamente, Descartes es un applet creado en JAVA con las características de ser interactivo o dinámico (no se limita a mostrar una sola imagen), ser configurable (permite crear aplicaciones con aspectos diversos) y estar perfectamente documentado (facilita su aprendizaje para el diseño de nuevas páginas de trabajo).

Uno de los objetivos que se busca alcanzar con el desarrollo de este taller, es que los y las asistentes al mismo, adquieran conocimientos para la modificación y creación de aplicaciones didácticas con el uso de Descartes. Dichas aplicaciones se enmarcan dentro de un contexto simple: en Descartes se define un sistema de referencia cartesiano interactivo, en el que se pueden configurar y emplear todos los elementos habituales (origen, ejes, cuadrantes, cuadrícula, puntos, coordenadas, vectores, etc). Permite representar curvas y gráficas dadas por sus ecuaciones, tanto en forma explícita como implícita; particularmente, Descartes permite representar las gráficas de gran número de funciones que, habitualmente, se utilizan en la enseñanza y el aprendizaje en Educación secundaria y superior.

[1] Escuela de Matemática, ITCR, Costa Rica

Durante el desarrollo del taller los y las participantes estarán trabajando, directamente, con los elementos que intervienen en la definición de las configuraciones, ya que dichos elementos pueden ser parámetros modificables por el usuario o la usuaria. Asimismo, se mostrarán otras ventajas y otros usos que se pueden aprovechar con Descartes; por ejemplo, esta aplicación dispone, también, de una poderosa herramienta de cálculo que permite evaluar gran número de expresiones matemáticas; además, pueden ser representados elementos geométricos elementales: puntos, segmentos, arcos, etc, lo que permite hacer numerosas representaciones geométricas.

Existen diversas versiones de Descartes; el taller estará dirigido al aprendizaje de Descartes 3D, versión que permite incorporar utilidades relacionadas con: geometría tridimensional, macros, espacios múltiples en la “escena” (pantalla de trabajo), editor de fórmulas, etc.

MATERIAL DIDÁCTICO EN LÍNEA

Walter Mora F. wmora2@yahoo.com.mx
Geovanni Figueroa M. gfigueroam@yahoo.com.mx
Escuela de Matemática, ITCR
Costa Rica

Nivel educativo: Secundaria y Secundaria

Categoría: Ponencia

Resumen:

Hace poco más de un año nace este proyecto con el objetivo de desarrollar versiones digitales y en línea de nuestros principales cursos: cálculo diferencial e integral, cálculo superior, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales, algebra lineal y probabilidad, pero enriquecidos con actividades interactivas, con las cuales el estudiante pueda explorar, visualizar y comprender mejor algunos conceptos. A la fecha el proyecto esta en ejecución, pero con avances significativos en el desarrollo de algunos de los cursos.

El objetivo de esta comunicación es mostrar el material desarrollado para los cursos: matemática general, métodos numéricos, cálculo diferencial e integral, algebra lineal y probabilidad. Además de explorar el material teórico, se mostrarán algunas de las actividades interactivas que se usan para la exploración de algunos conceptos. También, se hará una descripción de las herramientas de software usadas (LaTeX, LaTeX2HTML, JavaScript, HTML, Mathematica, Java, LiveGraphics3D y JavaView) en la implementación y desarrollo de los cursos, así como de algunas consideraciones sobre diseño Web.

Palabras claves:

Cursos en línea, páginas Web, software, actividades interactivas, matemática interactiva.

Sitio Web:

http://www.cidse.itcr.ac.cr/

Bibliografía

- Castro, E. 2000. HTML 4. 4ª ed. Madrid, EP, Prentice Hall, 360 p.
- Lamport, L. 1994. A Document Preparation System Latex. 2ª e, California, US, Addison-Wesley, 272 p.
- Martin, Kraus. LiveGraphics3D. Consultada 10 ene. 2005. Disponible en http://wwwvis.informatik.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/
- Ruskeepää, H. 1999. Mathematica Navigator. San Diego, US, Academic Press. 848 p.

DESARROLLANDO TÉCNICAS Y RUTINAS DE PROGRAMACIÓN EN EL GEÓMETRA.

Juan José Fallas Monge[1]

Jeffry Chavarría Molina.

Resumen

Frecuentemente al Geómetra se le relaciona con construcciones geométricas, sin embargo, existen muchas otras posibilidades y aplicaciones más avanzadas, que se pueden aprovechar, para el desarrollo de algunos otros contenidos matemáticos, como el caso de: estudio de funciones (funciones a trozos, régimen de variación, ámbito), recursividad, elementos de programación (comportamientos condicionados y aleatoriedad), entre otras.

El objetivo de este taller, es mostrar y explotar esta otra faceta de este interesante software, que no siempre es conocida por sus usuarios.

I Sesión:

Análisis de funciones

Actividad 1

Objetivo: Construir una aplicación que dado el criterio de una función grafique en colores diferentes, la parte donde la función es positiva y donde la función es negativa.

Conocimientos previos:

- Dado el criterio de una función, construir su gráfica.
- **Función signo:** El Geómetra cuenta con la función signo, que se denota $\operatorname{sgn}(x)$, y se puede utilizar para determinar el signo de una expresión, y viene definida por:

  $\operatorname{sgn}: IR \rightarrow \{-1,0,1\}$

  y además: $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & si\, x>0\\ 0 & si\, x=0\\ -1 & si\, x<0\end{cases}$

  Por ejemplo: $\operatorname{sgn}(-3)=-1$, $\operatorname{sgn}(5)=1$.

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, jfallas@itcr.ac.cr, jchavarria@itcr.ac.cr

Guía para la actividad:

1. Abra una hoja de trabajo y grafique la función $f(x)=x^3-3x$, minimícela.
2. Abra una hoja nueva de trabajo.
3. Muestre la cuadrícula, para ello seleccione **Gráfica | mostrar cuadrícula**
4. Defina la función $f(x)=x^3-3x$, sin graficarla, para ello seleccione **Graficar | Nueva función…**
5. Analice en papel, qué comportamiento tiene la expresión $\dfrac{-2\cdot f(x)}{\operatorname{sgn}(f(x))-1}$, en los casos que $f(x)>0$, $f(x)<0$ y $f(x)=0$.
6. Defina una nueva función $g(x)=\dfrac{-2\cdot f(x)}{\operatorname{sgn}(f(x))-1}$ y grafíquela. Cambie el estilo de línea a grueso y escoja un nuevo color para esa gráfica. Compare el resultado obtenido, con la gráfica de la función realizada al inicio, en la otra hoja de trabajo.
7. Defina una nueva función $h(x)=\dfrac{2\cdot f(x)}{\operatorname{sgn}(f(x))+1}$ y grafíquela. Escoja un nuevo color para esta gráfica.
8. Oculte los criterios de las funciones g y h.
9. Por último cambie el criterio de la función f. Esto se logra dando doble clic sobre el criterio y reeditando la función. Observe que para todas se cumple el resultado deseado. En particular pruebe con: $f(x)=sen(x)$, $f(x)=\tan(x)$, $f(x)=|x|$, $f(x)=-x^2+4$.

Comentario:

Note que cuando $f(x)$ es positiva la función $g(x)=\dfrac{-2\cdot f(x)}{\operatorname{sgn}(f(x))-1}$ se indefine. El Géometra en casos donde la función no esté definida no genera ningún error, sino simplemente no se realiza ningún trazo en el intervalo de indefinición.

Actividad 2

Objetivo: Construir una aplicación que dado el criterio de una función grafique en colores diferentes, la parte donde la función es creciente y donde la función es decreciente.

Conocimientos previos:

- Al igual que la actividad anterior, se requiere conocimientos sobre graficación de funciones y la función signo.
- Criterio de la primera derivada y cálculo de la misma en el Géometra.

  Recordemos que:

  Dada una función f derivable en un intervalo $I = \left]a,b\right[$

  I. f es creciente en I si y sólo si $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$.

  II. f es decreciente en I si y sólo si $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$.

  Es decir, para determinar la monotonía de una función, basta analizar el signo de su primera derivada.

Guía para la actividad:

1. Abra una hoja nueva de trabajo.
2. Muestre la cuadrícula. **Gráficar | mostrar cuadrícula**.
3. Defina la función $f(x) = x^5 - 4x$ sin graficarla, haciendo **Graficar | Nueva función**.
4. Calcule la derivada de la función anterior, para esto marque el criterio de la función f y seleccione **Graficar | Derivada**
5. Defina una nueva función $g(x) = \dfrac{2 \cdot f(x)}{\operatorname{sgn}(f'(x)) + 1}$ y grafíquela. Cambie el estilo de línea a grueso y escoja un nuevo color para esa gráfica.
6. Defina una nueva función $h(x) = \dfrac{-2 \cdot f(x)}{\operatorname{sgn}(f'(x)) - 1}$ y grafíquela. Escoja un nuevo color.
7. Oculte las funciones $g(x)$ y $h(x)$.
8. Por último cambie el criterio de la función f. En particular pruebe con: $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sec(x)$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Reto del día

Objetivo: Graficar una función a trozos utilizando el Geómetra.

Descripción: Implemente una aplicación en el Geómetra, que dadas tres funciones f, g y h, y dos parámetros t_1 y t_2, permita graficar la función a trozos:

$$m(x) = \begin{cases} f(x) & si \; x < t_1 \\ g(x) & si \; t_1 < x < t_2 \\ h(x) & si \; x > t_2 \end{cases}$$

Sugerencia: Utilice la técnica empleada en las actividades anteriores, para indefinir la o las funciones en los intervalos donde no nos interesa que se realiza el trazo de alguna de las gráficas.

II y III Sesión:

Procesos iterativos en el Geómetra

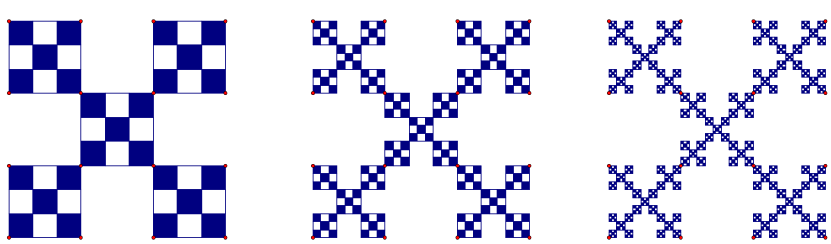
Comúnmente en la Matemática se realizan muchos procesos donde se repite un mismo patrón, por ejemplo, en secundaria, a la hora de justificar que el conjunto de los números racionales es un conjunto denso, decimos que "dados dos números racionales, siempre es posible encontrar otro racional entre ellos". A estos procesos, se les denomina **procesos iterativos.**

Gráficamente uno de los procesos iterativos más comunes lo constituyen los fractales. La idea básica de un fractal, es una figura que exhibe recursividad o autosimilitud: cuando observamos cualquier parte de ella, vemos el patrón original de la figura completa.

Por su parte las iteraciones numéricas, tienen muchas aplicaciones en la resolución de problemas en matemática. Nuestro objetivo es mostrar algunas de ellas, pero primero iniciemos con la construcción de un fractal.

Actividad 1

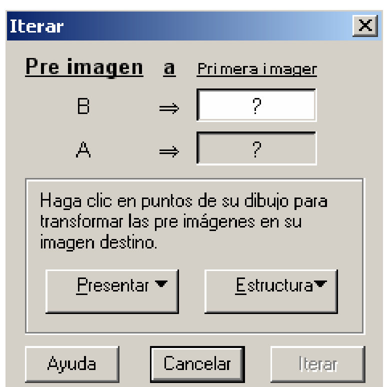
Construyamos el siguiente fractal:



Pasos:

1. Coloque dos puntos A y B, y construya el segmento $\overline{AB}$.
2. Con base en el segmento anterior, construya un cuadrado, en donde el segmento $\overline{AB}$ quede como lado de éste.
3. Triseque cada uno de los lados del cuadrado anterior, y trace segmentos paralelos a los lados, separando el cuadrado original en nueve cuadrados. **Comentario:**

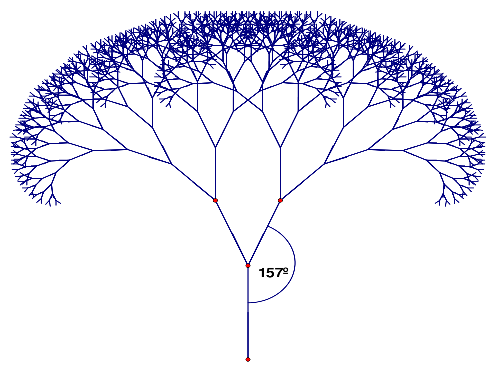
   Para trisecar los lados, calcule la medida del segmento $\overline{AB}$ y utilice la calculadora para determinar el valor de la tercera parte de dicha medida. Utilice los vértices del cuadrado y la medida anterior para construir círculos, y de ese modo trisecar el segmento.
4. Construya los puntos de intersección de los segmentos construidos en el paso anterior.
5. Construya los interiores de los cuadrados que se encuentran en las esquinas y en el centro del cuadrado original, cámbieles el color por alguno que prefiera.
6. Marque los puntos A y B, y vaya al menú **Transformar | Iterar...** Al hacer esto se



   mostrará el siguiente formulario: complételo con los puntos de una de las bases de los cuadrados más pequeños, siempre en la misma dirección en que fueron seleccionados. En el botón **Estructura.** del formulario anterior, seleccione **Agregar nueva transformación.** Llene los datos con los puntos de otro cuadrado. Repita el procedimiento anterior para todos los cuadrados de la figura. Finalmente seleccione en el botón **Presentar** la opción **sólo iteración final**. Presione **Iterar**.

7. arque la figura anterior y presione en el teclado + ó − para incrementar o disminuir el número de iteraciones.
8. Oculte todas las rectas iniciales, incluyendo los lados del cuadrado original, además oculte los interiores de los cuadrados.
9. Repita el paso 7. Ya tienes un fractal.

Reto: Construya el siguiente árbol en forma recursiva.



Actividad 2

Objetivo: Implementar el método de Newton, para aproximar una solución de una ecuación de la forma $f(x)=0$, dada una aproximación inicial.

Motivación:

En el caso de ecuaciones cuadráticas existe una fórmula bien conocida para encontrar las raíces. Para las ecuaciones de tercero y cuarto grado también existen fórmulas, aunque muy complejas (fórmulas de Cardano). El matemático francés Evariste Galois probó que es imposible hallar una fórmula general para las raíces de una ecuación de grado n (en términos de operaciones algebraicas sobre los coeficientes), para $n \geq 4$.

Podemos, utilizando algún método de iteración, particularmente en el Geómetra, encontrar una solución aproximada de una ecuación. Como la mayoría de buscadores numéricos de raíces lo hacen, utilizaremos el método de Newton, para generar esta aproximación.

Recordemos que:

El método de Newton empieza con una aproximación inicial x_0, la cual se obtiene por tanteo, o a partir de un bosquejo aproximado de la gráfica de la función, o bien realizando la gráfica de la función utilizando algún paquete de computadora, que en nuestro caso emplearemos el mismo Geómetra.

Luego se genera una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, de manera que la $n-ésima$ aproximación x_n, viene dada por:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

siempre y cuando $f'(x_{n-1}) \neq 0$.

Conocimientos previos:

Además de las ideas expuestas sobre el método de Newton, se requiere:

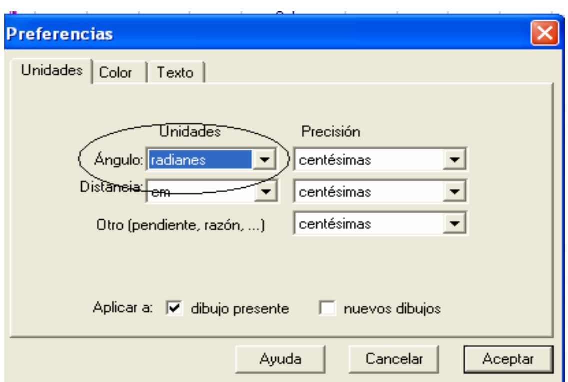
- dominar el cálculo de la derivada de una función en el Geómetra.
- nociones básicas de secuencias y series numéricas.

Guía para la actividad:

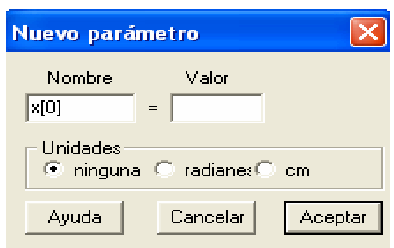
Encontraremos, utilizando el método de Newton, una solución de la ecuación $\cos(x) = x$, tomando en cuenta que este proceso es equivalente a encontrar un cero de la función $f(x) = \cos(x) - x$.

1. Defina y grafique en el Geómetra la función $f(x) = \cos(x) - x$, haciendo **Graficar | Graficar nueva función**…

Comentario: Tenga el cuidado de seleccionar cambiar las unidades de ángulos de grados a radianes. Lo puede hacer seleccionando **sí,** cuando el Geómetra lo pregunte o bien utilizando la opción **Editar|Preferencias…** para luego en la viñeta **unidades** seleccionar radianes, como se muestra en la siguiente figura:



2. Por inspección rápidamente podemos determinar que existe una solución en el intervalo $[0,2]$.
3. Oculte o borre la gráfica anterior, junto con el sistema de coordenadas.
4. Tome como aproximación inicial, para generar el método de Newton, un valor arbitrario en el intervalo anterior y defínalo como un nuevo parámetro, haciendo **Graficar | Nuevo parámetro**… llámelo x_0 y asígnele como valor, el que escogió anteriormente.



lo anterior con la intención de tener la facilidad de modificarlo posteriormente.

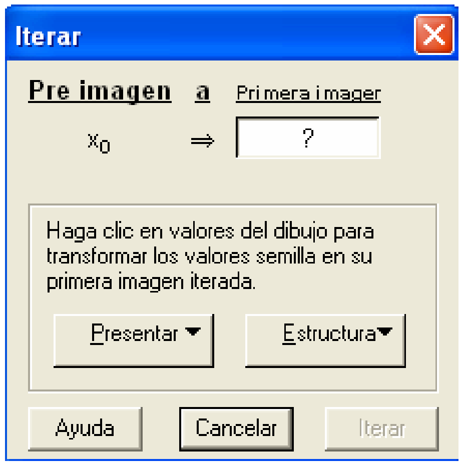
5. Calcule la derivada de la función f.
6. Antes de comenzar a realizar los cálculos, cambiemos la precisión, que por defecto el Geómetra viene en centésimas, a su máxima capacidad en cienmilésimas. Para realizarlo proceda de forma análoga al paso 1. En el formulario de preferencias cambie las tres opciones de precisión a cienmilésimas.
7. Calcularemos, utilizando la opción **Medir|Calcular…** el valor de la primera aproximación x_1, digitando, según el método de Newton:

$$x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Comentario:

Las demás iteraciones (cálculos de cada uno de las aproximaciones), el Geómetra las genera automáticamente, como se explica en el siguiente paso.

8. Seleccione el parámetro x_0 y proceda **Transformar|Iterar…** esto generará el formulario:



Ahora dé clic sobre la expresión $x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ y presione **Iterar.** El Geómetra despliega una tabla que contiene una columna con el número de iteración y otra columna con el valor de la iteración correspondiente.

Comentarios:

Para incrementar la cantidad de iteraciones generadas en la tabla, selecciónela y utilice la tecla de + para incrementar y la de – para disminuir.

- De modo que utilicemos mayor cantidad de iteraciones, los valores obtenidos en la tabla nos aproximan la raíz buscada. El número de iteraciones depende qué tan cerca se encuentre la aproximación inicial tomada, del valor real, pero en general el método de Newton converge muy rápidamente a la solución.
- Una desventaja clara del Geómetra para este tipo de aplicación, es que su nivel máximo de precisión es muy bajo, esto provoca que visualmente los valores se tiendan a estabilizar rápidamente y por lo tanto no nos permite realizar un análisis minucioso del comportamiento de las expansiones decimales de cada una de las aproximaciones.

9. Cambie el parámetro (condición inicial), tomando valores más cercanos y más alejados del valor real (inclusive fuera del intervalo $[0,2]$), y observe cómo varía la cantidad de iteraciones necesarias para precisar la solución.

Ejercicios:

- Encuentre todas las soluciones de la ecuación $e^x = x\,sen(x)$ en el intervalo $[-10,0]$
- Recordemos que la sucesión de Fibonacci, viene dada por:

$$\begin{cases} f_0 = f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$$

  genere esta sucesión en el Geómetra, utilizando procesos iterativos.

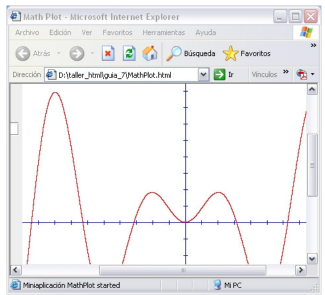
- Aproxime $\sqrt{10}$, utilizando procesos iterativos.

Bibliografía:

- Stewart James. **Cálculo en una variable**. Cuarta edición.
- Folleto **Proceso para el aprovechamiento y el uso de tecnología aplicada.** ITCR-PROMECE.

DISEÑO BÁSICO DE PÁGINAS WEB DINÁMICAS Y CON CONTENIDO MATEMÁTICO

Geovanni Figueroa M.[1]
Alexander Borbón A.



Resumen:

En el taller se desarrollarán los conceptos necesarios para construir páginas Web básicas, dinámicas y con contenido matemático. Para ello se usarán herramientas como el Geómetra, JavaSketchPad y algún editor visual de HTML.

Objetivo:

Que el participante pueda construir páginas Web básicas, dinámicas y con cierto contenido matemático.

Duración:

El taller será desarrollado en dos sesiones: la primera sesión abarca los contenidos básicos de HTML y la segunda los conceptos de JavaSketchPad.

Requisitos:

El taller esta dirigido a personas que tengan un dominio básico de Windows y preferiblemente con conocimientos básicos de geometría plana.

Contenidos

1. HTML Básico (Primera sesión)

- Estructura básica de un documento HTML.
- La doble cara de un documento HTML.
- Enlaces internos y externos al documento.
- Uso de imágenes.
- Uso de tablas.

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica

- Agregando applets.

2. JavaSketchPad Básico (Segunda sesión)

- Construyendo applets desde el Geómetra
- Construyendo applets manualmente.
    - Fundamentos del uso de JavaSketchPad.
    - Gramática de JavaSketchPad.
    - Lugares geométricos.
- Uso de JavaScript y JavaSketchPad.

IV CIEMAC, Diciembre del 2005

Autor:

Jorge Sanabria Hernández
jsanabria123@gmail.com

Taller:

"Elaboración de guías didácticas, para lecciones asistidas por computadoras."

"**Escucho** y olvido,
veo y recuerdo,
hago y comprendo"

Un anónimo chino

Introducción

Las transformaciones que la sociedad está viviendo en la última década, están penetrando y modificando el tejido y las bases de nuestra sociedad desarrollada. Y evidentemente, a estos cambios radicales están contribuyendo de forma manifiesta las tecnologías avanzadas de la información y la comunicación, y más particularmente Internet, que vienen afectando a todos los ámbitos de desarrollo y progreso social.

El mundo de la educación no puede ignorar esta realidad tecnológica ni, como objeto de estudio ni, mucho menos, como instrumento del que valerse para formar a los ciudadanos que ya se organizan en esta sociedad a través de entornos virtuales. Y la modalidad que desde su nacimiento más predisposición mostró para la asunción de las innovaciones tecnológicas, fue sin duda la educación.

Ahora bien, con toda esta ola de cambios, es necesario modificar el modelo enseñanza-aprendizaje, donde no solo es necesario enseñar matemáticas, sino también enseñarles la capacidad de descubrir, plantear hipótesis, verificar esas hipótesis, pero este nuevo aprendizaje debe ser bien guiado, para evitar que el o los estudiantes creen falsas conclusiones, y para esto es necesario una buena estructuración de las guías, en nuestro caso guías para lecciones asistidas por computadoras. Esto es lo que actualmente se está necesitando en un mundo más competitivo. Además esta puede ser una herramienta, para bajar los índices del odio por la matemática.

Objetivos

1. Aprender criterios para el diseño de guías; diseñar una guía de aprendizaje para los alumnos utilizando herramientas que provee la tecnología informática.
2. Concienciar a los profesores de los efectos de este tipo de lección, sobre la enseñanza – aprendizaje.
3. Fomentar :
    - Las capacidades analíticas, creativas en el estudiantado
    - La consolidación de los conocimientos previos.
    - La favorización de la vinculación con nuevos conocimientos.
    - Las oportunidades para comprender el conocimiento matemático y su utilidad.
    - La estimulación de la transferencia a situaciones diferentes.

Descripción

Definición de guía didáctica

Una guía didáctica es un instrumento con orientación técnica para el estudiante, que incluye toda la información necesaria para el correcto uso y manejo provechoso de los recursos, para integrarlo al complejo de actividades, enseñanza-aprendizaje, para el estudio independiente de los contenidos del curso.

La guía didáctica debe apoyar al estudiante a decidir qué, cómo, cuándo y con ayuda de qué, estudiar los contenidos de un curso a fin de mejorar el aprovechamiento del tiempo disponible y maximizar el aprendizaje y su aplicación.

Dentro de ello, se puede mencionar que una guía didáctica, es la propuesta metodológica que ayuda al alumno a estudiar el material, incluye el planteamiento de los objetivos específicos o particulares, así como el desarrollo de todos los componentes de aprendizaje incorporados por tema, apartado, capítulo o unidad.

La guía didáctica acompaña un libro de texto o bien una compilación de lecturas, que en el mejor de los casos es una antología, los cuales constituyen la bibliografía básica de un curso o una asignatura.

Aspectos que caracterizan la guía didáctica

Son características deseables de la guía didáctica las siguientes:

- Ofrecer información acerca del contenido y su relación con el programa de estudio para el cual fue elaborado.
- Presentar orientaciones en relación a la metodología y enfoque del curso.
- Presentar indicaciones acerca de cómo lograr el desarrollo de las habilidades, destrezas y aptitudes del educando.
- Definir los objetivos específicos y las actividades de estudio independiente para orientar la planificación de las lecciones, informar al alumno de lo que ha de lograr a fin de orientar al evaluación.

Funciones básicas.

a) Orientación

- Establecer las recomendaciones oportunas para conducir y orientar el trabajo del estudiante.
- Aclarar en su desarrollo dudas que previsiblemente puedan obstaculizar el progreso en el aprendizaje
- Especificar en su contenido la forma física y metodológica en que el alumno deberá presentar sus productos.

b) Promoción del aprendizaje auto-sugestivo

- Sugiere problemas y cuestiona a través de interrogantes que obliguen al análisis y reflexión.
- Propicia la transferencia y aplicación de lo aprendido.
- Contiene previsiones que permiten al estudiante desarrollar habilidades de pensamiento lógico que impliquen diferentes interacciones para lograr su aprendizaje

c) Auto evaluación del aprendizaje

- Establece actividades integradas de aprendizaje en que el alumno hace evidente su aprendizaje
- Propone estrategias de monitoreo para que el estudiante evalúe su progreso y lo motive a compensar sus deficiencias mediante el estudio posterior

Este taller entrega criterios y recomendaciones para diseñar y preparar material didáctico. La idea es discutir y reflexionar en relación con las siguientes preguntas:

- ¿Para qué se usan las guías de aprendizaje?
- ¿Qué estructura tienen?
- ¿Cómo diseñarlas?

La primera actividad esta orientada, a la explicación de todo lo referente al marco teórico que involucra el desarrollo de una guía didáctica.

Posteriormente se realizara el análisis, detallada de una guía didáctica; aquí se analizara todo lo referente a la elaboración, aplicación y evaluación de la misma.

Luego las actividades apuntan a que los participantes, diseñen el borrador de una guía de aprendizaje y, las actividades necesarias para construir una guía que ellos podrán utilizar en sesiones futuras, ya sea de su asignatura o en un laboratorio.

El desafío es cómo utilizar los recursos que ofrece la tecnología informática, para hacer de las guías, instrumentos pedagógicos de calidad y atractivos para los alumnos.

Esquema para la elaboración de una guía didáctica

Parte	**Función**
Título	Describe el propósito de la guía en forma sintética o metafórica.
Información del estudiante.	Describe la información básica del estudiante, nombre, número de sección, etc. Esta sección le ayuda al profesor, en la hora de la evaluación cuantitativa.
Objetivos	Le dice al estudiante qué se espera que aprenda o qué se espera que haga como resultado luego de realizar las actividades de la guía.
Conceptos	Resume los conceptos que introduce la guía.
Actividades	1. Actividades de apropiación: Contienen secuencias graduadas de acciones, tendientes al logro de los conceptos y objetivos enunciados. 2. Actividades de exploración: Corresponden a sugerencias de acciones, destinadas a lograr aprendizajes por medio de la exploración libre, son un llamado a la investigación, a poner ideas en práctica y observar cómo reacciona la máquina. 3. Actividades de aplicación: Son propuestas de productos que podría realizar con lo aprendido, esto permite afianzar los conocimientos adquiridos y profundizar en ellos.
Evaluación	La guía propone formas de evaluar el progreso y el logro del objetivo o los objetivos para los que fue diseñada. Mantiene informado al estudiante de su progreso. Al final de la guía hay una tabla que

	resume las competencias, donde cada estudiante puede ir autoevaluándose.
Información complementaria	En lo posible la guía entrega la información necesaria para cada actividad o muestra cómo encontrarla. En caso que se requiera información más completa o se desee hacer lecturas complementarias, esas se pueden agregar al final.

Pasos para desarrollar una guía didáctica.

No existen modelos únicos ni determinantes. La estructura de la guía didáctica obedece a las condiciones institucionales o regionales en que se determina su construcción y uso, no es así, sus características y funciones básicas que son en materias escritas, la traducción de una metodología de enseñanza propia del docente que promueve aprendizajes significativos a distancia.

1. <u>Seleccionar un tema</u>:

Lo primero que debe hacer para empezar a generar su guía es seleccionar el tema en el cual la desarrollará.

El tema debe ser alguno de los que trabajará en sesiones futuras con sus alumnos. La idea es que la guía sea efectivamente aplicada, a un grupo de estudiantes, de esa forma usted podrá ver sus fortalezas y debilidades, la manera de mejorarla, y considerar estos elementos en la construcción de las guías siguientes. Asegúrese que sea un tema central en el curso, que es suficientemente específico como para trabajarlo en un tiempo que oscile entre 20 minutos y una hora.

2. <u>Consideraciones del diseño</u>

Ahora se quiere enfatizar las distinciones centrales a tener en cuenta al diseñar una guía. Podemos distinguir entre el fondo y la forma de la guía, la siguiente tabla explica lo que significa el fondo y la forma.

El fondo	La forma
1. El **conocimiento** que se desea proponer a los estudiantes. 2. La **transformación didáctica** que esos conocimientos requieren para que se aumenten las probabilidades de éxito de quienes los usen.	1. La estructura o secuencia que usará para expresar esa estrategia de enseñanza. 2. Los aspectos de presentación como lenguaje, tipografía, diagramación, etc.

3. Generar los objetivos

Una vez que ha seleccionado el tema y se tienen claros las consideraciones para el diseño de la guía, es hora de comenzar a definir los objetivos, es decir, hacia dónde está dirigida la guía.

4. Definir los conceptos

Una vez que ha definido el tema y los objetivos de la guía, debe definir los conceptos o ideas nuevas involucradas en la guía que va a confeccionar.

5. Generar las actividades

Defina las posibles actividades que espera que sus alumnos realicen, para lograr los objetivos propuestos, es conveniente plantear distintas actividades, pues algunas se descartarán por diversas razones (no pueden generar el aprendizaje deseado, no consigue el material adecuado para su desarrollo).

Nota: Obviamente que el proceso para definir los objetivos, los conceptos y las actividades es cíclico se pueden redefinir en el momento en que se está construyendo la guía en concreto. Tratando de seguir una secuencia ordenada de pasos, que contribuyan a la obtención de los objetivos planteados.

6. Buscar recursos

Para generar la guía es aconsejable de primera entrada que revise el material didáctico que hay en la institución o sea de su propiedad, y con los cuales se puedan obtener de él imágenes, textos u otros elementos que puedan ser útiles, e incorporarlos en la guía que está implementando.
Es recomendable:

- Explorar el software educativo que existe en la institución y que contenga material de ayuda para su guía.
- Explorar en Internet – en caso de que cuente con este recurso- con la finalidad antes escrita, en los anexos.
- Consultar al coordinador del software en su institución educativa, acerca de qué material le puede ser de utilidad, esto en el caso que el centro disponga de este personal, o de lo contrario la opinión de un colega le puede resultar muy útil.
- Capture las imágenes y textos de medios físicos (entendiéndose como libros, revistas, etc.) que le puedan ayudar y almacénelos en una carpeta dándoles nombres adecuados y descriptivos a los archivos.

Anexos

Criterios para el desarrollo de guías de aprendizaje

A. **Guías de Aprendizaje para una escuela deseable,** Ernesto Schiefelbein, Gabriel Castillo y Vicky Colbert, publicado por UNESCO/UNICEF en 1993.

.

1. El material está dirigido a los alumnos.
El cuerpo del material está constituido por tareas que se les proponen directamente a los alumnos. Tales tareas son de tres tipos:

    1. Las que se le encargan directamente al alumno individual.
    2. Las que se le encargan al alumno en su condición de integrante de un grupo de trabajo.
    3. Las que se le encargan al alumno en su carácter de integrante de un grupo curso, de la escuela y de la familia o comunidad.

2. Las actividades que se proponen a los alumnos los invitan, a veces, a asumir responsabilidades individuales, a integrarse en el trabajo con otros alumnos, a implicar en su trabajo a su familia y a su comunidad.

3. Las tareas propuestas intentan que el alumno describa, investigue, reflexione, realice valoraciones, compare, actúe, realice análisis y síntesis.

4. Las tareas, también, crean oportunidades para que el alumno ponga en desarrollo diversas habilidades como leer, escribir, dibujar, colorear, inventar, dramatizar, hablar y escuchar en grupo o conducir actividades.

5. Habitualmente las actividades siguen los pasos del método científico-tecnológico: hay una tarea por resolver, se buscan y analizan maneras de enfrentarla. Finalmente, se opta por una respuesta y se dejan, en claro, por escrito los avances alcanzados.

6. La tarea por resolver suele ser presentada con una pregunta o con una declaración que da título al material. Esta pregunta o declaración representa lo que podría denominarse el objetivo.

7. La resolución de la tarea implica, siempre, una puesta a prueba de saberes, de acciones y de valores. No hay materiales puramente cognitivos o puramente activos o valorativos. Todos implican una totalidad en la que hay acciones por realizar, saberes que comprender y aplicar, valores que se ponen a prueba y cuyo desarrollo se promueve.

8. Los saberes que se trabajan son, siempre, fundamentales. Entendemos por tales a aquellos que ordenan la red de objetivos de un determinado saber. Son aquellos objetivos que constituyen el hilo conductor de un saber, de modo que su aprehensión pasa a ser la tarea indispensable de quien quiere aprender ese saber.

9. Hay un decidido empleo del grupo de trabajo, conjunto de cuatro, y en ocasiones hasta cinco o seis alumnos que se enfrentan, en común, una tarea. Se busca que en cada tema o actividad asuma la monitoría aquel alumno al que los otros le reconocen mayor conocimiento. Se busca, asimismo, el fomento de la capacidad de dar y de pedir ayuda y el apoyo a la interacción interpersonal. Ha de cuidarse que cada grupo sea heterogéneo, es decir, que no se constituyan grupos seleccionados por rendimiento académico, por situación económica o por otra variable de discriminación (los grupos son relativamente homogéneos entre ellos). Los alumnos necesitan aprender a convivir y a trabajar con compañeros con distintas historias personales y a descubrir, en esas diferencias, valiosas oportunidades de interacción y de enriquecimiento humano.

10. El material guía al alumno hacia el aprendizaje deseable a través de una serie de preguntas (en otros casos podría ser a través de conclusiones y razonamientos). Estas no pretenden tanto averiguar lo que el alumno ha descubierto, como el proponerle, de otra manera, para su análisis, las cuestiones (o relaciones) más importantes que necesita tener en cuenta.

11. El lenguaje usado en el material trata de ser sencillo y comprensivo para el alumno. Pero es el lenguaje estándar, formal, el que el alumno necesita aprender a manejar y valorar. Cuando se emplea una palabra que probablemente el niño no conozca, se pone, derechamente la palabra; pero, al mismo tiempo y en el mismo texto, se añade un sinónimo de uso habitual del alumno, es decir, se la explica en un contexto. La facilidad de la comunicación no se opone al enriquecimiento del vocabulario.

12. La diagramación por ahora es muy sencilla ya que el alumno usa su propio cuaderno para responder. Eventualmente, y con mayores recursos, las guías se podrían transformar en cuadernos de trabajo. Se pretende que el alumno advierta los pasos de un sector a otro del material. El tamaño de las letras adecuada para una lectura fácil. Conviene advertir acerca de los peligros de una reproducción del material en que, por economía, se reduzcan los espacios o el tamaño de las letras o se dejen sin separación las distintas secciones o etapas del material. Una adecuada diagramación es una condición del material que hay que mantener a cualquier precio si se quiere que él sirva para el éxito del alumno. Por ahora se usa un solo color y se minimizan las ilustraciones, pero eventualmente se pueden incluir estos aspectos y estimar su impacto en el rendimiento de los alumnos.

B. Otro conjunto de criterios, adaptados de un trabajo hecho por Fidel Oteiza y equipo para la enseñanza de la matemática elemental.

1. Integrar procedimientos para su administración de modo de permitir diferentes estilos de aprendizaje o que estudiantes con distintos antecedentes y experiencias puedan hacer uso de la situación.

2. Relacionar el conocimiento nuevo con el que ya poseen los estudiantes.

3. Asegurar un alto y variado número de acciones y de respuestas de parte de los estudiantes.

4. Asegurar un *feedback* inmediato para los resultados del aprendizaje. Es importante que los niños puedan corregir, durante el proceso, sus aprendizajes, fallas u omisiones.

5. Facilitar una estructura social cooperativa, definida como aquella en la cual "los estudiantes perciben que ellos pueden obtener sus objetivos, si y sólo si, otros estudiantes que están relacionados con ellos pueden obtener sus objetivos".

6. Asegurar que ambos, profesores y estudiantes, estén informados de las actividades de enseñanza, sus relaciones con otras actividades y las alternativas disponibles para alcanzar los objetivos educativos.

7. Facilitar una estructura de la sala de clases donde las motivaciones externas puedan ser reducidas al mínimo. El sistema educativo descansa demasiado en la motivación externa: ¡es importante porque entra en la prueba!

8. Proveer un sistema evaluativo que permita diagnosticar las dificultades, necesidades y fortalezas de los estudiantes. Esto es, una evaluación que permite detectar lo que los alumnos saben más que lo que no saben.
9. Proveer actividades para aquellos estudiantes que encuentran dificultades para aprender.

10. Proveer actividades alternativas para los estudiantes con intereses variados y diferentes.

11. Permitir el aprendizaje individual y en pequeños grupos.

12. Mantener una administración flexible de la sala de clases. Usar la sala como un recurso más para el aprendizaje.

13. Preparar las condiciones para adaptarse a diferentes necesidades y/o condiciones locales, culturales o circunstanciales.

14. Permitir la optimización de los resultados del material de enseñanza vía la observación, la experimentación y la adaptación recurrente en el tiempo.

15. Facilitar el acceso directo a otras fuentes de conocimiento diferentes del profesor. Textos, biblioteca escolar, periódicos y revistas, otros alumnos profesores o miembros de la comunidad.

Recomendaciones

1. Asegúrese que es un tema central en el curso.

2. Dedique algunos minutos para pensar en qué criterios debería satisfacer una guía para que usted la considerase adecuada.

3. Cuando la construcción de guías se transforme en una práctica común, será cómodo disponer de un molde para los trabajos que se deben hacer en forma repetida o acerca de los cuales se desea crear una colección que se pueda archivar.

4. Cuando corresponda, aplique la guía generada en estas sesiones y observe con detención la forma en que se desenvuelven los estudiantes. Esta información será de utilidad para el diseño de las guías futuras o mejoras de la misma

5. Utilizar una plantilla, para la construcción de las guías. Esto es lo más recomendable, pues los estudiantes se acostumbrarán a dicha estructura, y así le permite, que ellos tomen cierta familiaridad a las guías.

6. En el momento de diseñar las actividades, puede ser útil, en la primera actividad, realizar una pequeña explicación, de los elementos visuales que tiene la aplicación y la funcionalidad de los mismos.

7. Procuré utilizar un lenguaje, que mantenga la formalidad matemática, pero que sea de fácil entendimiento para los alumnos.

Bibliografía

1. http://www.cmec.ca/international/forum/csep.Chile.ap2.sp.PDF

2. http://www.unitec.mx/portal/page?_pageid=537,904111&_dad=portal&_schema=PORTAL

3. http://www.prensajuvenil.org/guias/gmet.htm

4. http://aula.el-mundo.es/aula/noticia.php/2003/04/09/aula1049998020.html

5. http://www.educarchile.cl/ntg/experiencias_educativas/1624/article-67931.html

6. http://www.somece.org.mx/virtual2003/ponencias/contenidos/guiasdidacticas/guiasdidacticas.pdf

Créditos

A Luis Eduardo Amaya Briceño, por todo su colaboración en el presente Taller.

ENSEÑANZA CREATIVA DE LA GEOMETRÍA USANDO ORIGAMI

Francisco J. Badilla Núñez[1]

En realidad, pocos educadores imaginan que la transformación vendrá de las telecomunicaciones. Aún no somos capaces de prever este inmenso salto que se está preparando ante nuestros ojos entrecerrados y ante nuestras mentes adormecidas. Pero si seguimos haciendo "más de lo mismo", enseñando de la misma manera a las nuevas generaciones, fracasaremos. La sociedad, lo estamos viendo, tomará medidas drásticas para que eso no suceda: en primer lugar excluirá de su seno a los docentes e instituciones educativas que no se hayan renovado, en segundo lugar inventará sistemas educativos independientes de los programas formales como sucede ya con algunas iniciativas de educación "doméstica" (home schooling) y de educación "a medida" (charter schools). Y, lo que es más importante, premiará a quienes acepten el desafío de la globalización del conocimiento.

IMPORTANCIA DE LA GEOMETRÍA EN EL CURRICULUM

La necesidad de la enseñanza de la geometría en el ámbito escolar responde, en primer lugar, al papel que la geometría desempeña en la vida cotidiana. Un conocimiento geométrico básico es indispensable para desenvolverse en la vida cotidiana: para orientarse reflexivamente en el espacio; para hacer estimaciones sobre formas y distancias; para hacer apreciaciones y cálculos relativos a la distribución de los objetos en el espacio. La geometría está presente en múltiples ámbitos del sistema productivo de nuestras actuales sociedades (producción industrial, diseño, arquitectura, topografía, etc...).La forma geométrica es también un componente esencial del arte, de las artes plásticas, y representa un aspecto importante en el estudio de los elementos de la naturaleza.

ACERCAMIENTO EXPERIMENTAL, INTUITIVO A LA GEOMETRÍA

[1] Instituto Nacional de Aprendizaje (INA), Costa Rica

La enseñanza de la Geometría ha tenido tradicionalmente un fuerte carácter deductivo. En educación secundaria, la Geometría se ha venido apoyando en el lenguaje del álgebra, en el álgebra vectorial. En primaria, aún sin ese carácter algebraico, formal, se ha fomentado excesivamente el aprendizaje memorístico de conceptos, teoremas y fórmulas; la simple apoyatura de unos conceptos en otros previos; y la temprana eliminación de la intuición como instrumento de acceso al conocimiento geométrico, tratando de acelerar la adquisición de tales conceptos, teoremas y fórmulas, como si en ellas estuviera condensado el verdadero saber geométrico. Las investigaciones sobre el proceso de construcción del pensamiento geométrico parecen indicar, no obstante, que éste sigue una evolución muy lenta desde unas formas intuitivas iniciales de pensamiento, hasta las formas deductivas finales, y que éstas corresponden a niveles escolares bastante más avanzados que los que estamos considerando aquí. De manera que nosotros entendemos que en Educación Primaria hay que escapar de las interpretaciones deductivistas e ir a una geometría de carácter experimental, intuitiva.

El espacio del niño está lleno de elementos geométricos, con significado concreto para él: puertas, ventanas, mesas, pelotas, etc. En su entorno cotidiano, en su barrio, en su casa, en su colegio, en sus espacios de juego, aprende a organizar mentalmente el espacio que le rodea, a orientarse en el espacio. Ese es el contexto que nos parece especialmente útil para desarrollar las enseñanzas geométricas, de una forma que resulte significativa para los alumnos. El estudio de su entorno próximo y familiar, por la motivación e interés que puede despertar y por ser fuente inagotable de objetos susceptibles de observación y manipulación. A partir de situaciones que resulten familiares para los alumnos(recorridos habituales, formas de objetos conocidos...) y mediante actividades manipulativas, lúdicas (plegado, recorte, modelado, etc), el profesor puede fomentar el desarrollo de los conceptos geométricos contemplados en el currículo de esta etapa educativa.

HISTORIA DEL ORIGAMI (PAPIROFLEXIA)

La condición previa para el nacimiento de la origami o papiroflexia es lógicamente la existencia de papel. Los chinos habían inventado en el siglo II de nuestra era un procedimiento para la fabricación de papel a partir de todo tipo de fibras vegetales. Japón era en aquella época un país totalmente subdesarrollado desde el punto de vista político y cultural. Los japoneses admiraban a los chinos y se esforzaron en aprender de ellos todo lo posible. En el siglo VII conocieron también el secreto de la fabricación del papel y gracias a su proverbial amor a aquel material, consiguieron pronto rendimientos importantes en este campo. Pero de repente, los japoneses se cerraron a todas las influencias extrañas y se dedicaron a trabajar con su propio sello todos los conocimientos adquiridos. Esta época de sentido nacional fue el Período Heian (794-1183) y en él se rompieron todos los contactos oficiales con China. Las primeras figuras plegadas de papel se remontan a esta época. No hay sin embargo indicios de que la inspiración en este campo viniese de China. Los usos iniciales que se le dieron al papel fueron la redacción de cartas y poesías, las cuales estaban dobladas con forma extraordinariamente significativa y delicada. Los primeros indicios de figuras clásicas origami proceden sin embargo del siglo XVIII, del Período Edo (1614-1868). Después de largos disturbios internos y luchas por el poder, fue esta una época de paz y de orden. Por un lado, la casta de guerreros dominante creó normas y leyes para la vida política, social y colectiva dentro del espíritu del Confucionismo. Por otro lado, el Budismo Zen, como religión popular, tenía fuertes repercusiones sobre la vida espiritual y cultural. En este período, donde la Burguesía ejerció una gran influencia sobre el arte y la literatura, la artesanía vivió un momento de florecimiento. En el Origami Clásico se recortaba, pegaba y pintaba. Para el Origami las tijeras son tabú, la pintura se debe evitar y la utilización del pegamento es impensable. La forma pura, lograda solamente mediante el plegado, debe responder de sí misma. No existe otro elemento de configuración que el material en su estructura, dibujo o color. Así los maestros japoneses crearon las nuevas normas para el origami moderno.

FUNDAMENTO DE LA PAPIROFLEXIA COMO METODOLOGÍA

La papiroflexia u origami modular es de gran interés por contribuir a adquirir ciertas actitudes y habilidades de forma amena, aparte de aprender geometría. La necesidad de plegar muchas piezas "más o menos iguales" para construir un poliedro potencia el trabajo en equipo, el reparto de tareas, el hacer un buen trabajo para poder unir las piezas (pliegues bien hechos y no de cualquier manera, acuerdos en la forma de doblar las piezas cuando hay dos posibilidades), visión espacial y la satisfacción de terminar el trabajo y obtener el sólido. Por estas y otras razones la papiroflexia constituye una atractiva forma de acercarse a las matemáticas por su riqueza cultural y su gran valor pedagógico. El origami modular se basa en la construcción de módulos o unidades (casi siempre iguales) que se pueden ensamblar en cuerpos geométricos o, en su caso, en figuras decorativas. En el origami modular existen diferentes tipos de módulos que varían entre sí tanto por el procedimiento de construcción y la forma del trozo de papel inicial, como por el tipo de poliedro que se quiere obtener y por la parte de éste que cada módulo va a constituir principalmente: un vértice, una cara o una arista.

EXPLICACIÓN CIENTÍFICA DE LA PAPIROFLEXIA

El origami modular se basa en la construcción de módulos o unidades (casi siempre iguales) que se pueden ensamblar en cuerpos geométricos o en otras figuras decorativas. Estos módulos poseen solapas y bolsillos, que se usan para ensamblarlos entre sí. Esta técnica también ofrece la posibilidad de manipular al final un modelo tridimensional, poder hacer medidas en él, ... , aunque tiene la desventaja de que a veces es tedioso hacer muchos módulos o el ensamble resulta un poco laborioso; sin embargo, para una persona perseverante, curiosa y paciente esta desventaja se puede convertir en un reto, mientras que para una persona que se impaciente le puede ayudar a desarrollar algunas actitudes como la paciencia. Además, los módulos pueden hacerse entre todos montándose después el correspondiente poliedro. Los poliedros más famosos son, sin duda, los llamados sólidos platónicos. Se dice que un poliedro convexo es regular si sus caras son polígonos regulares idénticos y si en cada vértice concurre el mismo número de aristas. Sorprendentemente, tan sólo existen cinco: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro. Varios matemáticos y filósofos, impresionados por la belleza y elegancia lógica de la geometria, han pretendido utilizar las ideas geométricas para explicar el Universo en que vivimos. Uno de los primeros fue Platón, el cual estaba tan prendado de los cinco sólidos regulares que los empleó como la base de una teoria de la materia. En su libro Timeo, escrito hacia el 350 a. C., Platón llevó adelante la sugerencia de que los "cuatro" elementos que se pensaba que componian mundo -el agua, el aire, el agua y la tierra- eran todos ellos agregados sólidos diminutos. Pensaba además que, puesto que el mundo solamente podía estar formado a partir de cuerpos perfectos, tales elementos debían tener la forma de los sólidos regulares. Según Platon, el fuego debe ser un tetraedro al ser el más ligero y punzante de los elementos, la tierra ha de consistir en cubos al ser el más estable de todos, el agua debe ser un icosaedro, el sólido regular que tiene más posibilidades de rodar facilmente, por ser el más móvil y fluido y en cuanto al aire, Platón observó que "el aire es al agua lo que el agua es a la tierra", y concluyó, aunque algo misteriosamente, que el aire debe ser un octaedro. Y finalmente, para no dejar al único sólido regular que queda fuera del cuadro, propuso que el dodecaedro representara la forma del Universo en su totalidad. Por arbitraria y fantástica que pueda parecer la teoría de la materia de Platón a los ojos modernos, la idea de que los sólidos regulares desempeñaban un papel fundamental en la estructura del Universo fue tomada en serio en los siglos XVI y XVII cuando Johannes Kepler emprendió su investigación del orden matemático del mundo circundante. En la época de Kepler se conocían seis planetas: Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Jupiter y Saturno. Influido por la teoría de Copérnico, de acuerdo con la cual los planetas se mueven alrededor del Sol, Kepler trató de encontrar relaciones numéricas que explicasen por que existían precisamente seis planetas, y por que se hallaban a sus distancias particulares del Sol. Razonó que el número de planetas era seis porque la distancia entre cada par adyacente debía estar relacionada con un determinado sólido regular, que son justamente cinco. Después de algunas pruebas, halló una disposición de sólidos regulares y de esferas tal que cada uno de los seis planetas tenía una órbita sobre una de seis esferas. La esfera externa, sobre la cual se mueve Saturno, contiene un cubo inscrito, y en dicho cubo se inscribe a su vez la esfera de la órbita de Jupiter. En ésta se halla inscrito un tetraedro, y Marte se mueve en la esfera inscrita en esta figura. El dodecaedro inscrito en la esfera de la órbita de Marte tiene a la órbita de la Tierra como su esfera inscrita, en la cual el icosaedro inscrito tiene inscrita a su vez la esfera de la órbita de Venus. Finalmente, el octaedro inscrito en la esfera de la órbita de Venus tiene una esfera inscrita, en la cual descansa la órbita de Mercurio. Aunque Kepler quedó satisfecho con lo que había obtenido este modelo tenía varias incongruencias.

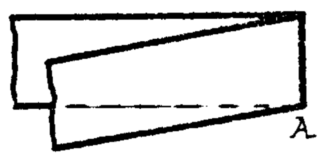
EJERCICIO 1

LA TIRA DE GEOMETRÍA EN LA TIRA DE PAPEL.

Con un buen trozo de esos rollos de papel que se emplean en las máquinas registradoras de cobrar dinero. O si no, corta una tira de papel larga, como de 4cm de ancho, pegando tiras cortadas de una hoja de papel.

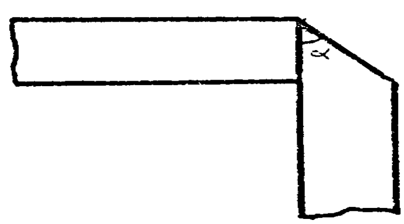
Para empezar, piensa un poco. ¿Cómo te harías un cuadrado con tu tira solamente plegando?

Pliega por A y así resulta un pliegue perpendicular. Queda del modo siguiente

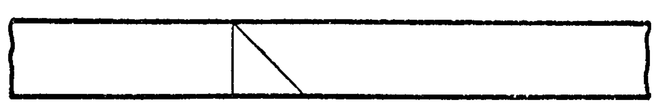


Al desplegar resulta marcado el pliegue perpendicular

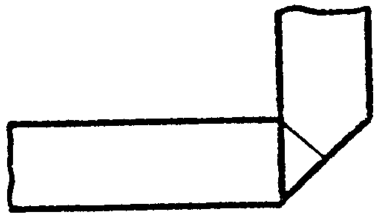
Pliega ahora así



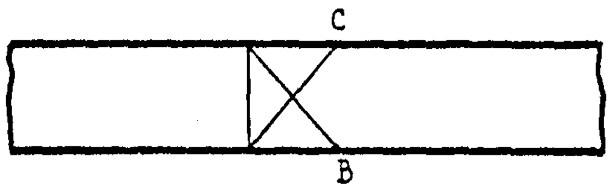
Observa que el ángulo es de 45º



Ahora ya está claro. Pliegas así

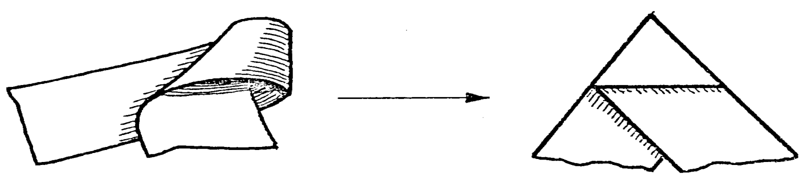


Y al desplegar tienes esto

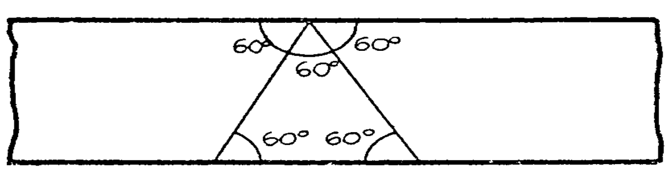


Pliegas por los puntos B y C y te resulta el cuadrado.

Ahora piensa otra vez. ¿Cómo hacerte con un triángulo equilátero? Seguro que se te ocurre, pues ya sabes cómo dividir un ángulo en tres partes iguales plegando el papel. Tanteando un poco puedes formar primero un cucurucho y luego dos pliegues con los que la tira te va a quedar así

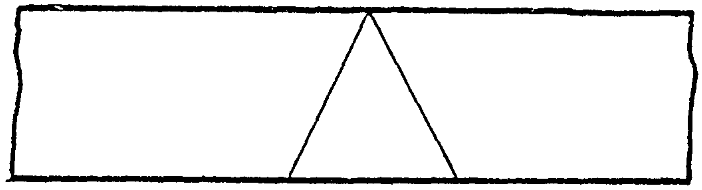


Observa que en la tira plegada hay dos pliegues que determinan (por coincidir tres ángulos iguales alrededor del vértice). Al desplegar queda la cosa así

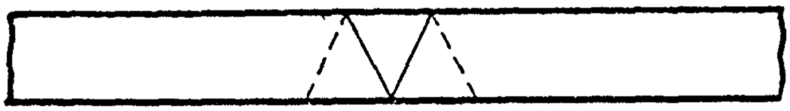


y por la igualdad de ángulos determinados por paralelas, resulta que los ángulos señalados por los pliegues en la parte baja de la tira son también de 60º. Así obtienes un triángulo equilátero.

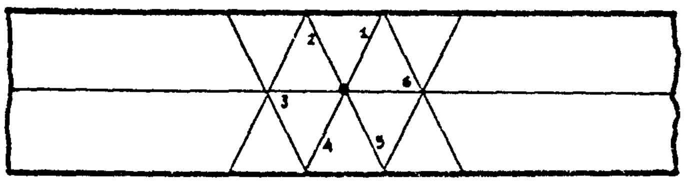
Ya tienes el cuadrado, el triángulo equilátero... ¿más polígonos regulares? El hexágono es fácil, una vez que tienes el triángulo equilátero. Tienes la tira así



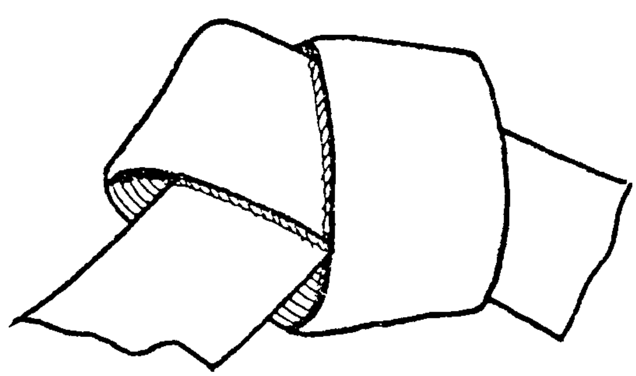
Doblas por la mitad y te resulta así



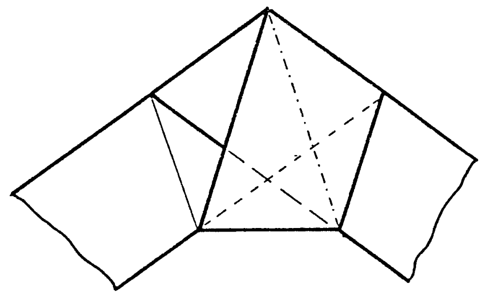
Ahora pliegas unas cuantas veces por los pliegues que han quedado señalados de antes y verás cómo al desplegar te resulta el hexágono con los radios y el centro señalados de esta forma



Vamos a seguir con nuestra colección de polígonos regulares. A por el pentágono. Este es un poco más rebuscado. ¿Se podrá hacer con la tira? ¿Qué más podemos hacer con la tira? Piensa, piensa... Después de mucho pensar, es posible que no se te ocurra nada más que hacerte una corbata con la tira y... ¡mira por dónde! ésa es la pista para el pentágono regular. Haz un nudo con la tira, sólo plegando, sin arrugarla, primero así

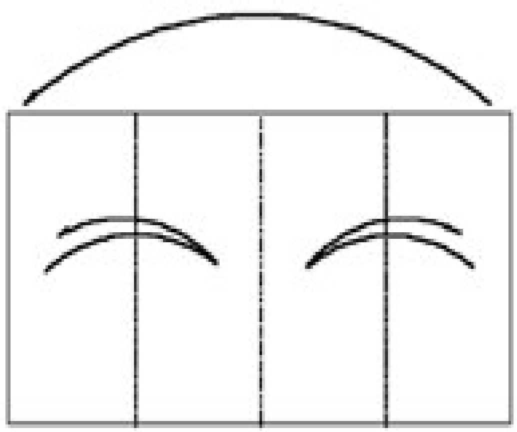


y luego plegando con cuidado hasta que quede del siguiente modo

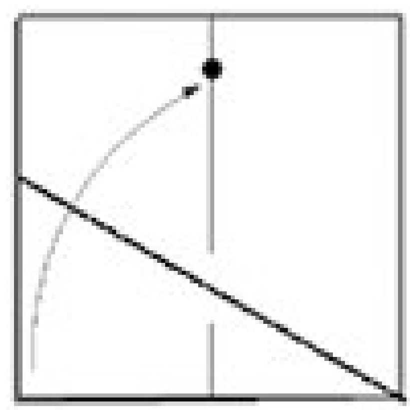


EJERCICIO: N° 2

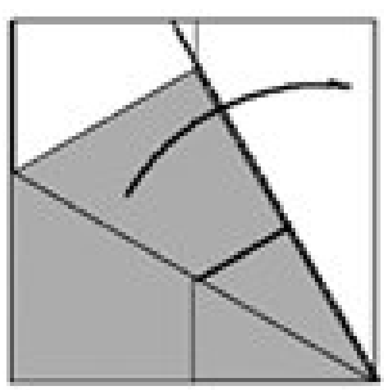
1



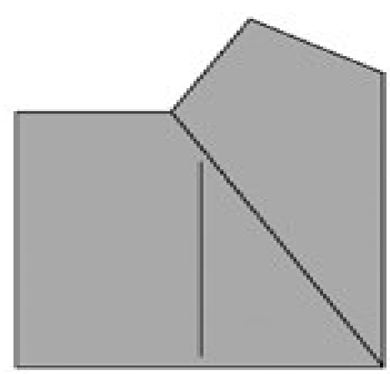
2



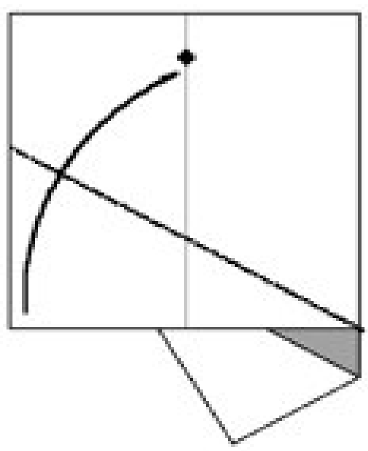
3



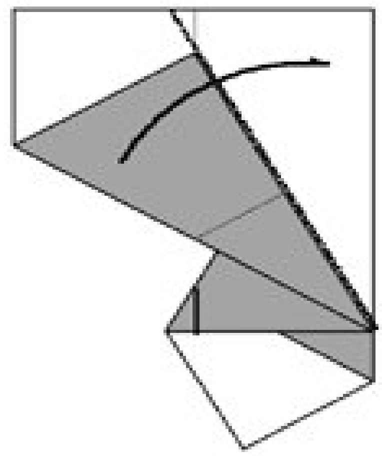
4



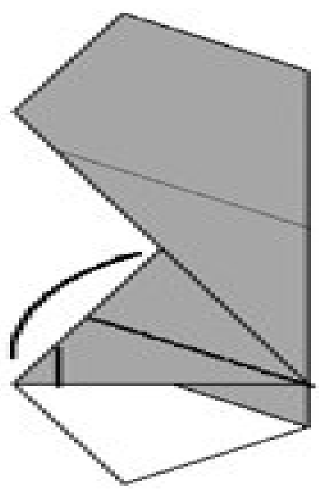
5



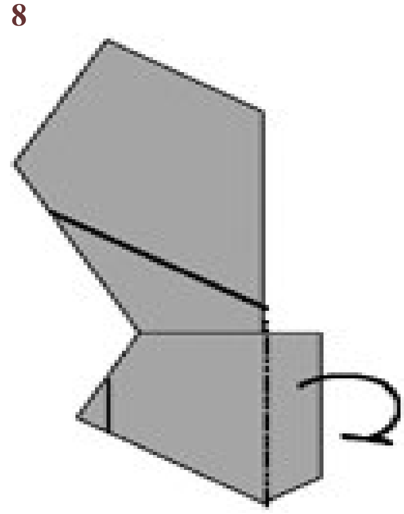
6



7

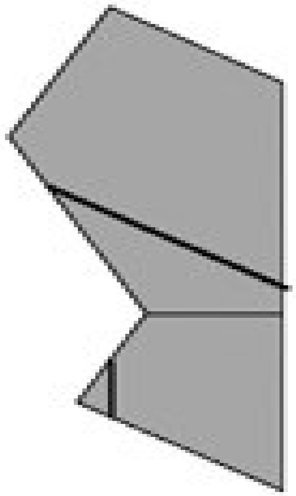


8

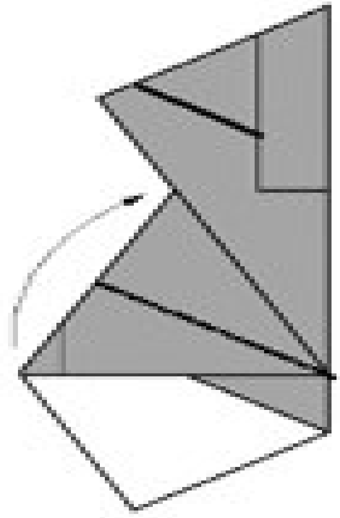


9

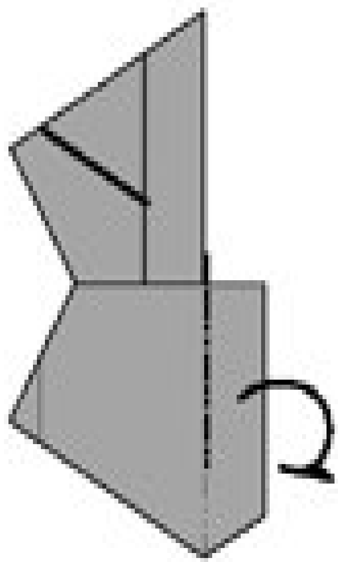
10



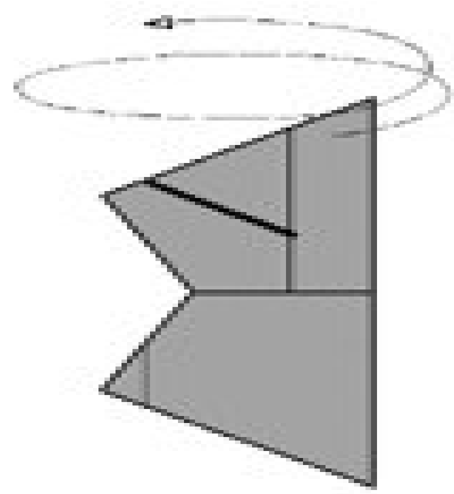
11



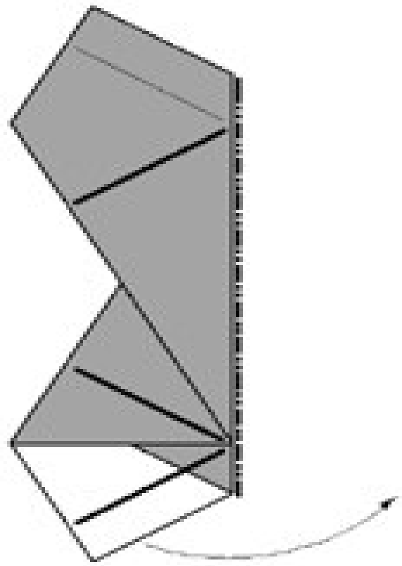
12

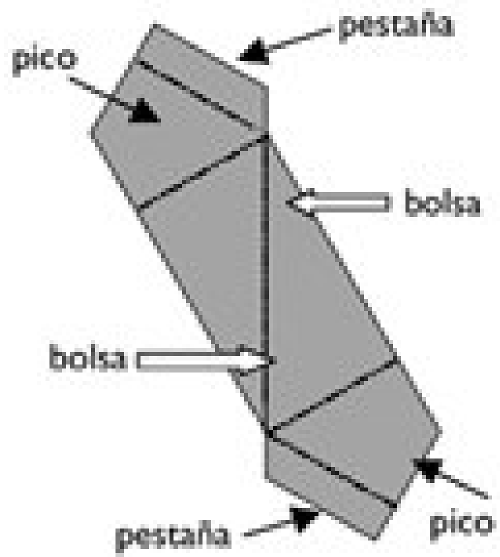


13

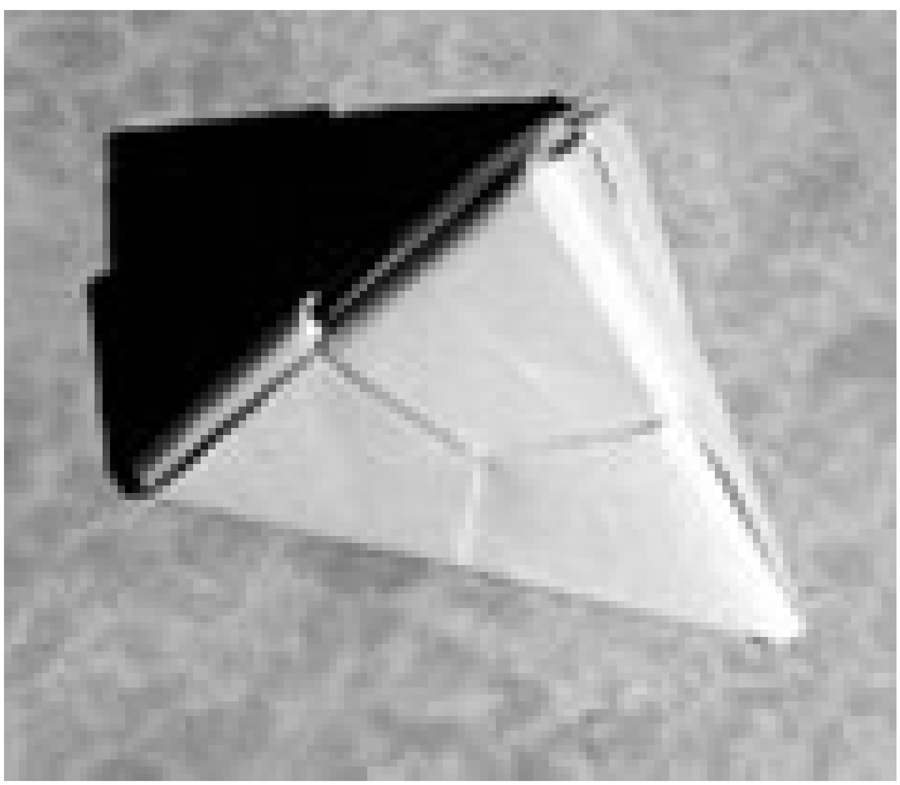


14





15



Para este ejercicio se deberá contar con seis piezas debidamente dobladas para formar la figura geométrica.

EL USO DEL SOFTWARE SCHEME COMO MODELO DE LENGUAJE MATEMÁTICO.

EL TRABAJO CON LAS FUNCIONES RECURSIVAS.

Ricardo Poveda Vásquez [1]

Yuri Morales López[2]

Resumen

Uno de los problemas principales en la enseñanza – aprendizaje de la matemática es el estudio de la disciplina por si misma y no como una herramienta para la vida. Dentro de este problema se ven involucrado muchos factores: el escaso uso de recursos y manipulación de materiales para la construcción del conocimiento por parte del alumno, el poco interés propiciado para la resolución de problemas, temor de los estudiantes por establecer abstracciones, entre otros.

Respecto a la construcción del conocimiento, es indispensable la consideración que la matemática posee ciertas características del método científico (adviértase que no se pretende justificar el hecho que la matemática sea una ciencia o no). Entre estas características, la matemática es, por si misma, un lenguaje científico no coloquial.

La posibilidad de construir modelos o paradigmas que expliquen la realidad, hace de la matemática una herramienta y un lenguaje extraordinario, aun que sus bases sean axiomáticas.

La descripción de problemas mediante un lenguaje formal es indispensable para definir los parámetros, y alcances en el desarrollo del mismo. En resumen, la matemática como lenguaje es sistemática y cuenta con estrategias operativas.

La descripción de los eventos que se modelan con lenguaje matemático es parte fundamental en el proceso. En nuestro caso, nos centraremos en la discusión de comportamientos descritos por criterios recursivos.

[1] Universidad Nacional. Costa Rica. e-mail: rpoveda@costarricense.cr

[2]. Universidad Nacional. Costa Rica. e-mail: yurimoralesl@yahoo.com

Por ejemplo, un proceso recursivo común en el estudio de la probabilidad es la definición de la función factorial (multi – criterio) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n!$ con $0! := 1$, $1! := 1$, y en general $n! = n \cdot (n-1)!$ si se cumple que $n \geq 2$.

Descripción del taller

Primera sesión:

- Breve introducción al planteamiento de problemas y descripción de situaciones.
- La descripción de problemas por lenguaje matemático.
- El concepto de recursividad y la importancia de las definiciones de los problemas por funciones.

Segundo sesión:

- Construcción de algunas funciones recursivas.
- Análisis de distintas soluciones y condiciones de terminación.
- Discusión sobre procesos finitos.
- Algunas funciones en Scheme.

Bibliografía

1998, Algunas Reflexiones sobre las Matemáticas, Florencio del Castillo Abánades.

1996 *La Generación de situaciones educativas. Una propuesta pedagógica.* México, CESDER (en prensa).

1967. Algunos Aspectos del Pensamiento Matemático, Norberto Cuesta Dutari (Lección inaugural del Curso Académico 1966-1967 en la Universidad de Salamanca).

ESTUDIO DE LOS CONCEPTOS BÁSICOS DEL ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS POR MEDIO DEL *SOFTWARE* DINÁMICO *FATHOM*.

Marianela Alpízar[1]

Resumen:

Debido a la cantidad y variedad de información que se maneja actualmente en las actividades cotidianas, resulta relevante que la educación formal incluya temas relacionados con el análisis exploratorio de los datos en el *currículum* de cada país.

¿Qué tipo de conocimientos le resulta relevante a un estudiante para analizar la información que lo rodea? ¿Qué ventajas o limitaciones tienen los estudiantes al utilizar herramientas tecnológicas en el análisis exploratorio de los datos? ¿Están los profesores preparados para impartir clases de esta materia? ¿Qué tipo de estrategias deben usarse para que los profesores y los estudiantes aprendan el manejo de datos? ¿Qué procesos de pensamiento se estimulan en el análisis exploratorio de datos?

El quehacer educativo se desarrolla en un ambiente de cambio y de innovaciones tecnológicas. La formación matemática conduce a la comprensión y resolución de situaciones de la vida cotidiana, donde se analizan distintos tipos de información.

“El auge que ha tenido la estadística en las últimas décadas ha promovido los cambios dentro del campo de su enseñanza, uno de los más significativos es la incorporación del análisis exploratorio de datos, introducido por Tukey”.

Es necesario plantear actividades que estimulen la experimentación, el planteamiento de conjeturas y la búsqueda de explicaciones en un ambiente donde se promueva el uso de la tecnología en procesos de representación, exploración y análisis de la información que resulta ser un componente importante en el desarrollo del pensamiento estadístico.

Objetivo y descripción del taller:

Este taller tiene como objetivo que los participantes por medio de la interacción con el *software* dinámico *Fathom* y el uso de guías interioricen el aporte de las herramientas

[11] Universidad Nacional, Costa Rica

tecnológicas en el proceso de enseñanza y el aprendizaje del análisis exploratorio de datos.

Se trabajaran tres ejes temáticos:

a) Organización y representación de los datos

b) Medidas de tendencia central

c) Variabilidad de los datos

En la primera sesión los participantes explorarán el *software* de manera dirigida y trabajaran el primer eje temático, referido a la organización y representación de los datos, por medio de tablas y gráficas.

Para la segunda y tercera sesión los participantes trabajaran sobre los conceptos y la aplicación de las medidas de tendencia central y variabilidad.

Se trabajará con ficharos de datos en cada sesión con el fin de contextualizar cada dato, medida o representación obtenida en el análisis efectuado con el *software*.

Es destacable que al finalizar cada una de las sesiones se realizará una visión retrospectiva acerca de los conceptos abordados en la misma.

EXPLORANDO GEOMETRÍA EN PRIMARIA CON EL GÉOMETRA

M.Sc Sandra Schmidt Q[1]

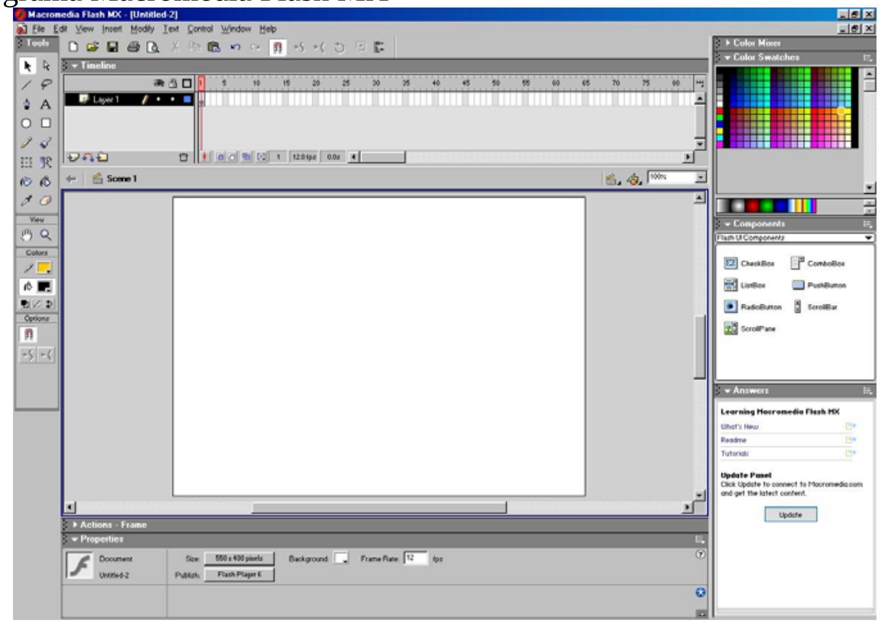
El entorno cotidiano es el contexto aparentemente más útil para desarrollar las enseñanzas geométricas, de tal forma que resulte significativa para los y las estudiantes de la educación primaria. Sin embargo, podemos aprovechar la tecnología existente, así el software "The Geometer´s SketchPad " nos presenta una oportunidad. Trataremos de presentar en este taller ideas de cómo utilizar el software para el aprendizaje de la geometría en primaria.

[1] Profesora del Instituto Tecnológico de Costa Rica, sschmidt@itcr.ac.cr

Guía de Laboratorio.
Lección número 1 (Herramientas de Dibujo)

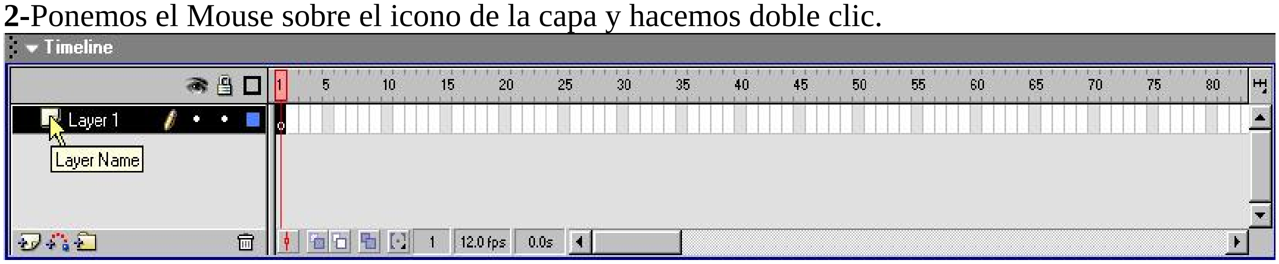
Primera Parte. Herramientas de Dibujo
Creación de una cabeza con la técnica Manga.

1- Abra el programa Macromedia Flash MX

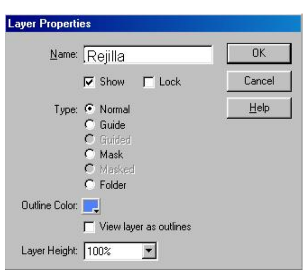


Ahora pongamos nuestra atención sobre la línea de tiempo “Time Line”. Esta se encuentra en la parte superior de la pantalla. Ahí se encuentra la capa **“Layer1”.**

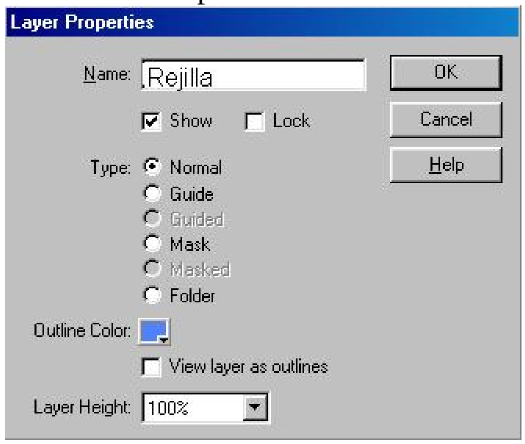
2-Ponemos el Mouse sobre el icono de la capa y hacemos doble clic.



Vemos que se abre un panel de propiedades del Layer1. Por el momento solo cambiaremos el nombre de la capa o layer con el fin de agilizar nuestro trabajo y no tener que buscar cúal capa tiene los objetos que vamos a diseñar.



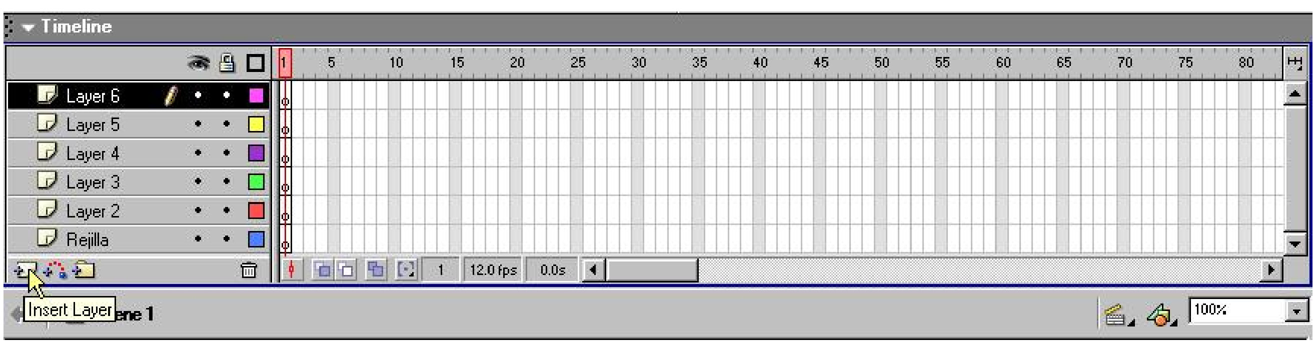
3-En el panel **“Layer Properties”**, hacemos clic en la caja de texto **“Name”** y digitamos *Rejilla.* Por último hacemos clic en el botón OK del panel.



Tip. También podemos hacer esto de una manera mas rápida haciendo doble clic sobre el nombre del Layer y digitando el nombre que queremos para la capa.

Ahora tenemos que crear varias capas más con el fin de dividir nuestro dibujo. Este procedimiento posee varias ventajas, entre ellas el hecho de que si queremos cambiar algo lo podemos hacer por separado y sin temor de que ese cambio perjudique el resto del dibujo.

4-Para crear varias capas mas (en este caso cinco) hacemos clic sobre el botón “Insert Layer” cinco veces.  Cada una se irá rotulando automáticamente y el orden de creación será el que predomine. Así se tiene que la última capa que se cree estará por encima de las demás.

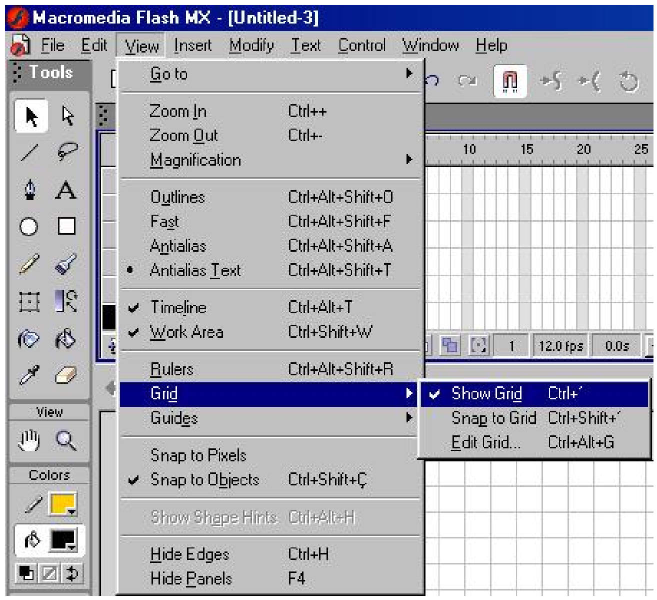


5- Ahora rotulamos las capas Layer2, Layer3, Layer4, Layer5, Layer6 con los nombres Cara, Boca, Ojos, Cabello y Cuello respectivamente.(Recuerde que esto se puede hacer desde el panel “Properties Layer” o haciendo doble clic sobre el nombre de cada Layer y digitando el nuevo nombre para cada capa).

Los nombres escritos para cada capa nos dan ahora una idea del objeto que vamos a crear, por supuesto que se trata de una cabeza. De hecho el ejemplo que realizaremos será la cabeza de un personaje masculino usando la técnica de Manga (que es como el Comic japonés). Talvez por el momento esto no tenga nada que ver con un problema matemático. Sin embargo el ejemplo nos ayudará a desarrollar nuestras habilidades de dibujo en Flash. Además nos permitirá sentirnos satisfechos al observar que en Flash se pueden hacer cosas que para los que no sabemos dibujar resultaban imposibles.

6- Nos colocamos sobre la capa “Rejilla” haciendo clic sobre ella. La sombra negra nos indica que está seleccionada y que es en ella donde vamos a trabajar.

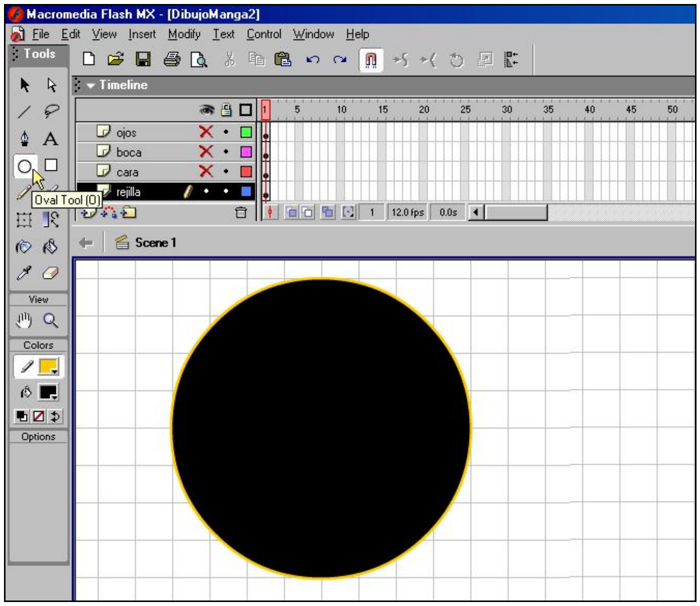
7-Ahora nos vamos al menú “View” y hacemos clic sobre él. Nos movemos hacia el submenú “Grid” y escogemos la opción “ShowGrid”.(Esto habilitará una rejilla que nos servirá de guía a la hora de realizar nuestros dibujos).



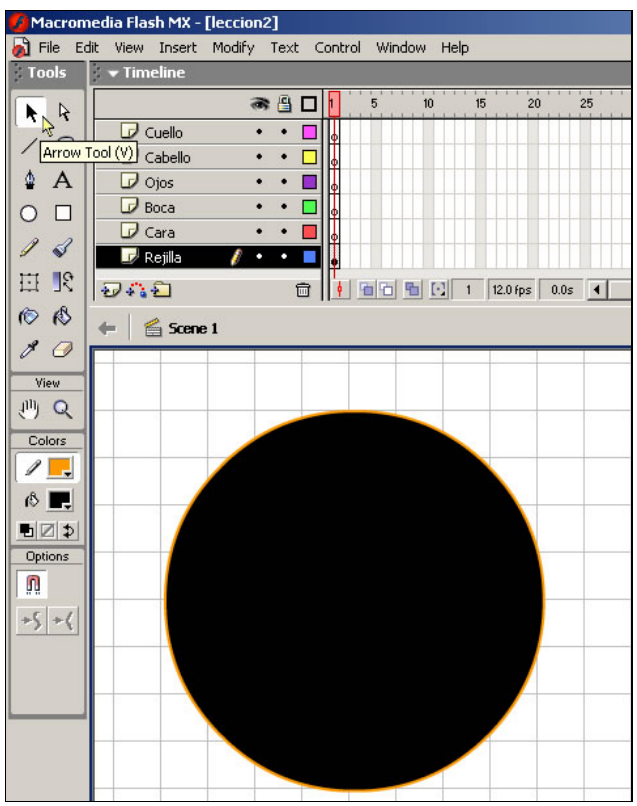
Lo que vamos a hacer ahora es una plantilla o rejilla que nos servirá de guía para colocar los componentes del rostro de nuestro personaje.

8- Seleccionamos la herramienta “Oval Tool” de la barra de herramientas (Esta nos permite dibujar elipses y círculos). Ahora ubicamos el puntero del ratón en la parte superior izquierda de un cuadro cualquiera de la rejilla. Presionamos el botón izquierdo del ratón y arrastramos **(Sin dejar de presionar)** en forma horizontal ocho cuadros hacia la derecha y verticalmente ocho cuadros hacia abajo. Ahora dejamos de presionar el botón.

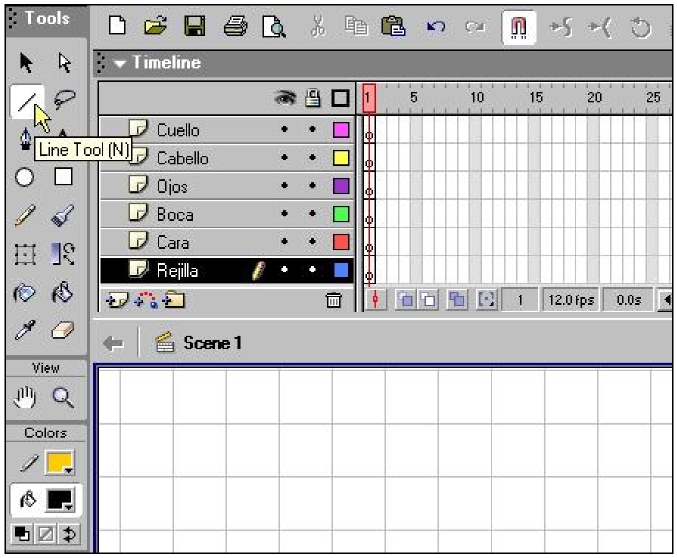
El círculo que se forma consta de dos partes. Una parte es la línea que lo rodea y otra es el área interna.



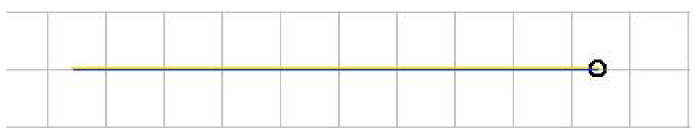
9- Ahora debemos eliminar la parte interna del círculo. Para eso escogemos la herramienta "Arrow " del cuadro de herramientas. Posicionamos el puntero del ratón en la parte oscura del círculo y hacemos clic con el botón izquierdo del ratón. Luego presionamos la tecla "Borrar" o suprimir del teclado.



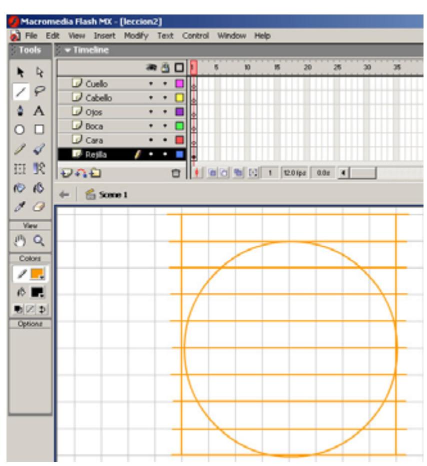
10-El la barra de herramientas “Tools” que se ubica en la parte superior izquierda de la pantalla escoja la herramienta “Line Tool”(Esta nos permite dibujar líneas rectas)



11- Con la herramienta “Line Tool” seleccionada y con ayuda de la rejilla, ubicamos el puntero del ratón medio cuadro hacia la izquierda del círculo y un cuadro arriba del círculo. Presionamos el botón Izquierdo del ratón **(No deje de presionar)** y arrastramos hacia la derecha una distancia de medio cuadro **(No deje de presionar),** siga arrastrando unos ocho cuadros más hacia la derecha **(No deje de presionar)** y por último arrastre medio cuadro mas. Ahora Si puede dejar de presionar el botón.

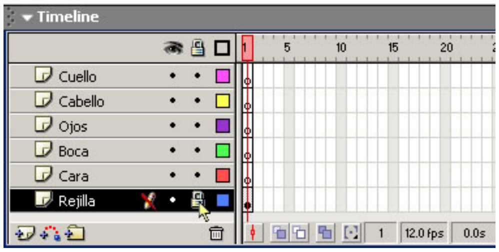


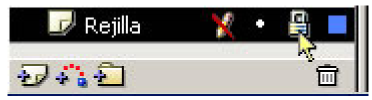
12- Siempre con ayuda de la herramienta “Line Tool” , haga nueve líneas paralelas a la anterior con distancias de un cuadro entre cada una de ellas. Luego trace dos líneas verticales para cerrar el marco como se muestra en la figura.



Con nuestra rejilla lista, lo único que queda por hacer es habilitar la opción de "Candado", que es la que nos permite asegurarnos de no hacer cambios en los elementos que estén contenidos en esta capa mientras editamos las siguientes.

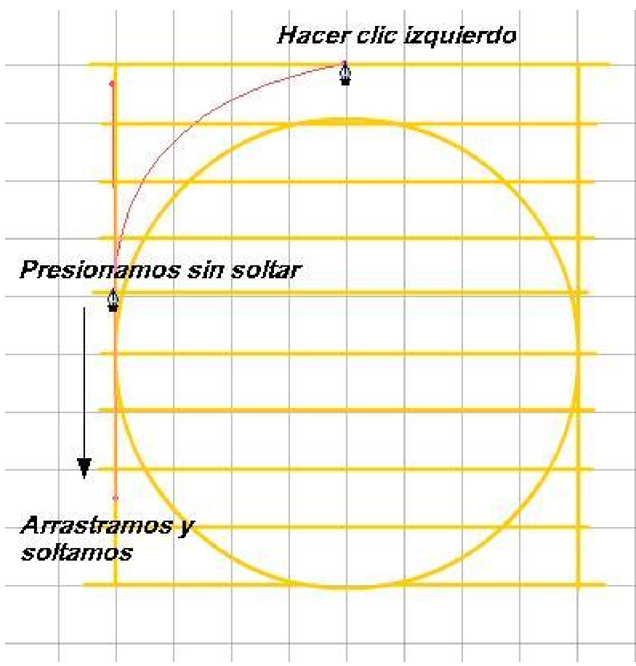
13- Junto a cada capa se ven dos opciones: una que habilita la vista (la capa se ve o no) y otra que habilita la edición (se puede editar o no). Ubicando el puntero del ratón en la segunda opción hacemos clic con el botón izquierdo. Aparecerá un pequeño candado indicando que la capa no se puede editar.

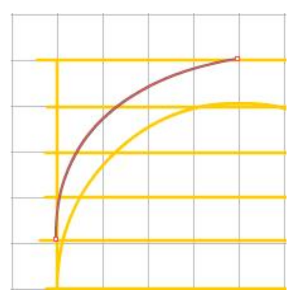




14-Ahora posicionamos el puntero del ratón en la capa "Cara" y hacemos clic izquierdo para escoger la capa. Ahí es donde dibujaremos las facciones mas importantes del rostro de nuestro personaje.

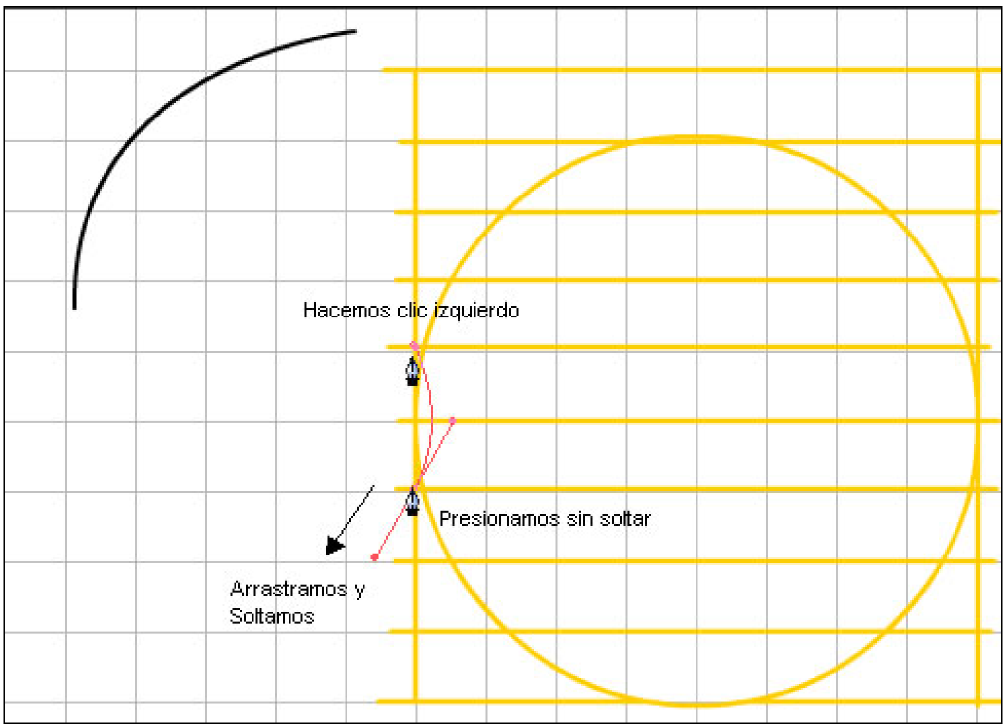
15- Vamos a iniciar el dibujo de nuestro personaje escogiendo la herramienta "Pen Tool" del cuadro de herramientas. Ahora posicionamos el puntero del ratón en la mitad de la línea horizontal superior de la rejilla y hacemos clic izquierdo (esto marcará nuestro punto de inicio). Ahora movemos el puntero al segundo punto que está cuatro cuadros a la izquierda y cuatro cuadros hacia abajo. Presionamos (**Sin soltar)** el botón izquierdo y arrastramos hacia abajo tres cuadros y medio, ahora sí soltamos el botón.





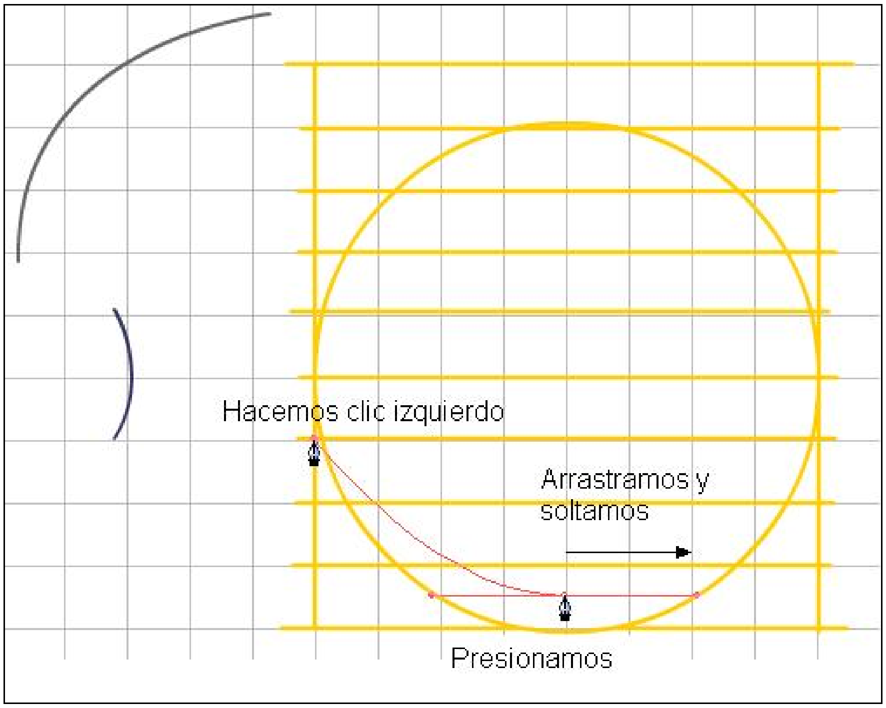
16- Ahora seleccionamos la herramienta “Arrow” de la barra de herramientas y ubicamos el puntero del ratón sobre la línea que acabamos de crear. Una vez posicionados sobre la línea hacemos clic izquierdo para seleccionarla. Ya seleccionada, presionamos nuevamente el botón izquierdo (Sin soltar) y arrastramos la línea fuera de la rejilla. Soltamos el botón y terminamos la acción.

17- Nuevamente seleccionamos la herramienta “Pen” para hacer otra línea. Colocamos el puntero del ratón en la esquina superior izquierda de la rejilla y lo movemos cuatro cuadros hacia abajo. Ahora que estamos colocados hacemos clic izquierdo. Movemos el puntero del ratón dos cuadros mas abajo. Presionamos el botón izquierdo**(No suelte)** y arrastramos un cuadro hacia abajo, medio cuadro hacia la izquierda y por último soltamos.



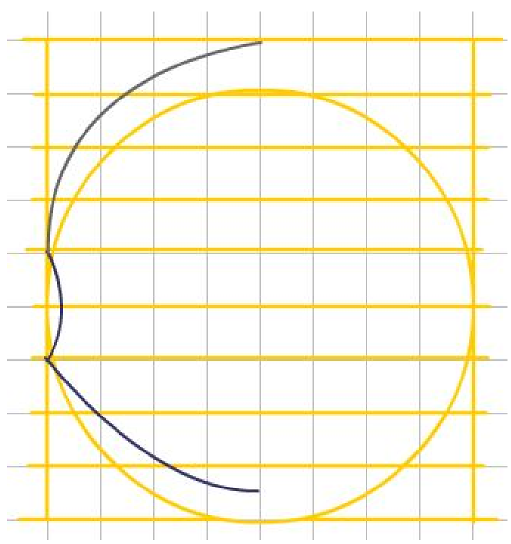
18-Ahora seleccionamos la herramienta “Arrow” de la barra de herramientas y ubicamos el puntero del ratón sobre la línea que acabamos de crear. Una vez posicionados sobre la línea hacemos clic izquierdo para seleccionarla. Ya seleccionada, presionamos nuevamente el botón izquierdo (Sin soltar) y arrastramos la línea fuera de la rejilla. Soltamos el botón y terminamos la acción.

19- Seleccionamos la herramienta “Pen” para hacer otra línea. Colocamos el puntero del ratón en la esquina superior izquierda de la rejilla y lo movemos seis cuadros hacia abajo. Ahora que estamos colocados hacemos clic izquierdo. Movemos el puntero del ratón dos cuadros y medio mas abajo y cuatro cuadros hacia la derecha. Presionamos el botón izquierdo **(No suelte)** y arrastramos dos cuadro hacia la derecha y por último soltamos.



20- Ya terminadas estas tres líneas, procederemos a colocar dentro de la rejilla las dos líneas que creamos de primeras en el lugar que les corresponde. (Ya sabes, haces clic izquierdo sobre cada una, las seleccionas y las arrastras).

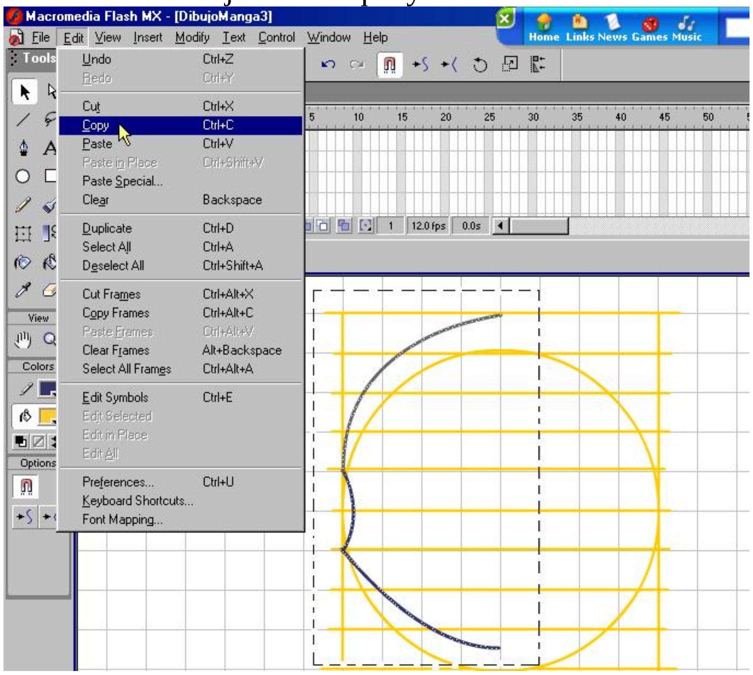
Tip: Para ajustar cualquier cosa de una manera más precisa lo hacemos con ayuda de las flechas del teclado.



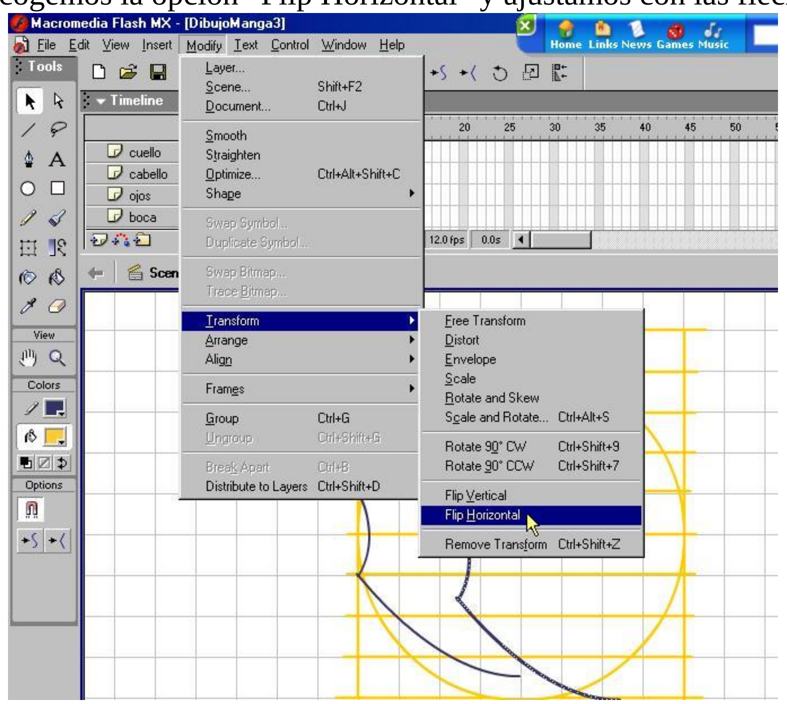
Ya tenemos la mitad, ahora simplemente lo que debemos hacer es copiar y pegar, para luego reflejar la imagen y así lograr tener la forma de la cabeza.
Para lograr esto ejecutamos los siguientes pasos.

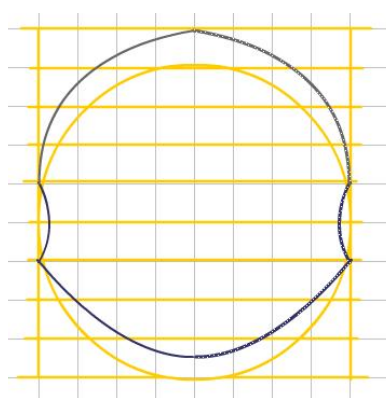
21- Marcamos el área de selección con el puntero del ratón presionando el botón izquierdo y arrastrando sin soltar el botón hasta lograr encerrar en un cuadro las líneas que acabamos de dibujar.

22- Luego hacemos clic izquierdo con el botón del ratón sobre el menú “**Edit**” y escogemos la opción “**Copy**”. Ahora nuevamente accedemos al menú “**Edit**” y ahora seleccionamos la opción “**Paste**”. Observe como aparece una nueva línea junto a la que ya teníamos.



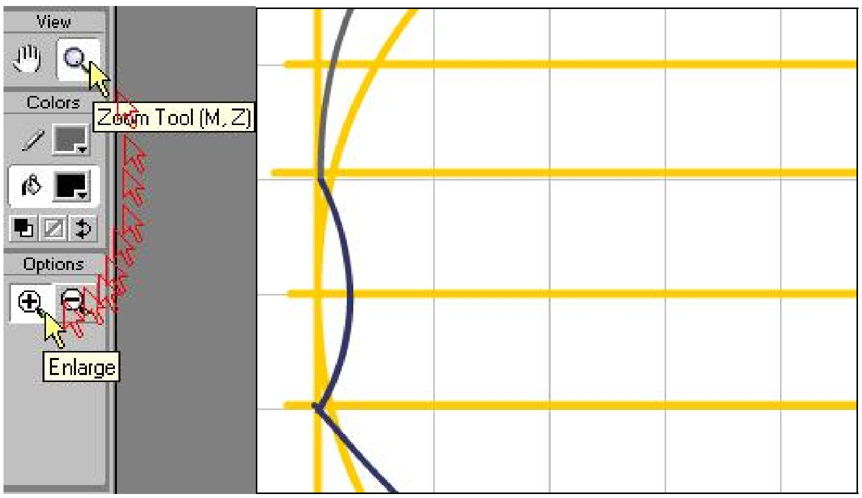
23-Ahora hacemos clic izquierdo sobre el menú “Modify” y escogemos el submenú “Transform”. Ahí escogemos la opción “Flip Horizontal” y ajustamos con las flechas del teclado hasta que se vea así.



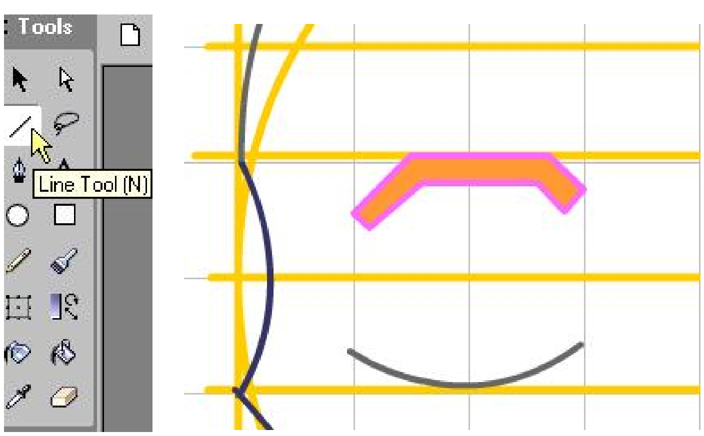


Lo único que nos falta por hacerle a esta capa son la nariz, la barbilla, el marco de los ojos y las cejas. Parece mucho pero en realidad lo único que es un poco elaborado es el marco de los ojos. Así que empezaremos por este.

24-Primero hacemos un acercamiento a la parte de la rejilla donde colocaremos el ojo derecho del personaje. Esto lo logramos escogiendo la herramienta “Zoom” de la barra de herramientas. Luego seleccionamos el modificador “Enlarge” y posteriormente hacemos clic izquierdo en un punto que se ubica cinco cuadros hacia abajo y dos cuadros hacia la derecha de la esquina superior izquierda de la rejilla. Esto nos permite dibujar de una manera mas precisa.

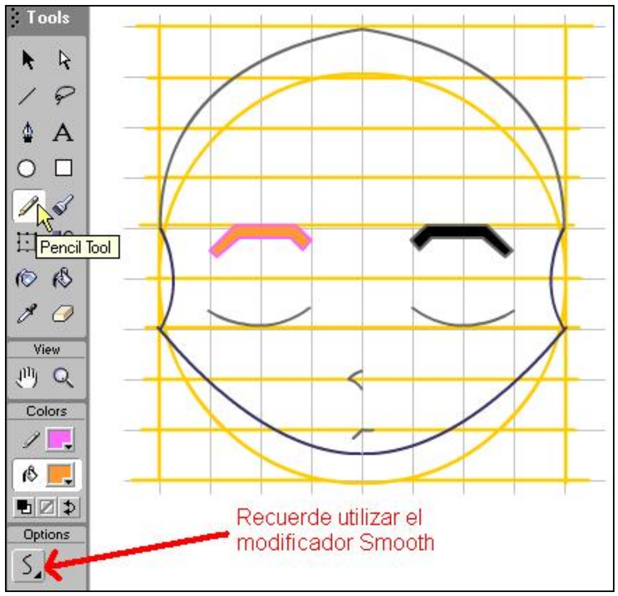


25-Escogemos la herramienta “Line” en la barra de herramientas y dibujamos la parte superior del marco del ojo. En este caso es la parte de la figura que está con los colores naranja y rosa. La parte rosa la logramos con la línea y la parte naranja rellenando con la herramienta “Paint Bucket”. La parte inferior la logramos utilizando la herramienta “Pen”. Para esta parte inferior hacemos primero un clic izquierdo en nuestro punto de partida, luego presionamos el botón izquierdo en nuestro punto de llegada y sin soltar el botón arrastramos hacia la derecha y hacia arriba hasta lograr el trazo que queríamos.

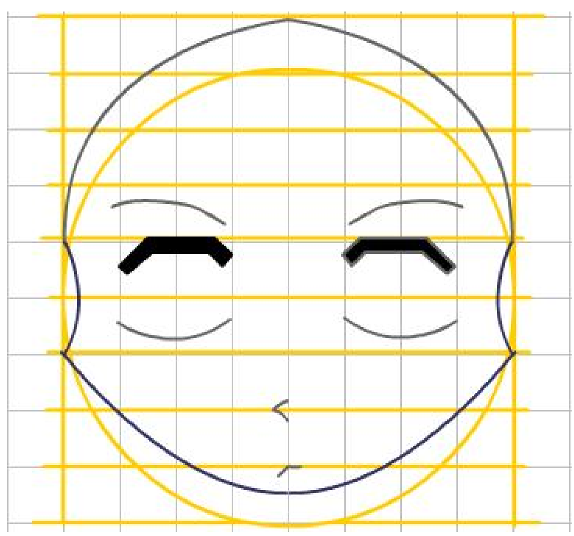


26-Ya terminado el marco del ojo derecho, lo que nos queda por hacer es copiarlo y reflejarlo para que tengamos el del ojo izquierdo. Esto lo podemos hacer seleccionando el marco del ojo con la herramienta “Arrow”. Una vez seleccionado vamos al menú “Modify” , submenú “Transform” y escogemos la opción “Flip Horizontal”. Luego solo arrastramos para colocar el marco nuevo en el lugar que le corresponde.

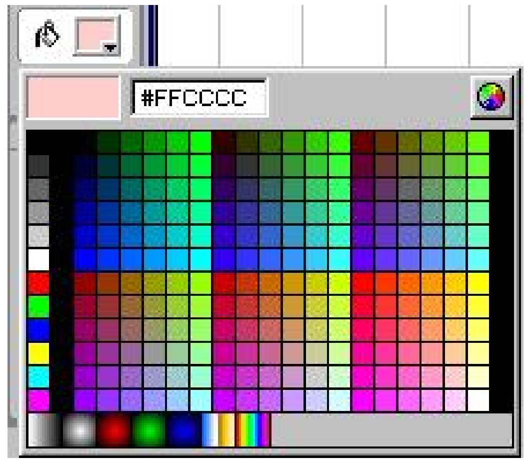
27- Ahora hacemos la nariz y la barbilla con ayuda de la herramienta “Pencil”. Esta posee tres modificadores. El primero acerca los trazos a líneas rectas, el segundo suaviza el trazo hacia líneas curvas y el tercero hace trazos más cercanos hacia la línea que nosotros hicimos. Para este caso escogemos el segundo, que es sin duda el que nos ayuda a dibujar un poco más.



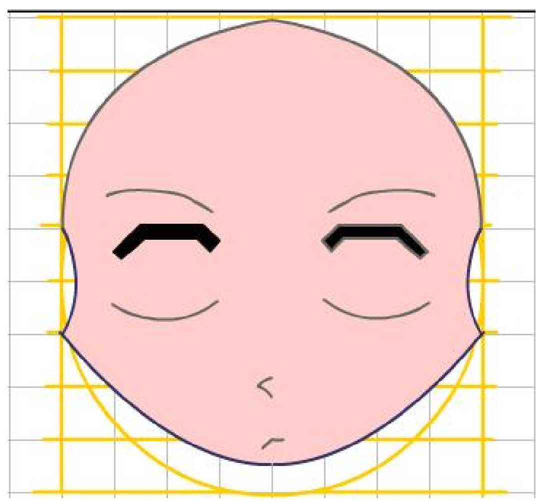
28- Solo faltan las cejas y las orejas, para dibujar las cejas utilizamos la herramienta “Pen” nuevamente.(Recuerde que es un punto inicial, un punto final, arrastrar y soltar)



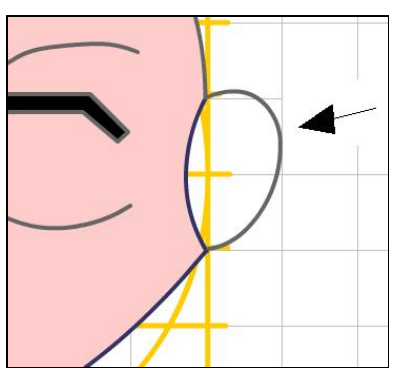
24-En este paso pintaremos el interior de la cara, así que seleccionamos la herramienta “Paint Bucket” del cuadro de herramientas y escogemos en el menú de modificadores el modificador “Close Large Gabs” como se muestra en la figura. Luego colocamos el puntero del ratón en el interior de la cara y hacemos clic izquierdo.



Nota: Si no nos gusta el color de relleno podemos escoger otro con la herramienta Fill Color del cuadro de herramientas.

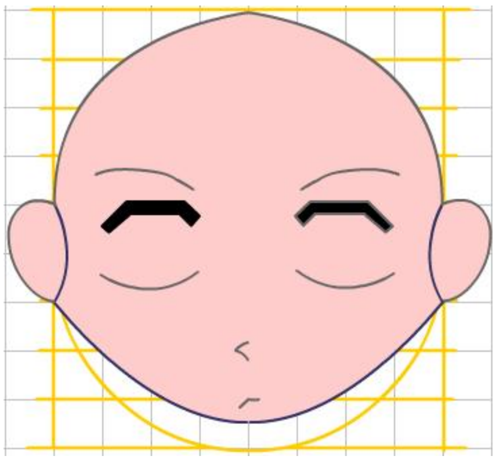


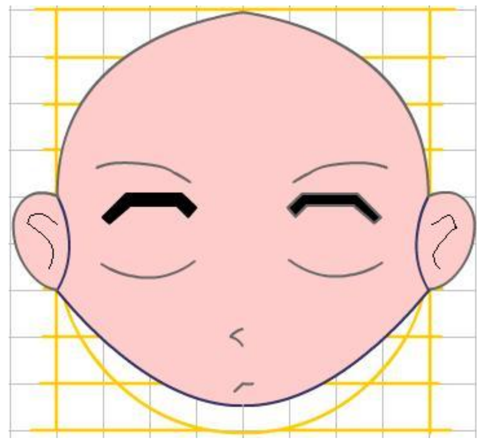
25- Ahora van las orejas. Primero hacemos un acercamiento a la parte izquierda de dibujo con la herramienta “Zoom” en su modificador “Enlarge”. Seleccionamos la herramienta “Pencil” en su modificador “Smooth”y hacemos la línea que se muestra en la figura.



26-Una vez terminada la línea, escogemos la herramienta “Arrow”, seleccionamos la línea y la copiamos.Recuerde que esto lo hacíamos en el menú “Edit”- opción “Copy” (Otra manera de copiar es oprimiendo la combinación de teclas “**Ctrl + C ”**).

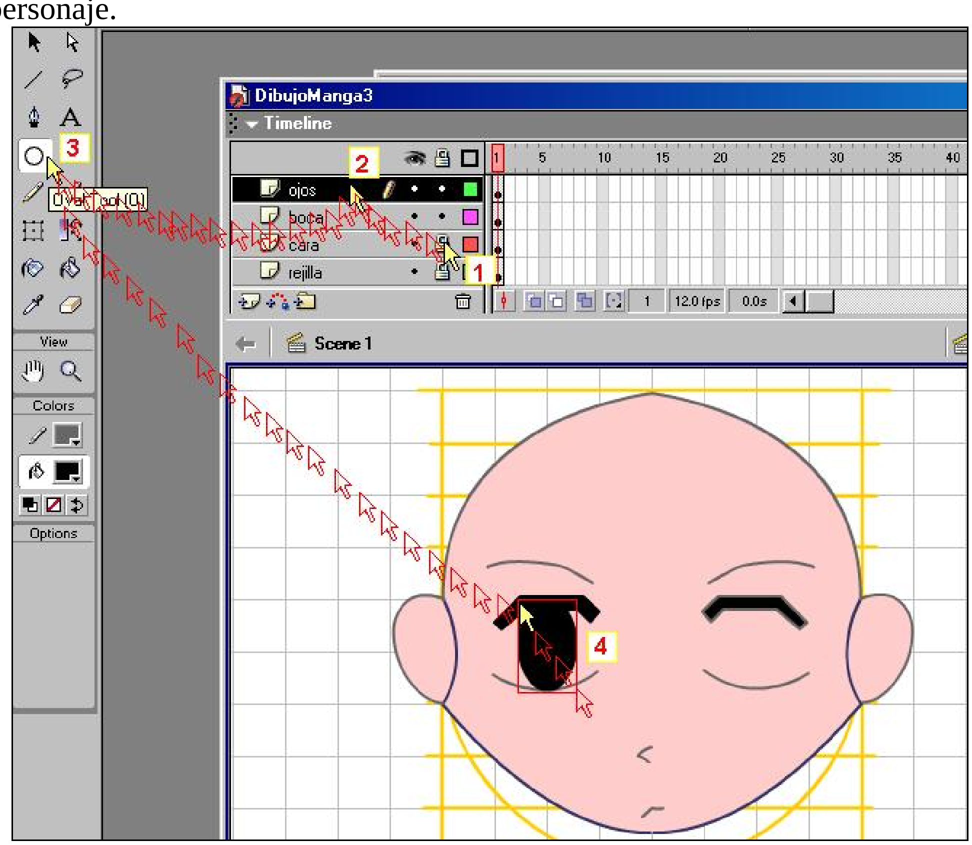
27-Ahora seleccionamos la herramienta “Zoom” en su modificador “Reduce” ponemos el dibujo en su estado original. Escogemos en el menú “Edit” la opción “Paste” (Otra manera de pegar es oprimiendo la combinación de teclas “**Ctrl + V ”**). Ahora en el menú “Modify” escogemos el submenú “Transform” y hacemos clic izquierdo sobre la opción “Flip Horizontal”. Con la herramienta “Arrow” seleccionamos la línea y la ubicamos en la parte derecha de la cabeza. Recuerde que también podemos mover la línea con ayuda de las “flechas” del teclado. Por último rellenamos las orejas utilizando la herramienta “Paint Bucket”. Si se quiere se puede poner el detalle de las orejas.





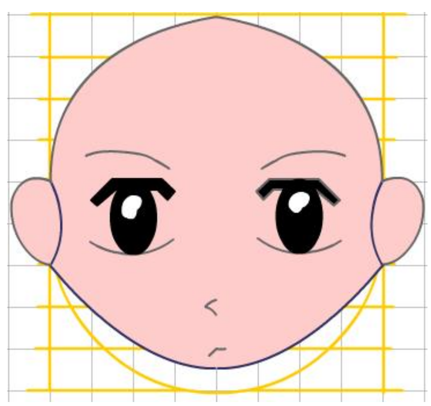
TIP: Un paso muy importante en la realización de este dibujo lo es sin duda el trabajar por capas, debido a que si no lo hubiésemos hecho así no podríamos pintar la cara de nuestro personaje. Esto se debe a que las líneas pertenecen a la misma capa y “cierran el dibujo”, que es una condición indispensable para que Flash pueda pintar la región que queremos. Ahora vamos con los ojos.

27- En la línea de tiempo bloqueamos la capa **Cara (**Recuerde el candadito**),** seleccionamos la capa **Ojos** y con ayuda de la herramienta “Oval” hacemos un óvalo en la parte central del marco del ojo derecho del personaje.



28- Con la misma herramienta “Oval” hacemos el ojo izquierdo (Recuerde que debe estar en la capa de los ojos.)

29-Para darle un toque final a los ojos escogemos la herramienta “Eraser”. En el panel de modificadores escogemos “Eraser Mode” y aplicamos el modificador “Erase Fills”. Luego en el panel de modificadores escogemos “Eraser Shape” y escogemos la segunda forma que es redonda y pequeña. Posteriormente lo aplicamos sobre los ojos para obtener el efecto del brillo. Por último seleccionamos la herramienta “Paint Bucket”, escogemos un color de relleno blanco y lo aplicamos en el brillo de los ojos.



GENERACIÓN DE TEXTO WORD

Rándall Brenes Gómez[1]
Adriana González Dobrosky[2]

Resumen:

Se ha detectado en la docencia de la enseñanza secundaria que los y las profesoras hemos tenido algunos inconvenientes para generar documentos con contenido matemático de calidad aceptable.

Por las pocas herramientas computacionales y, unido a esto, por el poco contacto que algunos y algunas hemos tenido con las computadoras, es que se vuelve cada vez más necesario contar con pequeñas capacitaciones para aquellos que se interesen por la elaboración de exámenes y prácticas que tengan una buena calidad y excelente presentación a nuestros muchachos y muchachas de los colegios.

Las herramientas computacionales que nos pueden ayudar a este propósito son muchas y muy variadas, nos obstante nos interesa algunas que sean de un uso común, como el editor de texto de Microsoft Office, llamado Word y alguna versión "demo" de paquetes como el Geómetra™.

Por esta razón es que hemos ideado un pequeño taller para mostrar algunas ventajas de transcribir las prácticas y / o exámenes.

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
[2] Colegio Elías Leiva

GEOMETRA BÁSICO

Andrea Camacho Sánchez[1]
Pamela Granados Vargas[2]

Resumen:

El Geómetra es un software no libre, desarrollado por la Empresa Key Curriculum Press, que permite realizar diferentes tipos de actividades de exploración y creación en los distintos campos de la matemática como son la geometría, trigonometría, álgebra, funciones, entre otros. De uso del profesor para desarrollar sus clases, así mismo, para que los estudiantes para exploren para comprender conceptos abstractos.

En este taller se busca presentar a un nivel básico las herramientas básicas que tiene el Geómetra, con la finalidad de que le sirva al docente en la elaboración de pruebas, además de planear actividades en las cuales el estudiante pueda explorar los conceptos matemáticos en un laboratorio o como una herramienta pedagógica para desarrollar los contenidos en el aula.

Objetivos del taller:

- Conocer las principales herramientas del Geómetra.
- Utilizar el programa para explorar conceptos dentro del aula
- Creación de imágenes para la elaboración de pruebas y prácticas.

Estructura del curso:

El curso consta de dos sesiones, de una hora y treinta minutos de duración cada una. Las sesiones tendrán un módulo de trabajo que consta de dos **guías** donde se explican los contenidos básicos y actividades a realizar.

Sitio de consulta: www.keypress.com/sketchpad

[1] Colegio Sagrado Corazón de Jesús, Centro de Recursos Virtuales, ITCR, acamacho@itcr.ac.cr
[2] Colegio Científico Costarricense, Sede Cartago, pame@costarricense.cr

Manual para JClic

Presentación:

El presente manual fue elaborado para el IV congreso internacional sobre la enseñanza de la matemática asistida por computadora, realizado en Cartago, Costa Rica 2005.
Para fines del taller "Clic en la enseñanza primaria y secundaria básica" con motivo que los docentes puedan elaborar actividades educativas en JClic.

Las personas que elaboraron este manual son todas estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora impartida por el Instituto Tecnológico de Costa Rica.
Texto y diseño: Carlos Guillén, Alejandro Salas, Andrés Ortiz, Cindy Calderón y Donald Herrera.

Ha sido cuidadosamente revisado por los autores, sin embargo pueden presentarse algunos errores de edición. Cualquier duda sugerencia o comentario por favor hacerlo llegar a los autores enviándolo al correo: cguillenp@gmail.com

Tabla de contenidos

1. ¿Qué es JClic?

JClic es una herramienta de autor que permite al profesorado crear con facilidad recursos educativos digitales aunque no conozca de programación. La amplia base de usuarios con la que contaba su antecesor, Clic 3.0, se verá sin duda ampliada ya que JClic permite crear mayor variedad de actividades, cuenta con nuevas funcionalidades y permite crear recursos cuya visualización no está restringida a ningún sistema operativo en particular.

JClic está fundamentalmente dividido en dos programas por un lado tenemos el JClic-Author que es la herramienta que permitirá diseñar y editar nuevas actividades o a modificar las ya existentes; por otro lado tenemos el JClic-Player que es la herramienta que ejecuta dichas actividades y por tanto el componente de JClic que será utilizado por los alumnos para trabajar con ellas.

2. ¿Cómo y quién puede usarlo?

El material puede ser utilizado por cualquier profesor(a) de forma autónoma y también puede servir de base para la realización de actividades de formación tanto presencial como a distancia pues se puede acceder a las actividades mediante la Internet, así como en actividades organizadas por cualquier tipo de institución educativa.

Además al ser un software libre se nos permite distribuir copias del programa gratuitamente y por la simplicidad en la edición y ejecución de las actividades es amigable para todas las personas que tengan conocimiento mínimos sobre la computación.

3. ¿Cómo puedo instalar JClic?

- JClic se ha creado con una herramienta de programación llamada Java, que permite a las aplicaciones funcionar en diversos tipos de ordenadores, sistemas operativos y navegadores. Para utilizar los applets es necesario instalar una versión actualizada de motor Java™, prepararlo para reconocer la firma digital de JClic y añadir un módulo adicional para sonidos MP3 y secuencias de vídeo digital.

- JavaTMWebStart:
  Es la canalización entre Internet y el sistema que permite al usuario ejecutar y gestionar aplicaciones desde la Web. Java Web Start proporciona una activación fácil y rápida de las aplicaciones con un único clic y garantiza la ejecución de la última versión de la aplicación, eliminando los complicados procesos de instalación o de modernización. Las versiones más actuales del JRE ya tienen incorporado Java Web Start, no hace falta instalarlo aparte.

- Antes de poder instalar el JClic debes asegurarte que tienes instalado Java en tu computadora de no ser así puedes visitar las siguientes direcciones: www.java.com o www.sun.com para descargar gratuitamente la máquina virtual Java; luego instala el JClic.

4. ¿Cómo comenzar un proyecto (JClic-Author)?

Para comenzar a crear tus propias actividades debes definir, en primer lugar, el proyecto donde las albergarás. Cada proyecto es una secuencia de actividades que siguen una temática común.

Ahora que has decidido tu proyecto abre el JClic-Author; como puedes ver en la ilustración el JClic-Author está formado por una serie de tiras de menús o pestañas estas son *Proyecto, Mediateca, Actividades y Secuencias*

Fíjate en la *figura 3.1* en la que muestra las cuatro pestañas:

Figura 4.1

1. En la pestaña ***Proyecto*** puedes ver la información del proyecto así como la de su autor.

2. En la pestaña ***Mediateca*** verás todos los recursos multimedia que utiliza este proyecto.

3. La pestaña ***Actividades*** tiene todas las actividades que posee este proyecto.

4. Por último en la pestaña ***Secuencias**, e*ncontrarás la secuencia de aparición de las actividades cuando las ejecutes.

Cuando termines, **cierra** la ventana o haz **clic** en *Archivo-Salir*.

Si cuentas con un proyecto hecho por otra persona puedes abrirlo desde el ***menú Archivo\ Abrir el archivo***, pero si deseas crear un nuevo proyecto selecciona ***Archivo\ Nuevo proyecto***, en las siguientes secciones hablaremos más sobre el autor de proyectos.

Figura 4.2

5. ¿Conociendo la interfaz del programa?

Con el objetivo de que se familiarice con la interfaz de trabajo explicaremos más ampliamente lo se puede hacer con cada una de las cuatro pestañas que ofrece el JClic-Author para realizar las actividades

5.1 Registro del proyecto

Para comenzar un nuevo proyecto, en primer lugar, es conveniente ***describirlo***. JClic incluye una pestaña denominada ***Proyecto*** donde se deben incluir los ***descriptores*** más importantes del proyecto, que faciliten después su catalogación y utilización por parte de cualquier profesor(a), interesado(a) en él.

A continuación describiremos cada una de las funciones de los componentes de esta pantalla:

En la pestaña ***Proyecto*** se incluirán los siguientes datos:

Descripción:

- *Título:* Título genérico del proyecto de actividades.

- *Descripción:* Atributos como: Descripción o Tema, Nivel educativo de referencia, área, lenguaje…

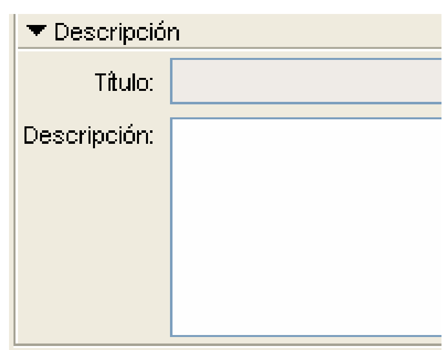


Figura 5.1.1

Creación:

- *Autores:* Al presionar sobre el botón + podrás añadir los datos de los autores del proyecto.

- *Centro:* Al presionar sobre el botón + podrás añadir los datos sobre el centro o centros al que pertenecen los autores.

- *Revisiones:* Se añaden los datos de la fecha y autores de la creación del proyecto. Al presionar sobre el botón + podrás insertar las fechas de Sus posibles revisiones.

Las flechas te permitirán cambiar de orden las anotaciones insertadas.

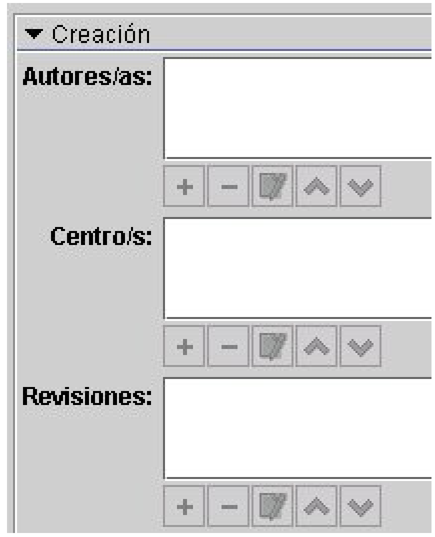


Figura 5.1.2

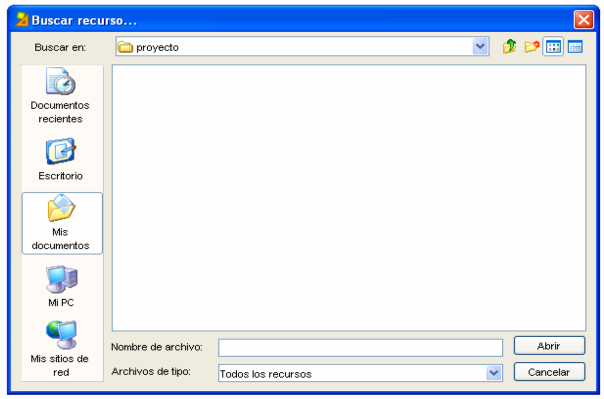
El resto de las etiquetas definen el nivel para el cual es recomendado el proyecto de actividades, el área o disciplina en la que se enfoca que puede ser español, estudios sociales, matemáticas y otros, el idioma hace referencia al idioma que utilice el programa en los mensajes y la piel de la interfaz de usuario define un diseño preestablecido del visor del proyecto, es decir la apariencia que tendrá el proyecto en al ser visto en el JClic-Player

Figura 5.1.3

5.2 La Mediateca

Todos los recursos multimedia que necesites para realizar cada actividad de tu proyecto deberán estar guardados en la Mediateca; por ello hay que guardar en ella los dibujos y sonidos que se necesitarán para ello presiona este icono  que se encuentra en la esquina superior derecha de la pantalla que despliega la pestaña Mediateca

Al hacer esto se abrirá una ventana similar a la de la *figura 5.2.1*; busca el lugar donde tienes el recurso que desaseas añadir a la Mediateca.



F
Figura 5.2.1

Luego te aparecerá una venta que te pide la confirmación de agregar el recurso al aceptarla quedará agregado y al rechazarla no se agregará (*figura 5.2.2*).

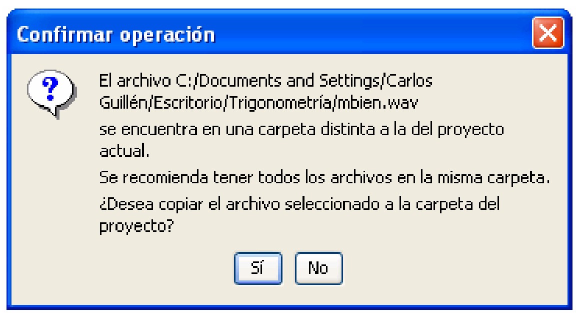


Figura 5.2.2

La información hace referencia a los datos del recurso que este seleccionado, es decir que este son los datos del recurso que este bordeado con el marco de color azul.

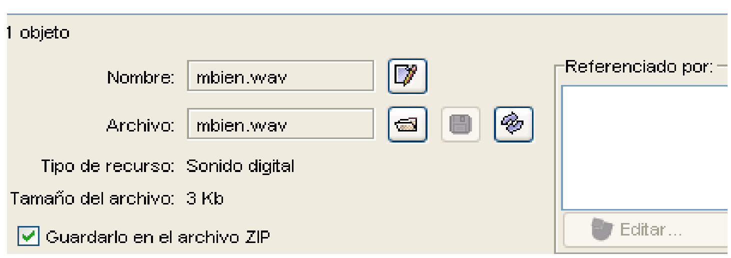


Figura 5.2.3

En caso de querer eliminar el recurso se selecciona y se presiona el icono que tiene la forma de un basurero  y en caso de visualizar el elemento agregado se presiona con el puntero del ratón el siguiente icono  los demás iconos no tienen importancia por el momento.

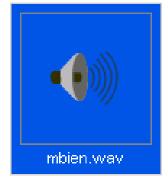


Figura 5.2.4

5.3 Registro de Actividades

Para acceder al registro de actividades debes seleccionar la pestaña Actividades

Figura 5.3.1

Para comenzar con una nueva actividad debes seleccionar el icono que se encuentra en la esquina superior derecha de la pantalla desplegada 

Descripción de los iconos:

 Permite visualizar como va quedando la actividad

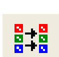
 Estos permiten desplazarse de arriba hacia abajo y viceversa a través de las actividades desarrolladas

 Permite copiar una actividad

 Permite cortar

 Pega la actividad copiada o cortada

 Elimina una actividad

 Copia los atributos (Piel, color, fuente, otros) de la actividad donde se encuentra a otras actividades. Al seleccionar este icono se abre la siguiente ventana (figura 5.3.2):

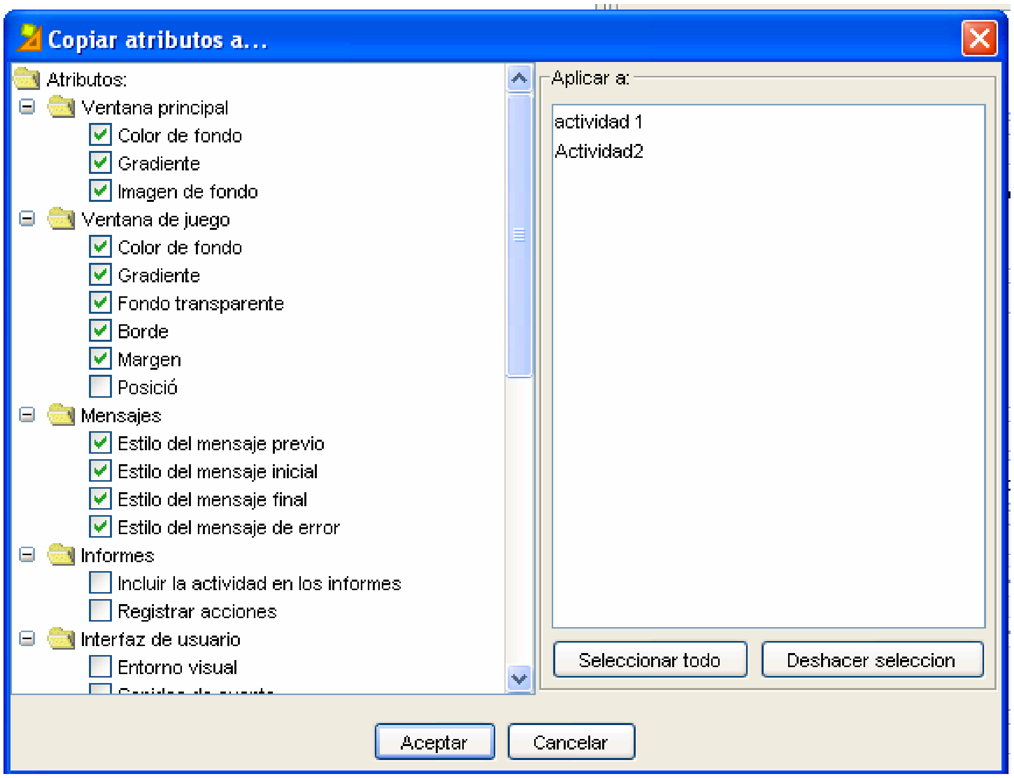


Figura 5.3.2

Al lado derecho de esta venta seleccionamos las actividades a las que queremos transferirle los atributos y al lado izquierdo marcamos cuales atributos vamos a transferir.

Al seleccionar la pestaña actividades se nos abre a su vez otra serie de pestañas (*opciones, Ventana, Mensajes y Panel*) cuya descripción se hará a continuación.

1. **Opciones:** Aquí se configuran las propiedades generales de la actividad como tiempo, intentos, sonidos y se activa o se desactiva el botón de ayuda.

2. **Ventana:** En este lugar diseñas la forma y los colores que quieres que tenga cada actividad que conforma tu proyecto.

3. **Mensajes:** Acá escribes los mensajes que va a ver el usuario, mensajes como instrucciones, o mensajes de felicitación por haber completado una actividad.

4. **Panel:** Aquí editas y diseñas cada una de las actividades.

5.3.1 Registro de opciones

En la ficha de ***descripción*** te aparecerá el tipo de actividad, que seleccionaste para desarrollar, el nombre que lleva y en descripción puedes escribir un resumen de ella.

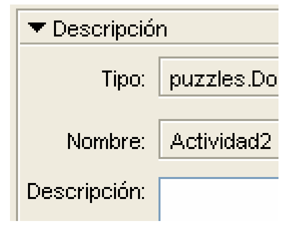


Figura 5.3.3

En la ficha de ***informes*** puedes decidir en incluir o no un informe del rendimiento de la persona que está resolviendo tu activad.

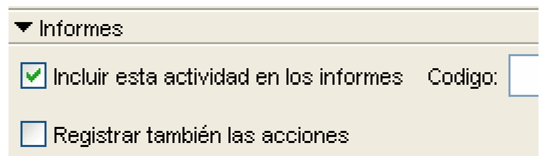
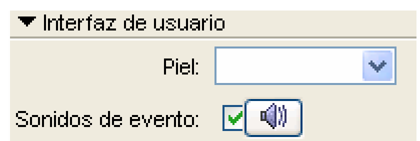


Figura 5.3.4



En la ***interfaz de usuario*** eliges el tipo de piel que deseas que utilice el JClic-Player y los efectos de sonido que deseas que se escuchen para ello presiona el icono  y en la ventana que se abre puedes elegir entre quitar los sonidos que tiene por defecto para cada tarea, mantenerlos o cambiarlos por algunos de los que tengas en la Mediateca (*figura 5.3.5*)

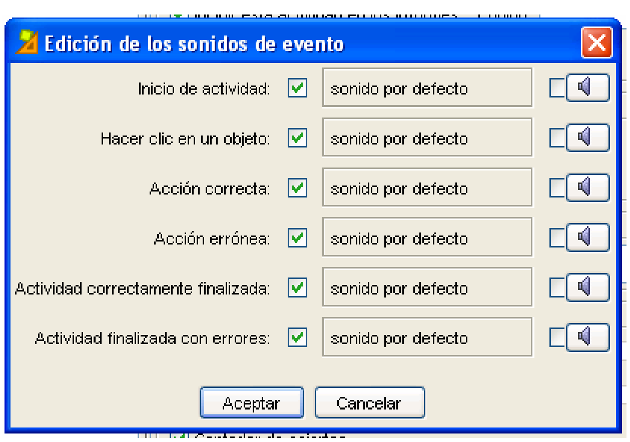


Figura 5.3.5

***Los Contadores*:** permiten llevar el control del tiempo, los intentos y los aciertos a la hora de resolver cada actividad para esto basta con seleccionar las casillas de verificación o pulsar sobre los botones que tienen los signos + y -.

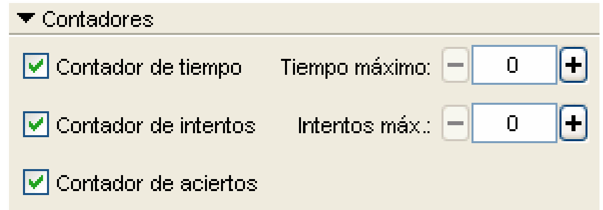


Figura 5.3.6

Botones ofrece la activación del botón de ayuda que con solo seleccionar la casilla de verificación se opta por darle al usuario del programa la solución o un mensaje que le ofrezca una pista para resolver la actividad.

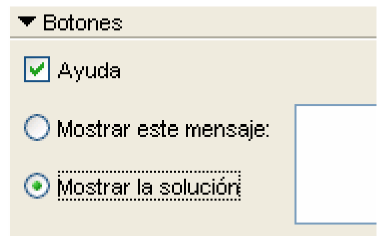


Figura 5.3.7

5.3.2 Diseño de la ventana

En la pestaña ventana se nos presenta la opción de diseñar o colorear la ventana de cada actividad y nos muestra una vista previa de cómo quedará al final; para tal fin en la parte inferior de esta pantalla se nos muestra una serie de opciones que podemos cambiar con solo hacer clic sobre ellas o deslizando barras de desplazamiento hasta obtener el color o diseño que más nos guste. (*figura 5.3.8*)

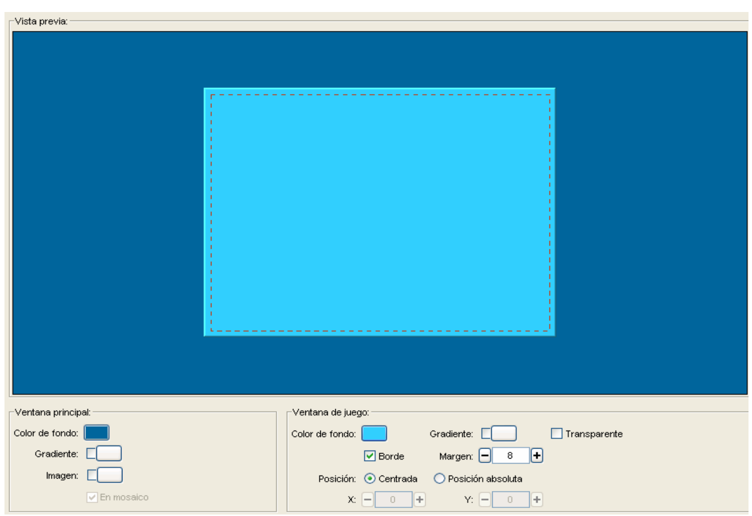


Figura 5.3.8

5.3.3 Registro de mensajes

En esta otra pantalla que resulta de presionar de las pestañas la opción de Ventana podemos seleccionar en que momento mostrar un mensaje y al mismo tiempo escribirlo y darle formato.

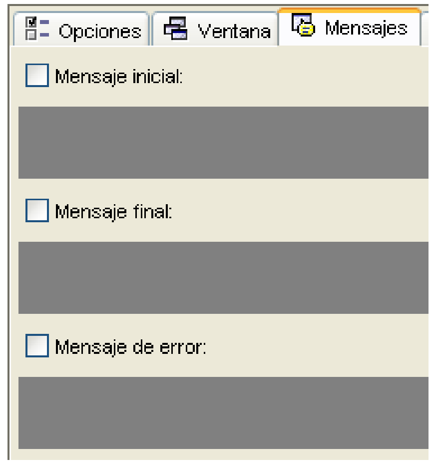


Figura 5.3.9

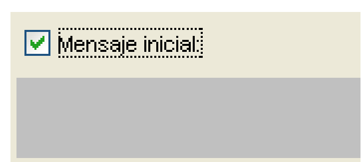
Tipos de mensajes:

1. *Mensaje Inicial*: Inserta un texto que indica qué tarea tiene que realizar el alumno en dicha actividad. Por ejemplo: *Haz un muñeco de nieve*.

2. *Mensaje Final*: Insertar el texto que se mostrará al terminar correctamente la actividad. Por ejemplo: *¡Muy Bien!*

3. *Mensaje de error:* Inserta el mensaje que mostrará cuando el usuario haga algo mal. Por ejemplo: *¡Inténtalo de nuevo!.*

Vamos a referirnos solo al Mensaje inicial porque los pasos para escribir los demás mensajes siguen el mismo procedimiento.
Activa la casilla de verificación para editar el mensaje inicial nota que la banda cambia de color de gris oscuro a un gris más claro.



Para poder escribir el mensaje haz doble clic sobre esta banda gris, para que aparezca la ventana, para editar el contenido de la casilla. Ver *Figura 5.3.10*

Figura 5.3.10

En el campo de texto puedes escribir el mensaje que quieres que el usuario de tu proyecto vea en cada actividad y con los botones de al lado puedes posicionar el texto en el centro, a la izquierda o a la derecha.

Activando la casilla de verificación de imagen puedes agregar una imagen a tu mensaje y presionando el botón que se encuentra al lado muestra la siguiente ventana para elegir de la Mediateca la imagen que se quiere y luego presione aceptar.

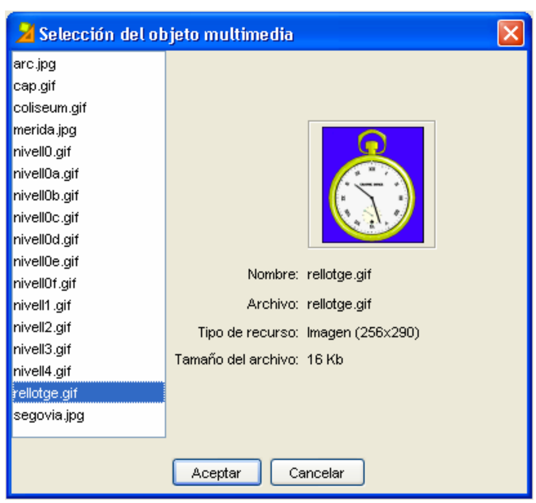


Figura 5.3.11

El la sección de estilo se nos presentan dos casillas de verificación activando la primera se puede modificar la fuente de la letra y con la segunda se eligen en ponerle o no borde a la banda que contiene el mensaje.

Al presionar el botón que tiene las letras abc se muestra la siguiente ventana

Figura 5.3.12

En esta puedes cambiar el color del fondo (banda que contiene el mensaje) al presionar el botón de Color de fondo, se puede seleccionar el tipo de letra (predeterminada Arial), el tamaño (17 por defecto), ponerla en negrita o en itálica, cambiar el color del texto, entre otras posibilidades con solo mover las barras de desplazamiento, accionar los botones, o marcar las casillas de verificación.

Si se desea cambiar de color al accionar uno de los botones que permiten hacer esto se mostrará la siguiente ventana.

Figura 5.3.13

En el contenido activo puedes modificar o activar diversos recursos de multimedia, al activar el botón se te mostrará la siguiente ventana

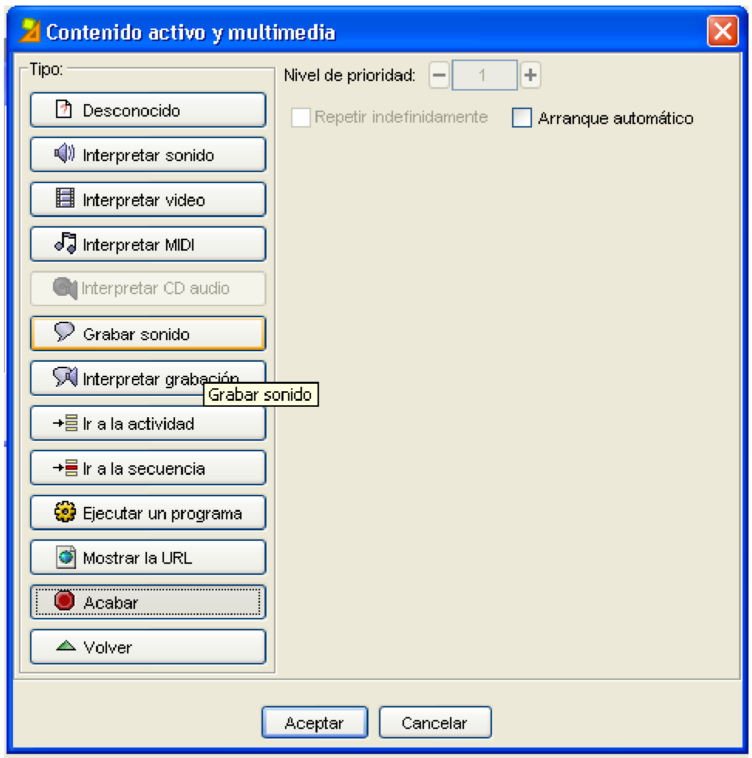


Figura 5.3.14

Las propiedades de cada uno de los botones no se explicarán pues no corresponden a los objetivos de este manual pues requieren de más experiencia por parte del usuario sobre el programa; sin embargo se deja de tarea al lector de investigar sobre estos recursos.

5.3.4 El panel

Al contrario de las demás pestañas, la pestaña del panel cambia dependiendo de la actividad pues es aquí donde se diseña y se edita cada actividad es aquí donde el verdadero trabajo comienza.

El panel es el área que contiene la actividad propiamente dicha y es aquí donde se encentran las herramientas para crearla.

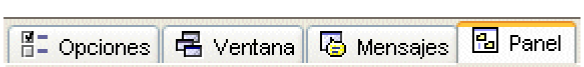


Figura 5.3.15

A diferencia de las anteriores, esta pestaña no es igual para todas las actividades a realizar, sino que ofrece unas opciones diferentes en cada una de las anteriores.

Las actividades de texto son un caso a parte, ya que cuando se crea una actividad de este tipo en lugar de la pestaña **Panel** está la pestaña **Texto**. Todo lo que hace referencia a este tema se vera con detalle más adelante.

Una actividad puede tener un panel o dos, dependiendo de qué tipo sea.

TIPO		NÚMERO DE PANELES
Asociación	Simple	2
	Compleja	2
Juego de memoria		1
Actividad de exploración		2
Actividad de identificación		1
Pantalla de información		1
Puzzle	Doble	1. Aunque tiene dos, no tiene la pestaña del panel B ya que este solo tiene la función de ser el lugar donde se han de ir colocando las piezas del puzzle. La que sí tiene es la pestaña de distribución.
	De intercambio	1
	De agujero	1
Respuesta escrita		2
Crucigrama		2
Sopa de letras		1. Aunque tiene la opción de un segundo panel donde aparece el contenido asociado.

En las actividades que tienen dos paneles, estos se llaman **A** y **B**, y en cada uno de los paneles se trabaja desde una pestaña que se muestra al seleccionar la pestaña **Panel** de la actividad.

Figura 5.3.16

Siempre que una actividad tiene dos paneles o rejillas también aparece la pestaña **Distribución**, desde la que se establece la posición de los paneles en la ventana de juego.

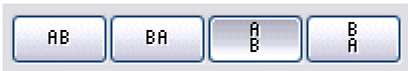


Figura 5.3.17

En la mayoría de actividades el panel está dividido en casillas. Cada **casilla** es independiente de las otras, tiene su propio contenido y puede tener unas características propias de color, estilo, etc.

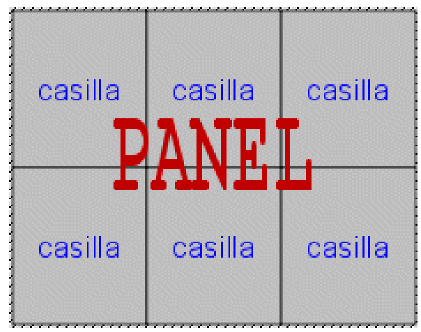


Figura 5.3.18

Este panel, por ejemplo, tiene 4 casillas con contenidos y estilos completamente diferentes. Se puede establecer un estilo determinado para una casilla, independientemente de las otras, desde la ventana de **Contenido de la casilla**, que se abre haciendo clic sobre ella.

Figura 5.3.19

Los cambios realizados desde la ventana de **Contenido de la casilla** afectan solo a la casilla en que se está trabajando, y no al resto del panel.

Los paneles tienen herramientas comunes independientemente del tipo de actividad de que se trate. Ver *figura 5.3.20*

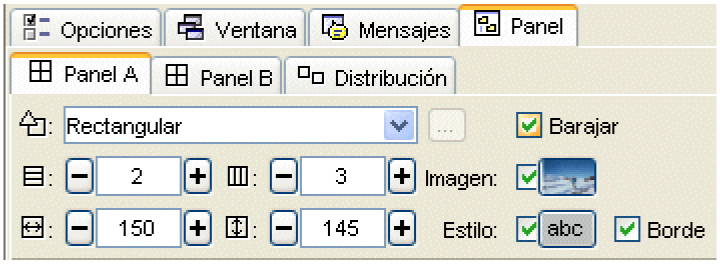
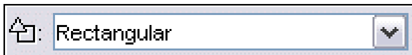
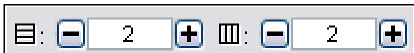
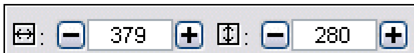
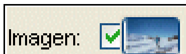
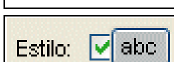


Figura 5.3.20

Estas herramientas son:

	La lista desplegable para seleccionar el tipo de generador de formas.
	Los botones para determinar el número de filas y número de columnas en que se distribuyen las casillas.
	Los botones para determinar las medidas (anchura y altura en píxeles) de las casillas.
	El botón imagen, que permite poner una imagen de fondo que rellenará toda la superficie del panel. En este caso prevalecen siempre las dimensiones de la imagen, y se ignoran los valores indicados en las casillas de medida.
	La opción activada indica que las casillas del panel están rodeadas por un borde.
	Botón de Estilo, que permite determinar el tipo, color y medida de la letra, color y medida del borde, color de fondo.... Todas las características que se determinen desde este botón afectarán a todas las casillas del panel. Si se quiere que alguna casilla tenga un estilo diferente se ha de establecer desde la ventana que se abre haciendo clic sobre ella

Para poder realizar una mejor caracterización de los elementos que conforman el panel se abordará la explicación de estos por medio de ejemplos en cada uno de los tipos de actividades que se pueden realizar.

5.3.5 Tipos de Actividad

JClic cuenta con un total de 16 actividades diferentes para poder realizar un paquete o proyecto que reúna estos tipos de actividades de manera conjunta y que pueden ser vistos en su versión terminada a través del JClic-Player o durante el proceso creación al ser presionado el icono .

Las siguientes subsecciones describirán los tipos de actividades y como trabajar en el panel para crearlas.

La asociación

Las asignaciones o asociaciones pueden ser de dos tipos simples o complejas en esta actividades básicamente se busca encontrar el o los elementos asociados entre dos conjuntos.

Al realizar actividades con asociaciones a las pestañas de Panel se agrega la de Relaciones aquí es como su nombre lo indica el lugar en donde se van a relacionar los paneles A y B por medio de flechas que indican cual es la casilla del panel que satisface la actividad.

Para poder asociar las casillas debes hacer clic en aquella casilla que quieras asociar, notarás se sale una flecha, colócala en la casilla del otro panel en la que contiene.

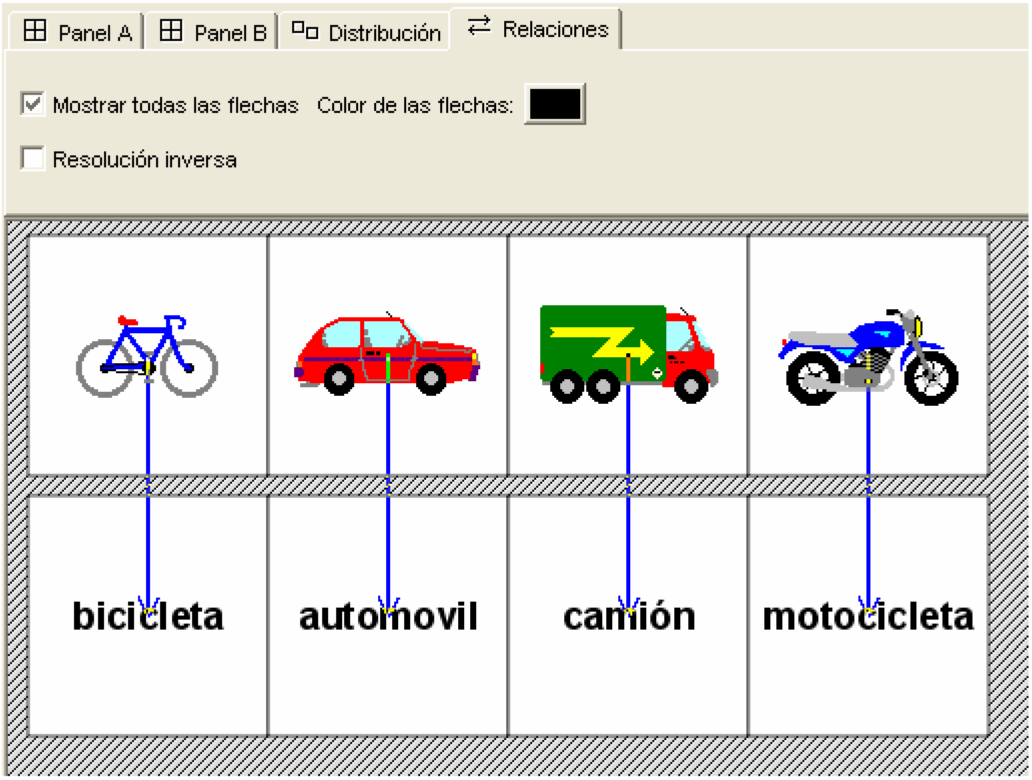


Figura 5.3.21

La asociación simple:

Se presentan dos conjuntos de información que tienen el mismo número de elementos. A cada elemento del conjunto imagen corresponde sólo un elemento del conjunto origen.

- La ***asociación simple entre textos:*** En esta actividad se asocian textos, los pasos para realizar este tipo de actividades son los siguientes:

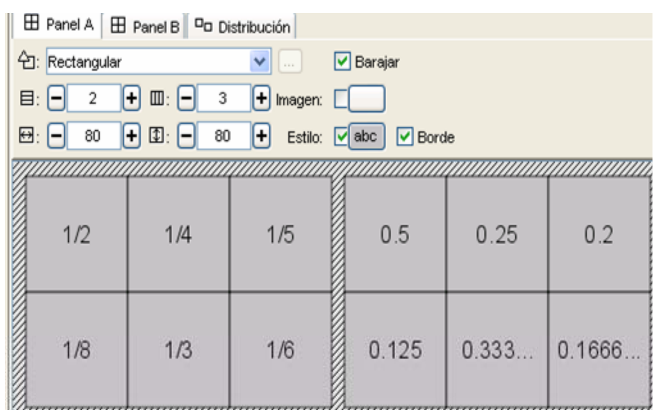


Figura 5.3.22

1. **Añade** una nueva actividad al proyecto, **nómbrala** como quieras y **selecciona** como tipo de actividad Asociación Simple.

2. **Añade** una Descripción**. Pulsa** sobre la pestaña **Mensajes** e inserta un **Mensaje Inicial y Final**.

3. Haz **clic** sobre la pestaña de **Panel.** Ahora verás dos fichas: Panel A y Panel B. En el Panel A establecerás como será el contenido las celdas (texto y formato), y en el Panel B igualmente.

4. **Elige** la forma que tendrán las piezas de la asociación, por ejemplo: Rectangular.

5. **Selecciona** el número de filas y columnas del rompecabezas. Por ejemplo, 2x3. En las asociaciones simples el número de casillas tiene que ser el mismo en el Panel A y en el Panel B.

6. **Selecciona** la ficha del Panel A. Haz **clic** en la primera de las casillas. **Escribe** como texto el que quieras. **Acepta** y haz lo mismo con cada una de las otras casillas del Panel.

7. **Selecciona** ahora la ficha del Panel B. Haz **clic** en cada una de sus casillas e **inserta** el texto asociado a cada una de las casillas del panel A respetando la correspondencia de las casillas, esto es importante porque el programa barajará el panel B cada vez que se cargue la actividad.

8. **Ajusta** el tamaño de las casillas arrastrando ambas tablas.

9. Puedes **elegir** distintas distribuciones para ambas tablas en la ficha Distribución.

10. Prueba la actividad

La ***asociación simple entre textos e imágenes*** permite que podamos hacer asociaciones más llamativas porque ponemos imágenes en uno de los paneles y en el otro texto. La figura siguiente ilustra este tipo de actividades

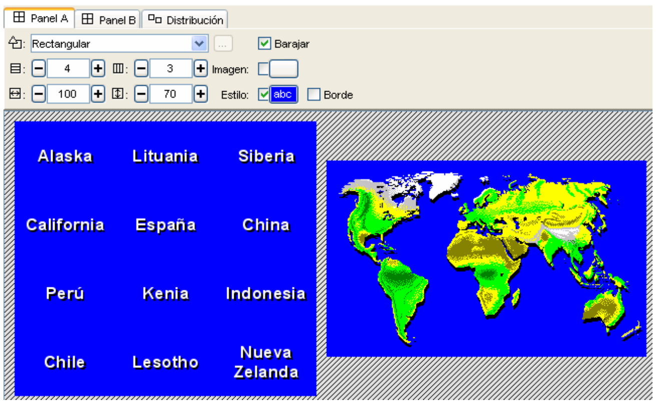


Figura 5.3.23

Los siguientes pasos determinan una manera para editar este tipo de actividades.

1. **Añade** una nueva actividad al proyecto, **nómbrala** como quieras y **selecciona** como tipo de actividad *Asociación Simple.*

2. **Añade** una **Descripción** y los **Mensajes.**

3. Haz clic sobre la pestaña de **Panel.** En el *Panel A* vas a establecer el como será el texto, y en el *Panel B* vas a establecer el contenido de las *imágenes*.

4. **Elige** la forma que tendrán las piezas, por ejemplo: *Rectangular*.

5. **Selecciona** el número de *filas y columnas*. Por ejemplo, 1x3, tanto en el *Panel A* como en el *B.*

6. **Selecciona** la ficha del *Panel A*. Haz **clic** en la primera de las casillas. **Escribe** un texto. **Acepta** y haz lo mismo con cada una de las otras casillas del Panel.

7. **Selecciona** ahora la ficha del *Panel B*. Haz clic en cada una de sus casillas, clic sobre el botón ***Imagen*** y **elige** las imágenes.

8. **Ajusta** el tamaño de las casillas arrastrando ambas tablas.

9. Para cambiar el ***color de fondo*** de las casillas del *Panel A o B tienes* que hacer clic sobre el botón ***Estilo \ color de Fondo****.*

10. **Prueba** la actividad y **Guarda** el proyecto.

La ***Asociación Simple entre Sonidos e Imágenes***: a continuación se realizará la explicación de otra actividad de asociación simple, pero esta vez utilizaremos solo contenido multimedia, es decir se trabará con imágenes y sonidos. Ver *figura 5.3.23*

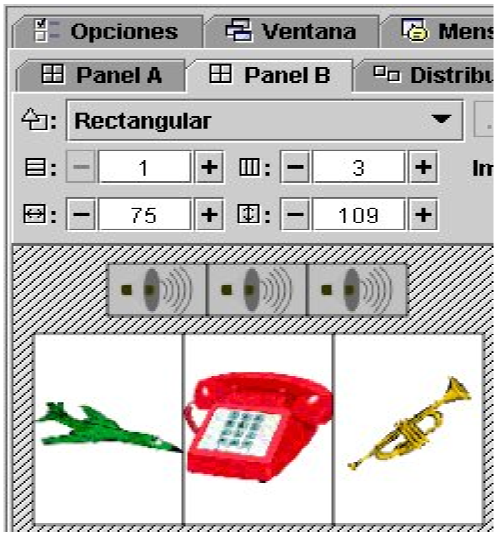


Figura 5.3.23

Para construir esta actividad se siguen los siguientes pasos:

1. **Añade** *una* nueva actividad *al proyecto*, ponle un nombre y selecciona como tipo de actividad *Asociación Simple.*

2. **Añade** una **Descripción** y los **Mensajes***.*

3. Haz clic sobre la pestaña de **Panel***.* En el *Panel A* se establece el contenido de los **sonidos**, y en el *Panel B* se establece el contenido de las **imágenes** de tal forma que, las casillas que ocupan la misma posición tengan en el *Panel A* un sonido y en el *Panel B* la imagen correspondiente.

4. **Selecciona** el número de filas y columnas. Por ejemplo, 1x3, tanto en el *Panel A* como en el *B.*

5. **Selecciona** la ficha del *Panel A*. Haz clic en la primera de las casillas, y haz clic en el botón **Contenido Activo**. Elige la opción **Interpretar sonido** y busca el archivo de sonido que previamente habías incluido en la **Mediateca**. Haz lo mismo con las otras dos casillas.

6. **Selecciona** ahora el Panel B y haz clic por orden en cada casilla. Haz clic sobre el botón **Imagen**. **Selecciona** la imagen que necesites de la **Mediateca** y haz lo mismo con las otras dos casillas.

7. **Ajusta** el tamaño de las casillas arrastrando ambas tablas.

8. **Elige** la forma que tendrán las piezas, por ejemplo: *Rectangular*.

9. **Elige** la pestaña **Distribución** y elige la distribución de paneles A sobre B.

10. Si deseas cambiarle el **color de fondo** de las casillas del *Panel B* lo puedes lograr haciendo clic sobre el botón **Estilo \ color de Fondo**.

11. Comprueba el funcionamiento y Guarda el proyecto.

Asociación compleja.

1. Para crear una actividad de asociación compleja se selecciona la opción *Nueva Actividad* del menú *Insertar.*

2. Se selecciona *Asociación compleja* del menú tipo de actividad se le da nombre a la actividad y damos aceptar. Rellenamos las opciones de *Mensajes*.

2. La creación de la actividad se centra en la pestaña 

en esta encontraras las siguientes opciones también como pestañas:

3.

- Panel A 

en esta sección se establece la primera columna de opciones para la actividad de asociación.

- Panel B 

en esta sección se puede de establecer las opciones para la segunda columna de selección.

- En la pestaña Distribución 

se establece la posición de los paneles de selección de diversas formas.

- En la pestaña 

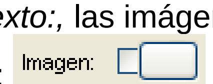
es establece las estaciones entre los elementos de los paneles A y B.

4. En la pestaña del Panel A seleccionamos la opción *Rectangular* del menú desplegable:

Mediante los botones de filas, columnas, largo y ancho establecemos el tamaño para los paneles A y B. Para el Panel A establecemos dos filas y una columna, en el Panel B establecemos cuatro filas y una columna.

5. Dando doble clic sobre la primera fila del panel A podemos determinar el texto o imagen que deseemos para la actividad, mediante la casilla de contenido:

Figura 5.3.24

El texto es digitado en el área llamada *Texto:,* las imágenes puede ser insertadas mediante el botón de *Imagen* : 

, permitiéndonos axial seleccionar una de las imágenes de la *Mediateca.*

De igual manera rellanemos las demás casillas, en nuestro caso insertaremos texto en el Panel A e imágenes en el Panel B. Ej:

Unas ves determinadas los paneles A y B, procedemos a establecer las relaciones.

Luego podemos realizar una prueba del trabajo mediante el botón de  *Prueba de funcionamiento.*

Por ultimo guardamos nuestro trabajo.

Figura 5.3.25

La actividad de exploración:

La exploración es una actividad en la cual inicialmente se muestra una información. Al hacer clic encima de las casillas de un panel, se muestra la información que cada una de estas casillas tiene asociada. La información puede repetirse en diferentes casillas.

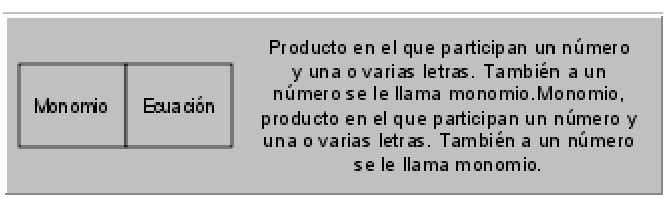


Figura: Exploración

Ésta actividad puede ser utilizada para que los estudiantes puedan conocer conceptos básicos de un tema en especifico y como la actividad no tiene fin, es el usuario quien decide seguir adelante, esto sirve para que el estudiante pueda acceder a la información las veces que desee.

Para el contenido de las casillas pueden ser imágenes, textos, sonidos. Para poder realizar una actividad de exploración, se abre JClic-Author, nos dirigimos a la pestaña actividades y elegimos "Actividad de exploración" y como ya hemos mencionado antes la pestaña panel es la que nos ayuda a cambiar el formato a un texto, al panel etc.

En la figura "Actividad de exploración" nos muestra el panel. Luego damos clic en la pestaña ***"relaciones"*** y relacionamos el texto que queremos que salga cuando seleccionamos la casilla.

Para que el programa sepa qué mostrar cuando se elija una casilla se debe ir a la pestaña "relaciones" la cual relaciona el contenido de las casillas.

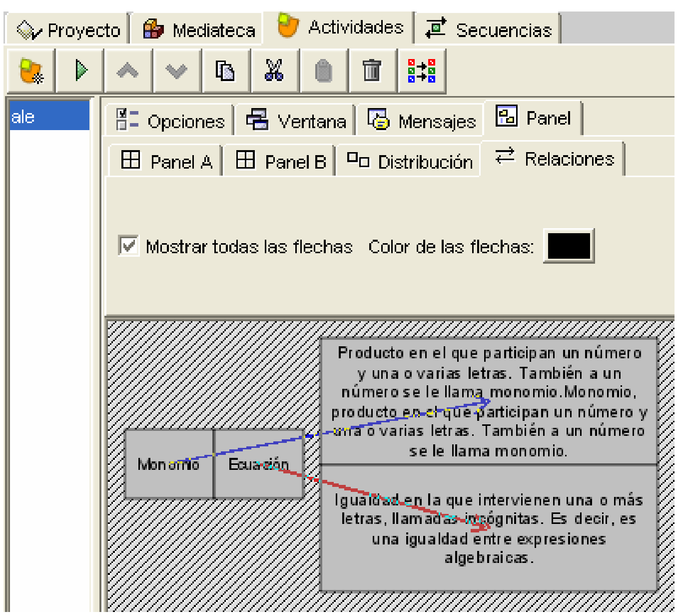


Figura: Relaciones

La actividad de identificación

En la actividad de identificación inicialmente se presenta un solo panel con varias casillas, para abordar este tipo de actividad se debe apretar las casillas que cumplan la condición que en la parte de abajo se específica, como lo muestra la figura Identificación 1. La información de las casillas pueden ser sonidos, textos, imágenes o una combinación de los mismos.

Figura: Identificación 1

Ahora nos interesa saber como hacer para que las casillas cumplan con la condición, bueno nos dirigimos a la pestaña relaciones del panel y pulsamos las que cumplan con la condición. Ver *figura identificación 2*

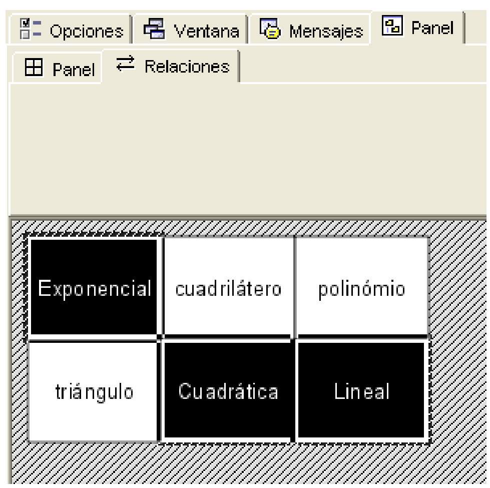


Figura: Identificación 2

En esta actividad puede haber la cantidad de casillas que se quieran, siempre y cuando haya al menos una casilla que cumpla con la condición. Como podemos observar el uso de la pestaña panel es la misma para las actividades anteriores.

La pantalla de información

Esta consta de un solo panel en el que se puede reprensar, mostrar información que le será útil al alumno para que desarrolle las actividades en una forma adecuada, así nos aseguraremos que nuestros alumnos pueden tener un aprendizaje significativo a la hora de desarrollar las actividades. Podemos ver un ejemplo en la *figura información*

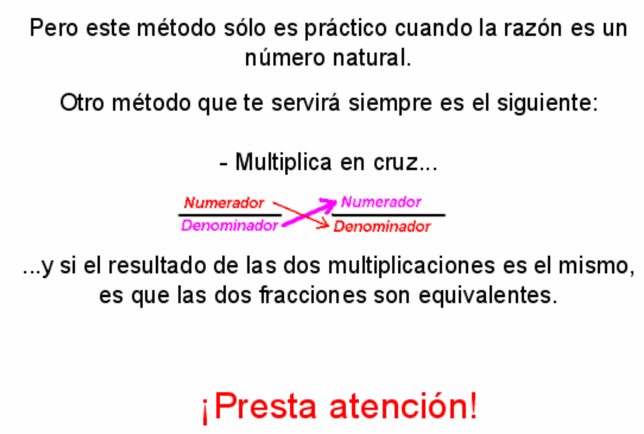


Figura información

Para poder crear esta actividad (como ya vimos en las demás actividades) hay que dar clic sobre el icono de nueva actividad  , luego escribir el nombre. Una ves en el panel (como lo nuestra la *figura información 1*) Luego damos clic sobre 

para poder quitar los bordea a las casillas, después de esto podemos escribir la información que deseamos.

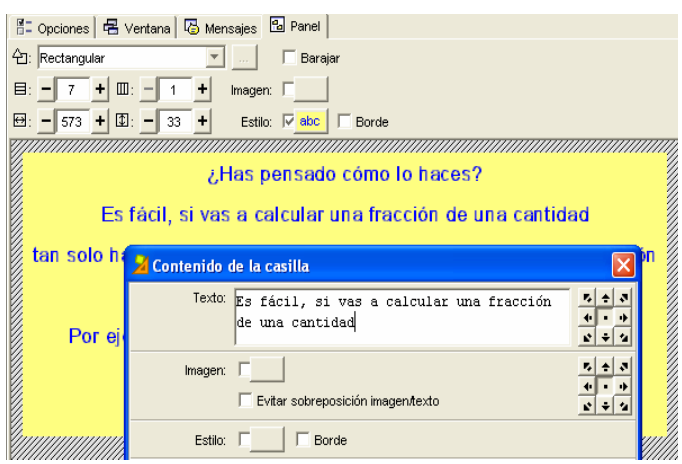


Figura información 1

Puzzle o Rompecabezas

Los **puzzles** tienen como objetivo reconstruir una imagen un texto un gráfico etc. Que en inicio se le presenta en una forma desordenada.

En jclic disponemos de los siguientes puzzles: puzzle doble, de intercambio y de agujero.

El **puzzle doble:** como podemos observar en la figura *“Puzzle doble.”* Se presentan dos paneles, el de la izquierda muestra la imagen en forma desordenada. En el panel de la derecha está vacío, en él se trasladará el contenido del primero pero en forma ordenada.

No importa en qué orden se coloquen las piezas, siempre que al final la información esté bien construida.

Para poder mover las piezas del primer panel al segundo, hay que dar clic en una pieza y arrastrarla al otro.

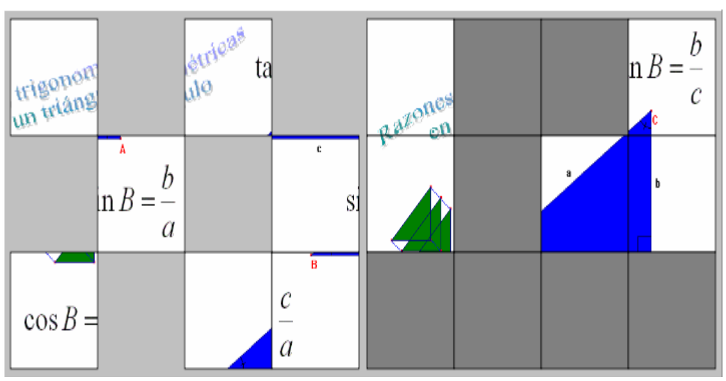


Figura: Puzzle doble

- En el **puzzle de intercambio:** En este se presenta un solo panel con toda la información desordenada y consiste en intercambiar las piezas de una casilla a otra hasta lograr ordenar la información. Al igual que en el rompecabezas doble, para mover las piezas sólo hay que dar un clic sobre una de las casillas y arrastrarlas al lugar deseado

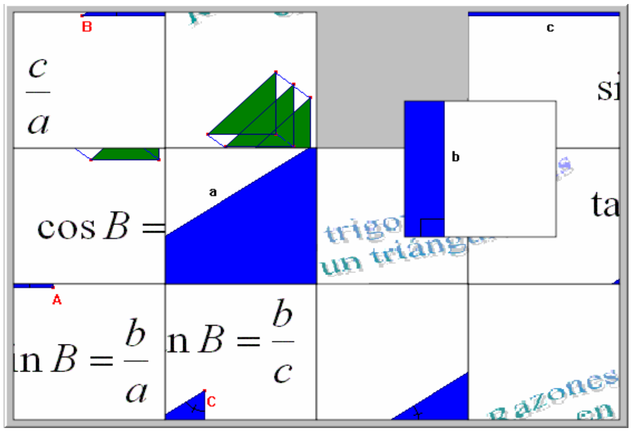


Figura: Puzzle intercambio

- El **puzzle de agujero**: este consta de un solo panel con las piezas desordenadas y una casilla vacía. La casilla que se encuentra vacía es una pieza escogida por el programa de una forma aleatoria. Esta casilla es la última pieza que se colocará sola en el rompecabezas cuando se haya resuelto. Para mover las piezas sólo hay que dar un clic sobre una casilla y esta se desplazará si y sólo si el espacio en blanco está a la par de esta. Esto hace que el puzzle de agujero o de un espacio en blanco sea más difícil de resolver.

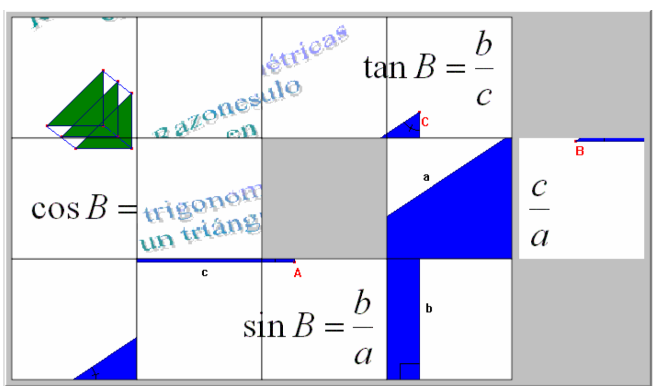


Figura: Puzzle de agujero

¿Cómo puedo crear un puzzle?

Para crear un puzzle primeramente abrimos el JClic-Author nos vamos al menú **Archivo/nuevo proyecto** y le damos el nombre deseado a la actividad.

- Adjuntamos una imagen a la ***mediateca*** (como ya vimos anteriormente)

- Damos clic sobre la pestaña ***Actividad*** y elegimos el Puzzle que deseamos (figura “*nueva actividad*”) y le damos un nombre.

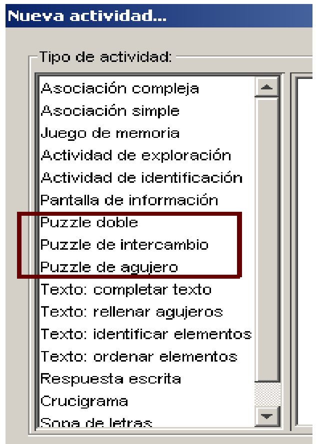


Figura: Nueva actividad

- Luego elegimos la pestaña ***panel***, en el cual podemos darle la interfaz grafica del la actividad (como ya vimos en la sección “5.3.4 El panel”), adjuntamos la imagen dando clic en el icono ***imagen.*** Para hacer las divisiones no dirigimos a los iconos (+, -)

Figura: Herramientas

- Para ver la actividad, damos clic en el icono  , después de verla cerramos la ventana. Hace hacemos para los demás puzzles

Más adelante se puede cambiar el tipo, si conviene, desde la pestaña **Opciones** de la actividad.

Sea cuál sea el tipo de puzzle escogido, las opciones del **Panel** serán las mismas.

Respuesta escrita

En el J Clic tenemos seis tipos de actividades de respuestas escritas: Rellenar agujeros, Completar texto, Identificar elementos, Ordenar elementos, Crucigramas y Sopa de letras.

Para crear una actividad de Rellenar agujeros.

1. Se debe escoger la opción *Nueva actividad* del menú *Insertar* de la barra de Herramientas.
2. Se escoge tipo de actividad Texto: completar texto

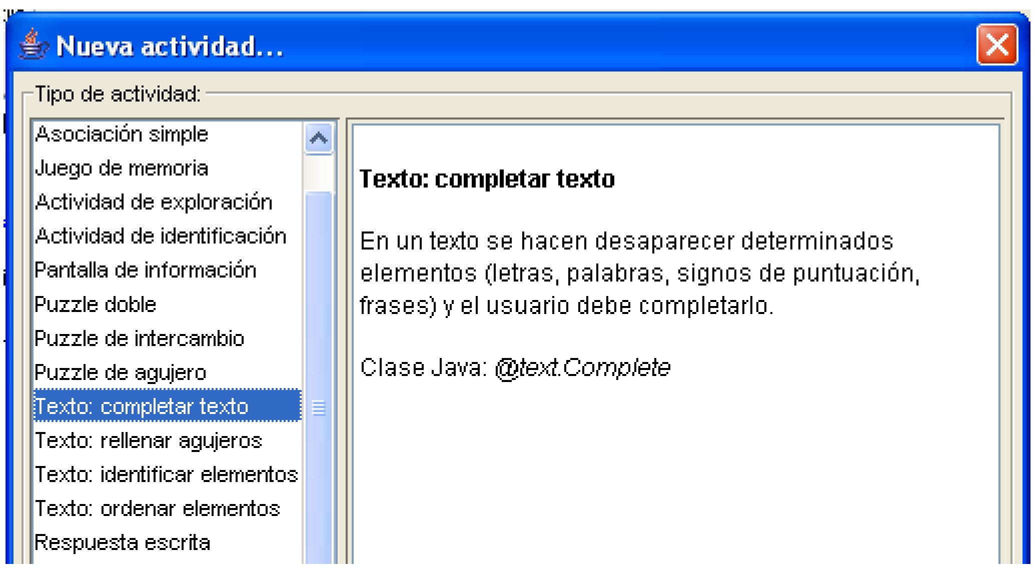
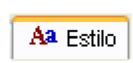


Figura: ventana de selección de actividades

3. En la pestaña 

encontramos las opciones: 

y 

. En la opción Contenido tenemos un campo de texto en el cual escribir la actividad. Ejemplo:

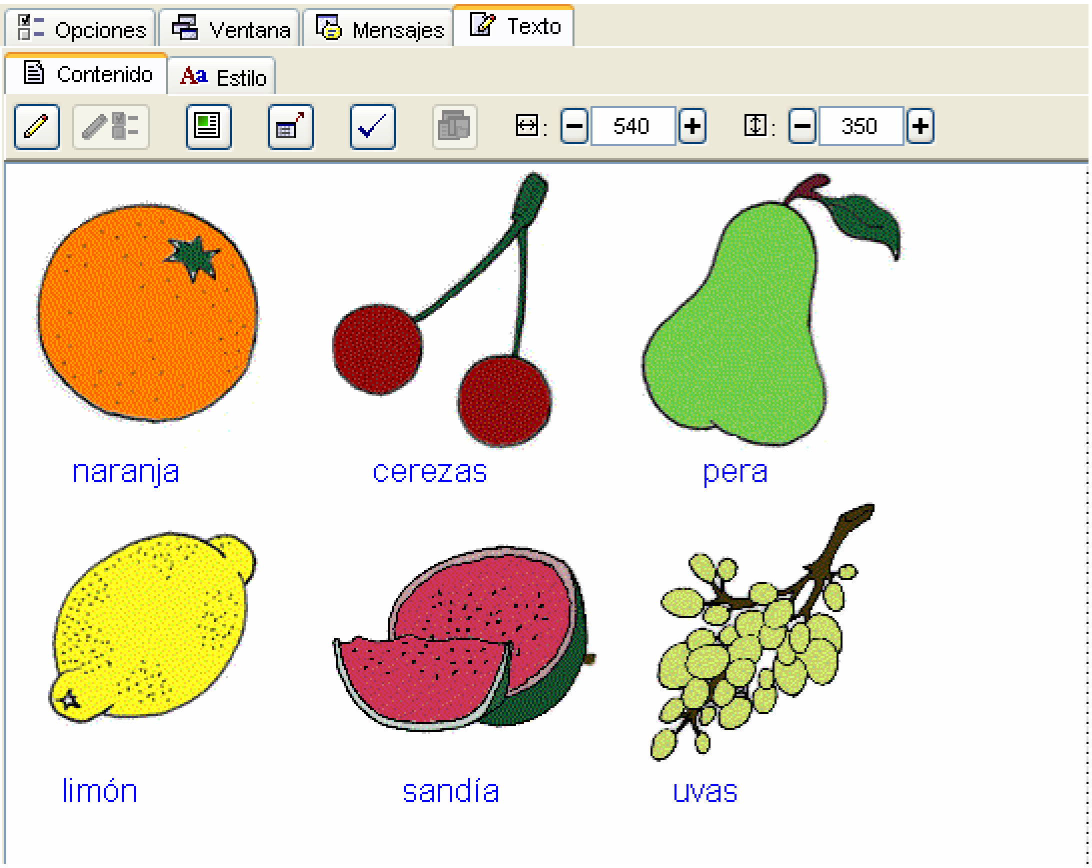


Figura: respuesta escrita

En este ejemplo se presentan las imágenes de frutas y sus nombres respectivos. “Nota: en esta actividad se pueden insertar imágenes mediante el botón insertar celda.

4. Una vez creada la actividad se seleccionan las incógnitas o espacios a completar, esto mediante el botón . Se selecciona con el ratón (Mouse) el carácter o palabras que se desea la persona complete, una vez seleccionada se oprime el botón *Crear una incógnita* . La palabra seleccionada se resalta mediante un color diferente.

5. Después de creada la o las incógnitas se puede seleccionar diversas opciones para la respuesta, presionando el botón *Incógnita…*. Obteniendo la siguiente ventana.

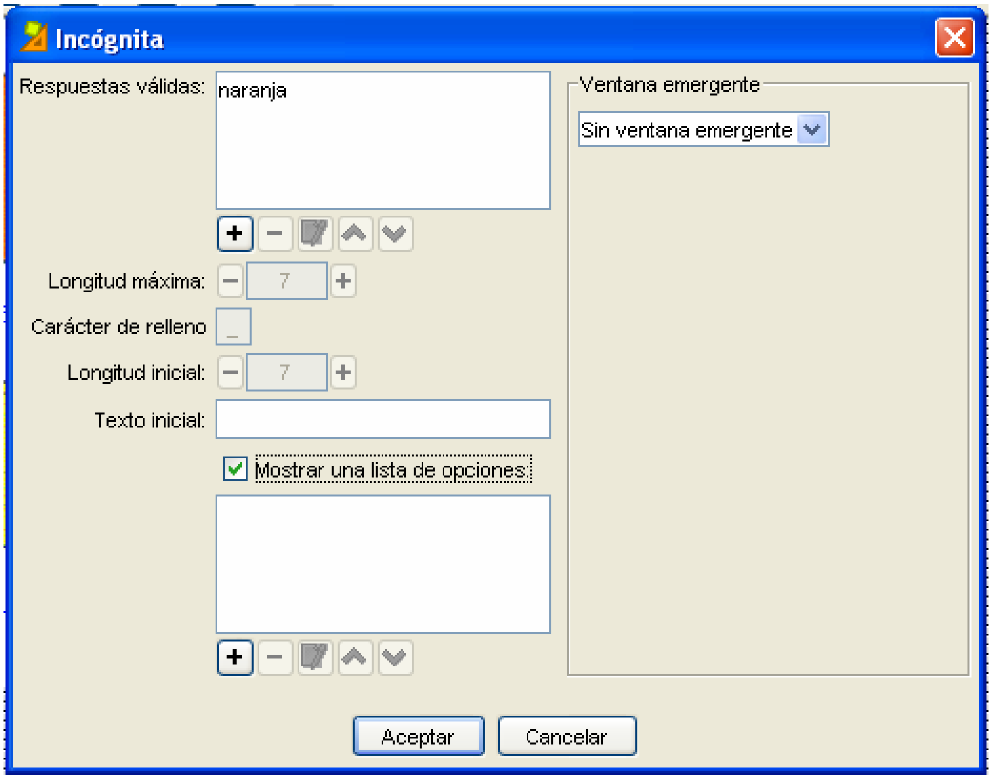
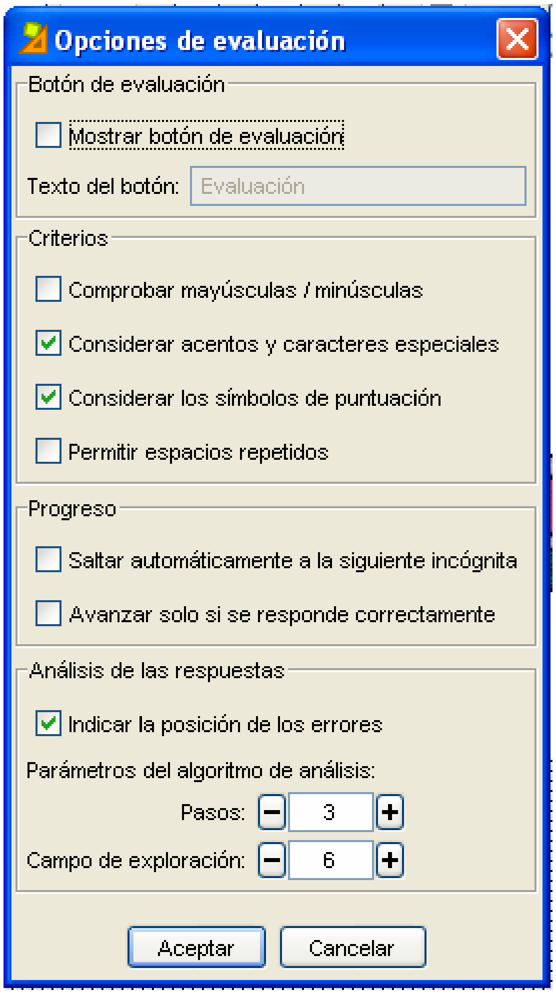


Figura: Respuesta a la ilustración

- En el campo de texto de *respuestas validas* se pueden agregar y eliminar respuestas que pueden considerarse como correctas.
- En *longitud máxima* y *longitud inicial* se puede establecer los tamaños de las respuestas.
- Con la opción *carácter de relleno* podemos establecer el tipo de carácter o caracteres que ocupan el lugar a rellenar.
- En *Texto inicial* podemos establecer una palabra para que aparezca en lugar de los espacios en blanco y que a de ser sustituida por la correcta.
- En la opción *Mostrar una lista de opciones*, se puede crear un menú desplegable con posibles soluciones.

6. Mediante el botón *evaluación* tenemos acceso a la siguiente ventana:



- En la opción *Mostrar botón de evaluación* se crea un botón que examine las respuestas.
- En las opciones *Criterios* encontramos opciones para que tome o no en cuenta las mayúsculas, para tomar en cuenta caracteres especiales y signos de puntuación y permitir espacios repetidos.
- En el apartado de *Progreso* tenemos opciones que nos permiten cambiar automáticamente de celda y la opción de avanzar solo si la respuesta esta correcta.
- En la sección *Análisis de las respuestas* se puede seleccionar la opción que marca errores en tiempo de ejecución y demás opciones.

7. En la pestaña Estilo se puede dar formato a la letra, es decir cambiar los tamaños, tipos y colores de las letras y textos.

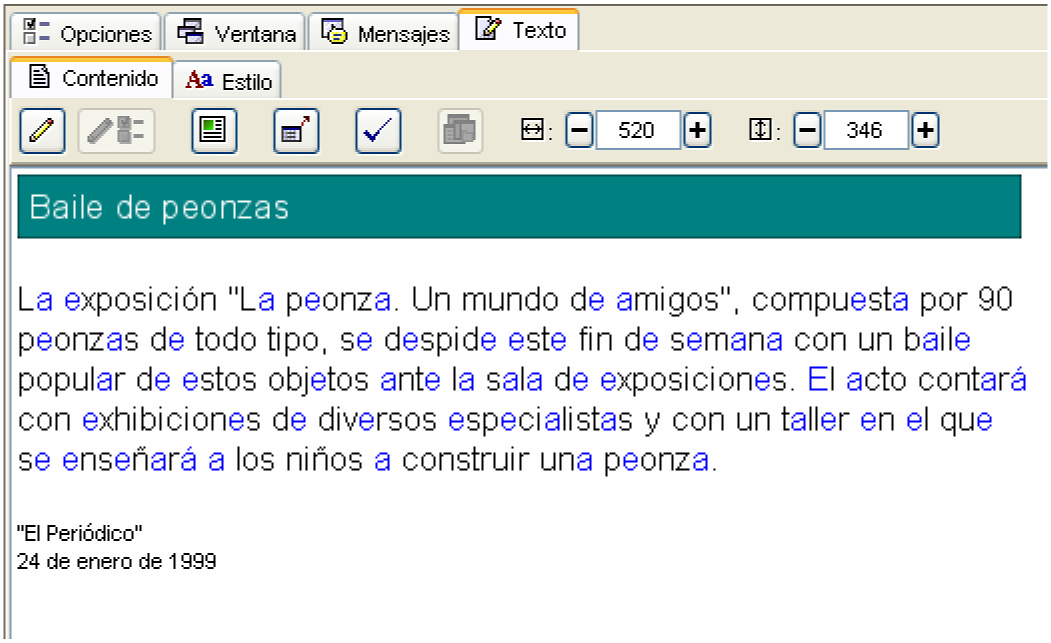
8. Una ves creada la actividad se puede realizar una prueba mediante el botón *Probar funcionamientos de la actividad* de la barra de tareas principal.

9. Luego se procede a guardar el trabajo realizado el menú *Archivo* y la opción *Guardar…*

Para crear una actividad de Completar Texto:

1. Para la elaboración de una actividad de Completar Texto, se procede de manera similar a la anterior.
    - Se selecciona insertar nueva actividad, se selecciona el tipo y se le da un nombre.

- En el campo de texto que se presenta al presionar la pestaña  digitamos la actividad y posterior mente seleccionamos las incógnitas con el botón .
- Como por ejemplo:

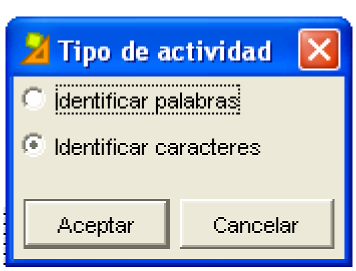


- La diferencia más notable de esta actividad con respecto a la anterior es que las incógnitas simplemente desaparecen en el momento de ejecutar la actividad.

Crear una actividad Identificar elementos:

La actividad de identificación al igual que la de Rellenar agujeros y de Completar texto se desarrolla de la siguiente manera. Las actividades de identificar elementos consisten en seleccionar uno o varios caracteres o palabras de un texto.

- Se desarrolla en la pestaña  digitamos la actividad y posterior mente seleccionamos las incógnitas con el botón .
- Una nueva opción de esta actividad es el botón *Tipo…* . El cual activa la ventana:



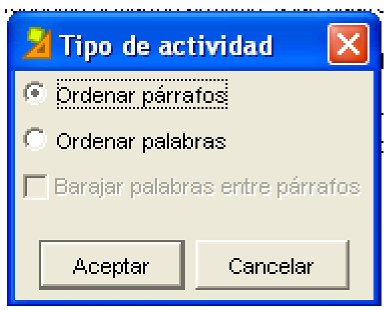
La cual permite especificar el tipo de incógnita a seleccionar en la actividad.

Crear una actividad Ordenar elementos:

Esta actividad consiste en ordenar imágenes o texto, el texto puede ordenarse ya sea palabras o párrafos. Se desarrolla de igual manera que las demás actividades de texto.

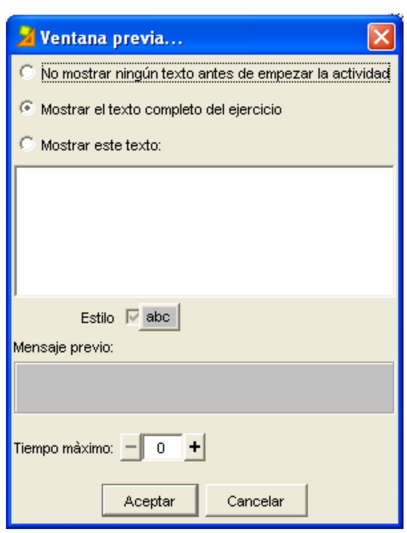
- Se desarrolla en la pestaña 

digitamos la actividad y posterior mente seleccionamos las incógnitas con el botón .
- Una nueva opción de esta actividad es el botón *Tipo…* . El cual activa la ventana:



La cual permite escoger que la actividad trata de ordenar párrafos o palabras dentro de una oración.

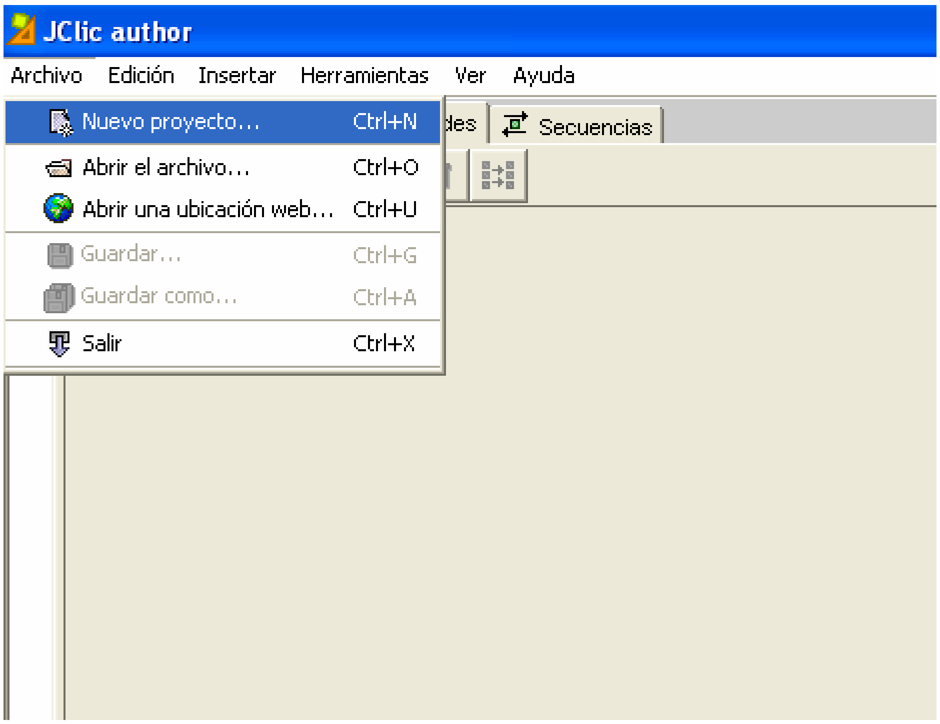
- Oprimiendo el botón *Ventana previa*  se selecciona la opción *Mostrar el texto completo del ejercicio*



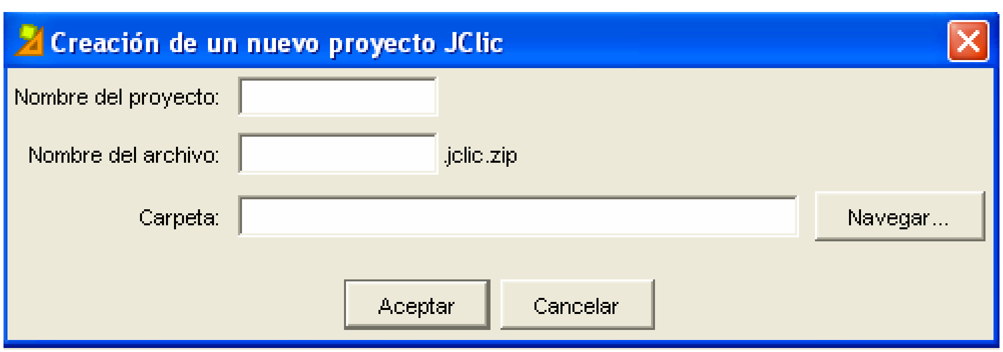
- Se prueba la funcionalidad de la actividad, con el botón  y se da guardar.

Crucigramas:

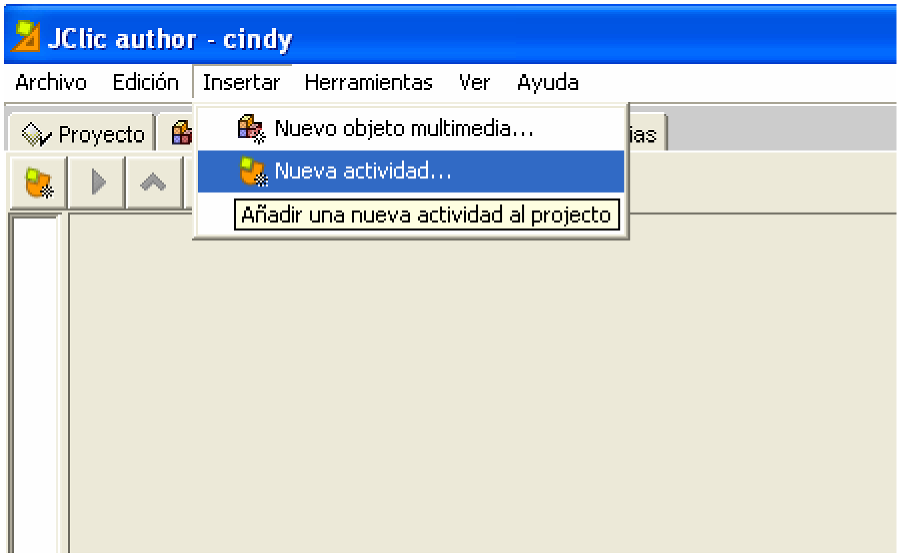
1. Elija un nuevo proyecto:



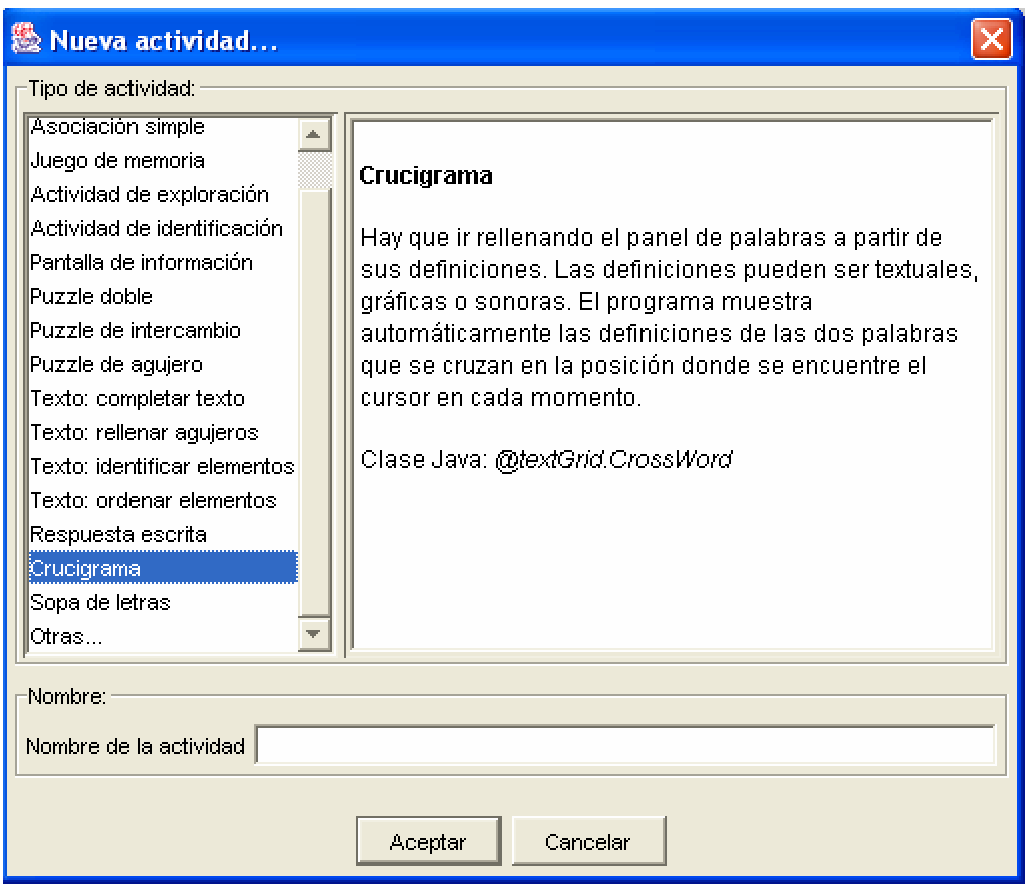
2. Póngale un nombre al proyecto y elija la carpeta donde lo quiere guardar:



3. En el menú superior elija la pestaña *Insertar* y luego elija la opción *Nueva Actividad*:

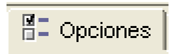


4. Elija la opción Crucigrama y póngale nombre a la actividad:



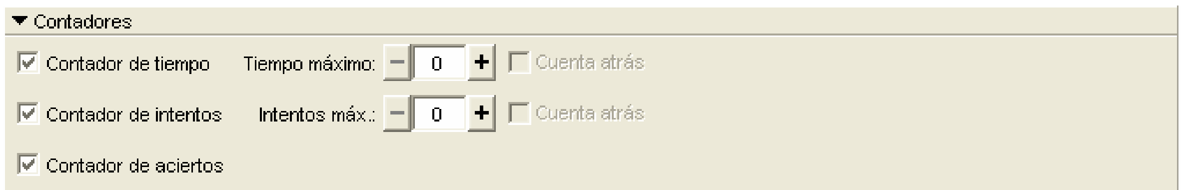
5. Aparecerá un menú es la parte superior:

5.1 En la pestaña *Opciones*:



Aquí podrá especificar algunas cosas de la actividad, como por ejemplo describirla en el espacio que brinda la opción *Descripción*. Sin embargo no es necesario que se completen estas opciones, si no se configura ninguna o algunas de estas opciones el programa trabajará con las opciones estándar.

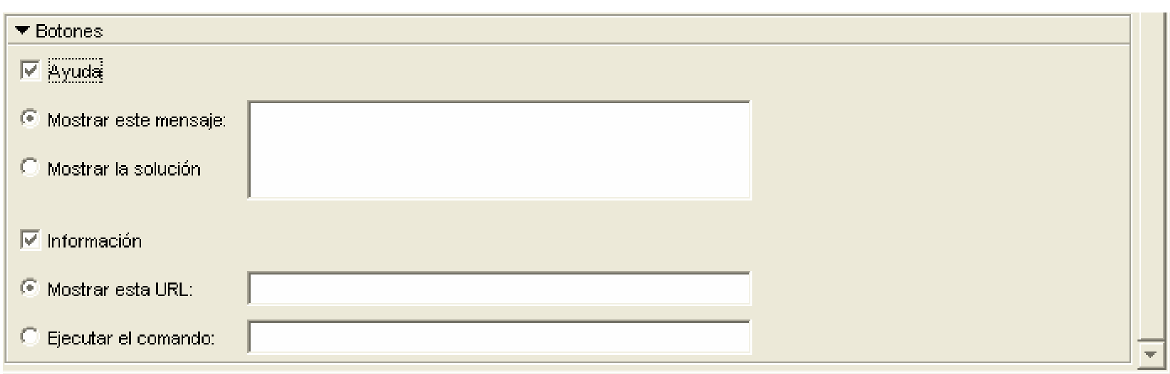
Un poco más abajo aparece un pequeño menú llamado *Contadores*:



Aquí se configura el tiempo:

- Si selecciona la opción *Contador de tiempo*, configurará el máximo de tiempo que de desea dar para que el usuario realice cada actividad, si el tiempo se cumple y el usuario no ha podido realizar la actividad el programa pasa a la siguiente actividad.
- Si selecciona la opción *Contador de intentos*, configurará la cantidad de intentos de los que dispone el usuario para responder correctamente, si los intentos se cumplen y el usuario no ha logrado contestar correctamente el programa automáticamente pasa a la siguiente actividad.
- Si selecciona la opción *Contador de aciertos*, el programa llevará un contador de la cantidad de aciertos del usuario al realizar todo el paquete.

Después de ese menú se encuentra otro pequeño menú llamado *Botones*:



Aquí se pueden configurar los botones de *Ayuda* y de *Información*, si deseamos que alguna de estas opciones aparezca mientras se desarrollan las actividades.

- Si selecciona la opción *Mostrar este mensaje*, debe escribir en el espacio en blanco que se brinda a la par el mensaje que se desea que aparezca si se selecciona el botón *Ayuda*.
- Si selecciona la opción *Mostar solución*, el programa mostrará la solución de la actividad si se selecciona el botón *Ayuda*.
- Si selecciona la opción *Mostrar la URL*, debe escribir el nombre y la dirección del archivo que desea que se abra cuando presione el botón *Información*.

5.2 En la pestaña *Ventana:*

Podrá configurar el entorno grafico que tendrá la actividad mientras se esta ejecutando. Y se configura en forma similar que las otras actividades, como se explico en la sección 5.3.2.

5.3 En la pestaña *Mensajes*:

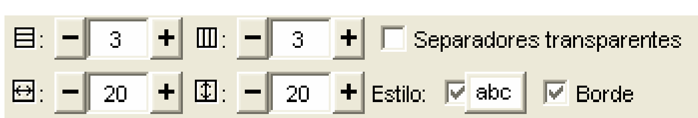
Se configurarán los mensajes que se desea que aparezca, si se desea, mientras se están desarrollando las actividades. Esta configuración se realiza como se explicó en la sección 5.3.3.

6. En la pestaña *Panel*:

Es donde vamos a realizar la elaboración del crucigrama.

6.1. En la pestaña *Panel A*:

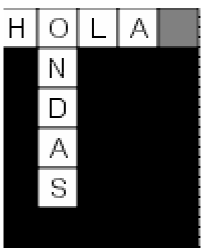
Se introducen las palabras del crucigrama, es decir lo que el usuario debe digitar. En el menú que aparece en la parte superior se puede configurar un poco el crucigrama:



- en este icono se eligen el número de filas que tendrá el crucigrama presionando el o el .

- en este icono se eligen el número de columnas que tendrá el crucigrama presionando el o el .
- en este icono se configura el ancho de cada celda del crucigrama presionando el o el .
- en este icono se configura la altura de cada celda del crucigrama presionando el o el .
- Haciendo clic sobre el icono abc se configura el tamaño, el color y el tipo de la letra (fuente) que deseamos que tenga el crucigrama. También se pueden configurar los colores y el estilo del entorno gráfico del crucigrama.
- Si seleccionamos *Borde* aparecerán los bordes de cada celda del crucigrama, de lo contrario no aparecerán.

6.1.1. ¿Cómo se deben colocar las palabras en el crucigrama?



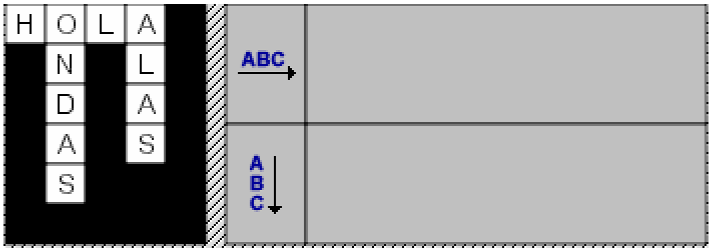
Nos posicionamos sobre el cuadro ubicado al lado izquierdo, y vamos escribiendo las palabras en el orden que queramos que el usuario las vaya digitando. Puede hacer uso de los cursores o flechas del teclado. Para borrar alguna letra si hace de igual forma como si estuviéramos escribiendo en un procesador de texto normal.

6.2. En la pestaña *Panel B*:

Se introducen las definiciones tanto verticales como horizontales, es decir la "pista" que aparecerá en pantalla para el que el usuario logre descifrar cual palabra debe escribir. En el menú que aparece en la parte superior se puede un poco el crucigrama:

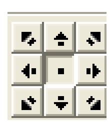
- en este icono se configura el ancho de la celda donde aparecerá la definición presionando el o el .
- en este icono se configura la altura de la celda del donde aparecerá la definición presionando el o el .
- Haciendo clic sobre el icono abc se configura el tamaño, el color y el tipo de la letra (fuente) que deseamos que presente la definición. También se pueden configurar los colores y el estilo del entorno gráfico de la celda.
- Si selecciona *Borde* aparecerán los bordes de la celda donde aparecerá la definición, de lo contrario no aparecerán.

6.2.1. ¿Cómo se deben colocar las definiciones correspondientes a cada palabra?



Nos posicionamos sobre la primera letra de la palabra a la que le vamos a escribir la definición, luego hacemos clic sobre una de las celdas que se ubican al lado derecho del recuadro del crucigrama, según corresponda: horizontal o vertical. Aparecerá el siguiente cuadro:

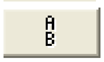
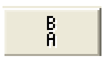
- En *Texto* puede escribir la definición de la palabra.
- Utilizando los cuadros que aparecen en el lado izquierdo del recuadro, puede darle la alineación que desee al texto (superior-izquierda, superior-centrado, centrado-centrado…):



- En *Imagen* puede insertar una imagen, las cuales aparecen junto a la definición, dependiendo de la alineación que le queramos dar, esta alineación se realiza de la misma manera que la alineación del texto.
- En *Estilo* y haciendo clic sobre el icono  se configura el tamaño, el color y el tipo de la letra (fuente) que deseamos que presente la definición. También se pueden configurar los colores y el estilo del entorno gráfico de la celda.
- En *Borde* se pueden configurar los bordes de la celda donde aparecerá el texto de la definición.

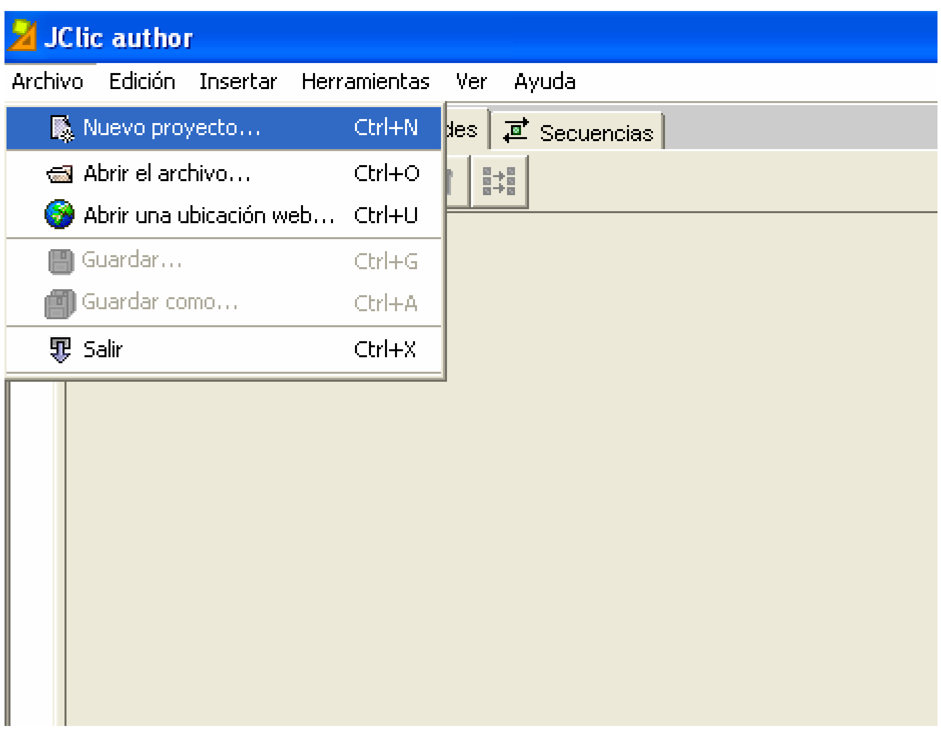
6.3. En la pestaña *Distribución*:

Aquí podemos ordenar el cuadro del crucigrama y el cuadro de texto en la forma de deseemos. Esto lo realizados presionando sobre la distribución que deseemos del menú:

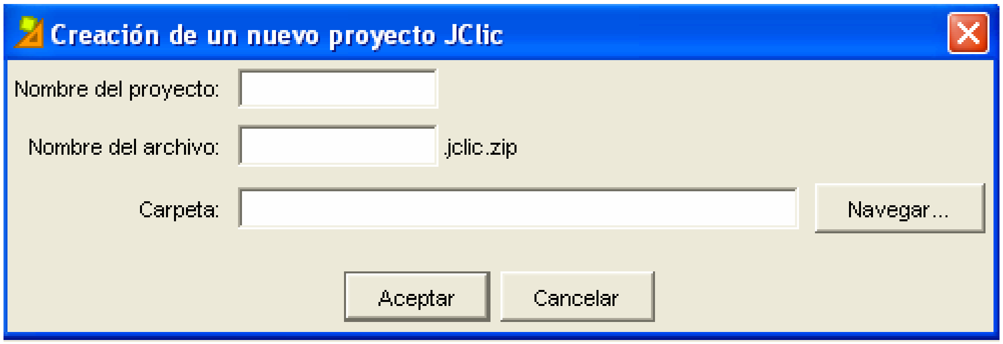
- : Crucigrama a la izquierda y texto a la derecha.
- : Texto a la izquierda y crucigrama a la derecha.
- : Crucigrama arriba y texto abajo.
- : Texto arriba y crucigrama abajo.

Sopa de letras:

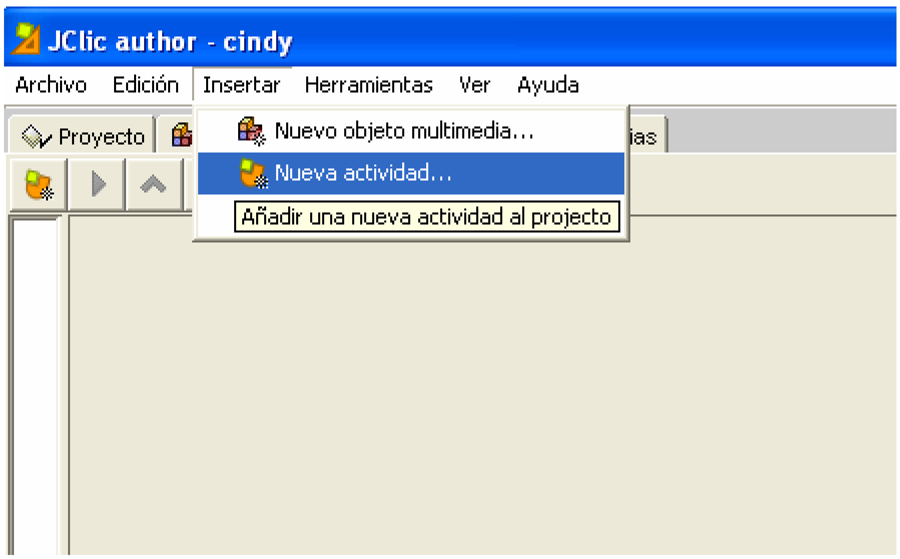
1. Elija un nuevo proyecto:



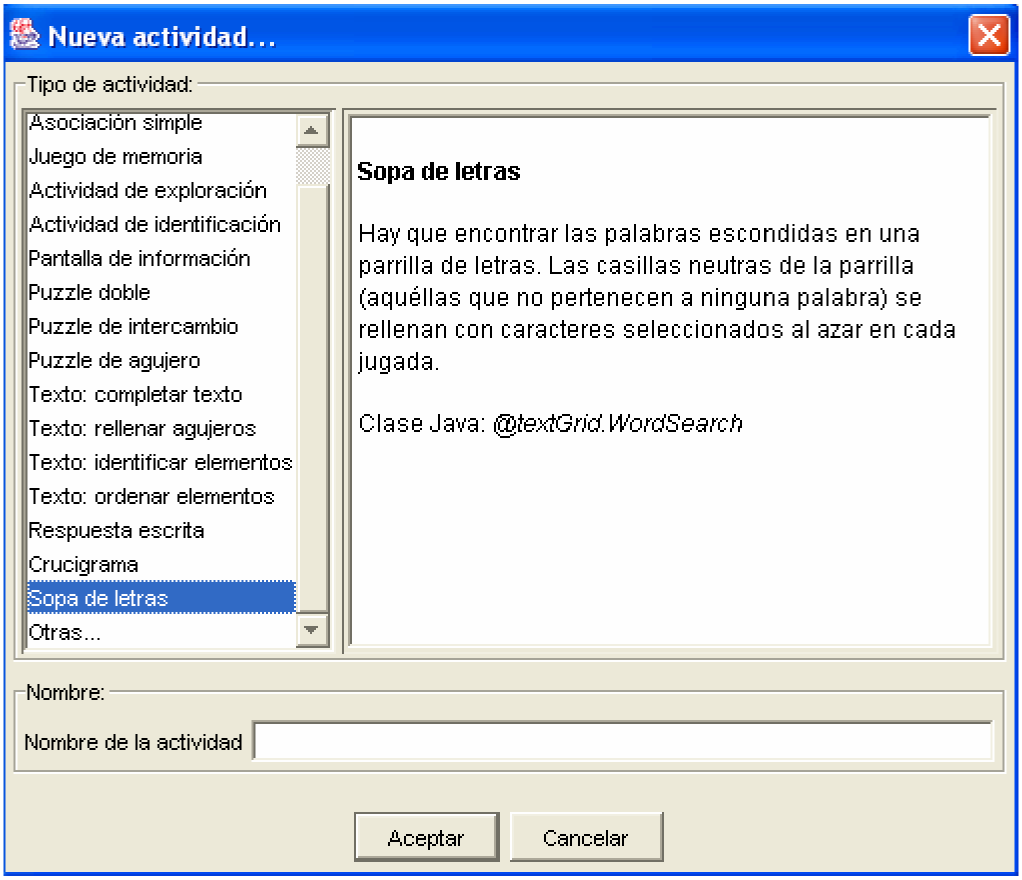
2. Póngale un nombre al proyecto y elija la carpeta donde lo quiere guardar:



3. En el menú superior elija la pestaña *Insertar* y luego elija la opción *Nueva Actividad*:



4. Elija la opción Sopa de Letras y póngale nombre a la actividad:

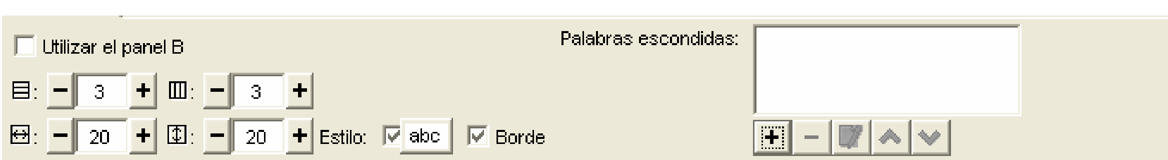


5. En el menú de la parte superior se puede hacer la configuración de algunas opciones como se explicó en secciones anteriores:

6. En la pestaña *Panel*:

Es donde realizamos la sopa de letras.

6.1. En la pestaña *Panel A*:

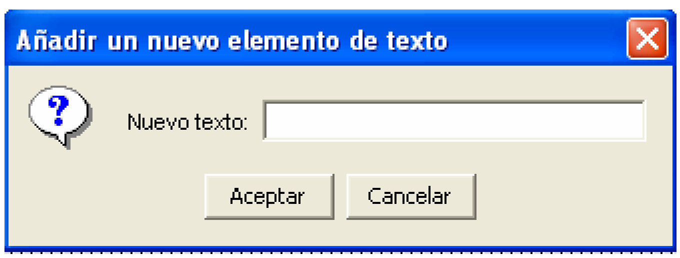


- en este icono se eligen el número de filas que tendrá la sopa de letras presionando el − o el +.

- en este icono se eligen el número de columnas que tendrá la sopa de letras presionando el o el .
- en este icono se configura el ancho de cada celda de cada letra de la sopa de letras presionando el o el .
- en este icono se configura la altura de cada celda de cada letra de la sopa de letras presionando el o el .
- En *Estilo* y haciendo clic sobre el icono abc se configura el tamaño, el color y el tipo de la letra (fuente) que deseamos que presente la sopa de letras.
- En *Borde* se pueden configurar los bordes de la celda de cada letra, se lo seleccionamos aparece cada letra delimitada por un borde de lo contrario solo aparecerán las letras.
- En la sección *Palabras Escondidas*, se escribirán las palabras que el usuario debe buscar mientras desarrolla la actividad:

6.1.1 ¿Cómo insertar las palabras ocultas en la sopa de letras?

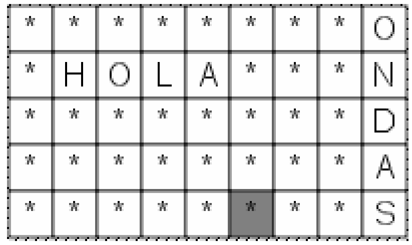
- Hago clic sobre el botón , escribo la palabra cuando aparece el siguiente recuadro:



- Si se desea eliminar alguna palabra, se selecciona dicha palabra y luego se presiona al botón .
- Si se desea modificar una palabra y no borrar, se selecciona la palabra y luego presiono el botón .
- Con los botones puedo moverse a cada arriba y hacia abajo a través de las palabras la insertadas, o bien los puedo hacer con las teclas direccionales del teclado del computador.

6.1.2. ¿Cómo agregar las palabras a la sopa de letras?

- En el recuadro:



Escribo las palabras en el orden que desee. Y el programa automáticamente rellena las casillas que quedan en blanco.

6.1.3. ¿Cómo asociar la sopa de letras con otra actividad?

- Seleccionamos la opción Utilizar el p*anel B*:

- En la pestaña *Panel B*:

En esta opción podemos combinar la sopa de letras con una clase de rompecabezas que se irá formando conforme se encuentren las palabras ocultas de la sopa de letras.

La realización de este rompecabezas se realiza de forma similar a como formamos un rompecabezas normal en este mismo programa:

- En el icono:  podemos elegir la forma que deseamos que tenga el rompecabezas, desplegando el menú presionando  podremos ver las opciones.
- Haciendo clic sobre el botón podremos configurar estas opciones.
- En *Imagen* podemos insertar una imagen, si así lo deseamos, para que esta se vaya formando con forme se encuentren las palabras en la sopa de letras.
- Si por el contrario si se desea formar una oración en lugar de una imagen, se debe ir escribiendo la palabra que aparecerá en cada “pieza” del rompecabezas, haciendo clic sobre la “pieza” y luego escribiendo la palabra que corresponda según sea el caso.
- *Estilo* y *Borde* son opciones que permiten configurar el texto del rompecabezas y los bordes cada “pieza” de este, así como ha explicado en secciones anteriores.

5.4 Registro de secuencias

Finalmente llegamos a la última pestaña el registro de secuencias o simplemente **Secuencias**, es aquí donde se decide el orden de aparición de cada una de las actividades creadas dentro de un paquete de actividades o proyecto y al mismo tiempo las condiciones para pasar de una actividad a otra; es por lo tanto el paso final en el diseño del proyecto.

La siguiente ilustración muestra la pantalla del registro de secuencias

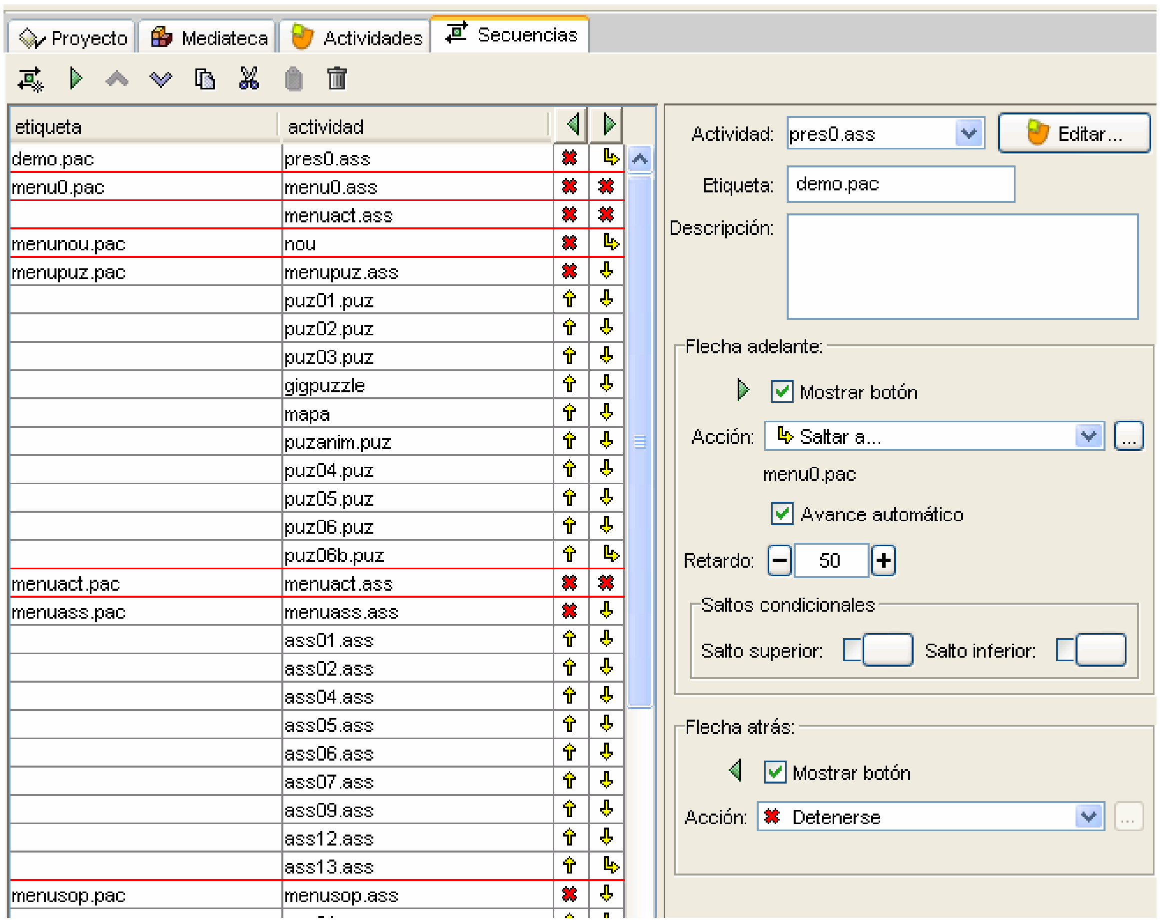
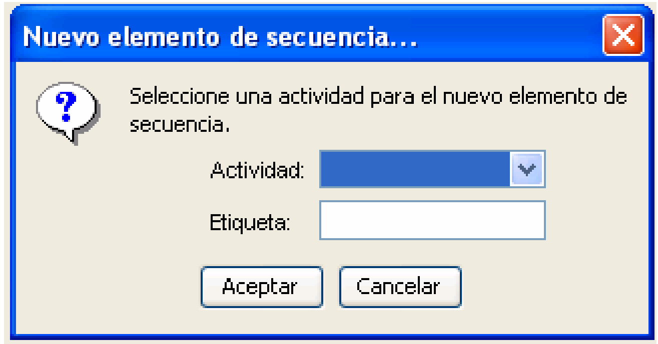
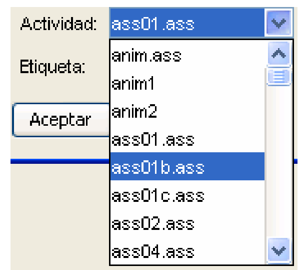


Figura: Secuencias

Notarás que ahora aparece un nuevo icono en la esquina superior derecha de la ventana de Ssecuencias este es  al presionarlo con el puntero del mouse se muestra la siguiente ventana.





En el menú desplegable Actividad aparecerán todos los nombres de las actividades contenidas en el proyecto y en el lugar Etiqueta puedes escribir una etiqueta o alguna información extra de la actividad; al seleccionar el nombre de la actividad se colocará en la tabla que se encuentra a la izquierda de la ventana Secuencias.

Es importante que los nombres de las actividades sean sugestivos para evitar confusiones a la hora de decidir la secuencia de aparición.

Al lado de derecho de la ventana de Secuencias se encuentran otras opciones para determinar las secuencias, el botón Editar 

permite cambiar el orden de las actividades si es que hobo algún error al introducirlas con el procedimiento anterior

La casilla de verificación Mostrar botón permite considerar la utilización de unos botones llamados avanzar y retroceder; estas acciones se pueden manipular mediante un menú desplegable.

En el menú desplegable Acción tendrás las siguientes opciones para los botones de avanzar  y retroceder  que visualizarás en el JClic-Player

Con está podrás avanzar a la siguiente actividad

Con esta otra opción puedes saltar a una actividad anterior o posterior a la que te encuentras que no necesariamente son inmediatamente consecutivas

Esta opción detiene hace que el usuario no pueda hacer uso de los botones de retroceder y avanzar

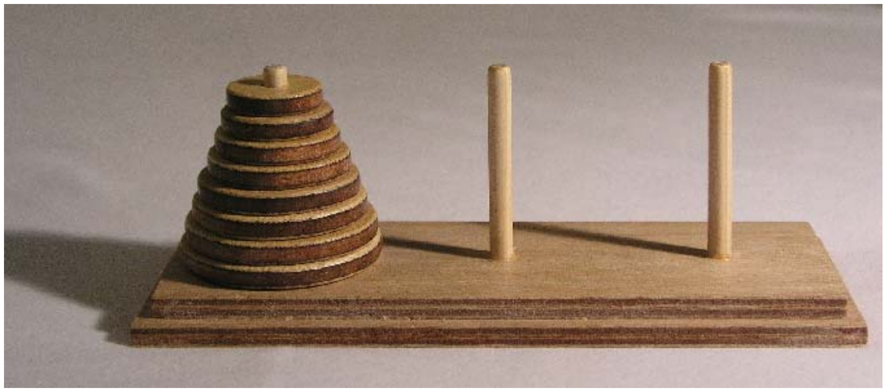
Actualiza la actividad

Con esta opción se sale del JClic-Player cerrando lo.

La opción de avance automático hace que al finalizar correctamente una actividad pase automáticamente a la siguiente y el tiempo que tarda en hacerlo se puede controlar mediante la opción retar manualmente o mediante los botones con los signos + y -.

LA LEYENDA DEL AJEDREZ Y LAS TORRES DE BRAHMA: CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Leonel Chaves Salas[1].
Adrián Sánchez Godínez[2].



Resumen:

En este taller se retomaran dos leyendas: Una de ellas sobre el origen del juego del ajedrez, donde el inventor pide como recompensa cierta cantidad de granos de trigo. Y en la otra leyenda el dios hindú Brahma encarga a los monjes de un templo trasladar una cierta cantidad de discos de una torre a otra. A partir de estas dos leyendas se estudiarán conceptos matemáticos tales como recursividad y función exponencial, desde una perspectiva de matemática recreativa, donde los participantes del taller tendrán la oportunidad de interactuar entre sí, trabajar con material concreto bajo la modalidad de clase tipo taller.

Descripción de las actividades.

Sesión 1.

- Reflexión Matemática Recreativa.
- Descripción de la leyenda del Ajedrez y planteamiento del problema.
- Trabajo en grupo.
- Discusión y análisis de los resultados.

Sesión 2.

[1] Liceo Antonio Obando Chan. Costa Rica. leonelchavess@yahoo.com.
[2] Universidad Nacional U.N.A . Liceo Regional de Flores. Costa Rica. asgodinez1@hotmail.com.

- Descripción de la leyenda “ Las Torres de Brahma”.
- Descripción del juego las Torres de Hanoi, mediante material concreto y el uso del ordenador.
- Planteamiento del problema.
- Trabajo en grupo.

Sesión 3.

- Discusión y análisis de los resultados de la sesión anterior.
- Enlace de las dos actividades realizadas.
- Plenaria final

Bibliografía.

Gardner Martin. Juegos Matemáticos. México, 1989. Editorial Selector S.A.

Gardner Martin. Carnaval Matemático. Madrid, 1980, 1981, 1983. Alianza Editorial S.A.

Gardner Martin. Circo Matemático. Madrid, 1983. Alianza Editorial S.A.

Parelman, Yacob. Matemáticas Recreativas. Barcelona, 1977. Ediciones Martínez Roca S.A.

http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/toh.html

MAPAS CONCEPTUALES MULTIMEDIALES

Jorge Monge Fallas[1]

Resumen

Se discutirán conceptos relacionados con la elaboración y construcción de mapas conceptuales. Los mapas conceptuales como técnica para visualizar información, como herramienta de navegación en la Web y como un sistema experto.

Utilizaremos CMAP TOOLS para crear mapas conceptuales y además lo utilizaremos como herramienta para administrar los distintos recursos multimediales que enriquecen algunos conceptos dentro del mapa conceptual.

Objetivo:

Elaborar y construir mapas conceptuales multimediales utilizando CMAP TOOL y recursos adicionales

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica

MATEMÁTICA INTEGRADA

Luis F Cáceres[1]

Resumen:

En este taller desarrollamos conceptos fundamentales de la escuela intermedia y superior usando tecnología, actividades prácticas y objetos concretos. En particular caminamos con un mismo problema por la geometría, el álgebra y la combinatoria. De esta manera ilustramos cómo diferentes áreas de la matemática se interrelacionan y cómo un aspecto geométrico o un aspecto algebraico puede en diferentes momentos contribuir a la solución del problema. Algunos de los temas desarrollados en el taller son, área, teorema del binomio, el infinito, sumas de Gauss, propiedades de triángulos y polígonos regulares. Se hace uso del programado Euklid, calculadora gráfica y bloques de construcción entre otros materiales.

Descripción:

El taller se le ha dado el nombre de Matemática Integrada ya que se busca presentar temas fundamentales de diferentes áreas de la matemática, como geometría, teoría de números, álgebra, combinatoria y otros y los trabajamos de manera interrelacionada. El taller de Matemática Integrada lo dividimos en tres sesiones.

En la primera sesión estudiaremos áreas y desarrollaremos la actividad “de lo sencillo a lo complejo”. En esta actividad iremos explicando el concepto de área comenzando por figuras simples como el rectángulo, pasando por figuras poligonales y por el círculo, hasta llegar a calcular el área de una región arbitraria por métodos probabilísticos. Comenzaremos con la validación del método probabilístico en áreas conocidas para luego pasar al cálculo de áreas de regiones arbitrarias. Haremos uso de algún programado o calculadora que provea números aleatorios. Extenderemos el método probabilistico de áreas para estimar números irracionales tales como $\sqrt{2}$ o π.

En la segunda sesión haremos uso de “objetos concretos” y “actividades prácticas” para ilustrar diferentes conceptos matemáticos, incluyendo el teorema del binomio, el concepto de infinito, propiedades del triángulo y teselados y la suma de los primeros n números naturales.

[1] Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez, Puerto Rico, lcaceres@math.uprm.edu

Teorema del binomio: En esta actividad se explora el teorema del binomio desde el punto de vista geométrico y algebraico. Se hace mención de un ejemplo clásico relacionado con la idea de búsqueda de patrones en matemáticas. Por último se integra al teorema de binomio una idea fundamental de conteo.

Infinito: En esta actividad se estudian los ejemplos clásicos del “hotel de Hilbert” y el “problema de la tortuga”, además mostramos ejemplos de áreas y perímetros infinitos y como calcularlos. Introducimos la idea de límite a través de problemas geométricos.

Propiedades del triángulo y teselados: En esta actividad ilustraremos varias maneras de probar algunas propiedades del triángulo como por ejemplo que la suma de los ángulos internos es 180°, en este caso mostraremos la actividad “caminando por el triángulo” que permite de manera concreta recorrer los ángulos internos del triangulo para comprobar que su suma es 180°. Introduciremos las ideas geométricas envueltas en el tema de teselados regulares.

Suma de los primeros n números naturales: En esta actividad comenzamos con la idea de Gauss para encontrar la suma de los primeros *n* números naturales y mostramos relaciones geométricas con esta idea. Después tratamos de generalizar el método para sumas de cuadrados y cubos y mostramos la necesidad de recurrir al álgebra.

En la tercera sesión haremos uso del programado Euklid como apoyo para la enseñanza de la geometría y como herramienta de uso diario para educadores a todos los niveles. Este programado de geometría es un instrumento para explorar, conjeturar, comprobar y refutar propiedades geométricas. También puede ser usado por los educadores como un instrumento de dibujo. Euklid es un programado sencillo de usar, barato y tiene la ventaja de no proveerle todo al estudiante, es decir que se requieren ciertos conocimientos básicos de geometría para poder comenzar a utilizarlo y dar comandos suficientes para lograr el dibujo o la ilustración deseada. Mirando problemas y en especial problemas retadores, estilo olimpiadas, el software permite hacer un buen diagrama que representa las condiciones del problema. Luego, el usuario puede variar algunos parámetros y observar que algunas cosas permanecen invariantes. De igual manera, el software es de gran ayuda para observar un lugar geométrico, quedando la tarea de demostrar lo observado. La geometría es movimiento. El software geométrico permite explorar tescelasiones del plano, simetrías y otras transformaciones. Es, sin lugar a dudas, un instrumento ideal para explorar la geometría dinámica.

Bibliografía

1. Luis F Cáceres, *Temas de Olimpiadas Matemáticas*, IFEM publications, 2004.

2. Keith Devlin, Mathematics: *The Science of Patterns*, Scientific American Library, 2003

3. Theoni Pappas, *The Magic of Mathematics*, Wide World Publishing/tetra, 2004

4. Rubenstein Rheta, *Matemática Integrada 1, 2 y 3*, McDougal Litell, 2002.

MATEMÁTICA MENTAL Y MATEMATIZACIÓN: NUEVOS ABORDAJES DIDÁCTICOS PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA.

Efrain López[1]
Jessica Mora[2]
Karolina Piedra[3]
Julieta Rodríguez[4]

Objetivos:

- Identificar diversas estrategias para organizar el ambiente de aprendizaje de la matemática.
- Valorar las oportunidades de aprendizaje provistas por las representaciones visuales.

Resumen:

En Costa Rica, los docentes de matemática se encuentran en una encrucijada: los logros de aprendizaje anuales no se reflejan en las evaluaciones nacionales, los profesores de los primeros años de la secundaría señalan las dificultades que enfrentan sus estudiantes al trabajar en áreas de conocimiento que se suponen dominadas desde la primaria, algunos ítemes de la pruebas de la olimpiada matemática sorprenden por el bajo nivel de logro. En general, hay una profunda inquietud por mejorar la oferta educativa en todos los niveles de la educación matemática.

Una forma de enriquecer la perspectiva de las formas de enseñar la matemática consiste en prestar atención a las corrientes de innovación de otras sociedades, para valorar el aporte que pueda rescatarse y adaptarse con miras a un enriquecimiento del a oferta formativa.

[1] Área de Ciencias y Matemática, Centro de Innovación Educativa, Fundación Omar Dengo
[2] Escuela de Orosí
[3] Escuela Ricardo Jiménez
[4] Colegio Técnico Mario Quirós Sasso

En Julio de 2005, tres profesores de matemática del MEP y un promotor del aprendizaje matemático de la Fundación Omar Dengo, asisten apoyados por INTEL a un taller denominado “Desarrollo de las ideas matemáticas” auspiciado por EDC. En esta visita tienen ocasión de explorar un enfoque de enseñanza basado en matemática mental, registro de estrategias de pensamiento, representaciones visuales, y modelaje de problemas con expresiones matemáticas. El área de contenido correspondió a la construcción del sistema decimal y a la resignificación de las operaciones. Este taller tiene la finalidad de esbozar algunos puntos de vista que pueden nutrir los enfoques didácticos de la matemática aplicables a la educación primaria.

Se ilustrará el concepto de matematización que permite modelar situaciones del mundo real en un situación matemática. Además, los participantes apreciarán la relación entre los algoritmos convencionales y los algoritmos intuitivos emergentes que contribuyen a motivar a los estudiantes en la creación de formas de solución que pueden socializarse y que ayudan a evidenciar las significaciones matemáticas.

MATEMÁTICA RECREATIVA: CONSTRUCCIÓN DE CUADROS MÁGICOS.

Leonel Chaves Salas[1]

José Alberto Vargas Ramírez[2]

Resumen.

En el presente taller se expondrán los diferentes tipos de cuadros mágicos, como se han dividido para su estudio a través de la historia. Se explicarán diversos procedimientos para su construcción, según sean de orden impar, pares múltiplos de cuatro o pares no múltiplos de cuatro. Los participantes tendrán la oportunidad de explorar y construir diferentes tipos de cuadros mágicos, así como de observar algunas de las características más sobresalientes.

Introducción.

En un cuadro mágico al sumar los números de cada fila, columna o diagonal se obtiene siempre el mismo resultado, llamado número mágico. En el siguiente ejemplo la suma de cada fila, cada columna y cada diagonal da como resultado 15.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Los cuadros mágicos han sido estudiados desde hace muchos siglos por diferentes culturas. Dadas sus curiosas características han llamado la atención de miles de personas, algunas de las cuales les han atribuido propiedades mágicas. Sin embargo, este no es el único tipo de cuadro mágico, ya que existe una gran variedad de ellos: panmágicos o diabólicos, bimágicos, mágico geométricos, y muchos más.

En el presente taller se pretende dar una explicación de algunos de los diferentes tipos de cuadros mágicos, así como procedimientos para su construcción, además de observación y análisis de algunas de sus principales características. También se podrán observar algunas variaciones sobre este tema, así como su aplicación a lecciones de secundaria.

[1] Liceo Antonio Obando Chan, Costa Rica. leonelchavess@yahoo.com
[2] Liceo Experimental Bilingüe Nuevo Arenal, Costa Rica. chepillo01@hotmail.com

Descripción de Actividades.

Sesión Nº 1:

1. Reflexión sobre matemática recreativa.
2. Explicación de cuadros mágicos: definición, ejemplos, diferentes tipos.
3. Trabajo en grupos con cuadro mágico sencillo.
4. Explicación y análisis de fórmulas para obtener el número mágico de un cuadrado.
5. Explicación de procedimientos para la construcción de cuadros mágicos de orden impar.

Sesión Nº 2:

1. Explicación de procedimientos para la construcción de cuadros mágicos de orden par múltiplos de cuatro (de la forma ***4n***).
2. Trabajo en grupos para la elaboración de cuadros mágicos.
3. Observación y análisis de diferentes características de este tipo de cuadros mágicos. Cuadros diabólicos.

Sesión Nº 3:

1. Explicación de procedimientos para la construcción de cuadros mágicos de orden par de la forma ***4n + 2***.
2. Trabajo en grupos para la elaboración de cuadros mágicos.
3. Análisis y comentarios sobre variaciones de cuadros mágicos y aplicabilidad en lecciones de matemática.
4. Plenaria de cierre del taller.

Bibliografía.

- Malba Tahan. El hombre que calculaba. Barcelona, España, 1972. Veron Editor.
- Gardner, Martin. Juegos Matemáticos. México, 1989. Editorial Selector S.A.
- Rodríguez Vidal, Rafael. Diversiones matemáticas. Barcelona, España, 1982. Editorial Reverté.
- Brandreth, Gyles. Juegos con números. Barcelona, España, 1989. Editorial Gedisa.

- Alem, Jean – Piere. Juegos de ingenio y entretenimiento matemático. Barcelona, España, 1984. Editorial Gedisa.

PROGRAMACIÓN DE APLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE TEMAS MATEMÁTICOS MEDIANTE MACROS DE EXCEL

José Luis Espinoza B.[1]
Manuel Calderón S.

Resumen:

Este tema se presenta en la modalidad de taller, para lo cual debe disponerse de al menos una computadora por cada dos participantes. Se entregarán los archivos Excel que sirvan a los participantes como punto de partida para generar sus propias aplicaciones. También se entregará material escrito que les sirva como guía.

El objetivo de esta actividad es mostrar cómo la hoja electrónica nos sirve para ir mucho más allá de las actividades que normalmente utiliza el docente como apoyo para su trabajo, personalizando algunas funciones o programas para mostrar conceptos matemáticos.

Palabras clave:

Excel, Graficación, Programación Visual Basic en Excel, Software Educativo para Matemática.

Programa:

1. Aplicaciones usando solamente las celdas y funciones predeterminadas de Excel.
2. Definición de macros en Excel.
3. Graficación de funciones.
4. Parámetros para darle interactividad a las gráficas de funciones, incorporados a la gráfica mediante barras de desplazamiento.
5. Algunos programas elementales para cálculo aproximado.
6. Cómo leer información de las celdas desde una función o subrutina.
7. Cómo presentar información en las celdas, generada por una función o subrutina.
8. Definición de botones de comando para correr programas.

Bibliografía:

- Barrantes, H. et al (1998). *Introducción a la Teoría de Números*. Costa Rica: EUNED.
- Bullen, S. et al. (2003). *Excel 2002 VBA. Programmer's Reference*. USA: Wiley Publishing, Inc.
- Burden, R.; Faires, J. (2002). *Análisis Numérico*. México: Thomson Learning, México.
- De Levie, R. (2004). *Advanced Excel for Scientific data analysis.* Oxford University Press.
- Espinoza, J. L. (2004) *Usos didácticos de la hoja electrónica Excel*. [En red]. Diciembre 2004. Disponible en: http://www.itcr.ac.cr/revistamate/

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, jespinoza@itcr.ac.cr, manuelcalderon@ice.co.cr

- Liengme, B. (2002). *A Guide to Microsoft Excel 2002 for Scientists and Engineers*. USA: Butterworth Heinemann, 3rd, ed.
- Scheid, F. (1982). *Introducción a la Ciencia de las Computadoras*. Serie Schaum. México: Mc Graw Hill.
- Stewart, J. (2001) *Cálculo en una variable*. 4a. ed. México: . Thomson Learning.

REDESCUBRIENDO LA GEOMETRÍA EUCLÍDEA CON EL GEÓMETRA

Jeffry Chavarría Molina[1]

Juan José Fallas Monge

Resumen

El Geómetra es uno de los paquetes computacionales, más potentes en el proceso de construcciones geométricas, así como en el desarrollo de aplicaciones relacionadas con funciones, recursividad y programación de diferentes rutinas.

La intención de este taller es aprovechar, esencialmente, el poderío referente a las construcciones, para verificar algunos teoremas, de suma importancia en la formación integral de un profesor o profesora de Matemática, que han sido abordados en los cursos de Geometría superior, pero por una u otra razón se han dejado de lado.

¿Se acuerda usted sobre: el Teorema de Torricelli, el Teorema de Tolomeo, el punto de Fermat, la recta de Euler, el Teorema de Marion…?

Objetivos generales:

- Reforzar a los y las profesoras participantes, el conocimiento en resultados afines a la Geometría plana.
- Incentivar a los y las profesoras de matemática participantes, a retomar resultados concernientes a su formación matemática universitaria.

Objetivos específicos:

- Fortalecer el manejo del paquete Geómetra, en cuanto a construcciones geométricas.
- Verificar, mediante aplicaciones construidas con el Geómetra, algunos teoremas interesantes relativos a la Geometría plana.

Metodología:

En este taller se facilitará a cada uno de los y las participantes, un documento con la recopilación de una serie de resultados importantes que se abordan en los cursos de Geometría superior. Algunos de ellos se irán abordando secuencialmente en las diferentes sesiones del taller, mediante guías de trabajo preelaboradas. La intención es que los y las participantes, con asesoría personalizada de parte de los encargados del taller, verifiquen cada uno de los teoremas designados.

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica,

Cronograma:

El taller se desarrollará en tres sesiones de 2 horas cada una. A continuación se especifica las actividades a desarrollar en cada una de ellas

Sesión 1

- Presentación del taller.
- Entrega del material a los y las participantes.
- Los profesores encargados desarrollarán la verificación de dos resultados, con la intención de reafirmar las construcciones básicas en el Geómetra, así como para delimitar la metodología a seguir en las siguientes sesiones, por los y las participantes del taller.

Los resultados a desarrollar son: El punto de Fermat y el Teorema de Napoleón, que se enuncian a continuación:

a) **El punto de Fermat:**

Si se construyen los triángulos equiláteros $\Delta BCA'$, $\Delta CAB'$ y $\Delta ABC'$, exteriormente sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$ del ΔABC, entonces los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son concurrentes en un punto P. El punto P se llama punto de Fermat.

Curiosidad:

El punto P es el primer punto notable de un triángulo, descubierto después de la época de los griegos. Si los ángulos internos del triángulo ΔABC, miden menos de 120º, entonces P es un punto tal que la suma de sus distancias a los puntos A, B y C es mínima.

b) **Teorema de Napoleón:**

Considere el triángulo de vértices A, B y C. Si se construyen triángulos equiláteros exteriores sobre los lados del triángulo anterior, entonces los baricentros de los triángulos equiláteros construidos son los vértices de un triángulo equilátero; a este triángulo se le llama triángulo externo de Napoleón.

Sesión 1 y 2

En ambas sesiones (final de la sesión 1 y sesión 2 completa), los y las participantes, analizarán y verificarán mediante construcciones en el Geómetra, cada uno de los siguientes resultados:

- Teorema de Tolomeo.
- Teorema de Brocard.
- Teorema de Cross.
- Teorema de Miquel.
- Teorema de Lemoine.
- Teorema de Marion.
- Teorema de la recta de Euler.
- El punto de Schiffler.

Para lo anterior contará con el apoyo de guías de trabajo así como la asesoría de los profesores encargados.

Sesión 3

Se pretende en esta sesión que las y los participantes, realicen ciertas construcciones con el Géometra (se anexan al final del documento), para luego establecer conjeturas sobre cada una de las construcciones. Básicamente será una sesión de exploración.

A continuación, se adjunta el enunciado de cada uno de los teoremas que verificaremos en el taller, así como las guías respectivas, para su construcción. Finalmente se anexan los problemas que serán resueltos por los y las participantes, en la sesión 3.

TEOREMAS

1. Teorema de Tolomeo:

Si ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, entonces:

$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$

2. Teorema de Brocard:

Considere el triángulo ΔABC, así como la circunferencia que pasa por A y B, y es tangente el lado $\overline{BC}$, la circunferencia que pasa por B y C y es tangente al lado $\overline{CA}$, y finalmente la circunferencia que pasa por C y A y es tangente al lado $\overline{AB}$. Estas tres circunferencias pasan por un punto común, llamado punto de Brocard.

3. Teorema de Cross:

Considere el triángulo ΔABC. Sobre los lados del triángulo anterior, se construyen los cuadrados ACDE, BCHI y ABFG. Se cumple que los triángulos ΔEAG, ΔDCH y ΔIBF, tienen igual área que el ΔABC.

4. Teorema de Miquel:

Considere el triángulo ΔABC. Sea r la recta que pasa por B y C, sea s la recta que pasa por A y C, sea t la recta que pasa por A y B. Sea m una recta que interseca a la rectas r, s y t en los puntos D, E y F, respectivamente; entonces las circunferencias circunscritas a los triángulos ΔABC, ΔDBF, ΔAEF y ΔDCE son concurrentes. El punto de concurrencia se llama punto de Miquel.

5. Teorema de Lemoine:

En cualquier triángulo las isogonales de las medianas concurren en un punto. El punto se llama punto de Lemoine.

Nota: Dado un triángulo ΔABC, con M el punto medio de $\overline{BC}$, y N un punto tal que B-M-N-C (colineales), se dice que $\overline{AN}$ es la isogonal de la mediana $\overline{AM}$ si $\angle BAM$ es congruente con el $\angle NAC$.

6. Teorema de Marion:

Si los puntos de trisección de los lados de cualquier triángulo son conectados a los vértices opuestos, la razón entre el área del triángulo y el área del hexágono resultante es 10.

7. Teorema de la recta de Euler:

En todo triángulo el ortocentro, el baricentro y el circuncentro son colineales. La recta que los contiene se llama la recta de Euler.

8. El punto de Shiffler:

Sea I el incentro del triángulo ΔABC. Las rectas de Euler de los triángulos ΔABC, ΔABI, ΔACI y ΔBCI son concurrentes. El punto de concurrencia se llama el punto de Shiffler.

GUÍAS

Teorema 1(Teorema de Tolomeo)

Teorema de Tolomeo:

Si ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, entonces:

$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD$

<u>Construcción</u>:

Paso1: Construya un círculo arbitrario y construya un cuadrilátero ABCD inscrito en el círculo anterior.

Paso 2: Calcule las medidas de $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BA}$ y $\overline{DC}$; y la distancia entre los puntos A y C, y los puntos C y B.

Paso 3: Utilice la calculadora (**Medir/Calcular**) para comparar el valor de las expresiones $m\overline{AD} \cdot m\overline{CB} + m\overline{BA} \cdot m\overline{DC}$ y $AC \cdot DB$.

Paso 4: Explore manipulando los puntos sobre la circunferencia y cambiando el radio del círculo. Note que el teorema no se cumple si el polígono inscrito no es cuadrilátero.

Teorema 2 (Teorema de Brocard**)**

Teorema de Brocard: Considere el triángulo ΔABC, así como la circunferencia que pasa por A y B, y es tangente el lado $\overline{BC}$, la circunferencia que pasa por B y C y es tangente al lado $\overline{CA}$, y finalmente la circunferencia que pasa por C y A y es tangente al lado $\overline{AB}$. Estas tres circunferencias pasan por un punto común, llamado punto de Brocard.

<u>Construcción:</u>

Paso 1: Construya el triángulo de vértices A, B y C.

Paso 2: Construya la circunferencia que pasa por A y B, y es tangente el lado $\overline{BC}$. Para esto proceda de la siguiente forma:

– Construya la recta perpendicular a $\overline{BC}$ y que pase por el punto B.
– Construya el punto medio del lado $\overline{AB}$ y llámelo M.
– Construya la recta perpendicular a $\overline{AB}$, que pasa por M (lo que estamos creando es la mediatriz del lado $\overline{AB}$).
– Llame con P la intersección entre las dos rectas creadas anteriormente.
– Oculte las rectas anteriores y el punto M.
– Seleccione el punto P y el punto B, y escoja del menú **Construir/Círculo por Centro+punto.** Esta es la circunferencia pedida.

Paso 3: Procediendo en forma análoga al paso anterior, construya la circunferencia que pasa por B y C y es tangente al lado $\overline{CA}$, y finalmente la circunferencia que pasa por C y A y es tangente al lado $\overline{AB}$.

Paso 4: Estas tres circunferencias pasan por un punto común, éste es el punto de Brocard.

Teorema 3 (Teorema de Cross)

Teorema de Cross:

Considere el triángulo ΔABC. Sobre los lados del triángulo anterior, se construyen los cuadrados ACDE, BCHI y ABFG. Se cumple que los triángulos ΔEAG, ΔDCH y ΔIBF, tienen igual área que el ΔABC.

Construcción:

Paso 1. Construya un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*.

Paso 2. Construya los cuadrados *ACDE*, *BCHI* y *ABFG* sobre los lados del triángulo, para esto puede trabajar rotando 90º cada uno de los lados. Por ejemplo, para construir el cuadrado *ACDE* se procede como sigue:

- Marque el punto *A* como centro (puede dar doble click sobre el punto, o bien, seleccione el punto y **Transformar/Marcar centro**).
- Seleccione únicamente el segmento $\overline{AB}$ y el punto *B*, rótelos 90º ó -90º según corresponda (Guíese con el trazo de muestra).
- Nombre el nuevo punto como *G* y márquelo como centro, rote el segmento $\overline{AG}$ y el punto *A* 90º ó -90º según corresponda.
- Nombre el nuevo punto como *F* y repita el proceso para cerrar el cuadrado.

  Puede hacer uso de cualquier otra construcción que conozca para realizar el proceso anterior, los cuadrados *BCHI* y *ABFG* se construyen en forma análoga (no olvide nombrar los puntos en forma correcta).

Paso 3. Construya los triángulos ΔAEG, ΔDCH y ΔIBF, y sus respectivos interiores. Construya el interior del triángulo ΔABC.

Paso 4. Mida el área de los triángulos anteriores.

Paso 5. Explore y verifique que la medida del área de todos lo triángulos son iguales.

Teorema 4 (Teorema de Miquel**)**

Teorema de Miquel:

Considere el triángulo ΔABC. Sea r la recta que pasa por B y C, sea s la recta que pasa por A y C, sea t la recta que pasa por A y B. Sea m una recta que interseca a la rectas r, s y t en los puntos D, E y F, respectivamente; entonces las circunferencias circunscritas a los triángulos ΔABC, ΔDBF, ΔAEF y ΔDCE son concurrentes. El punto de concurrencia se llama punto de Miquel.

Construcción:

Paso 1: Construya el triángulo de vértices A, B y C.

Paso 2: Construya la recta r que pasa por B y C, la recta s que pasa por A y C y la recta t que pasa por A y B.

Paso 3: Construya una recta m que interseque a la rectas r, s y t en los puntos D, E y F, respectivamente.

Paso 4: Construya la circunferencia circunscrita en el ΔABC. Para esto proceda de la siguiente manera:

- Construya el punto medio del lado $\overline{AC}$ y luego la recta perpendicular a $\overline{AC}$ en el punto medio (construcción de la mediatriz).
- Análogamente al paso anterior, construya la mediatriz del lado $\overline{BC}$.
- Construya el circuncentro del ΔABC, llámelo R y oculte las mediatrices y los puntos medios construidos.
- Seleccione el punto R y cualquiera de los vértices del ΔABC, digamos B y proceda **Construir/Círculo por centro+punto.** Esta es la circunferencia circunscrita al ΔABC.

Paso 4: Análogamente al paso anterior, construya las circunferencias circunscritas de ΔDBF, ΔAEF y ΔDCE.

Paso 5: Las circunferencias anteriores son concurrentes, el punto de concurrencia se llama punto de Miquel.

Teorema 5 (Teorema de Lemoine**)**

Teorema de Lemoine:

En cualquier triángulo las isogonales de las medianas concurren en un punto. El punto se llama punto de Lemoine.

Nota: Dado un triángulo ΔABC, con M el punto medio de $\overline{BC}$, y N un punto tal que B-M-N-C (colineales), se dice que $\overline{AN}$ es la isogonal de la mediana $\overline{AM}$ si $\angle BAM$ es congruente con el $\angle NAC$.

<u>Construcción:</u>

Construiremos la isogonal de la mediana trazada sobre el lado $\overline{BC}$.

Paso 1: Construya el triángulo de vértices A, B y C.

Paso 2: Construya el punto medio de $\overline{BC}$ y denótelo M.

Paso 3: Construya la mediana $\overline{AM}$.

Paso 4: Mida el ángulo $\angle BAM$. Para esto marque los puntos B, A y M, y proceda **Medir/ángulo.**

Paso 5: Marque el punto A dando doble click sobre él. Seleccione el punto A y el segmento $\overline{AC}$. Escoja **Transformar/Rotar.** Sin cerrar el formulario para rotar, que le apareció, seleccione la medida del $\angle BAM$, que obtuvo en el paso 4. Esto producirá un ángulo congruente con $\angle BAM$. Presione el botón Rotar. La línea que queda es la isogonal de la mediana $\overline{AM}$.

Paso 6: Construya las otras dos isogonales del triángulo. Tome en cuenta que a la hora de hacer las rotaciones, podría pasar que el segmento rotado no se genere en el interior del triángulo, en estos casos se requiere la rotación en sentido contrario; y lo logramos utilizando **Medir/Calcular** (calculadora del Géometra) y anteponiendo un menos a la medida del ángulo y volviendo a hacer la rotación, pero con el "ángulo negativo".

Paso 7: Observe que las tres isogonales concurren, el punto de concurrencia se llama punto de Lemoine.

Teorema 6 (Teorema de Marion)

Teorema de Marion:

Si los puntos de trisección de los lados de cualquier triángulo son conectados a los vértices opuestos, la razón entre el área del triángulo y el área del hexágono resultante es 10.

<u>Construcción</u>:

Paso 1. Construya el triángulo con vértices *A*, *B* y *C*.

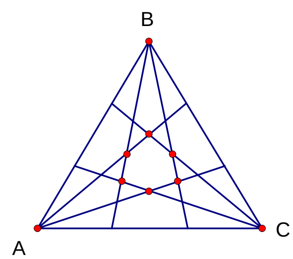
Paso 2. Trisecar los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Lo ejemplificaremos trisecando el segmento $\overline{AB}$, para ello se procede:

- Determine la longitud de $\overline{AB}$ y utilice la calculadora para determinar el valor de la tercera parte de dicha medida.
- Construya círculos con centro en A y en B, con radio igual a la tercera parte de la medida de $\overline{AB}$ (obtenida en el paso anterior).
- Construya el punto de intersección entre dichos círculos y el lado $\overline{AB}$.
- Oculte (no borre), los círculos construidos. Los puntos obtenidos trisecan el lado $\overline{AB}$.

La trisección de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ es análoga.

Paso 3. Construya los segmentos que unen los puntos de trisección, encontrados en el paso anterior, con los vértices opuestos del triángulo ΔABC.

Paso 4. Construya los puntos de intersección entre los segmentos encontrados en el paso anterior, que forman un hexágono en el interior del triángulo, como se muestra en la figura.



Paso 5. Construya el interior del hexágono anterior y del triángulo ΔABC (utilice diferentes colores en cada una de las regiones).

Paso 6. Determine el área de cada uno y encuentre la razón entre éstas. Explore moviendo los vértices del triángulo o bien animando el triángulo para verificar que dicha razón es siempre 10.

Teorema 7 (La recta de Euler)

La recta de Euler:

En todo triángulo el ortocentro, el baricentro y el circuncentro son colineales. La recta que los contiene se llama la recta de Euler.

<u>Construcción</u>:

Paso 1. Construya el triángulo con vértices *A*, *B* y *C*.

Paso 2. Construya dos alturas del triángulo y determine el ortocentro. Llámelo O.

Paso 3. Construya dos mediatrices del triángulo y determine el circuncentro. Llámelo C.

Paso 4. Construya dos medianas del triángulo y determine el baricentro. Llámelo B.

Paso 5. Construya una recta que pase por dos de los puntos anteriores.

Paso 6. Explore moviendo o animando el triángulo y verifique visualmente que el otro punto también se encuentra sobre la recta.

Paso 7. Oculte las rectas notables y repita la exploración. Esta recta se denomina la recta de Euler.

¿Cómo crear una herramienta personalizada?

En algunos casos, el trabajo al realizar una construcción es repetitivo, por ejemplo si se requiere determinar la recta de Euler en varios triángulos diferentes, es muy tedioso realizar la misma rutina para cada triangulo. Siempre es posible construir una herramienta personalizada que nos permita hacer todo el trabajo con una sola construcción. Para ejemplificarlo, utilizaremos la construcción realizada en el teorema anterior.

Paso 1: Seleccione toda la construcción realizada en el teorema anterior y defina una herramienta personalizada, utilizando el botón  (**Herramientas personalizadas**) y seleccionando **Crear nueva herramienta…** Aparecerá un nuevo formulario, inserte el nombre **Recta de Euler** y por último presione el botón **Aceptar.** En este momento tenemos hecha la herramienta **Recta de Euler**.

Paso 2: Para utilizar nuestra herramienta, diríjase al botón , presione y sin soltar el botón del ratón, desplace el puntero hacia la derecha. Allí aparecerán todas las herramientas personalizadas que hayamos creado. Elija **Recta de Euler** y proceda **a** dibujar un triángulo en la pantalla y observe lo que sucede.

Paso 3: En el caso particular, que ya tengamos un triángulo ΔDEF en nuestra hoja de trabajo y deseamos construirle la recta de Euler, simplemente se marca la herramienta personalizada **Recta de Euler** (como en el paso anterior) y se procede a dar click en los vértices del triángulo ΔDEF . Esta herramienta es necesaria para la verificación del siguiente teorema.

Teorema 8 (El punto de Shiffler**)**

El punto de Shiffler:

Sea I el incentro del triángulo ΔABC. Las rectas de Euler de los triángulos ΔABC, ΔABI, ΔACI y ΔBCI son concurrentes. El punto de concurrencia se llama el punto de Shiffler.

Construcción:

Paso 1: Construya el triángulo de vértices A, B y C.

Paso 2: Construya el incentro del ΔABC. Para esto construya la bisectriz de dos de los ángulos internos del ΔABC y llame I el punto de Intersección.

Paso 3: Utilice la herramienta personalizada (o rutina), creada en el Teorema 7, para construir la recta de Euler de los ΔABC, ΔABI, ΔACI y ΔBCI. Las tres rectas de Euler anteriores, son concurrentes, el punto de concurrencia se llama el punto de Shiffler.

PROBLEMAS

1. Construya un cuadrilátero ABCD arbitrario. Construya los baricentros de los triángulos Δ ABC, Δ ACD, Δ ABD y Δ BCD y denótelos M, T, R y S, respectivamente. Compare las áreas de los cuadriláteros ABCD y MSTR y establezca una conjetura. Realice lo mismo con los perímetros.
2. Construya un cuadrilátero ABCD arbitrario y denote con E el punto de intersección de sus diagonales. Construya los baricentros de los triángulos ABE, BEC, CED, AED y denótelos R, S, T y U, respectivamente. Explore libremente y establezca una conjetura sobre el cuadrilátero RSTU.
3. Construya un triángulo arbitrario Δ ABC y denote con M el punto medio del lado $\overline{AC}$. Construya los baricentros de los triángulos Δ ABC, Δ ABM y Δ MBC. Explore libremente y establezca una conjetura.
4. Construya un cuadrilátero arbitrario ABCD y los ortocentros de los triángulos Δ ABC, Δ ACD, Δ ABD y Δ BCD. Compare el área del cuadrilátero que tiene como vértices los ortocentros anteriores, con el área del cuadrilátero ABCD y establezca una conjetura.
5. Construya un triángulo arbitrario de vértices A, B y C. Construya los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ y denótelos P, Q y R respectivamente. Construya los

puntos medios de los segmentos $\overline{PQ}, \overline{QR}$ y $\overline{PR}$ y denótelos S, T y U respectivamente. Construya los ortocentros de los triángulos ΔABC, ΔPQR y ΔSTU y denótelos M, N y L, respectivamente. Establezca al menos dos conjeturas sobre estos tres últimos puntos.

Revista Digital

Geovanni Figueroa M. gfigueroam@yahoo.com.mx
Walter Mora F. wmora2@yahoo.com
Escuela de Matemática, ITCR
Costa Rica

Nivel educativo: Secundaria y Universitaria

Categoría: Ponencia

Resumen

Alrededor del año 2000 nace ésta publicación con el objetivo de crear un sitio para la divulgación y discusión de las matemáticas. En aquel momento, una de las principales razones para usar Internet como vía de comunicación fue la posibilidad de agregar riqueza visual e interactiva a los textos de matemática, cosa que con el tiempo hemos ido logrando y mejorando. La riqueza visual e interactiva es un gran aporte al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, permitiendo conceptualizar y visualizar conceptos que algunas veces pueden ser demasiado abstractos como para logar una apropiación adecuada de los mismos.

El objetivo de esta comunicación es presentar la revista y exponer la experiencia generada con la idea de incentivar en otros colegas la publicación y porque no, la creación de revistas similares. Además, se hará una pequeña excursión por el software (libre) que se ha desarrollado como parte del proyecto y que puede ser descargar del sitio Web de la revista.

Palabras claves:

Revista digital, matemática, enseñanza de la matemática, matemática interactiva.

Sitio Web:

http://www.itcr.ac.cr/revistamate

SOBRE CRIPTOGRAFÍA Y OTRAS APLICACIONES DE LA TEORÍA DE NÚMEROS

Manuel Murillo T.[1]
Félix Núñez V.
Geovanny Sanabria B.

Resumen:

La criptografía es el estudio de los métodos de envío y recepción de mensajes secretos, y que solamente la persona a la cual va dirigido puede descifrar y consecuentemente leer. El objetivo de la criptografía es el desarrollar formas seguras de comunicación privadas pero en un ámbito público, para ello se quiere crear un código secreto de manera que el procedimiento del descifrado sea difícil aun cuando conozca el procedimiento de estructuración del mismo.

En este taller, con el propósito principal de comprender los métodos de encriptar mensajes, se recordarán brevemente los fundamentos de la teoría de números tales como:

- *Nociones de sistemas de numeración con bases enteras, fraccionarias y complejas.*
- *Funciones multiplicativas, entre ellas tau, sigma, de Euler, de Möbius entre otras.*
- *Teoremas de Fermat, de Euler y de Wilson entre otros.*
- *Solución de algunos ejercicios no tradicionales y de gran valor didáctico, relacionados algunos con el calendario, juegos tipo NIM, conjuntos de Cantor, etc.*

A partir de esto, se verán algunos métodos de codificar mensajes, iniciando con el utilizado por Julio César en la antigua Roma, los inventados por adolescentes enamorados, para finalizar con el método conocido como el criptosistema RSA en honor a sus creadores R. Rivest, A. Shamir y L. Adleman el cual está, basado en el teorema de Euler.

Los participantes pondrán encriptar sus propios mensajes utilizando los métodos expuestos y, por qué no, algún método que se invente en el propio taller. Para los cálculos se utilizará algún software o calculadora programable como la TI-92.

Palabras clave:

Criptografía, Sistemas de numeración, Funciones Multiplicativas, Conjuntos de Cantor, Fractales

Bibliografía:

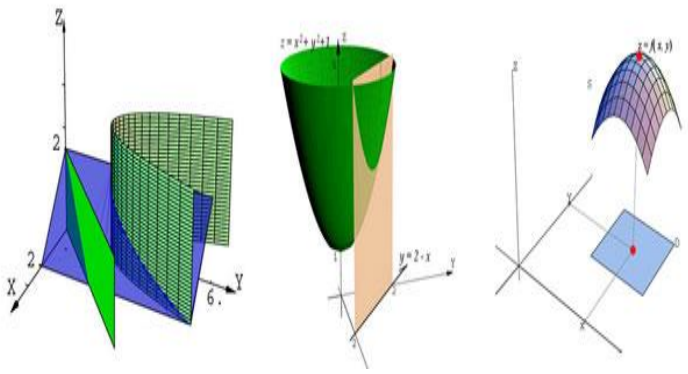
- Koblitz, Neal. (1987). *A Course in Number Theory and Cryptography*, Springer Verlag.

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, mmurillo@itcr.ac.cr, fnunez@itcr.ac.cr, gsanabria@itcr.ac.cr

- Barrantes et al (1998). *Introducción a la Teoría de Números*. Costa Rica: Editorial de la Universidad Estatal a Distancia.
- Pettofrezzo, A. & Byrkit, D. *Introducción a la Teoría de los Números*. Editorial Prentice Hall, España, 1972.
- Murillo, M. (2002). *Sobre fractales como atractores de sistemas*, Revista Matemática, Educación e Internet, ITCR, Vol. 3, Num. 1. Disponible en: http://www.itcr.ac.cr/revistamate/Contribucionesv3n1002/fractales/index.html

UN CURSO INTERACTIVO DE CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES.

Geovanni Figueroa M. gfigueroam@yahoo.com.mx
Walter Mora F. wmora2@yahoo.com.mx
Escuela de Matemática, ITCR
Costa Rica



Nivel educativo: 35

Categoría: 7 y 10.

Resumen

Las representaciones visuales siempre han sido una ayuda esencial en la exploración, comprensión y transmisión de conceptos de la matemática. Por ejemplo, la visualización 3D de algunas situaciones complejas en cálculo en varias variables es indispensable para desarrollar destrezas de cálculo en aplicaciones tales como cálculo de volúmenes o integrales de flujo. Con el afán de ayudar al estudiante con problemas de visualización en esta área, se ha creado un curso en línea sobre cálculo multivariado. Uno de sus principales objetivos es ofrecer al estudiante, así como el profesor, de acceso (vía Internet o en un cdrom y de manera gratuita) a recursos con gran calidad gráfica y con posibilidad de interacción; todo esto, con el fin de apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los distintos temas del curso.

El objetivo de esta comunicación es mostrar algunos de los componentes interactivos de dicho curso: "Cálculo Superior", que se imparte en la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Palabras claves:

Cálculo en varias variables, curvas, superficies, visualización 3D.

Sitio Web:

http://www.cidse.itcr.ac.cr/cursos/superior ó
http://www.itcr.ac.cr/revistamate/cursosmate/superior

Bibliografía

- Mathematica y JavaView. Consultada 24 mar. 2005. Disponible en http://www.javaview.de/mathematica/index.html
- Martin, Kraus. LiveGraphics3D. Consultada 24 mar. 2005. Disponible en http://wwwvis.informatik.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/
- Pita R. C. 1995. Cálculo Vectorial. Prentice-Hall. México, MX, 1078 p.
- Davis, B.1994. Calculus and Mathematica. Addison-Wesley. New York, US, 330p.

TALLER GEOMETRA

Bach. Andrea Camacho Sánchez. (acamacho@itcr.ac.cr)
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Bach. Pamela Granados Vargas (pame@costarricense.cr)
Colegio Científico Costarricense de Cartago

TEC
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Introducción:

El Geómetra es un software no libre, desarrollado por la Empresa Key Curriculum Press, que permite realizar diferentes tipos de actividades de exploración y creación en los distintos campos de la matemática como son la geometría, trigonometría, álgebra, funciones, entre otros. De uso del profesor para desarrollar sus clases, así mismo para los estudiantes para explorar conceptos.

En este taller aprenderemos las herramientas básicas que tiene el Geómetra, con la finalidad de ayudarle en la elaboración de pruebas, actividades en las cuales el estudiante pueda explorar los conceptos matemáticos en un laboratorio o como una herramienta pedagógica para desarrollar los contenidos en el aula.

Requisitos:

Manejo básico de Windows.

Objetivos del taller:

- Conocer las principales herramientas del Geómetra.
- Utilizar el programa para explorar conceptos dentro del aula
- Creación de imágenes para la elaboración de pruebas y prácticas.

Estructura del curso:

El curso consta de dos sesiones, de una hora y treinta minutos de duración cada una. Las sesiones tendrán un módulo de trabajo que consta de dos **guías** donde se explican los contenidos básicos y actividades a realizar.

Sitio de consulta: www.keypress.com / sketchpad

TECNOLOGÍA-MATERIAL CONCRETO: UNA EXCELENTE COMBINACIÓN PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Ricardo Poveda Vásquez[1]
Yuri Morales López[2]

Resumen

El objetivo principal de este taller es concienciar a los participantes de diferentes opciones que tiene el profesor de matemática para la Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática. En nuestro caso analizaremos la importancia del material concreto y la tecnología insertados dentro de una metodología de clase tipo taller. La participación del estudiante de su propio conocimiento y el cambio de rol del docente como facilitador son factores fundamentales para un aprendizaje significativo dentro de este enfoque.

Palabras Claves

Educación matemática, Tecnologías, Calculadora Voyage 200, Guías Didácticas, Material Concreto.

Desarrollo

<u>Tecnología:</u>

La enseñanza de la matemática se ha visto repercutida por los efectos de las llamadas "tecnologías modernas". El costo y la accesibilidad de las calculadoras, computadoras, software y acceso a Internet a una gran masa de la población permiten que tanto estudiantes como docentes tengan más recursos tecnológicos e información actualizada a su disposición.

Los profesores debemos buscar estrategias para introducir la tecnología en la enseñanza de la matemática. Los jóvenes tienen acceso a diferentes tecnologías, esto los hace cada día más críticos, creativos y activos.

No se puede pretender utilizar la tecnología sin un fin específico. Según Crespo (1997) se está "vendiendo" y "comprando" la idea de que la tecnología es la fórmula mágica que trasformará nuestras aulas en verdaderos ambientes de enseñanza y aprendizaje. Autores como Gómez (1998) y Meza (2001) han señalado que la tecnología no es la solución a

[1] Universidad Nacional. Costa Rica. e-mail: rpoveda@costarricense.cr
[2] Universidad Nacional. Costa Rica. e-mail: yurimoralesl@yahoo.com

todos los problemas educativos, pero sí se ha convertido en un agente de cambio en la educación matemática.

Algunas veces los profesores de matemática pretenden que los estudiantes, por medio de una gran argumentación teórica y la visualización de unas pocas gráficas dibujadas en la pizarra (que muchas veces no son una buena representación de lo deseado) comprendan una serie de conceptos que incluso, a muchos profesores les ha tomado años de estudio para entenderlos a plenitud.

Contrapuesto a lo anterior, se debe de concientizar que la tecnología como herramienta didáctica en los salones de clase, más que un instrumento sin fin específico, se puede convertir en un medio facilitador del aprendizaje, en una forma para atraer la atención de los alumnos y motivarlos al aprendizaje a través de un planeamiento cuidadosamente elaborado.

El uso de tecnologías es idóneo para obtener, por ejemplo, una buena representación gráfica de cualquier función en poco tiempo y así poder comparar varias funciones para obtener conclusiones sobre una característica específica de las funciones graficadas. Además, si la representación gráfica ya es obtenida por el mismo estudiante, sobra comentar su alto valor cognoscitivo.

Con la tecnología como herramienta, el estudiante puede analizar, deducir y relacionar gráficas con conceptos algebraicos. También, podrá ser capaz de relacionar las diferentes representaciones semióticas de las funciones, así como características y propiedades.

Material Concreto

El aprendizaje significativo de un concepto, se puede facilitar cuando el estudiante manipula materiales y objetos los cuales le permiten establecer relaciones, entre el nuevo contenido y los elementos ya disponibles en su estructura cognitiva. No obstante, esta actividad no ha de confundirse con la simple manipulación o exploración de objetos o situaciones por el mero hecho de hacer cosas distintas pero sin un objetivo de fondo.

Cuando se enseña una disciplina como la matemática, el material concreto se convierte en una herramienta que permite al estudiante saber lo que está haciendo, puesto que tiene la posibilidad de ver, tocar y sentir. La idea de usar material concreto en el aula es “trasladar” algunos conceptos abstractos de la matemática a la manipulación, de tal modo que a partir de esta experiencia sensorial los conceptos sean construidos y relacionados con la realidad.

Es importante que a lo largo de la labor docente, se pueda llegar a considerar el material didáctico como el principio sobre el cual gire nuestra actividad en la clase de matemáticas, lo que conllevaría a reconvertir el aula normal de clase en un laboratorio – taller en el que la adquisición de conceptos se convierte en una experimentación continua, priorizando la forma de adquisición de conceptos a los propios contenidos.

Al unir la tecnología con el material concreto podemos obtener actividades (o guías didácticas) como la que presentamos a continuación

LA CANOA

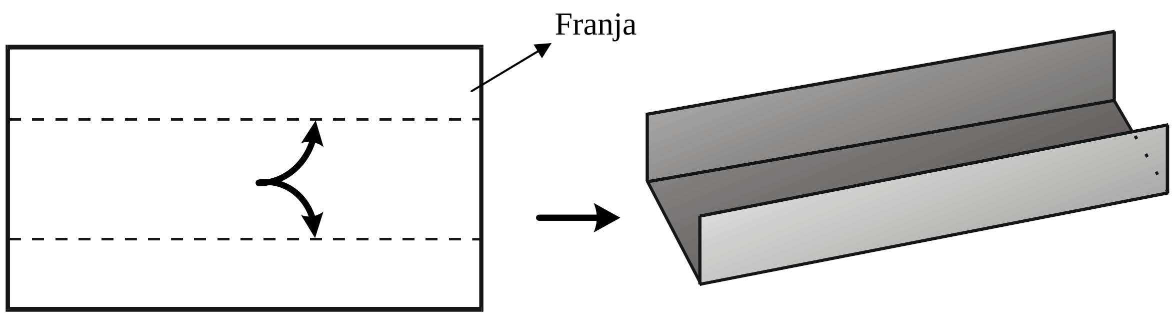
Objetivo:
Encontrar las relaciones existentes entre las distintas medidas de una canoa construida a partir de una lámina: largo, ancho, alto y volumen.

Materiales y equipo:
Hoja de papel de construcción, regla numerada, calculadora Voyage 200.

Tiempo:
40 minutos.

Procedimientos:

1. Una canoa semejante a las usadas para el trasiego de líquidos entre tanques se puede simular a partir de una hoja de papel de construcción. Use la hoja dada para "construir" una canoa. Para ello, simplemente doble franjas del mismo ancho a lo largo de la hoja, según se muestra en el dibujo:



2. ¿Cuáles son las dimensiones (en centímetros) de la hoja de papel de construcción?

Largo: ________________.

Ancho: ________________.

3. Doble la hoja (escoja el tamaño del ancho de la franja) según se muestra en la figura anterior y responda:

Ancho de la franja: ________________.

Volumen de la canoa: _____________.

4. Suponga que el ancho de la franja hubiera sido de otro tamaño distinto (¡hay tantas posibilidades…!). Calcule el volumen de la canoa para el caso que la franja fuera de distintas medidas: 1cm, 2cm, 3cm, etc. Complete la siguiente tabla:

Tabla No 1

Franja (cm)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Volumen (cm^3)								

5. ¿Cuál es la dimensión mínima de la franja?

R/: ________________________

6. ¿Cuál es la dimensión máxima de la franja?.

R/: ________________________

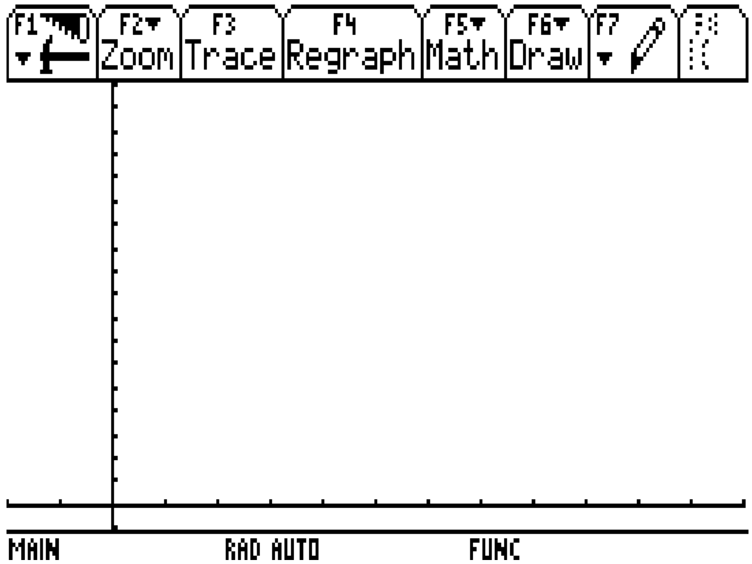
7. Según la tabla del punto 4. ¿cuál es el ancho de la franja para obtener el mayor volumen?

R/: ________________________

8. De manera general, llame con x el ancho de la franja de la hoja. Discuta con su compañero de grupo y escriba el volumen de la canoa tomando en cuenta las dimensiones de la hoja y el ancho de la franja (ahora denominado con x)

V = ________________________

9. Grafique en la calculadora la relación obtenida en el paso anterior. Dibuje en la "pantalla" adjunta la gráfica obtenida.



10. ¿Cuáles son las intersecciones con el eje X de la gráfica anterior?

____

11. ¿Cómo obtuvo los puntos de intersección con el eje X ?

____

____

12. De acuerdo con la gráfica del punto 9. ¿Cuál debe ser el ancho de la franja para obtener el máximo volumen de la canoa?

Ancho de la franja: _________________.

Volumen de la canoa: ______________.

13. ¿Qué procedimiento utilizó para obtener el ancho de la franja para el máximo volumen?

____

____

14. ¿Cual debe ser al ancho de la franja para que el volumen de la "canoa" sea $700\,cm^3$?

Ancho de la franja: _________________.

Bibliografía

Crespo, S. (1997). **Algunas consideraciones sobre el uso de la tecnología para enseñar y aprender matemática.** Recuperado el 07 de marzo del 2003, de http://boletin_5_1_97.htm

Gómez, D. (1998). **Tecnología y educación matemática**. En: Revista Informática Educativa. Vol. 10. No 1. Colombia.

Meza, L. (2001). **Globalización y educación: el impacto de la nuevas tecnologías.** Material del curso: Aportes Pedagógicos Innovadores. CIDE. UNA.

USO DE *CABRI GÉOMÈTRE* COMO HERRAMIENTA DIDÁCTICA

Ronny Gamboa Araya[1]

Resumen

El objetivo principal de este taller es presentar a los participantes un software que puede ser utilizado como una herramienta didáctica para la enseñanza de las matemáticas. En este caso se trabajará con el software dinámico Cabri Géomètre y se presentarán actividades que pueden realizarse en el salón de clases. Además, se incentivará la discusión respecto a la forma de trabajar con este tipo de herramienta.

Resumen:

Durante los últimos años el avance que ha experimentado el mundo a través del desarrollo de la tecnología ha revolucionado en muchos aspectos a la sociedad. En particular, uno de ellos, es la forma de organización de ideas y, en consecuencia, el modo de aprender.

En el caso particular de la enseñanza de las matemáticas, el uso de la tecnología debe ser enfocado de manera que el docente pueda emplear nuevas estrategias didácticas, en las cuales el conocimiento de los estudiantes trascienda del dominio de los contenidos a la aplicación de los conceptos y surgimiento de nuevas ideas para la solución de problemas.

El uso de la tecnología ha generado cambios sustanciales en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas. Cada uno de los ambientes computacionales proporcionan condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas.

¿Cómo influye el uso de la tecnología en la manera en que se enseña y aprende matemáticas? ¿Qué características deben poseer las actividades para que los estudiantes realicen diferentes exploraciones y planteen conjeturas al utilizar la tecnología? ¿Qué tipo de razonamientos exhiben los estudiantes al trabajar con la tecnología? ¿Qué tipo de representaciones es posible construir al utilizar diferentes herramientas tecnológicas?

Con la incorporación de la tecnología en el salón de clases surge una serie de preguntas que han sido el pilar de recientes investigaciones en los últimos años.

[1] Universidad Nacional. Costa Rica. e-mail: rwgamboa@costarricense.cr

Cada una de las herramientas tecnológicas ofrece diferentes posibilidades para que los estudiantes y profesores examinen, identifiquen, prueben y observen distintas relaciones matemáticas. Una de estas herramientas es el *Cabri Géomètre.*

Cabri Géomètre es un programa interactivo que permite la construcción directa de puntos, rectas, segmentos, semirrectas, vectores, polígonos regulares e irregulares, círculos, arcos, cónicas, rectas perpendiculares, rectas paralelas, punto medio de un segmento, mediatrices, bisectrices.

También, el programa puede proporcionar las medidas de segmentos y ángulos; calcula el área y el perímetro de diferentes polígonos así como el valor de la pendiente de una recta.

Este *software* permite obtener la ecuación de un lugar, círculo o cónica, y las coordenadas de un punto en el plano cartesiano. Es posible introducir expresiones algebraicas y encontrar el valor para diferentes números.

La construcción de diferentes figuras y el estudio de sus propiedades es también posible realizarla mediante transformaciones como simetría axial, simetría central, traslación, rotación, homotecia e inversión.

Una importante característica del *Cabri Géomètre* es la posibilidad de "arrastre". Esto es, se puede seleccionar un punto y cambiar su posición, moverlo. De esta forma, se puede observar cuáles propiedades de las figuras se mantienen "constantes" y cuáles varían; así como estudiar cuál es el comportamiento de esta variación y poder describirla.

Otra opción que ofrece el programa es la construcción de lugares geométricos. Es decir, dibuja el "recorrido" de un punto cuando otro es "arrastrado". También permite la exploración de algunas propiedades como paralelismo, perpendicularidad, equidistancia, pertenencia y la alineación de tres puntos.

Objetivo:

Este taller tiene como objetivo que los participantes, por medio de la interacción con el *software* dinámico *Cabri Géomètre*, reconozcan la importancia del uso de las herramientas tecnológicas en el proceso de enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

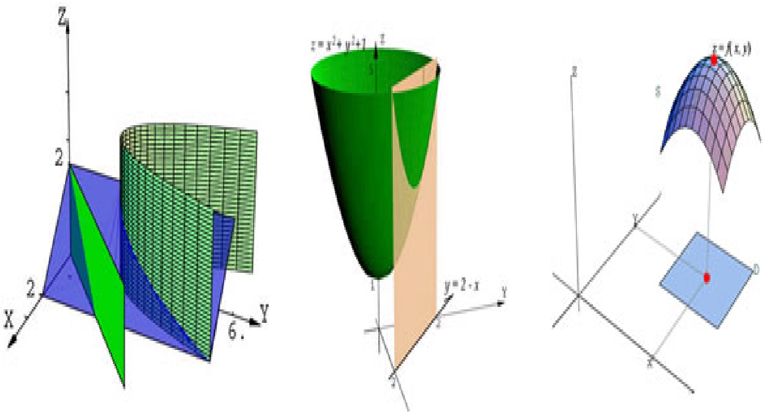
Cronograma

Se trabajará en los siguientes puntos:

- Breve discusión sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas y principales temas de investigación en torno al tema.
- Presentación del *software*.
- Se trabajará algunas actividades con el propósito de que los participantes se familiaricen con el *software*.
- Actividades de exploración que incentiven la exploración de los estudiantes en contenidos de geometría.
- Discusión con los participantes sobre las ventajas y limitaciones del uso de dicho *software* en el salón de clases.

HACIENDO GRÁFICOS 3D

Walter Mora F[1].
Geovanni Figueroa M.



Resumen

Las representaciones visuales siempre han sido una ayuda fundamental en la exploración, comprensión y transmisión de conceptos de la matemática. Por ejemplo, para geometría del espacio y cálculo en varias variables, la visualización 3D ha estado restringida –en Internet- en su mayoría a figuras muy sofisticadas pero estáticas, o bien, a figuras con cierto grado de interacción, que usualmente solo incluye rotación. Como es usual, la creación de situaciones de aprendizaje con algún grado de interactividad requiere la integración de varias herramientas.

El objetivo de este taller es mostrar como integrar algunas herramientas, para crear algunas figuras 3D incrustadas en páginas Web independientes, con posibilidad de interacción. En particular se mostrará como, de una manera sencilla, se puede agregar la posibilidad de interactuar con los componentes individuales de objetos geométricos 3D (como se haría en Cabri o en Sketchpad) tales como curvas o superficies en el espacio.

Palabras claves:

Gráficos 3D, Visualización en 3D, LiveGraphics3D, JavaView, HTML, Mathematica .

Bibliografía

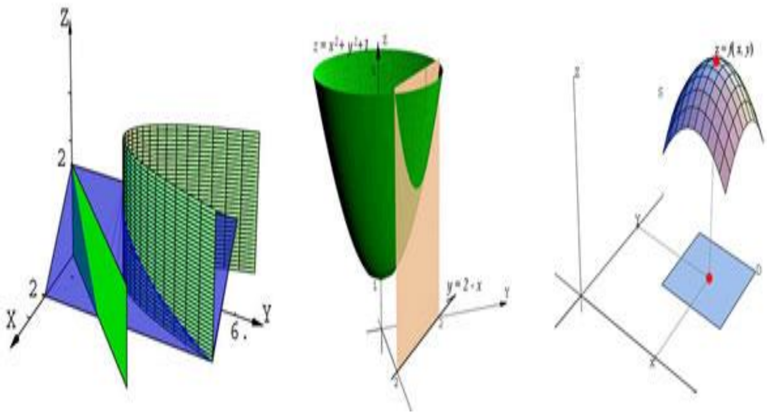
- Mathematica y JavaView. Consultada 15 mar. 2005. Disponible en http://www.javaview.de/mathematica/index.html
- Martin, Kraus. LiveGraphics3D. Consultada 10 ene. 2005. Disponible en http://wwwvis.informatik.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/
- Polthier, K et al (Edts) 2002. Multimedia Tools for Communicating Mathemathics. Berlin, Ed. Springer-Verlag (Mathematics and Visualization). 311 p.

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, wmora2@yahoo.com.mx, gfigueroam@yahoo.com.mx

- Schneider, Ph. Eberly, D. 2003. Geometric Tools for Computers Graphics. Ed. Morgan Kaufmann. San Francisco, California. 1007 p.

Visualización 3D

Walter Mora F. wmora2@yahoo.com.mx
Geovanni Figueroa M. gfigueroam@yahoo.com.mx
Escuela de Matemática, ITCR
Costa Rica



Nivel educativo: Secundaria y Universitaria

Categoría: Taller

Resumen

Las representaciones visuales siempre han sido una ayuda fundamental en la exploración, comprensión y transmisión de conceptos de la matemática. Por ejemplo, para geometría del espacio y cálculo en varias variables, la visualización 3D ha estado restringida –en Internet- en su mayoría a figuras muy sofisticadas pero estáticas, o bien, a figuras con cierto grado de interacción, que usualmente solo incluye rotación. Como es usual, la creación de situaciones de aprendizaje con algún grado de interactividad requiere la integración de varias herramientas.

El objetivo de este taller es mostrar como integrar algunas herramientas, para crear algunas figuras 3D incrustadas en páginas Web independientes, con posibilidad de interacción. En particular se mostrará como, de una manera sencilla, se puede agregar la posibilidad de interactuar con los componentes individuales de objetos geométricos 3D (como se haría en Cabri o en Sketchpad) tales como curvas o superficies en el espacio.

Palabras claves:

Gráficos 3D, Visualización en 3D, LiveGraphics3D, JavaView, HTML, Mathematica .

Bibliografía

- Mathematica y JavaView. Consultada 15 mar. 2005. Disponible en http://www.javaview.de/mathematica/index.html

- Martin, Kraus. LiveGraphics3D. Consultada 10 ene. 2005. Disponible en http://wwwvis.informatik.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/
- Polthier, K et al (Edts) 2002. Multimedia Tools for Communicating Mathemathics. Berlin, Ed. Springer-Verlag (Mathematics and Visualization). 311 p.
- Schneider, Ph. Eberly, D. 2003. Geometric Tools for Computers Graphics. Ed. Morgan Kaufmann. San Francisco, California. 1007 p.

PONENCIAS

APLICACIÓN DE MICROSOFT PROJECT A LA ADMINISTRACIÓN DE PROYECTOS[1]

Carlos E. Azofeifa Z.[2]

Resumen

Se presenta una de las mejores herramientas de gestión de proyectos: Microsoft Project 2003. Estudiaremos y analizaremos tanto sus beneficios como sus limitaciones. Además mostraremos como introducir la información a MS Project y también como obtener e interpretar correctamente los informes dados por el programa, de manera que podamos refinar y realizar los cambios necesarios en el proyecto, a fin de poder cumplir los objetivos de éste de acuerdo a lo planeado. Por razones de espacio el estudio se limitará en general a la creación y programación de las tareas del proyecto, así como la información general sobre éste.

Introducción

Los conceptos modernos y sistemáticos de la administración de proyectos se desarrollaron en los últimos 50 años, así como sus métodos, sistemas y herramientas, se puede decir que desde la segunda guerra mundial con técnicas como la programación lineal, PERT, CPM etc. Sin embargo hace apenas unos 10 años que su divulgación como una profesión en gran escala comienza a crecer gracias a la Internet.

La administración de proyectos es un conjunto completo, actualizado y práctico de métodos, procedimientos, sistemas y herramientas necesarios para iniciar, planear, ejecutar, controlar y cerrar proyectos. Hoy día la tendencia mundial es administrar profesionalmente los proyectos. Entre algunas de estas herramientas de gestión de proyectos tenemos a ***Microsoft Project.*** De hecho la administración de proyectos formal a final de cuentas resulta menos costosa que la tradicional. De igual manera es más efectivo administrar nuestros proyectos con orden y rendición de cuentas, que improvisar soluciones sobre la marcha, además que en este enfoque informal se desarrolla a destiempo el alcance del proyecto, generando retrabajos, costos innecesarios y entregas tardías, entre otras. Es claro que, aunque pudiéramos tener la mejor herramienta de administración de proyectos que existiera a nivel mundial, nunca podrá ésta sustituir nuestro buen juicio. Sin embargo, la herramienta puede y nos debe facilitar mucha información.

---

[1] Este trabajo forma parte del Proyecto No 820-A2-115, inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica.

[2] Escuela de Matemática. Universidad de Costa Rica, Universidad Nacional, Costa Rica

¿Qué es Microsoft Project?

MS Project es una herramienta eficaz que ayuda a organizar y a controlar las diversas peculiaridades de un proyecto. Como es un miembro de la familia de los programas de escritorio de Microsoft Office su apariencia es muy similar a la de MS Word, Excel y Accex. Por lo tanto usted se sentirá familiarizado con muchos de los elementos de la interfaz de la ventana de Project.

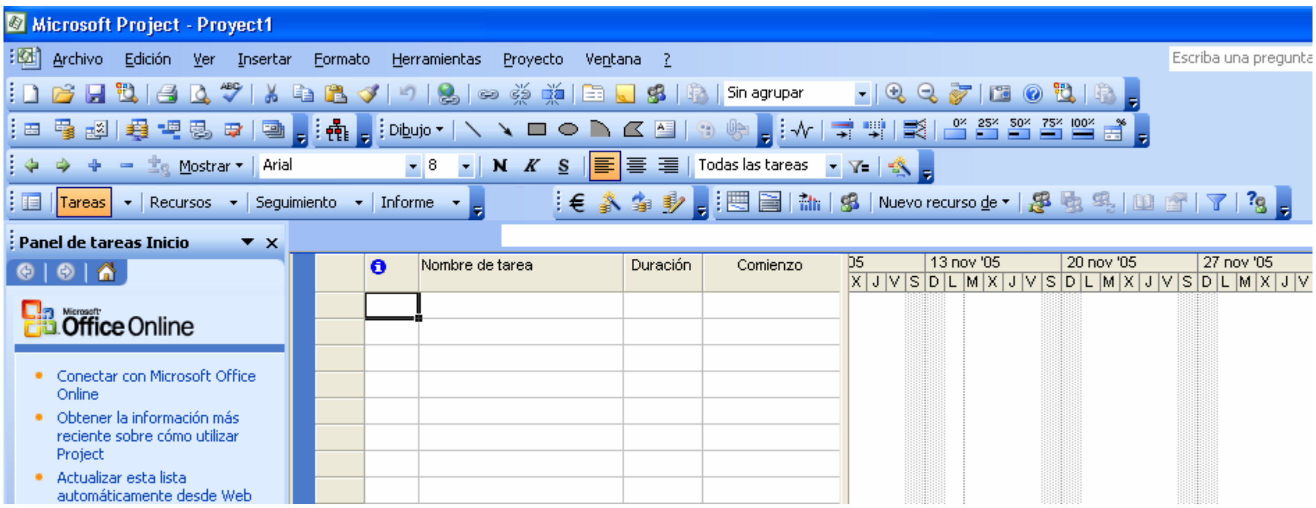
Microsoft Project nos facilita entre otras alternativas:

- Poder realizar todo un seguimiento de toda la información de los requerimientos del trabajo, costos, la duración y los recursos para el proyecto.
- Visualizar el plan del proyecto en un formato estándar.
- Observar la programación y recursos de manera apropiada y consistente.
- Comunicar la información a los recursos y otros participantes.
- Usted indica algunos datos y MS Project hace el resto, por ejemplo si usted le da la duración de una tarea MS Project calculará las fechas de comienzo y de fin de la misma de forma automática.
- Además si cambia algún factor, MS Project recalculará la programación para que pueda ver el efecto del cambio de manera instantánea.
- Mantiene un equilibrio entre el ámbito, los recursos y el tiempo (ver si los recursos asignados disponen de suficiente tiempo para realizar tareas nuevas sin ampliar la fecha límite del proyecto).
- También le ayudará a mantener el equilibrio entre las horas necesarias para completar una tarea, los recursos asignados y la duración global de la tarea.
- Con el plan del proyecto podrá identificar y corregir problemas tales como la sobrecarga de trabajo de los recursos, las tareas que amenazan con deaparecer el presupuesto y los conflictos de programación que eventualmente podrían retrasar la fecha límite del proyecto.
- Realiza la mayor parte del trabajo relativo a la creación y al seguimiento del plan del proyecto y ayuda a preparar el cierre del mismo.
- Microsoft Project 2003 edición Profesional, con las características base del Estándar y con otras adicionales útiles para la comunicación y planificación del equipo de proyecto utilizando Microsoft Project 2003 Server.

- Ningún programa de Administración de Proyectos puede cerrar el proyecto por usted. Sin embargo, un plan de proyecto creado con MS Project puede ayudarle a definir la dirección correcta que debe tomar en proyectos posteriores.

Microsoft Project en acción

A continuación trabajaremos con un proyecto pequeño y trataremos de abarcar la mayoría de funciones básicas que realiza MS Project en la fase inicial del proyecto. Una presentación de su plataforma de trabajo se puede ver en la siguiente vista:



Supongamos que tenemos el proyecto de planear y coordinar el programa de capacitación administrativa de ventas de una compañía para el próximo verano. Su gerente ha puesto una lista de actividades para llevar a cabo este proyecto con duraciones en semanas, la descripción es la siguiente:

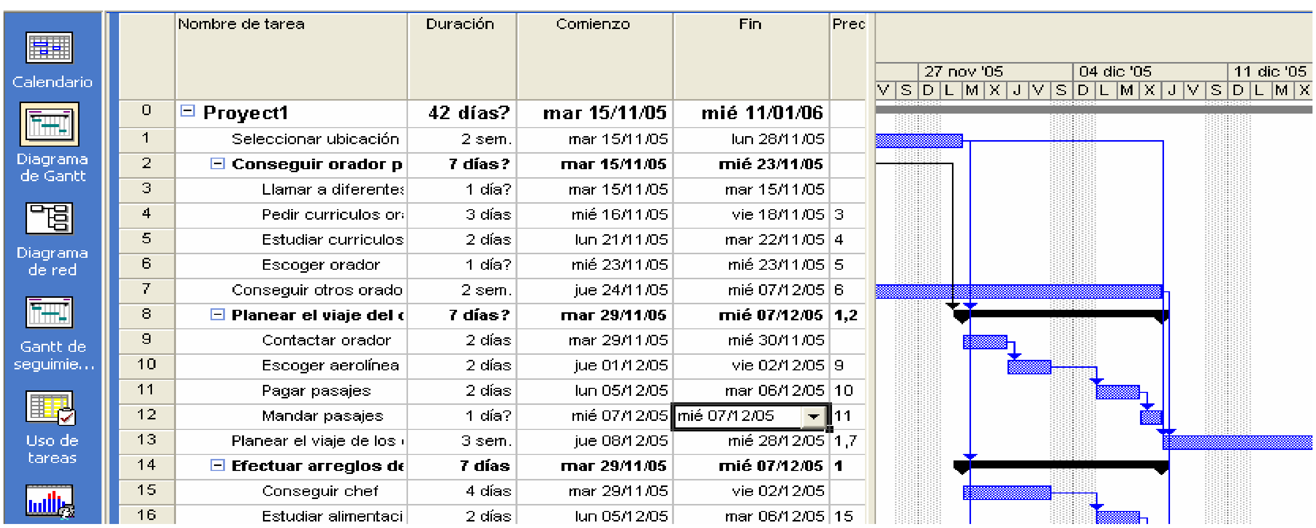
Actividad	Descripción	Predecesores	Duración estimada
A	Seleccionar ubicación	-	2
B	Conseguir orador principal	-	1
C	Conseguir otros oradores	B	2
D	Planear el viaje del orador principal	A,B	2
E	Planear el viaje de los otros oradores	A,C	3
F	Efectuar arreglos de alimentación	A	2
G	Negociar tarifas en los hoteles	A	1
H	Preparar folleto	C,G	1
I	Enviar folleto por correo	H	1

J	Registrar reservaciones	I	3
K	Preparar material para asistentes	C,F	4

En el campo Nombre de la tarea de la ***Vista de Gantt en Ver*** procedemos a colocar el nombre de las actividades conjuntamente con sus actividades predecesoras y sus duraciones estimadas en semanas. Esto se debe visualizar así:

	Nombre de tarea	Duración	Comienzo	Fin	Predecesoras
1	Seleccionar ubicación	1 día?	mar 15/11/05	mar 15/11/05	
2	Conseguir orador principal	1 día?	mar 15/11/05	mar 15/11/05	
3	Conseguir otros oradores	1 día?	mié 16/11/05	mié 16/11/05	2
4	Planear el viaje del orador	1 día?	mié 16/11/05	mié 16/11/05	1,2
5	Planear el viaje de los otro:	1 día?	jue 17/11/05	jue 17/11/05	1,3
6	Efectuar arreglos de alimei	1 día?	mié 16/11/05	mié 16/11/05	1
7	Negociar tarifas en los hot	1 día?	mié 16/11/05	mié 16/11/05	1
8	Preparar folleto	1 día?	jue 17/11/05	jue 17/11/05	3,7
9	Enviar folleto por correo	1 día?	vie 18/11/05	vie 18/11/05	8
10	Registrar reservaciones	1 día?	lun 21/11/05	lun 21/11/05	9
11	Prepara material para asist	1 día?	jue 17/11/05	jue 17/11/05	3,6

Observe que por defecto Project coloca la duración de cada tarea en un día y su comienzo el día de hoy, el signo de interrogación indica que la duración es una estimación. Insertando otras actividades con la declaración ***Insertar / Nueva tarea*** y estableciendo las respectivas duraciones, la pantalla se visualiza así:

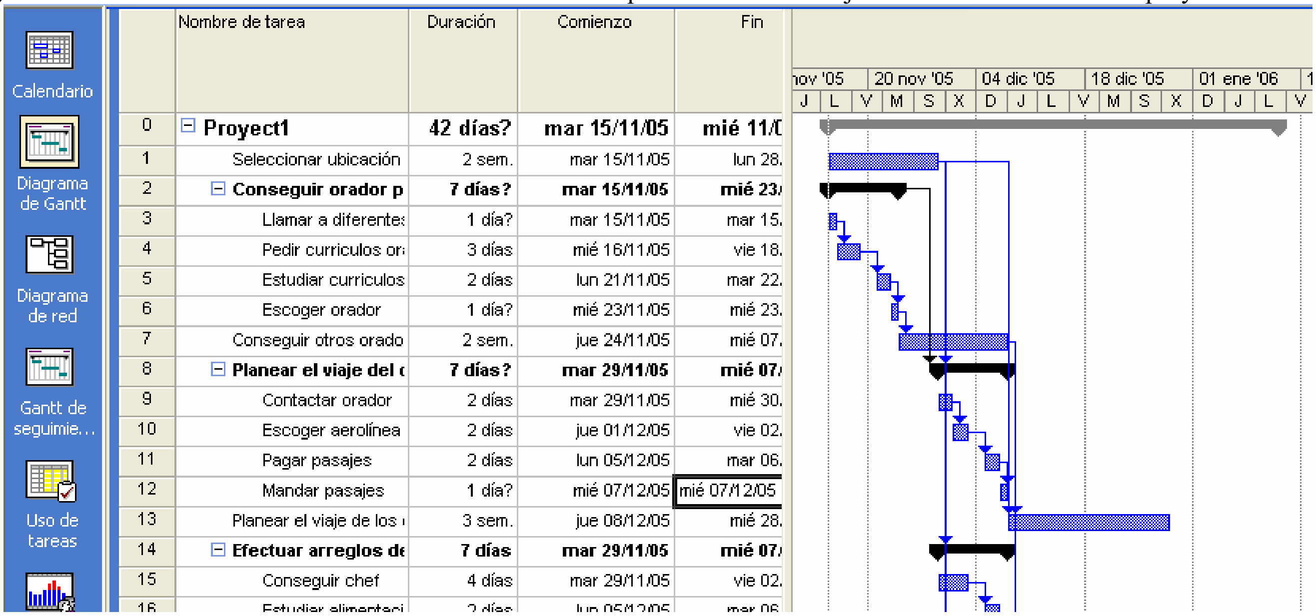


	Nombre de tarea	Duración	Comienzo	Fin	Prec
0	**Proyect1**	**42 días?**	**mar 15/11/05**	**mié 11/01/06**	
1	Seleccionar ubicación	2 sem.	mar 15/11/05	lun 28/11/05	
2	**Conseguir orador p**	**7 días?**	**mar 15/11/05**	**mié 23/11/05**	
3	Llamar a diferentes	1 día?	mar 15/11/05	mar 15/11/05	
4	Pedir curriculos or:	3 días	mié 16/11/05	vie 18/11/05	3
5	Estudiar curriculos	2 días	lun 21/11/05	mar 22/11/05	4
6	Escoger orador	1 día?	mié 23/11/05	mié 23/11/05	5
7	Conseguir otros orado	2 sem.	jue 24/11/05	mié 07/12/05	6
8	**Planear el viaje del**	**7 días?**	**mar 29/11/05**	**mié 07/12/05**	**1,2**
9	Contactar orador	2 días	mar 29/11/05	mié 30/11/05	
10	Escoger aerolínea	2 días	jue 01/12/05	vie 02/12/05	9
11	Pagar pasajes	2 días	lun 05/12/05	mar 06/12/05	10
12	Mandar pasajes	1 día?	mié 07/12/05	mié 07/12/05	11
13	Planear el viaje de los	3 sem.	jue 08/12/05	mié 28/12/05	1,7
14	**Efectuar arreglos de**	**7 días**	**mar 29/11/05**	**mié 07/12/05**	**1**
15	Conseguir chef	4 días	mar 29/11/05	vie 02/12/05	
16	Estudiar alimentaci	2 días	lun 05/12/05	mar 06/12/05	15

Las tareas de las cuales dependen otras tareas se llaman tareas resumen y tienen en el frente una cajita con el signo - adentro, al cual si le damos clic cambia a + ocultando las subtareas, esto es bueno cuando queremos reducir las vistas. Algunas definiciones básicas: Fase: Grupo lógico de tareas relacionadas que completan una etapa importante de un proyecto. Tarea resumen: tarea que incluye y resume un grupo lógico de tareas, denominadas subtareas, y que normalmente representa una fase. Observamos en la pantalla anterior que por defecto, MS Project nos colcoca en la Vista del Diagrama de Gantt, la cual aparece en el lado derecho de la pantalla. El Diagrama de Gantt es una de las vistas que más se utiliza y viene de manera predeterminada, es una herramienta de planeación y programación que muestra las actividades del proyecto a lo largo de una escala de tiempo usando gráficas de barras. Es la herramienta más fácil de entender y la de mayor difusión, es un elemento indispensable en la presentación de un proyecto, para ello el proyecto se debe expresar como un listado de tareas, estas tareas se presentan como barras en una escala de tiempo, elegidas con sensatez y teniendo en cuenta, los tiempos del proyecto. Una tarea es un paso concreto para conseguir el objetivo del proyecto. Representa el trabajo real que se deberá realizar en el proyecto.

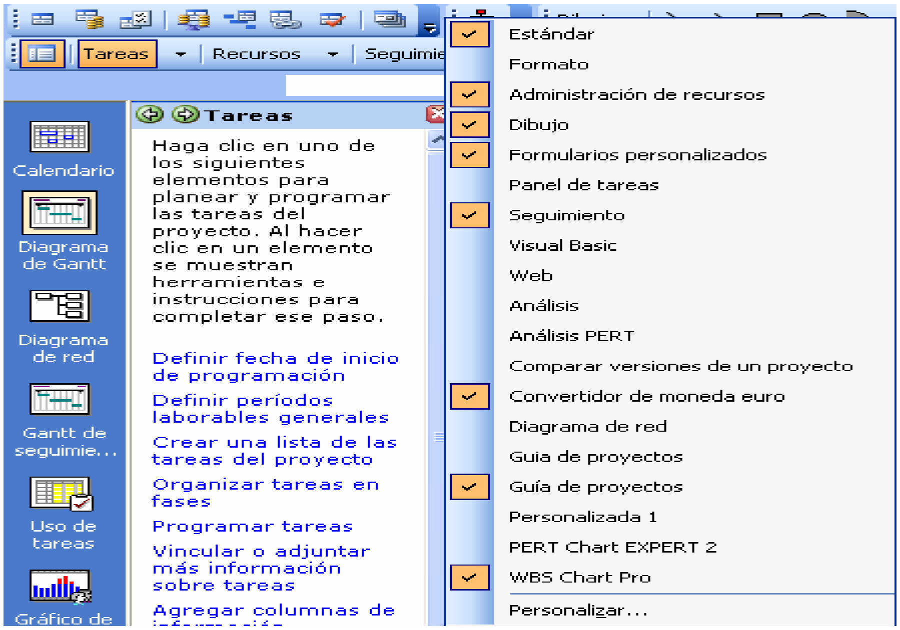
Ahora, para realizar la dependencia de las tareas, marcamos con el ratón todas las tareas que queremos que dependan de otra, luego hacemos clic con la flecha verde reducir sangría . También para tener disponibles las vistas, Calendario, Diagrama de Gantt, Uso de tareas, etc, hacemos ***Ver: Barra de vistas***. Las vistas permiten ver la información del proyecto de diferentes formas. La vista seleccionada depende de la información y del formato que desee ver en la misma. Por ejemplo para ver cuántas horas trabaja un recurso durante un periodo de tiempo determinado se puede usar un formato de tabla o un formato de gráfico de barras.

En caso que queramos ver el proyecto completo, hacemos ***Ver: Zoom/ Proyecto completo/ Aceptar.*** Para observar la duración del proyecto en la barra de tiempo, hacemos: ***Herramientas / Opciones / Vista / Mostrar tarea resumen del proyecto.*** La tarea resumen del proyecto está oculta de manera predeterminada, comprende todas las tareas de resumen y subtareas que se especifiquen en el proyecto. En esta misma vista se puede escoger la moneda que se usará en el proyecto en este caso, el colón ¢ (alt 0162). La pantalla se verá así:



MS Project liga las tareas por defecto con la relación Fin a comienzo (FC) ya sea con una predecesora o pulsando  una vez marcadas con el ratón las tareas a ligar , en caso de necesitar usar otra relación Comienzo a comienzo (CC), Comienzo a fin (CF) o Fin a fin (FF), hacemos doble clic en el enlace deseado y luego procedemos a cambiar el enlace en el siguiente diálogo. Los tipos de vinculación elegida afectarán la duración del proyecto. Si se aplica (FC) a todas las tareas, es probable que el proyecto durará más de lo necesario (la mayoría de proyectos tienen alguna tarea que se puede superponer). Una manera de reducir la programación es intentar sustituirlos vínculos (FC) por (CC) o (FF). Observemos también en el diálogo la posibilidad de posponer o adelantar una tarea.

Cualquier información adicional sobre tareas ya sea para iniciar el proyecto o bien para darle seguimiento al proyecto, se puede accesar en ***Ver/ Barra de herramientas/ Guía de proyectos/ Tareas*** o bien poner "Toda la información sobre las tareas del proyecto" en la esquina superior derecha, donde dice Escriba una pregunta. También se puede tener un acceso directo a la barra de herramientas, haciendo clic derecho en cualquier parte de la barra superior.

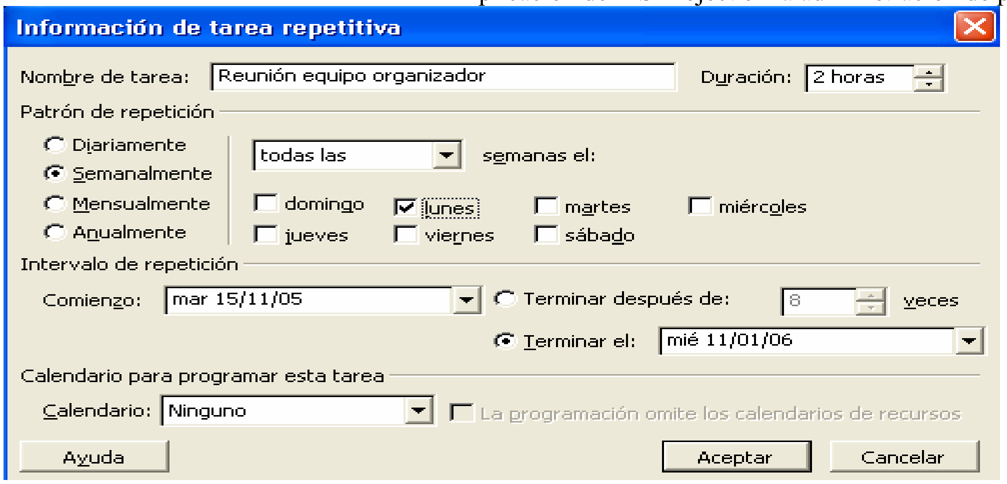


Hitos

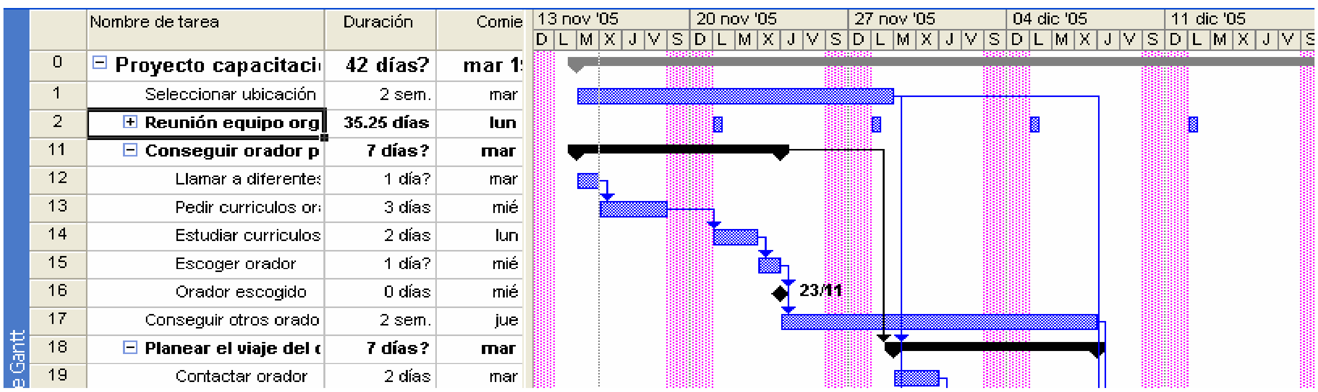
Algunas veces se necesita incluir tareas solamente para indicar el principio o fin de una fase. Los hitos son las tareas que no necesitan trabajo real. Son objetivos provisionales que podrá utilizar para controlar el progreso de un proyecto. Por tanto, para incluir un hito en MS Project, solamente insertamos una nueva tarea con una duración de cero días.

Tareas repetitivas

Vistas: Gantt: campo: Nombre de tarea, seleccione la fila por encima de la cual desea insertar una tarea repetitiva, luego vaya a ***Insertar/ tarea repetitiva*** y en el cuadro Nombre de tarea, escriba el nombre de la tarea. En el cuadro duración, escriba la duración de la aparición de la tarea. En Patrón de repetición, seleccione el intervalo de repetición. Si seleccionamos semanalmente, también se deberá seleccionar el día o los días de la semana en los que la tarea tiene lugar. En diariamente, semanalmente, mensualmente o anualmente, especifique la frecuencia de la tarea, para nuestro proyecto en particular tenemos:

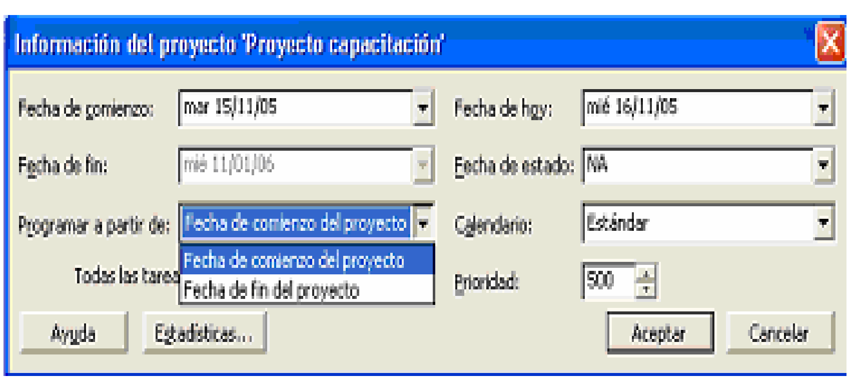


La información anterior se verá así en la vista de Gantt, además le cambiamos el formato a los días no laborables, le escogimos un color fucsia, para ello hicimos clic derecho en las barras de Gantt y escogimos período no laborable y luego el color deseado:



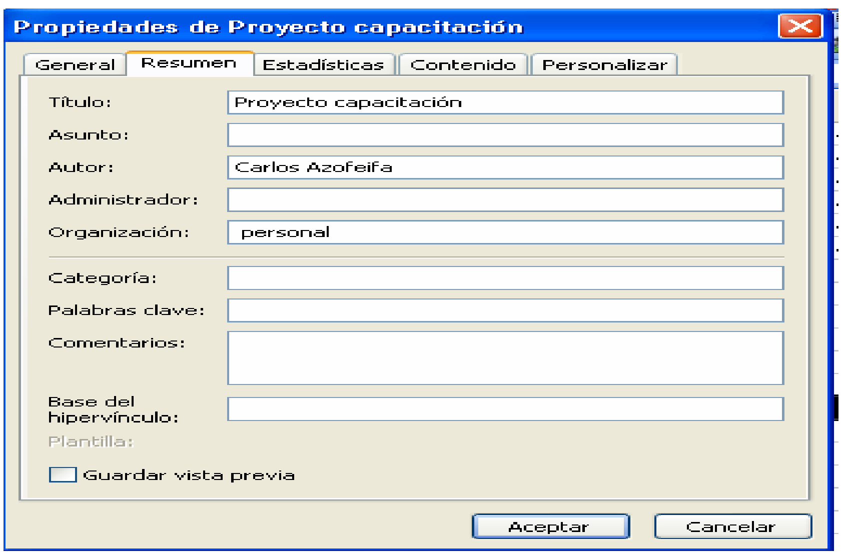
Información y calendario del proyecto

Si le damos a Project la fecha de inicio del proyecto, él se encarga de poner la fecha de termino del proyecto una vez que le hemos proporcionado los tiempos de las tareas, para esto pulsamos ***Proyecto/ Información del proyecto*** y se presenta el siguiente diálogo



El botón Estadísticas es muy útil pues nos proporciona información muy valiosa como el costo del proyecto, comienzo y fin, trabajo previsto y trabajo realizado, porcentaje que se ha completado el proyecto, etc, veamos

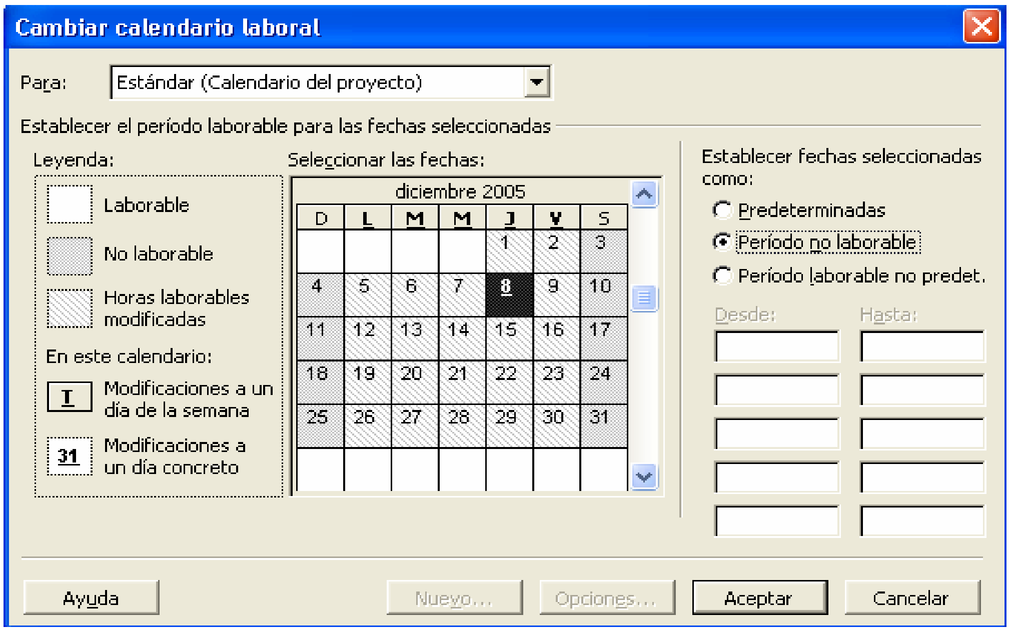
Más información sobre el proyecto se puede colocar en ***Archivo/ Propiedades*** y llenamos la información en el siguiente diálogo:



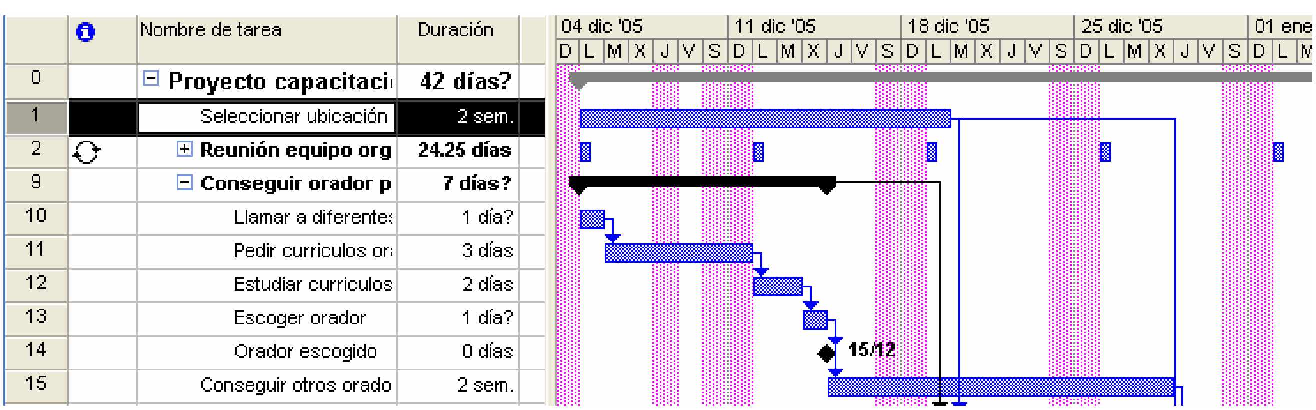
Una vez que hemos incorporado la duración de las tareas del proyecto, se puede definir el calendario de trabajo del proyecto. Los calendarios son la razón principal por la que se trabaja en Project para programar las tareas y los recursos. Las tareas no tienen asignados calendarios en forma predeterminada, en este caso Project programa la tarea según los periodos laborables y no laborables del calendario del proyecto. Cuando hay asignado un calendario de tareas o un calendario de recursos, éste tiene prioridad sobre el calendario del proyecto. Por el momento solo trabajaremos con el calendario del proyecto. Este calendario define los periodos laborables y no laborales para las tareas. Para ello vamos al panel de Tareas y hacemos clic en el enlace ***Definir periodos laborables generales***. En la parte de color azul Project puede programarlas tareas y los recursos.

Si hacemos clic en el botón del cuadro ***Seleccionar una plantilla de calendario***, esta lista dispone de tres calendarios base incluidos en Project, a saber: El calendario estándar con los días laborables de lunes a viernes de 9 am a 12 pm y de 3 pm a 5 pm. El calendario de 24 horas, éste no posee horas no laborables y el Calendario Turno de noche, de lunes noche hasta el sábado por la mañana, de 24: 00 a 8:00, con una hora de descanso. El calendario base Estándar puede servirnos como calendario del proyecto, de lo contrario lo podemos modificar, para eso hacemos clic en el enlace Guardar e ir al paso 2. Aquí escogemos "Deseo ajustar las horas laborables mostradas para uno o varios días de la semana", hacemos los ajustes para el día lunes y luego pulsamos ***Aplicar a todos los días***. La pantalla tendrá la siguiente apariencia:

Luego hacemos clic en el enlace Guardar e ir al paso 3. Luego está el vínculo ***Cambiar calendario laboral*** en el panel, que es el mismo en el menú ***Herramientas/ Cambiar calendario laboral***. Aquí podemos especificar determinados días como no laborables, por ejemplo, vacaciones o algunos días festivos. En nuestro caso vamos a suponer que el proyecto comienza el cuatro de diciembre del 2005, e indicaremos que el 8 de diciembre es día no laborable.



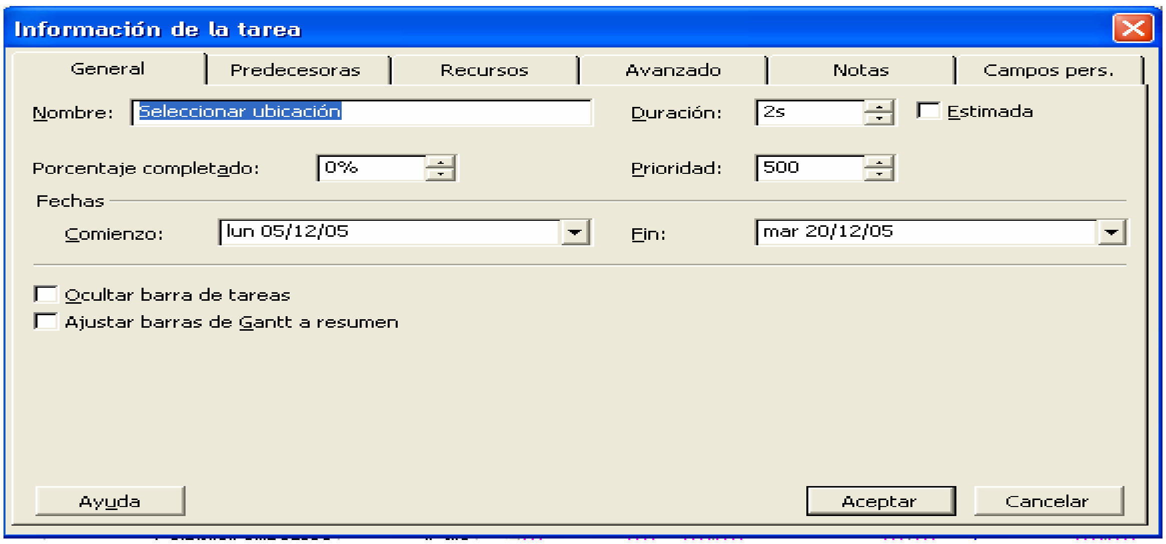
Por tanto esta fecha es período no laborable, como lo podemos constatar en la vista de Gantt. Luego hacemos Guardar e ir al paso 4. Aquí se debe establecer la jornada laboral en 8 horas, la semana laboral en 40 horas y los días por mes 20, de nuevo Guardar e ir al paso 5. Aceptar.



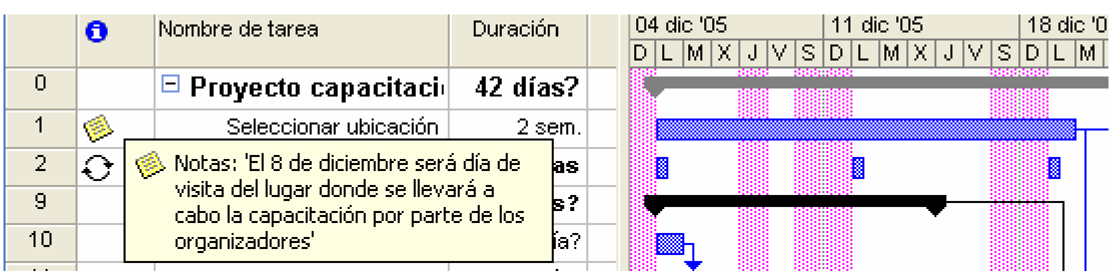
Al calendario creado anteriormente se le pueden hacer modificaciones para pequeños grupos de trabajo. Inclusive para varios grupos. Si movemos el cursor en la columna indicadores donde se encuentra la tarea repetitiva, aparece un cuadrito indicando el número de veces que se repite la tarea en el tiempo del proyecto.

Documentación de tareas

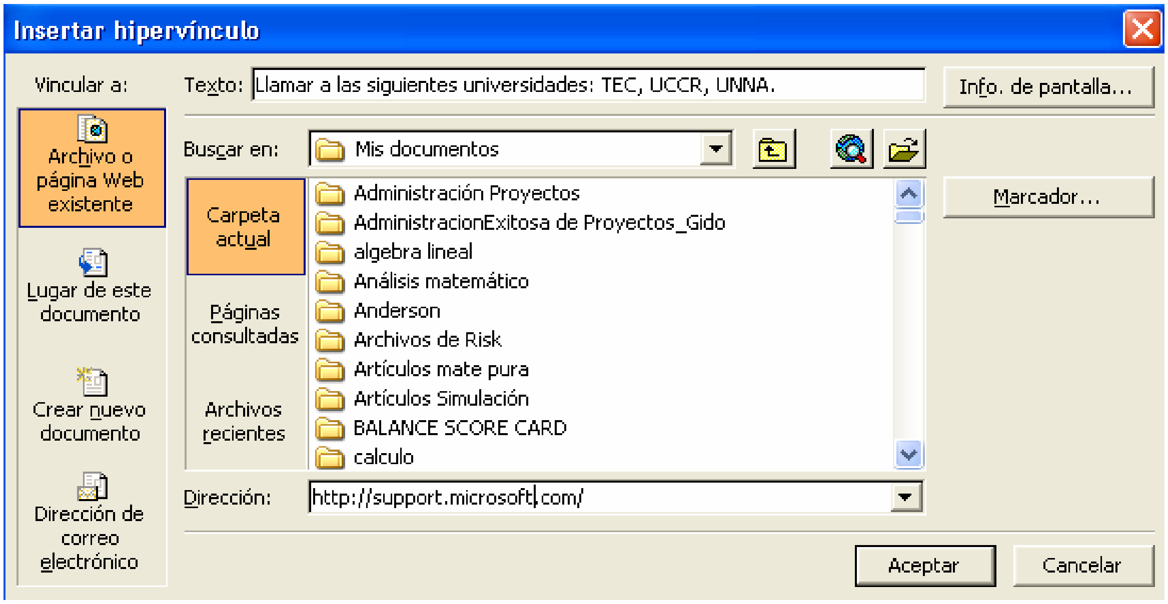
Project posee tres tipos de notas: las notas de tarea, las notas de recurso y las notas de asignación. Para introducir y revisar notas de tareas lo hacemos en la ficha Notas del cuadro de diálogo Información de la tarea. Esto se puede hacer de dos maneras: una posesionarse en la tarea de interés y hacer: ***Proyecto/ Información de la tarea***. O bien posesionarse en la tarea de interés y hacer doble clic, con el siguiente resultado:



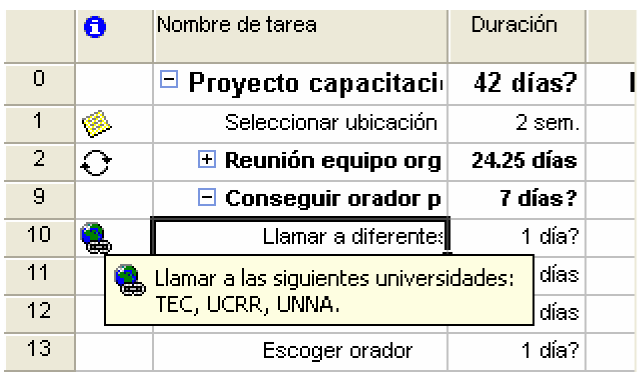
Vamos al enlace Notas y escribimos: El 8 de diciembre será día de visita del lugar donde se llevará a cabo la capacitación por parte de los organizadores. Observamos que en el campo de indicadores aparece un ícono indicando que en esta tarea hay una nota. Si acercamos el puntero del cursor a esta etiqueta aparece el contenido de la nota (en caso que ésta sea muy grande puede hacer doble clic en la celda para visualizarla en forma completa). En esta notas se puede también vincular o almacenar imágenes gráficas y otros tipos de archivos.



Si deseamos colocar un hipervínculo en una tarea, vamos a ***Insertar/ Hipervínculo***, luego tenemos el siguiente diálogo en el cual podemos usar Archivos o páginas Web existentes o direcciones de correos electrónicos, etc. Un ejemplo lo podemos visualizar en la siguiente vista:



Pulsando aceptar aparece un ícono en el campo de indicadores, de manera que si colocamos el puntero del ratón aparece parte de la información que proporciona el hipervínculo, veamos



Otra alternativa es haciendo clic en el botón ***Insertar hipervínculo*** en la barra de herramientas Estándar .

Delimitaciones de una tarea

Las delimitaciones controlan la fecha de comienzo y fin de una tarea y el grado en que puede ser modificada la programación de una tarea. Hay tres tipos de delimitaciones:

Delimitaciones flexibles: con estas delimitaciones Project puede cambiar el inicio y fin de una tarea, pero no su duración, inclusive, ni siquiera existe una delimitación de fecha asociada:

Lo antes posible (LAP).

Lo más tarde posible (LMTP).

Delimitaciones inflexibles: las tareas deben comenzar o finalizar en una determinada fecha:

Debe comenzar el (DCE).

Debe finalizar el (DFE).

Delimitaciones semiflexibles (débiles): una tarea tiene un límite de fecha de comienzo o de fin (la duración no se puede cambiar)

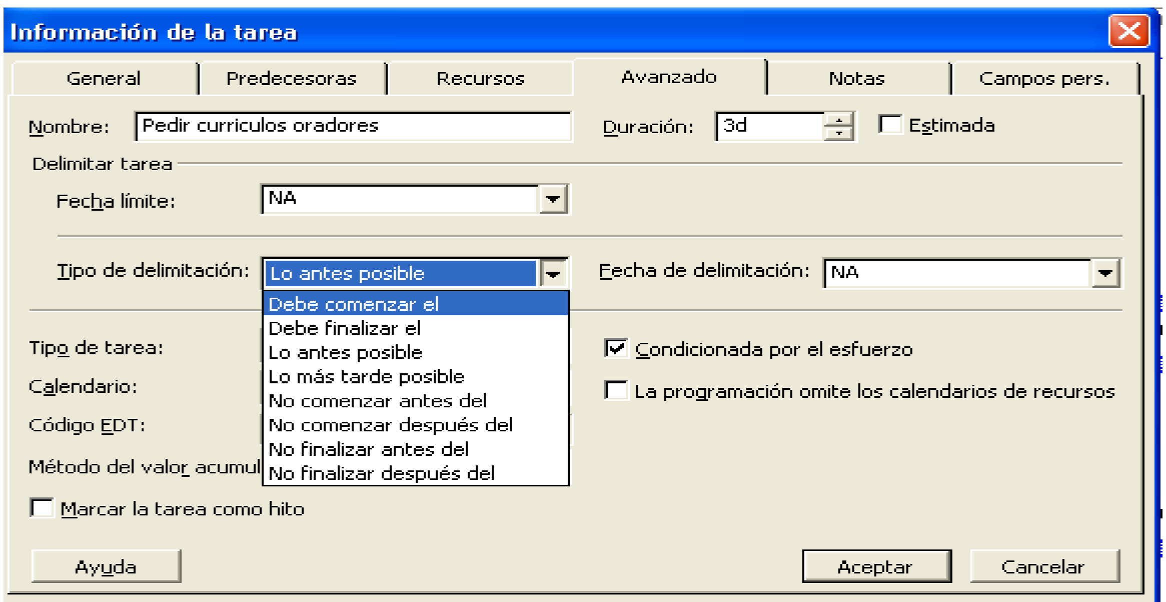
No comenzar después de (NCDD)

No finalizar antes de (NFAD)

No finalizar después de (NFDD)

No comenzar antes de (NCAD)

Haciendo doble clic en la tarea *Pedir currículos de oradores*, en el enlace ***Avanzado***, podemos observar parte de las delimitaciones citadas anteriormente.



Conclusiones y recomendaciones

Comenzar a exaltar las bondades de este software a pesar de que solamente hemos expuesto una minúscula parte de su potencial realmente no tiene sentido, lo que realmente hemos pretendido es propiciar el uso de este software como herramienta facilitadora en la gestión de proyectos para iniciar, planear, ejecutar, controlar y cerrar proyectos. Conforme uno utiliza la herramienta va descubriendo su potencial en cada proyecto emprendido. En realidad el uso de este software viene a ser un primer paso, pues este software se puede integrar en toda una organización como una gestión de proyectos basada en MS Project Server. Esperamos ir abarcando en otras publicaciones aspectos como: Uso de tareas, Uso de recursos, Costos del proyecto, Informes del proyecto, etc. Temas muy amplios y que difícilmente se puedan cubrir en un pequeño artículo.

Bibliografía:

1. Chattield Carl & Jonson T. ***Microsoft Office Project 2003***. Mc Graw Hill. México. 2004.
2. Fontaine Ernesto***. Evaluación social de proyectos***. Alfaomega. Madrid, España.
3. Microsoft Corporation. ***Manual del Usuario*** Microsoft Project 2000..
4. Miranda José. ***Gestión de proyectos. Identificación- Formulación y Evaluación financiera-económica-social-ambiental.*** MM Editores. Colombia. 2005.
5. Salvarredy J, García V & García J. ***Gerenciamiento de proyectos con Excel y Project***. Omicron System S.A. Argentina. 2003.

APLICACIÓN DE UN SOFTWARE EN LA RESOLUCIÓN DE UNA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Dal Bianco, Nydia[1]; Martinez, Silvia[1]
Castro,Nora[1]

Resumen

El avance tecnológico nos ha incentivado a realizar experiencias áulicas, en el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje de la Matemática, a fin de facilitar la comprensión de distintos temas y visualizar en forma global determinadas situaciones problemáticas.
En este artículo presentamos un análisis sobre trabajos con la aplicación del Software Derive, realizados por alumnos de la carrera de Ingeniería de Recursos Naturales y Medio Ambiente de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina), utilizando el Software Derive.
Los alumnos se manifestaron positivamente ante la aplicación del Software, pues les facilitaba la comprensión y representación de conceptos matemáticos, logrando así una mejor vinculación entre sus distintos registros y visualización de soluciones a la propuesta de trabajo.

INTRODUCCIÓN

En estos últimos años la aplicación de nuevas tecnologías en el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje, en particular de las matemáticas, ha contribuido a comprender, relacionar y hallar soluciones a situaciones problemáticas que resultaban complicadas y tediosas para los alumnos al realizarlas en forma manual. Además la visualización de los desarrollos previos a las soluciones y la obtención de éstas con la aplicación de un determinados Software ha incentivado a muchos estudiantes a utilizar las herramientas informáticas como un importante recurso complementario.

DESARROLLO

En esta presentación mostramos las producciones de dos grupos de estudiantes de la carrera de Ingeniería de Recursos Naturales y Medio Ambiente de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (Argentina),realizados como trabajo final de un Taller. Este fue dictado para alumnos de las distintas carreras de Ciencias Naturales, como así también para los que estudiaban Profesorado y Licenciatura en Química y en el que se trabajó

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa
Uruguay 151 - (6300) - Santa Rosa (LP) – Argentina, dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar , smartinez@exactas.unlpam.edu.ar, nora@exactas.unlpam.edu.ar

sobre la utilización del Software Derive en la resolución de ejercicios matemáticos y problemas aplicados.

TRABAJO FINAL

Presentamos uno de los problemas correspondiente al trabajo final del taller y las soluciones entregadas por dos grupos de alumnos.

Se localizó un globo meteorológico a cierta altura. A partir de ese momento, su altura sobre el nivel del mar se puede describir, en forma aproximada, por la fórmula:

$$h(x) = \frac{1}{15}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{29}{15}x + 4$$

con x medido en días y h, en miles de metros.

a) Averiguar si el globo meteorológico llegó en algún momento a una altura de 5500 metros (recordar que la altura se mide en miles de metros).

b) Analizar y describir el comportamiento de la función $h(x)$ para $0 \le x \le 8$

c) Verificar la respuesta graficando el polinomio obtenido en a)

Solución del grupo integrado por Nelson y Pedro:

a). Para averiguar si el globo meteorológico llegó en algún momento a una altura de 5500 metros recurrimos al siguiente procedimiento:

I Se ingresó la expresión $h(x) = \frac{1}{15}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{29}{15}x + 4$, escrita como

y =1/15xˆ3–7/10xˆ2+29/15x+4 utilizando la **Barra de Entrada de Expresiones** y luego presionando la tecla **Enter.**

En el área de trabajo apareció:

$$\#1 \quad y = \frac{1}{15}\cdot x^{3} - \frac{7}{10}\cdot x^{2} + \frac{29}{15}\cdot x + 4$$

II. Se reemplazó y por el valor 5.5 en la expresión de arriba utilizando la **Barra de Entrada de Expresiones** y oprimiendo la tecla **Enter**.

Apareció:

$$\#2 \quad 5.5 = \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4$$

III. Luego seleccionamos en el menú **Resolver** la opción **Expresión**. En la ventana que aparece seleccionamos el método **Numérico** y el dominio **Real**.

Obtuvimos:

$$\mathrm{NSOLVE}\left(5.5 = \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4,\ x,\ \mathrm{Real}\right)$$

$x = 1.354248688 \quad x = 6.645751311 \quad x = 2.5$

IV. Finalmente pudimos concluir que el globo llegó a los 5500 metros en tres oportunidades: a los 1.3 días, a los 6 días y a los 2.5 días.

b). Para analizar y describir el comportamiento de la función h(x) en el intervalo $(0 \le x \le 8)$ se graficó la misma de la siguiente manera:

I Ingresamos la expresión, escrita en la forma CHI(0,t,8)*(1/15xˆ3–7/10xˆ2+29/15x+4) utilizando la **Barra de Entrada de Expresiones** y la tecla **Enter**.

Apareció en pantalla:

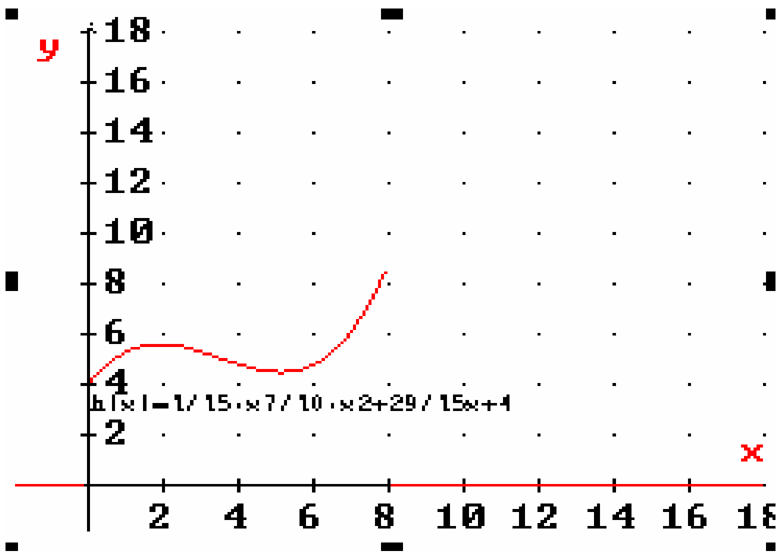
$$\#1 \quad \mathrm{CHI}(0, x, 8)\cdot\left(\frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4\right)$$

II Obtuvimos el gráfico empleando el botón de acceso rápido y luego presionando nuevamente el mismo botón.

Para escribir sobre el gráfico posicionamos el puntero del mouse en el sitio de interés.

Luego presionamos el botón derecho del mouse y elegimos la opción **Insertar Anotación.** Escribimos la expresión y presionamos la tecla **Si**.

La siguiente es la gráfica terminada de la expresión $h(x) = \frac{1}{15}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{29}{15}x + 4$ en el intervalo $0 \le x \le 8$:



ANÁLISIS Y DESCRIPCIÓN

A partir de la gráfica podemos describir el comportamiento de la función en el intervalo $0 \leq x \leq 8$ de la siguiente manera:

La función crece en el intervalo (0 días, 2 días) que se corresponde con los valores de ordenada, *y* = 4000 metros e *y* = 5800 metros (aproximado), para luego decrecer en el intervalo (2 días; 5 días) correspondiente a los valores aproximados de *y* = 5800 metros. e *y* = 4800 metros respectivamente. Finalmente es creciente en el intervalo (5 días; 8 días) que se corresponde a valores de ordenada *y* = 4800 metros e *y* = 8600 metros (aproximados).

De esta descripción se desprende que el globo ascendió a 5800 metros 2 días después de ser localizado, luego experimentó un descenso hasta alcanzar los 4800 metros en el 5^{to} día y de allí en mas ascendió hasta los 8600 metros aproximadamente el 8^{vo} día.

c). Para graficar el polinomio obtenido en el ítem a procedimos de la siguiente manera:

I. Ingresamos la expresión, escrita en la forma 1/15xˆ3–7/10xˆ2+29/15x-1.5=0, empleando la **Barra de Entrada de Expresiones** y la tecla **Enter**.

En el área de trabajo apareció:

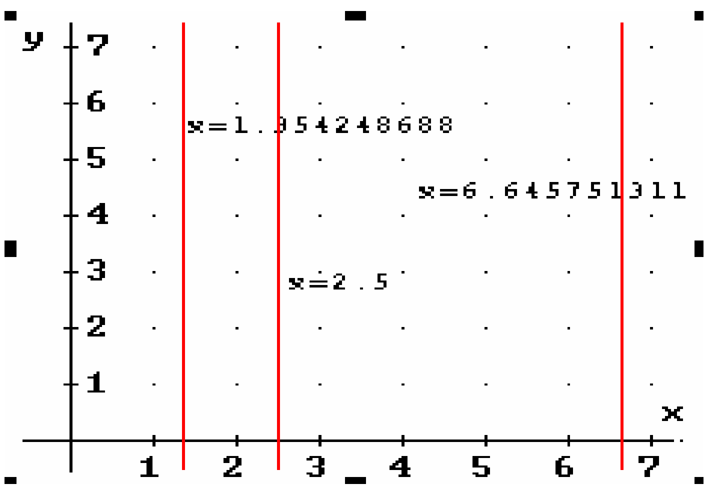
$$\#1 \quad \frac{1}{15}\cdot x^{3} - \frac{7}{10}\cdot x^{2} + \frac{29}{15}\cdot x - 1.5 = 0$$

II. Obtuvimos el gráfico empleando el botón de acceso rápido y luego presionando nuevamente el mismo botón.

Para escribir sobre el gráfico posicionamos el puntero del mouse en el sitio de interés.

Luego presionamos el botón derecho del mouse y elegimos la opción **Insertar Anotación.** Escribimos la expresión y presionamos la tecla **Si**.

La que sigue es la gráfica del polinomio $\frac{1}{15}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{29}{15}x - 1.5$:



Solución del grupo integrado por Mariana y Carolina

$$y = \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4$$

x = días
y = miles de metros

α) Para averiguar si el globo meteorológico llegó en algún momento a una altura de 5500 metros sustituimos la variable "y" por el valor 5.5 y resolvimos la expresión

$$5.5 = \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4$$

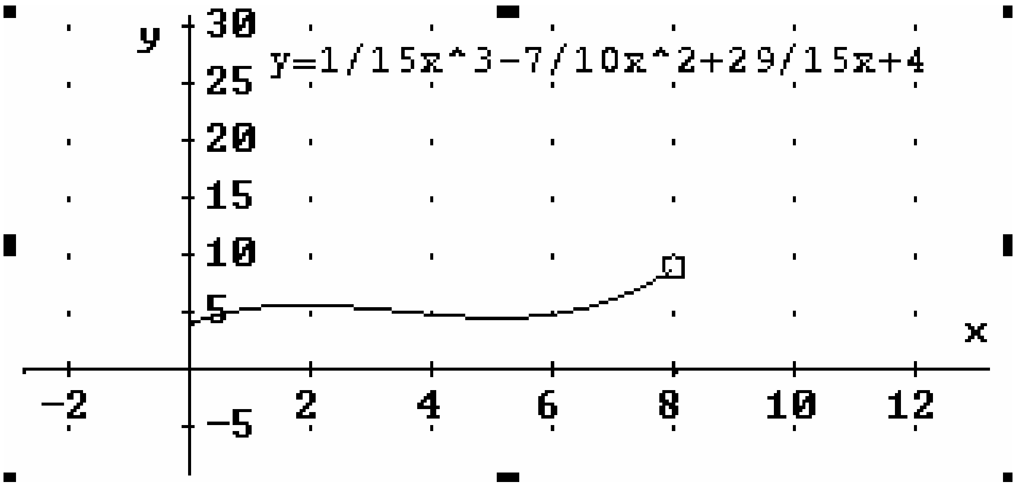
$$\text{NSOLVE}\left(5.5 = \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4,\ x,\ \text{Real}\right)$$

x = 1.354248688 , x = 6.645751311, x = 2.5

Con estos valores determinamos que el globo meteorológico llegó a los 5500 metros, aproximadamente, el primer día, a los dos días y medio y a los 6 días.

b) Para analizar el comportamiento de la función y para $0 \leq x \leq 8$; utilizamos la función CHI

$$CHI(0, x, 8)\cdot\left(\frac{1}{15}\cdot x^{3} - \frac{7}{10}\cdot x^{2} + \frac{29}{15}\cdot x + 4\right)$$

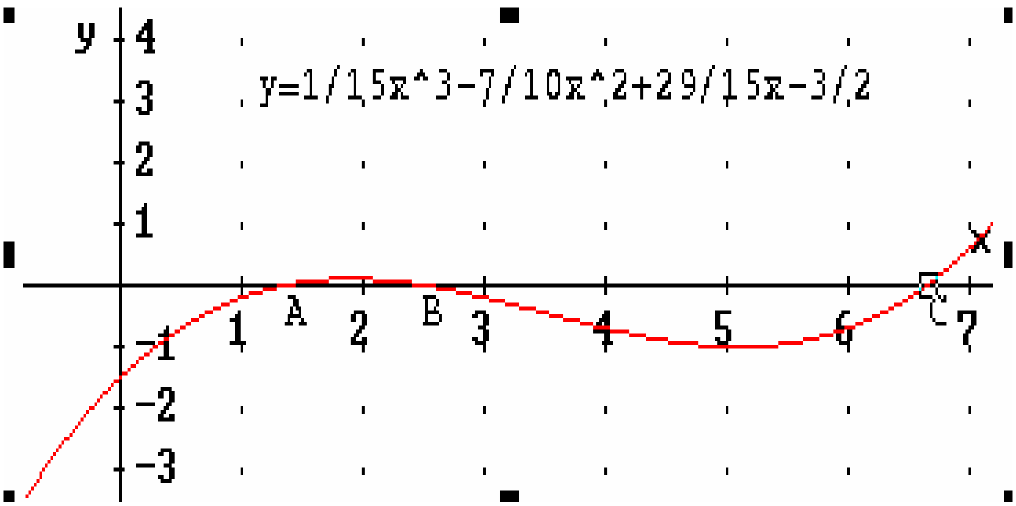


Determinamos que el globo meteorológico parte de una altura de 4000 metros sobre el nivel del mar. A partir de allí y hasta aproximadamente el segundo día, comienza a elevarse hasta una altura de 5600 metros. Una vez alcanzada esta altura desciende hasta el quinto día, donde alcanza una altura de 4496 metros; para luego comenzar a elevarse nuevamente y, así, llegar a los 8800 metros al cabo del octavo día.

Para verificar la respuesta obtenida en a) igualamos la función a 0, y luego graficamos el polinomio.

$$0 = \frac{1}{15}\cdot x^{3} - \frac{7}{10}\cdot x^{2} + \frac{29}{15}\cdot x + 4 - 5.5$$

$$y = \frac{x^{3}}{15} - \frac{7\cdot x^{2}}{10} + \frac{29\cdot x}{15} - \frac{3}{2}$$



A=(0;1.3)
B=(0;2.5)
X=(0;6.6)

Comentario sobre las presentaciones

Con respecto al problema dado los estudiantes debían responder a tres apartados:

Ítem a)

El grupo I respondió explicando todos los comandos utilizados hasta llegar a la solución final de la consigna.

En cuanto al otro grupo presentó directamente la sustitución de variable por el valor numérico y la solución numérica obtenida por aplicación del Software.

Ambas soluciones son coincidentes numéricamente, no obstante, el segundo grupo estima acertadamente los valores obtenidos, teniendo en cuenta que estos resultados eran mediciones en días.

Ítem b)

Ambos grupos trabajan en este ítem con la función CHI para analizar el comportamiento de la función en el intervalo dado y presentan el gráfico eligiendo distintas escalas.

El grupo I selecciona incrementos de dos unidades iguales en cada uno de los ejes, mientras el grupo II elige para el eje de abscisas incrementos de dos unidades y para el eje de las ordenadas de cinco unidades no conservando la relación entre ambas escalas.

En cuanto al análisis y descripción de la función dada, Pedro y Nelson efectúan los comentarios referidos al crecimiento y decrecimiento de la función en tres subintervalos del intervalo dado.

Mariana y Carolina presentan sus observaciones con respecto al comportamiento del globo en lo que se refiere a su ascenso y descenso vinculado a la función polinómica h(x); considerando también los tres subintervalos coincidiendo con el primer grupo.

Los dos grupos dan con cierta precisión las coordenadas de lo que consideran puntos máximos y mínimos en cuanto al crecimiento y/o decrecimiento de la función (ascenso y/o descenso del globo), sin describir los procedimientos aplicados para la obtención de los mismos.

Ítem c)

El grupo I de los estudiantes expresa:

"*la que sigue es la gráfica del polinomio* $\frac{1}{15}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{29}{15}x - 1.5$" y observamos que en realidad lo que muestran son tres rectas paralelas al eje de las ordenadas trazadas por los puntos solución obtenidos en el ítem a).

El grupo II presenta la construcción del polinomio destacando los ceros de la ecuación asociada. No realizan ningún comentario sobre la elección de distintas escalas en los ejes respectivos.

CONCLUSIONES

En general los dos trabajos fueron aprobados como trabajo final del Taller y en la devolución se aclararon algunos conceptos relacionados a la falta de precisión de determinadas respuestas, en general en la aplicación del Software Derive.

En el cierre del Taller los alumnos respondieron a una encuesta, la que tenía como objetivo, conocer la opinión de los asistentes acerca de los beneficios de la utilización del Software.

Coincidieron las respuestas en cuanto a la conveniencia de la aplicación del Software en el abordaje de distintas temáticas y aplicaciones en diversas áreas de su futuro desempeño profesional.

El desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, y en particular en este caso con la utilización del Software Derive facilita la representación múltiple de conceptos matemáticos y promueve la articulación entre diferentes representaciones.

BIBLIOGRAFÍA

1.- Carrillo, A.; Llamas, I. "*Derive. Aplicaciones matemáticas para PC*". RA - MA. España. 1994.

2.- Fuhrmann, J.; Zachmann H. "*Ejercicios de Matemática para químicos*". Editorial Reverté. España. 1978.

3.- Lang, S. "*Introducción al Álgebra Lineal*". Addison. Wesley Iberoamericana.S.A. México. 1990.

4.- Machin, D. "*Introducción a la Biomatemática*". Editorial Acribia. España. 1976.

5.- Pita Ruiz C. "*Álgebra Lineal*". McGraw-Hill. México. 1991.

6.-Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas. "*Educación Matemática e Internet*". Editorial Graó. España. 1998.

Universidad Nacional de La Pampa Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

ARGENTINA

APLICACIÓN DE UN SOFTWARE EN LA RESOLUCIÓN DE UNA SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

CASTRO, Nora DAL BIANCO, Nydia MARTÍNEZ, Silvia

dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar

INTRODUCCIÓN

El avance tecnológico nos ha incentivado a realizar experiencias aúlicas en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática,a fin de facilitar la comprensión de distintos temas y visualizar en forma global determinadas situaciones problemáticas.

En este artículo presentamos un análisis sobre trabajos realizados por alumnos de la carrera de Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente de la Universidad Nacional de la Pampa y como trabajo final de un Taller sobre la aplicación del Software Derive.

DESARROLLO

El Taller "Utilización del Software Derive en la Resolución de Ejercicios Matemáticos y Problemas de Aplicación" fue dictado para alumnos que cursan las carreras de Ciencias Naturales y Química en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Presentamos las producciones de dos grupos de estudiantes con el objetivo de observar como la aplicación de nuevas tecnologías en el desarrollo del proceso de enseñanza – aprendizaje, en particular de las matemáticas, ha contribuído a comprender, relacionar y hallar soluciones a situaciones que resultaban complicadas y tediosas para los alumnos al realizarlas en forma manual.

PROBLEMA PLANTEADO

Se localizó un globo meteorológico a cierta altura. A partir de ese momento, su altura sobre el nivel del mar se puede describir, en forma aproximada, por la fórmula:

$$h(x) = \frac{1}{15}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{29}{15}x + 4$$

con x medido en días y h, en miles de metros.

a) Averiguar si el globo meteorológico llegó en algún momento a una altura de 5500 metros (recordar que la altura se mide en miles de metros).
b) Analizar y describir el comportamiento de la función h(x) para x = 0
c) Verificar la respuesta graficando el polinomio obtenido en a)

SOLUCIONES PRESENTADAS

Grupo integrado por Nelson y Pedro

a) I. Se ingresó la expresión h(x) = $\frac{1}{15}x^3 - \frac{7}{10}x^2 + \frac{29}{15}x + 4$,escrita como y =1/15x^3–7/10x^2+29/15x+4 utilizando la Barra de Entrada de Expresiones y luego presionando la tecla Enter.

II. Se reemplazó y por el valor 5.5 en la expresión de arriba utilizando la Barra de Entrada de Expresiones y oprimiendo la tecla Enter.

III. Luego seleccionamos en el menú Resolver la opción Expresión. En la ventana que aparece seleccionamos el método Numérico y el dominio Real. Obtuvimos:

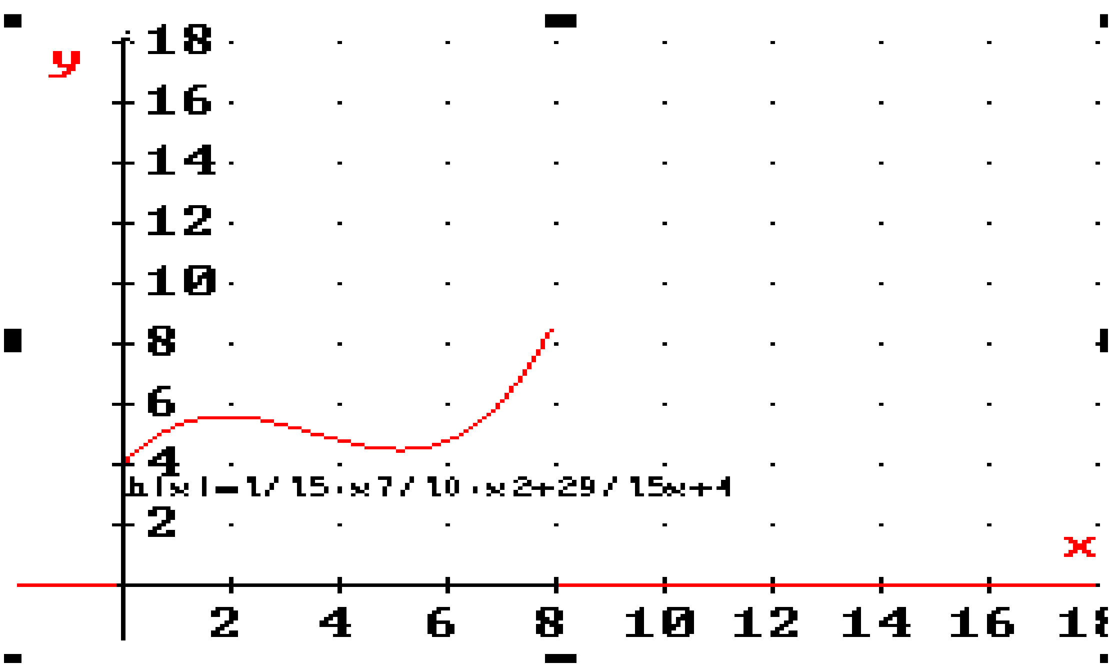
$$\text{NSOLVE}\left(5.5 = \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4, x, \text{Real}\right)$$

x = 1.354248688   x = 6.645751311   x = 2.5(Concluimos que el globo llegó a 5500m., en estas tres oportunidades)

b) I. Para graficar, ingresamos la expresión, escrita en la forma CHI(0,t,8)*(1/15x^3–7/10x^2+29/15x+4) utilizando la Barra de Entrada de Expresiones y la tecla Enter. Apareció en pantalla:

$$\#1 \quad \mathrm{CHI}(0, x, 8)\cdot\left(\frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4\right)$$

II. Obtuvimos el gráfico empleando el botón de acceso rápido y luego presionando nuevamente el mismo botón.

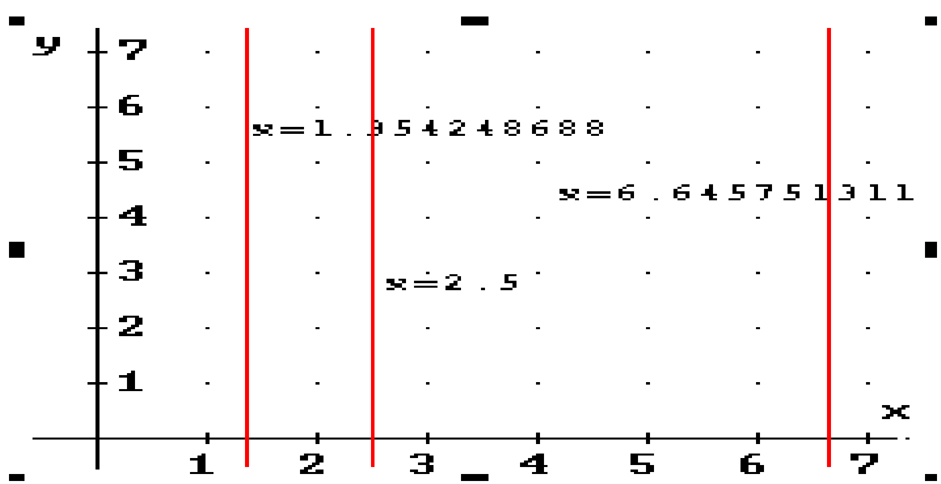


c). Para graficar el polinomio obtenido en el ítem a procedimos de la siguiente manera:

I. Ingresamos la expresión, 1/15x^3–7/10x^2+29/15x-1.5=0, empleando la Barra de Entrada de Expresiones y la tecla Enter. En el área de trabajo apareció:

$$\#1 \quad \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x - 1.5 = 0$$

II. Obtuvimos el gráfico empleando el botón de acceso rápido y luego presionando nuevamente el mismo botón.



Grupo integrado por Mariana y Carolina

$$y = \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4$$

x = días; y = miles de metros

a) Para averiguar si el globo meteorológico llegó en algún momento a una altura de 5500 metros sustituimos la variable “y” por el valor 5.5 y resolvimos la expresión

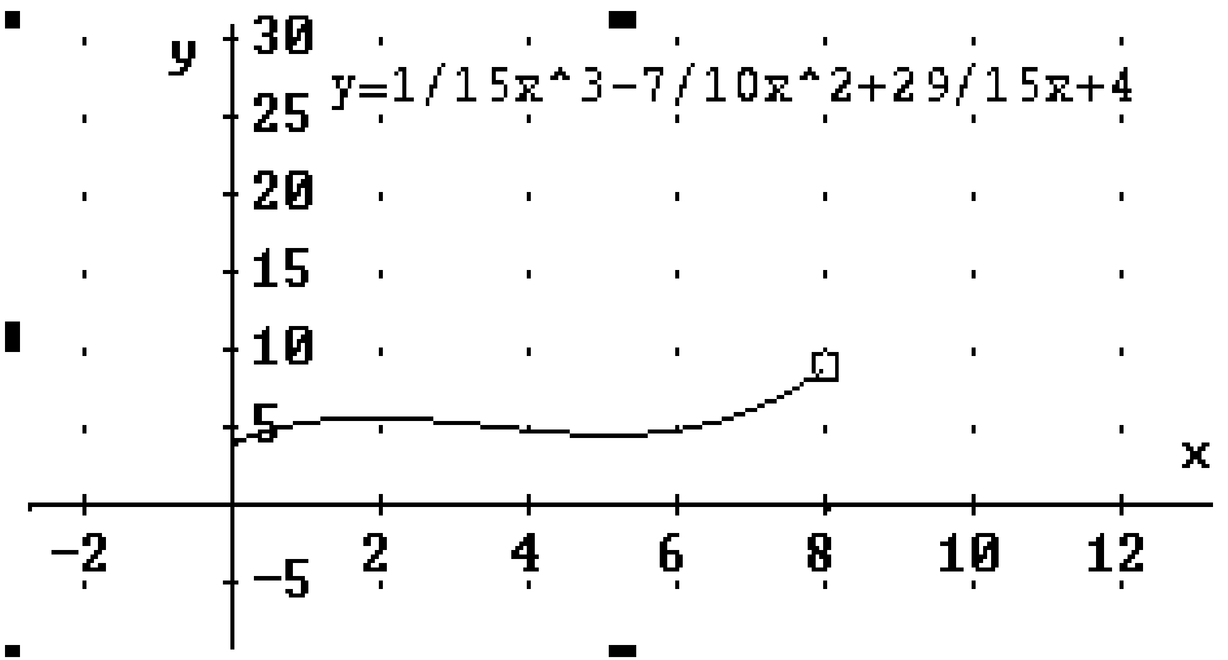
$$\mathrm{NSOLVE}\left(5.5 = \frac{1}{15}\cdot x^3 - \frac{7}{10}\cdot x^2 + \frac{29}{15}\cdot x + 4,\ x,\ \mathrm{Real}\right)$$

x = 1.354248688 • x = 6.645751311 • x = 2.5

Con estos valores determinamos que el globo meteorológico llegó a los 5500 metros, aproximadamente, el primer día, a los dos días y medio y a los 6 días.

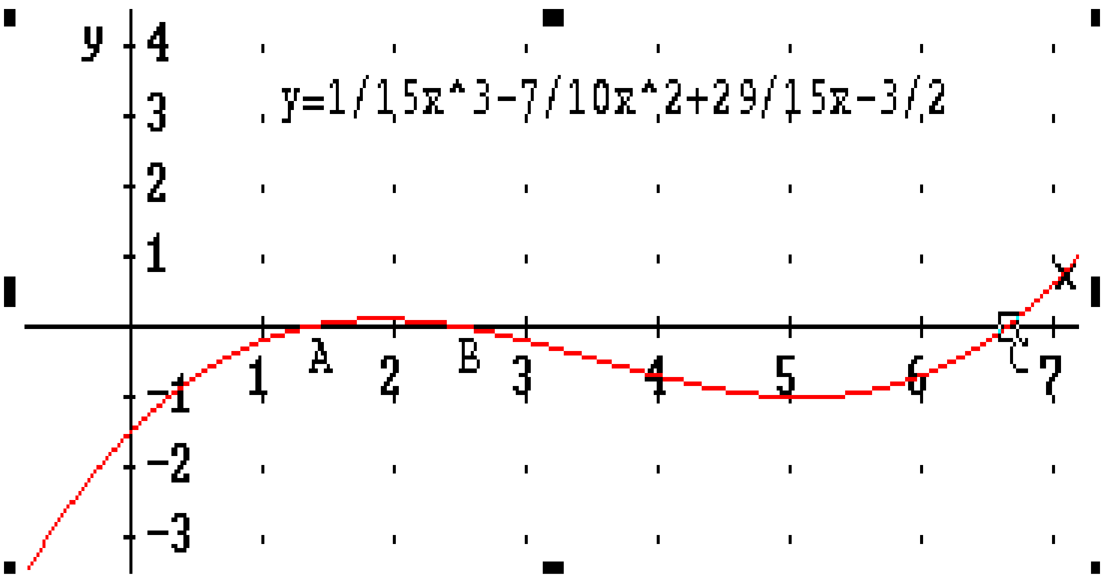
b) Para analizar el comportamiento de la función y para $0 \le x \le 8$; utilizamos la función CHI

$$\mathrm{CHI}(0, x, 8)\cdot\left(\frac{1}{15}\cdot x^{3} - \frac{7}{10}\cdot x^{2} + \frac{29}{15}\cdot x + 4\right)$$



c) Para verificar la respuesta obtenida en a) igualamos la función a 0, y luego graficamos el polinomio.

$$y = \frac{x^3}{15} - \frac{7 \cdot x^2}{10} + \frac{29 \cdot x}{15} - \frac{3}{2}$$



ANALISIS de las PRESENTACIONES

Con respecto al problema dado los estudiantes debían responder a tres apartados:

***Ítem a)* Ambas soluciones son coincidentes numéricamente**

Grupo I

Explica todos los comandos utilizados hasta llegar a la solución final de la consigna.

Grupo II

Presenta directamente la sustitución de variable por el valor numérico y la solución numérica obtenida por aplicación del Software y acertadamente, estima los valores obtenidos, teniendo en cuenta que estos resultados eran mediciones en días.

Ítem a) **Ambos grupos trabajan en este ítem con la función CHI para realizar el gráfico y analizar el comportamiento de la función en el intervalo dado eligiendo distintas escalas.**

Grupo I

Selecciona incrementos de dos unidades iguales en cada uno de los ejes y efectúa los comentarios referidos al crecimiento y decrecimiento de la función en tres subintervalos del intervalo dado

Grupo II

Elige para el eje de abscisas incrementos de dos unidades y para el eje de las ordenadas de cinco unidades no conservando la relación entre ambas escalas. Presentan sus observaciones con respecto al comportamiento del globo en lo que se refiere a su ascenso y descenso vinculado a la función polinómica h(x); considerando los tres subintervalos

Los dos grupos dan con cierta precisión las coordenadas de los puntos considerados máximos y mínimos, sin describir los procedimientos usados para la obtención de los mismos.

Ítem c)

Grupo I

Expresa: *la que sigue es la gráfica del polinomio*

$$\frac{1}{15}x^3-\frac{7}{10}x^2+\frac{29}{15}x-1.5$$

y observamos que en realidad lo que muestran son tres rectas paralelas al eje de las ordenadas trazadas por los puntos solución obtenidos en el ítem a).

Grupo II

Presenta la construcción del polinomio destacando los ceros de la ecuación asociada. No realizan ningún comentario sobre la elección de distintas escalas en los ejes respectivos.

CONCLUSIONES

Al finalizar la puesta en común de los trabajos, que fueron aceptados por los responsables del dictado del Taller, los participantes completaron una Encuesta, en la que ratificaron su beneplácito y deseos de continuar nuevas acciones con propuestas de características similares a las de este evento.

El desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, y en particular en este caso con la utilización del Software Derive facilita la representación múltiple de conceptos matemáticos y promueve la articulación entre diferentes representaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1.-CARRILLO, A.; LLAMAS, I. "*Derive. Aplicaciones matemáticas para PC*". RA - MA.España. 1994.

2.-FUHRMANN, J.; ZACHMANN H. "*Ejercicios de Matemática para químicos*". Editorial Reverté. España. 1978.

3.-LANG, S. "*Introducción al Álgebra Lineal*". Addison. Wesley Iberoamericana.S.A. México. 1990.

4.-MACHIN, D. "*Introducción a la Biomatemática*". Editorial Acribia. España. 1976.

5.-PITA RUIZ C. "*Álgebra Lineal*". McGraw-Hill. México. 1991

6.-Uno Revista de Didáctica de las Matemáticas. "*Educación Matemática e Internet*".Editorial Graó. España. 1998.

COMPRENSIÓN DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS: NIVELES, PROPUESTA DE INDICADORES Y DISEÑO DE TAREAS PARA SU ANÁLISIS

Adriana Monge S.[1]
Carolina Morales Q.[2]

Resumen

Este estudio explora de qué forma la variable comprensión media en la resolución de problemas que involucran las razones trigonométricas de tres estudiantes de la carrera de Bachillerato en Enseñanza de la Matemática en la UCR. Se vale de la integración de los aportes teóricos sobre dicha habilidad de pensar y actuar con flexibilidad; analizados desde una perspectiva internacional que trata de hacer frente a las necesidades matemáticas educativas actuales, para establecer en el tema elegido tres niveles de comprensión: instrumental, relacional y formal.

La premisa central que orienta y justifica el trabajo, sugiere una correlación positiva entre la comprensión que tiene el docente de los conceptos que enseña y aquella esperada de sus alumnos. Se ha partido de que las carencias en la formación de profesores de matemáticas explican o al menos se relacionan, con la falta de comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

Tanto los aportes bibliográficos, como los brindados por los expertos, contribuyeron a la determinación de los lineamientos que orientaron la creación de una lista de indicadores para cada nivel de comprensión de un profesor de matemáticas, en el tema de las razones trigonométricas, la ley de senos y la ley de cosenos. Indicadores estrictamente relacionados con las cinco tareas construidas y aplicadas a los profesores participantes.

Según el porcentaje acordado (80%) para determinar la apropiación en uno de los niveles, dos de los tres estudiantes muestran comprender las razones trigonométricas como una herramienta que les permite resolver problemas; al evidenciar que son capaces de memorizar y utilizar conceptos, definiciones, fórmulas, teoremas o algoritmos. Tan solo el participante C, logra vincular los contenidos con otra área dentro y fuera de las matemáticas, lo que lo posiciona en un nivel relacional. Finalmente, ninguno de los sujetos es capaz de reconstruir el camino que le llevó a los resultados obtenidos. Al explicar sus razonamientos, los argumentos que brindan son escasos y superfluos; sin lograr probar sus afirmaciones u ofrecer evidencias que justifiquen las fórmulas o resultados en uso.

De manera general, las percepciones y los niveles de comprensión de los participantes, sugieren que la formación de algunos docentes de matemáticas en el área de Trigonometría, no llega a satisfacer los requerimientos mínimos para enseñar ciertos temas asociados a ésta, de forma no tradicional. Las bases instrumentales, relacionales y formales integradas de manera sistemática, no son lo suficientemente sólidas para construir un conocimiento conceptual y dominio procedimental, adecuado, variado y justificado del saber matemático, que llegue a traducirse en una herramienta útil para proponer y modificar estrategias en la resolución de problemas que se aparten del uso mecánico usual.

[1] Colegio Panamericano, Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica. adrianam@panam.ed.cr, a.monge@costarricense.cr

[2] Liceo Laboratorio Emma Gamboa, Universidad de Costa Rica, Universidad Estatal a Distancia, Costa Rica. carolinamoralesquiros@yahoo.es

1. INTRODUCCIÓN

El presente ponencia se deriva de una investigación realizada para optar por el grado de Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática. Este estudio exploró de qué forma la variable comprensión, media en la resolución de problemas que involucran las razones trigonométricas, de tres estudiantes de la carrera de Bachillerato en Enseñanza de la Matemática en la UCR. Se vale de la integración de los aportes teóricos sobre dicha habilidad de pensar y actuar con flexibilidad; analizados desde una perspectiva internacional que trata de hacer frente a las necesidades educativas actuales, para establecer en el tema elegido tres niveles de comprensión: instrumental, relacional y formal.

La premisa central que orienta y justifica el trabajo, sugiere una correlación positiva entre la comprensión que tiene el docente de los conceptos que enseña y aquella esperada de sus alumnos. Así, se partió de que las carencias en la formación de los profesores de matemáticas explican o al menos se relacionan, con la falta de comprensión de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes.

En el referente teórico se revisan las tendencias de la educación matemática; concepto de comprensión, él cuál se ha utilizado de diversas maneras por diferentes autores y corrientes de pensamiento en este campo. Se desarrolla además la concepción de comprensión utilizada en este trabajo y se incluye una sección dedicada a los conceptos de trigonometría.

En el marco metodológico se describen el problema, los objetivos, los participantes y criterios de selección, técnicas de recolección de información, criterios de análisis e instrumentos.

La primera parte de los resultados expone las entrevistas realizadas a los expertos, en donde se determinan las condiciones necesarias dadas por estos profesionales, para desarrollar la comprensión en trigonometría, en particular las razones trigonométricas y la ley de senos o ley de cosenos. La segunda sección incluye los niveles de comprensión construidos como resultado del análisis del aporte de los expertos y la revisión bibliográfica. Además de los indicadores y tareas construidas para estimar la comprensión en el tema. Finalmente, en la tercera parte se analiza el nivel de comprensión alcanzado por cada uno de los tres estudiantes participantes.

2. MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

La investigación que se realizó se basa en hipótesis cognitivas y epistemológicas sobre las matemáticas, que tienen en cuenta las tendencias recientes en filosofía de las matemáticas, así como las teorías pragmáticas del significado. Partimos de las siguientes hipótesis cognitivas y epistemológicas sobre las matemáticas (Godino, 1996).

Ciertas de las tendencias recientes en la Educación Matemática, que parten también de estas hipótesis, están determinando los perfiles de los sistemas educativos, profesores y estudiantes, hacer frente a las necesidades actuales. A continuación se describen algunas de dichos acercamientos.

2.1. Tendencias de la Educación Matemática

Existen varios estudios que ofrecen una serie de condiciones mínimas que se espera que satisfagan los profesores de matemáticas. Las más frecuentes son: conocer a sus alumnos: las necesidades físicas y psicológicas del adolescente, los estilos de comunicación y aprendizaje propios de esta edad, las formas en que procesan la información y desarrollan habilidades mentales; sentir pasión por la enseñanza de la disciplina: satisfacción al enseñar, interés por adecuar los métodos de aprendizaje a los estudiantes, motivación propia para continuar su formación de una manera autodidacta; y poseer un conocimiento y comprensión profunda de los contenidos matemáticos que enseñará (Gallardo, s.f; Víquez, 1994; Santaló, 1994; Godino et al, 1996; Dengo; 1999, Hilton,2000).

Con relación al conocimiento de contenidos, Wittrock (1989) distingue tres clases de conocimientos: conocimiento de la materia, conocimiento pedagógico y conocimientos curriculares. Durante los últimos años y dentro de la comunidad de educadores matemáticos se ha exteriorizado la necesidad de realizar cambios en la forma en que las matemáticas son estudiadas y aprendidas (Santaló, 1994).

Este planteamiento responde a un contexto internacional, en el que se plantean reformas sobre lo que se pretende y se le exige a la educación matemática escolar.Otra de las propuestas actuales; elaborada por Goffree (2000) para una reforma de la matemática escolar en Holanda, se basa en cinco principios de enseñanza-aprendizaje que constituyen el marco de la educación matemática realista.

Éstos principios coinciden con el planteamiento anterior en la necesidad de crear contextos reconocibles a los cuales los estudiantes atribuyan sus propios significados y reformar los estilos de enseñanza, proponiendo para ello la utilización de modelos de pensamiento que le permitan a los estudiantes investigar la situación a partir del cual fue creado y aplicarlo a otras (Brousseau, *1986). Aportan el concepto de clase como una especie de comunidad matemática, a tal punto de convertir la interacción en una parte natural de ella. Además de señalar como uno de los aspectos básicos del aprendizaje, que el estudiante reconozca la estructura (relaciones entre lo aprendido) de lo que se está aprendiendo. Esto a través de la enseñanza basada en situaciones del mundo real (matematización horizontal) y conexiones dentro de los contenidos estudiados (matematización vertical).*

En el ámbito internacional se reconocen los esfuerzos de la Nacional Council of Teacher in Mathematics (NCTM[3]), quienes proponen estándares nacionales para los Estados Unidos con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas escolares. Dichos parámetros están orientados por seis principios: equidad, curriculum, enseñanza, aprendizaje, evaluación y tecnología. Además, se modifican según el nivel de los estudiantes (Grados K-12, en terminología americana).

Para las tres propuestas anteriores, (Hilton, Goffree y NCTM) los autores aclaran que no es posible llevarlas a la práctica si los profesionales en la enseñanza de las matemáticas, no poseen una comprensión profunda de la disciplina. Justifican esta posición señalando que la falta de dominio del contenido repercute sobre las variables didácticas de la enseñanza de las matemáticas (Godino et al, 1996). Además, Enderson (1995) ha mostrado que una mayor comprensión del contenido es directamente proporcional a la capacidad de gestión de la clase y que las escogencias curriculares dependen de ese dominio del contenido.

En resumen, las necesidades actuales en educación matemática, traducen el panorama internacional en ciertas características que se esperan del profesor: dominio de temas, conocer cómo aprenden los estudiantes, fomentar el razonamiento en los alumnos, integrar la tecnología en el estudio que se planea, entre otras. Estas características son permeadas por la comprensión que tiene el profesor del contenidos; incidiendo en las decisiones en torno a la construcción de ambientes de aprendizaje relacionados con dicho contenido. Afirmación asumida como premisa para esta investigación.

2.2. Comprensión

[3] standards.nctm.org

Son diversos los esfuerzos por dar respuesta a ¿qué es comprensión?, ¿qué significa comprensión de un objeto matemático dado?, ¿Es posible distinguir grados de comprensión?. Si así lo fuera, ¿Cuáles son algunas de estas clasificaciones?. Pero no todos ellos, que se traducen como conceptualización de la comprensión, la entienden de la misma manera.

Tres acercamientos a la noción de comprensión son planteados por Johnson (1989), Van Hiele (1957) y Gardner (1993). El primero define comprensión como el modo en que estamos significativamente en nuestro mundo, utilizando para ello nuestras interacciones corporales, instituciones y contextos culturales y tradiciones lingüíticas. Esta ubicación en el entorno, adecuada según la nuestra percepción, es tomada en cuenta por Van Hiele (1957) al definir comprensión como la estructuración de un campo perceptivo. Él asegura que luego de concluir los primeros tres momentos (estructurar el campo perceptivo, unir dicha estructuración a distintas palabras y por último el proceso en que la estructuración perceptiva se va convirtiendo paulatinamente en la estructuración lingüística) en el proceso de la formación de la comprensión en geometría, ésta se obtiene. Señala que la comprensión incluye la capacidad de ofrecer una explicación paso a paso de lo que se hace, actuar de manera adecuada ante situaciones que todavía no aparecen en el proceso de aprendizaje de **una persona.**

Es Gardner (1993) quien asume una posición más amplia, en cuanto al tema, al definir comprensión como la capacidad de adquirir conocimientos, aptitudes y conceptos y aplicarlos en forma adecuada en nuevas situaciones. Por otra parte, en matemáticas, la noción de comprensión ha sido estudiada también identificando niveles o tipos, como es el caso de Gómez (s.f) al proponer tres niveles: Comprensión Instrumental, Comprensión Relacional y Comprensión Integral.

Contreras (1994), aunque no define explícitamente ‘comprensión en matemáticas’, nombra una clasificación propuesta por Herscovics y Bergeron de cuatro niveles de comprensión en matemáticas: *Comprensión Intuitiva, Comprensión de procedimientos, Abstracción matemática y Formalización.*

Son Perkins y Simmons (1988), y Boix y Gardner (1999) quienes ofrecen una tipología de comprensión más detallada y amplia. Los primeros la exponen en términos de “*marcos*”, entendidos como esquemas internamente coherentes y particularmente independientes de los otros. A saber, Marco de Contenidos, Marco de Resolución de Problemas, Marco Epistémico, y Marco Investigativo.

Boix y Gardner (1999) nos indican que la calidad de la comprensión se basa en la capacidad para hacer uso productivo de los conceptos, teorías, narraciones y procedimientos disponibles en dominios tan dispares como la biología, la historia y las artes. Estos autores caracterizan cuatro niveles prototípicos de la comprensión por dimensión: ingenua, de principiantes, de aprendiz y de maestría.

2.3. Concepción de Comprensión utilizada en el trabajo

Las aproximaciones a la noción de comprensión mencionadas en la sección anterior, ilustran la variedad de interpretaciones y tipos que se pueden establecer respecto a un tema según los aspectos que se busque priorizar. En las tres últimas, reconocemos dos aspectos comunes: por un lado el carácter instrumental-aplicacional como un primer nivel de comprensión (Instrumental, Intuitiva-de Procedimientos, y de contenidos-de resolución de problemas; respectivamente), que le permite a las personas resolver problemas; y por otra parte, una exigencia mayor que implica la integración o relación de conceptos y de justificación de procedimientos o los elementos teóricos que se emplean al resolver un problema.

La noción de comprensión puede ser abordada empleando distintos y diversos modelos, los cuales establecen las etapas necesarias para la construcción del conocimiento. Para la investigación que aquí se propone, se entenderá que un estudiante comprende un objeto matemático según la definición planteada por Perkins (1999):

> *Comprender es la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. Para decirlo de otra manera, la comprensión de un tópico es la "capacidad de desempeño flexible".*

Se dirá que un estudiante comprende un objeto matemático según las secuencias de actos (explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de manera que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria) que le permitan superar obstáculos específicos de una tarea matemática propuesta, en la que intervine este objeto. Esto debido a que, la apropiación del significado de un objeto es un proceso dinámico, progresivo y no lineal, por los distintos dominios de experiencia y contextos institucionales en que se participan.

Al entender comprensión de esta manera, las secuencias de actos que realice el estudiante nos permitirá clasificar la comprensión que tenga del objeto matemático, pues como señala Perkins (1999) ésta se da por niveles. Los establecidos para este trabajo se describen en el capítulo tres.

Se entiende que una tarea matemática es el conjunto de actividades, ejercicios, problemas y demostraciones, que se le proponga a los estudiantes. En éstas, se tomaron en consideración significados institucionales dados por asesores de matemáticas del MEP, profesores e investigadores en la enseñanza de las matemáticas.

2.4. Trigonometría

En este apartado se presenta una síntesis de elementos conceptuales útiles que pueden apoyar la construcción de una unidad didáctica que aborde el tema de trigonometría según los objetivos y contenidos propuestos en el programa de MEP para noveno año. Se contemplaron aquellos aspectos directamente relacionados con los conceptos valorados en esta investigación.

Se presenta una reseña de las aplicaciones de las razones trigonométricas en la historia elaborada por las investigadoras con aportes del libro A History of the Mathematics (Katz, 1998), enriquecido con datos obtenidos de páginas web (ver bibliografía). Es evidente que incorporar elementos de este tipo en el planeamiento de la clase, requiere (al menos al inicio) un trabajo adicional por parte del docente y de los estudiantes; pero su orientación acertada, funge como ente motivador en el alumno, ya que a través de él descubrirá los contextos que justifican el surgimiento de los conceptos. (Sánchez, 1999).

Las nociones básicas para trabajar las relaciones entre triángulos rectángulos, con el propósito de evidenciar que las razones trigonométricas responden a razones de triángulos semejantes. Seguido a esto, se definen las razones trigonométricas con algunas actividades apropiadas para el desarrollo del tema; relaciones entre las razones trigonométricas; triángulos rectángulos especiales para complementar el tema; ángulos de elevación y depresión y ejemplos en donde se emplean y por último la ley de senos y la ley de cosenos.

BIBLIOGRAFÍA

Alsina, Á (2002). *De los contenidos a las competencias numéricas en la enseñanza obligatoria*. En Revista Uno: Competencias matemáticas. España: Editorial Graó.

Artigue, M. (1998). *Ingeniería Didáctica*. En: Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L.; Gómez, D. Ingeniería Didáctica en Enseñanza de las Matemáticas. Colombia: Grupo Editorial Iberoaméricano

Boix, V. y Gardner, H. (1999). *¿Cuáles son las cualidades de la comprensión?* En: Stone, M. (Compiladora) La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires: Paidós.

Contreras, I. (1994). *El rol del profesor de matemáticas en la educación secundaria: un referente teórico para su estudio*. En revista Educación 18 (1): 75-84.

Deulofeu, J. y Gorgorió, N. (2000). *Planteamientos para el cambio*. En Matemáticas y Educación. Barcelona: Graó.

Godino, J.D. (1996). *Significado y comprensión de los conceptos matemáticos*. Valencia: en Puig. L. y Gutiérrez A. (Eds.), Proceeding of the 20th PME Conference: Vol 2, pp. 417-424.

Godino, J.D. (1996). *El análisis didáctico del conocimiento matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas*. Sur África: en Olivier, A. y Newstead, K. (Eds.), Proceeding of the 22th Internacional Conference for the Psychology of Mathematics Education: University of Stellenbosch.

Godino, J.D (2002). *Competencia y comprensión matemática:¿qué son y cómo se consiguen?*. En Revista Uno: Competencias matemáticas. España: Editorial Graó.

Goffree, F. (2000). *Principios y paradigmas de una "educación matemática realista"* . En Matemáticas y Educación. Barcelona: Graó.

González, F. (2000). Los nuevos roles del profesor de matemáticas. En: Revista Paradigma, Volumen XXI, Venezuela: Centro de información y documentación del Instituto Pedagógico de Maracay, CIDIPMAR.

Hilton, P. (2000). *Necesidad de una reforma*. En Bishop (Coord.), Matemáticas y Educación. Barcelona: Graó.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). *Un estudio sobre los esquemas de prueba en el alumnado de primer curso de Bachillerato*. En Revista Uno: Razonamientos y Pruebas. España: Editorial Graó.

Llinares, S. (2003). *Matemáticas escolares y competencia matemática.* En: Didácticas de las Matemáticas. Madrid: Editorial Pearson Educación.

MEP, (2001). Programa de Estudios Matemática III Ciclo. Aprobado por el Consejo Superior en Sesión CSE 62-2000, 19 de diciembre del 2000

Perkins, D. (1999). *¿Qué es la comprensión?* En: Stone, M. (Compiladora) La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires: Paidós.

Stone, M. (1999). *¿Qué es la enseñanza para la comprensión?* En: Stone, M. (Compiladora) La enseñanza para la comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica. Buenos Aires: Paidós.

Van Hiele, P. (1957). El Problema de la comprensión. Alemania: Tesis presenta para optar el grado de Doctor en Matemáticas y Ciencias Naturales, Universidad Real de Utrecht.

EXPERIENCIA SOBRE UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

María E. Ascheri, Rubén A. Pizarro[1]

RESUMEN

En este trabajo presentamos los resultados de una experiencia de cátedra con los alumnos de la asignatura *Cálculo Numérico* correspondiente a las carreras: Ingeniería Civil (2º Año), Licenciatura en Física y Profesorado en Matemática (3º Año).

Los avances tecnológicos y la disponibilidad de recursos informáticos se han convertido en la actualidad en herramientas de apoyo del proceso de enseñanza - aprendizaje. Es por ello que nos propusimos introducir nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza - aprendizaje del tema *resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales por medio de métodos directos* utilizando, fundamentalmente, la computadora y un software matemático.

El objetivo fundamental que perseguimos con esta metodología es facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de este contenido temático particular de *Cálculo Numérico*, aplicando la técnica de la ingeniería didáctica de Artigue, y generando el contexto educativo adecuado a este contenido y al logro del objetivo planteado.

La estrategia que implementamos combina la enseñanza tradicional, las técnicas grupales de aprendizaje activo, y la computadora como apoyo a la explicación del docente y para fomentar el aprendizaje de los alumnos, provocar comportamientos de iniciativa, de creatividad, búsqueda de coherencia y espíritu crítico.

INTRODUCCIÓN

Las computadoras y los métodos numéricos representan alternativas que amplían considerablemente la capacidad para confrontar y resolver ecuaciones lineales simultáneas, las cuales surgen en el contexto de una variedad de problemas y en todas las disciplinas de la ingeniería, de la física y de las ciencias aplicadas en general. Como resultado, se dispone de más tiempo para dar más importancia a la formulación de un problema y a la interpretación de la solución. Además, se pueden plantear problemas más complejos y más realistas.

La implementación de nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza de la *resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales por medio de métodos directos*, la realizamos en el marco de la ingeniería didáctica de Artigue [1], la cual hace una distinción temporal de su fase experimental en cuatro etapas:

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa - Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa – Argentina, mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

1. Análisis preliminar.
2. Concepción y análisis a priori.
3. Experimentación.
4. Análisis a posteriori y validación.

Para ello, buscamos actividades relativas a los intereses de los alumnos que se matriculan en el curso de Cálculo Numérico. En la resolución de estas actividades, los alumnos debieron desarrollar los programas utilizando un software matemático.

Estas actividades fueron precedidas por:

- **Un marco teórico:** para sistematizar los conocimientos dentro de la asignatura.
- **Resolución de problemas:** para afianzar los conceptos teóricos y las técnicas utilizadas.

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos de las fases de experimentación y de evaluación referidos a este contenido temático, debido a que tenemos resultados parciales del análisis a posteriori y validación de la propuesta.

DESARROLLO

Los métodos numéricos han adquirido una gran importancia en la enseñanza de la ingeniería y las ciencias, lo cual refleja el uso actual de la computadora. Históricamente, la imposibilidad de resolver sistemas de cuatro o más ecuaciones limitó el alcance de problemas de muchas aplicaciones de ingeniería, de física y de otras ciencias aplicadas. El advenimiento de computadoras de fácil acceso, hace posible y práctica la solución de grandes sistemas de ecuaciones.

Entre los objetivos propuestos por la Cátedra para la enseñanza - aprendizaje de este tema particular de Cálculo Numérico, podemos citar los siguientes:

- Brindar los conceptos teóricos básicos sobre los distintos métodos numéricos.
- Proporcionar una importante batería de ejercicios.
- Capacitar a los alumnos para que practiquen los métodos en una computadora.
- Proporcionan software que resulte fácil de comprender.
- Elaborar programas que puedan usarse de forma sencilla en aplicaciones científicas.

Propuesta metodológica

Nuestro objetivo es implementar nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales, utilizando la computadora y un software matemático (MATLAB, en nuestro caso). De esta manera, a través del desarrollo de este contenido curricular de Cálculo Numérico y sobre la base del uso de la computadora y de un software matemático, se espera contribuir en el desarrollo académico de los alumnos y en el logro de determinadas habilidades, incrementando la pericia matemática y la comprensión de los principios científicos básicos.

A partir de este objetivo, y con el apoyo del marco teórico pertinente a esta temática particular de Cálculo Numérico, buscamos, seleccionamos e implementamos actividades afines a los intereses de los alumnos que cursan esta asignatura. Cabe señalar que si bien el marco teórico es brindado a los alumnos en forma tradicional y con el apoyo de un Cuaderno elaborado por los docentes de la cátedra como material de consulta, en la actualidad (y como resultado parcial del análisis a posteriori y validación de la propuesta) hemos comenzado a diseñar un software educativo propio que incluye (por ahora) algunos temas de Cálculo Numérico, a efectos de brindar una nueva herramienta de apoyo a la explicación del profesor y fomentar el aprendizaje de los alumnos que cursan dicha asignatura [2].

Consideraciones iniciales para implementar la propuesta

Luego del análisis de los datos recogidos de las fases 1 y 2, y teniendo presente que, según Douady [4], la ingeniería didáctica es a la vez un producto, resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo a la dinámica de la clase, comenzamos a organizar y a desarrollar la fase 3 de experimentación según las consideraciones iniciales siguientes:

- Se les proporcionan a los alumnos las fórmulas y los conceptos más importantes relacionados con la *resolución de sistemas de ecuaciones lineales por medio de métodos directos*, para sistematizar los conocimientos dentro de la asignatura “Cálculo Numérico”.

- Se desarrollan varios ejemplos con la finalidad de mejorar las habilidades de los alumnos, tanto en el conocimiento de la teoría como en la práctica de este contenido curricular.
- Se les proporcionan a los alumnos una serie de ejercicios propuestos para afianzar los conceptos teóricos y las técnicas utilizadas.
- Se les proporcionan a los alumnos distintas actividades a desarrollar con herramientas computacionales, en donde se plantean situaciones problemáticas reales de ingeniería, de física y de matemática aplicada en general, para lograr un incremento de la motivación y facilitar el desarrollo de destrezas en el tratamiento de estos contenidos temáticos.

Búsqueda y selección de las actividades

En la búsqueda y selección de las actividades se debe tener en consideración las diferentes motivaciones y necesidades con que el alumno puede acercarse y recibir estas actividades: aprendizaje básico, aprendizaje detallado, revisión e integración de conocimientos, búsqueda de información, autoevaluación, evaluación. Además, es de fundamental importancia tener presente los objetivos específicos correspondientes al contenido temático que se quiere abordar.

Las actividades que implementamos tienen como finalidad lograr una revisión e integración de conocimientos de esta temática particular de Cálculo Numérico, para que les permitan, tanto al alumno como al docente, una evaluación de los saberes matemáticos enseñados y aprendidos según el marco teórico subyacente y la batería de problemas planteados previamente.

Para la búsqueda y selección de estas actividades (teniendo como base el conjunto de datos recogidos en las fases 1 y 2), los objetivos propuestos fueron:

Que el alumno

- Afiance los conceptos teóricos y las técnicas utilizadas en *la resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales por medio de métodos directos*, adquiridos en el aula.

- Adquiera habilidad y destreza en el manejo de los métodos numéricos para la *resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales por medio de métodos directos*.
- Transfiera sus conocimientos relativos a esta temática al tratamiento de situaciones problemáticas relacionadas con la vida real.
- Compruebe lo indispensable de la utilización de la computadora para resolver este tipo de situaciones problemáticas y valore las bondades del paquete MATLAB.
- Desarrolle las actividades como miembro participante de un grupo (no más de tres alumnos por grupo) en función de favorecer la integración grupal.
- Elabore programas propios que puedan usarse de manera sencilla en estas (y otras) aplicaciones científicas. (Hay muchos problemas que no pueden resolverse al emplear programas “hechos”).
- Compruebe y valore la disminución en el tiempo de ejecución de sus labores, obteniendo rápidamente respuesta a sus inquietudes.
- Desarrolle habilidad y destreza en el procesamiento de información científica.
- Se motive a investigar intercambiando experiencias, participando en forma activa, desarrollando habilidades personales y de trabajo en equipo.
- Elabore un informe final en el que se deberán incluir los programas realizados, los resultados obtenidos y un análisis de los mismos.

Implementación de las actividades

En la Sala de Computación, y con la supervisión de los docentes de la asignatura, los alumnos, en grupos, desarrollan las actividades propuestas (fase de experimentación). Para realizar los programas correspondientes a esta temática utilizan el paquete MATLAB. Es importante señalar que durante las primeras semanas de iniciado el curso de Cálculo Numérico, se les da a los alumnos algunas nociones básicas sobre el uso del paquete MATLAB, con apoyo de un Cuaderno elaborado por los docentes de la asignatura. La necesidad de implementar un pequeño cursillo de apoyo informático surgió como producto del análisis de las dos primeras fases. Además, si bien se pretende que, por sí mismos, los alumnos desarrollen las actividades propuestas, ellos cuentan con el apoyo de los docentes y pueden intercambiar ideas con sus pares. De esta manera, se espera contribuir a una mayor comprensión de los contenidos temáticos involucrados, y lograr un aprendizaje dinámico e interactivo favorecido por el intercambio de experiencias, producto del análisis y discusión de las situaciones problemáticas planteadas. Además, el hecho que los alumnos diseñen programas propios para resolver las actividades propuestas, juega un rol importante en el aprendizaje de los métodos numéricos. Las tareas de computación son útiles para que los alumnos tengan la oportunidad de practicar sus habilidades en la computación científica y, además, para que los ayude a realizar la componente numérica de los ejercicios que deban resolver en la Sala de Computación. Cuando el alumno implemente con buen resultado los métodos numéricos en una computadora y los aplique para resolver problemas que de otro modo resultan intratables, se sentirá motivado para seguir investigando en las temáticas involucradas, y tendrá una demostración tangible de cómo pueden ayudarle las computadoras para su desarrollo profesional. Al mismo tiempo, aprenderá a reconocer y controlar los errores de las aproximaciones obtenidas que, como sabemos, son inseparables de los cálculos numéricos a gran escala.

Utilizamos el paquete MATLAB para unificar los conocimientos relativos a un software matemático, ya que la mayoría de nuestros alumnos no han aprendido o no tienen la práctica suficiente de ningún lenguaje de programación; sólo los alumnos del Profesorado en Matemática tienen escasos conocimientos del lenguaje PASCAL (datos extraídos de las dos primeras fases). Y usamos específicamente MATLAB porque:

- Se ha convertido en una herramienta para casi todos los campos de la ingeniería y de la matemática aplicada.
- Sus versiones nuevas han mejorado los aspectos de programación con el apoyo de presentaciones gráficas que se pueden desarrollar, lo que ayuda y motiva al alumno.
- Su programación es muy sencilla y su uso facilita el proceso de enseñanza - aprendizaje, aportando una interfaz gráfica visual más didáctica y comprensible.
- Hay continuidad entre valores enteros, reales y complejos, y la amplitud del intervalo y la exactitud de los números son mayores.
- Posee la capacidad de vincularse con los lenguajes de programación tradicionales y permite la transportabilidad de los programas.

Evaluación de las actividades

Una vez desarrolladas las actividades, los alumnos deben realizar una lectura comprensiva de los resultados obtenidos, según la información de entrada disponible y el método numérico utilizado para resolver la situación problemática planteada. En cada caso de estudio deben emitir las conclusiones a las que arribaron. Estas, conjuntamente con una síntesis de los resultados obtenidos de cada actividad y los programas por ellos diseñados, deben ser incluidos en un informe final que deben presentar cada uno de los grupos a los docentes de la asignatura. Dicho informe, además, debe ser expuesto y defendido, en forma individual, frente a los docentes y a los restantes alumnos del curso de Cálculo Numérico, a efectos de que se produzca un intercambio de experiencias y efectuar tareas remediales, si fuese necesario. De esta manera surgirán, naturalmente, los casos en donde se debe profundizar y/o extender el tratamiento de los aspectos más conceptuales y más difíciles de entender, y de las técnicas numéricas utilizadas y su implementación en la computadora. Esto redundará en beneficio del proceso de enseñanza-aprendizaje del contenido curricular considerado, resultando enriquecedor tanto para los alumnos como para los docentes de la asignatura (evaluación y validación de la propuesta).

Se evalúa: la presentación del informe, su exposición y defensa, el trabajo en grupo y el desempeño de cada integrante dentro del mismo. Esta evaluación forma parte de las evaluaciones parciales contempladas en el curso de Cálculo Numérico (evaluación de la experiencia).

Actividades propuestas

Presentamos una de las actividades propuestas a un grupo de alumnos de Cálculo Numérico. Se muestran los resultados por ellos obtenidos y las conclusiones a las que arribaron. Aunque esta actividad, tomada de la ingeniería química, pertenece a la predicción de temperaturas en sólidos, también se usa este planteamiento para simular la distribución continua de otras variables de la ingeniería.

Una delgada placa mide 2 pies x 2 pies x 1 pulg. Los bordes se mantienen a temperatura constante. Se quieren determinar las temperaturas en el interior de esta placa. Estas temperaturas pueden estimarse si se hace una retícula de puntos donde la separación entre cada punto mide 0.5 pies, y se hace que u_1, u_2, ..., u_9 sean las temperaturas en los puntos de la retícula. En la figura se muestra una placa con estos puntos en la retícula. La temperatura u(x,y) en cada punto satisface una ecuación diferencial que puede simplificarse en un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

	50°	50°	50°	
0°	u_1	u_2	u_3	100°
0°	u_4	u_5	u_6	100°
0°	u_7	u_8	u_9	100°
	50°	50°	50°	

El resultado es el siguiente sistema de nueve ecuaciones lineales:

$$
\begin{array}{l}
-4u_1 + u_2 + u_4 = -50 \\
u_1 - 4u_2 + u_3 + u_5 = -50 \\
u_2 - 4u_3 + u_6 = -50 \\
u_1 - 4u_4 + u_5 + u_7 = -50 \\
u_2 + u_4 - 4u_5 + u_6 + u_8 = 0 \\
u_3 + u_5 - 4u_6 + u_9 = -100 \\
u_4 - 4u_7 + u_8 = -50 \\
u_5 + u_7 - 4u_8 + u_9 = -50 \\
u_6 + u_8 - 4u_9 = -150
\end{array}
$$

Resultados obtenidos por los alumnos:

La matriz asociada al sistema anterior es:

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -50 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & -100 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & -50 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & -50 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -150
\end{bmatrix}
$$

Las soluciones obtenidas son:

	Métodos		
	Gauss-Jordan	Crout	Cholesky
u_1	33.9286	33.9286	33.9286
u_2	43.3036	43.3036	43.3036
u_3	39.2857	39.2857	39.2857
u_4	42.4107	42.4107	42.4107
u_5	50.0000	50.0000	50.0000
u_6	63.8393	63.8393	63.8393
u_7	35.7143	35.7143	35.7143
u_8	50.4464	50.4464	50.4464
u_9	66.0714	66.0714	66.0714

Conclusiones a las que arribaron los alumnos luego de realizar esta actividad:

- La matriz del sistema es simétrica y definida positiva. Por lo tanto, el método de Cholesky es aplicable a este sistema.
- Con los tres métodos utilizados se puede obtener correctamente la solución del sistema.
- El método de Cholesky es el que más rápido arroja la solución, pues es menor la cantidad de operaciones que debe realizar.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Una vez finalizado el análisis de este tema, los alumnos:

- Tienen la suficiente información para aprovechar satisfactoriamente una amplia variedad de problemas que impliquen utilizar *sistemas de ecuaciones lineales*, y para poder visualizar las aplicaciones de estos sistemas en todos los campos de la física y de las ciencias aplicadas, en general.
- Dominan varias técnicas y valoran la confiabilidad de las mismas.
- Entienden los problemas de división por cero, errores de redondeo, mal condicionamiento y ventajas del pivoteo.

- Saben cómo evaluar la condición del sistema, cómo calcular determinantes, cómo aplicar las técnicas de corrección de errores para mejorar las soluciones, cómo calcular la matriz inversa.
- Comprenden por qué los esquemas compactos son particularmente eficientes en la solución de algunos problemas.
- Comprenden que todos los métodos numéricos vistos se pueden programar en una computadora sin demasiada dificultad, y tienen la capacidad de diseñar programas propios para resolver el problema que se les plantee.
- Descubren las ventajas que proporciona el uso del paquete MATLAB.

La implementación por los alumnos de las técnicas analizadas en programas simples, ha sido de gran utilidad como herramienta de aprendizaje de dichas técnicas.

Podemos concluir que es una herramienta para la enseñanza de la matemática, puesto que facilita el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Los principales aportes de este trabajo son:

- Incorporación y contemplación de aspectos pedagógicos y educativos.
- Incremento de la motivación y desarrollo de las destrezas.
- Intensificación de la estrecha vinculación entre los conocimientos, el problema y la computadora.
- Diseño y desarrollo de los programas.
- Incremento de la interacción entre docentes y alumnos.

Concluimos que la experiencia resultó positiva y que es viable implementarla en otros temas de Cálculo Numérico.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Artigue, M., 1998, *Ingeniería Didáctica en: Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

[2] Ascheri, M. E. - Pizarro R. A., 2005, *Software para la enseñanza-aprendizaje de algunos métodos numéricos,* Memorias del VII Simposio de Educación Matemática, EMAT Editora, Autores: Jorge E. Sagula, Nelson Hein y otros. Compilador: Jorge E. Sagula. Editor literario: Pablo C. Chale, Chivilcoy, Buenos Aires, Argentina, CD-ROM ISBN Nº 987-20239-3-X.

[3] Chapra, S. - Canale, R., 1992, *Métodos Numéricos para Ingenieros. Con aplicaciones en computadoras personales*, Mc Graw - Hill. (Trad. de Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications, 1985, Mc Graw - Hill).

[4] Douady, R., 1998, *La Ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento Matemático en: Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

[5] Gerald, C. - Wheatley, P., 2000, *Análisis Numérico con Aplicaciones*, México, Pearson Educación. (Trad. de Applied Numerical Analysis, A. Wesley, 1999).

[6] Golubitsky, M. - Dellnitz, M., 2001, *Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales con Uso de MATLAB*, International Thomson Editores. (Trad. de Linear Algebra and Differential Equations Using MATLAB, Brooks Cote Publishing Company, 1999).

FACULTAD DE CIENCIAS
EXACTAS Y NATURALES

EXPERIENCIA SOBRE UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

María E. Ascheri, Rubén A. Pizarro

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa
Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa - Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar
ruben@exactas.unlpam.edu.ar

RESUMEN

Presentamos los resultados de una experiencia de cátedra con alumnos de la asignatura *Cálculo Numérico* correspondiente a las carreras: Ing. Civil (2º Año), Lic. en Física y Prof. en Matemática (3º Año).

Los avances tecnológicos y la disponibilidad de recursos informáticos se han convertido en herramientas de apoyo del proceso de enseñanza - aprendizaje. Es por ello que nos propusimos introducir nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza - aprendizaje del tema *resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales por medio de métodos directos* utilizando, fundamentalmente, la computadora y un software matemático.

Objetivo. Facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de este contenido, aplicando la técnica de la ingeniería didáctica de Artigue, y generando el contexto educativo adecuado a este contenido y al logro del objetivo planteado.

Estrategia. Se combina la enseñanza tradicional, las técnicas grupales de aprendizaje activo, y la computadora como apoyo a la explicación del docente y para fomentar el aprendizaje de los alumnos.

INTRODUCCIÓN

La implementación de nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza de la *resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales por medio de métodos directos*, la realizamos en el marco de la ingeniería didáctica de Artigue [1], la cual hace una distinción temporal de su fase experimental en cuatro etapas:

1. Análisis preliminar.
2. Concepción y análisis a priori.
3. Experimentación.
4. Análisis a posteriori y validación.

Buscamos actividades relativas a los intereses de los alumnos de Cálculo Numérico, las cuales fueron precedidas por:

Un marco teórico: para sistematizar los conocimientos dentro de la asignatura.
Resolución de problemas: para afianzar conceptos teóricos y técnicas usadas.

En este trabajo presentamos los resultados obtenidos de las fases de experimentación y de evaluación referidos a este contenido temático, debido a que tenemos resultados parciales del análisis a posteriori y validación de la propuesta.

DESARROLLO

Los métodos numéricos han adquirido una gran importancia en la enseñanza de la ingeniería y las ciencias, lo cual refleja el uso actual de la computadora.

Históricamente, la imposibilidad de resolver sistemas de cuatro o más ecuaciones limitó el alcance de problemas de muchas aplicaciones.

El advenimiento de computadoras de fácil acceso, hace posible y práctica la solución de grandes sistemas de ecuaciones.

Entre los objetivos propuestos por la Cátedra para la enseñanza - aprendizaje de este tema particular de Cálculo Numérico, podemos citar los siguientes:

- Brindar los conceptos teóricos sobre los distintos métodos numéricos.
- Proporcionar una importante batería de ejercicios.
- Capacitar a los alumnos para que practiquen los métodos en una computadora.
- Proporcionar software que resulte fácil de comprender.
- Elaborar programas que puedan usarse en aplicaciones científicas.

Propuesta metodológica

Nuestro objetivo es implementar nuevas estrategias metodológicas para la enseñanza y el aprendizaje de la resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales por medio de métodos directos, utilizando la computadora y un software matemático (MATLAB).

Para ello, buscamos, seleccionamos e implementamos actividades afines a los intereses de los alumnos que cursan esta asignatura.

El marco teórico es brindado a los alumnos en forma tradicional y con el apoyo de un Cuaderno elaborado por los docentes.

En la actualidad (y como resultado parcial del análisis a posteriori y validación de la propuesta) hemos comenzado a diseñar un software educativo propio que incluye algunos temas de Cálculo Numérico, a efectos de brindar una nueva herramienta de apoyo a la explicación del profesor y fomentar el aprendizaje de los alumnos que cursan dicha asignatura [2].

Consideraciones iniciales para implementar la propuesta

De los datos recogidos de las fases 1 y 2, y teniendo presente que, según Douady [4], la ingeniería didáctica es un producto y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo a la dinámica de la clase, comenzamos a organizar y a desarrollar la fase 3. Para ello:

- Se proporcionan las fórmulas y los conceptos más importantes relacionados con esta temática.

- Se desarrollan ejemplos para mejorar las habilidades de los alumnos, tanto en el conocimiento de la teoría como en la práctica.

- Se proporcionan ejercicios para afianzar los conceptos teóricos y las técnicas utilizadas.

- Se proporcionan actividades a desarrollar con herramientas computacionales, en donde se plantean situaciones problemáticas de la vida diaria, para lograr un incremento de la motivación y facilitar el desarrollo de destrezas.

Búsqueda y selección de las actividades

Los objetivos propuestos para la búsqueda y selección de actividades fueron, que el alumno:

- Afiance los conceptos teóricos y las técnicas utilizadas, adquiridos en el aula.
- Transfiera sus conocimientos sobre esta temática a situaciones problemáticas.
- Compruebe lo indispensable de la utilización de la computadora para resolver este tipo de situaciones problemáticas y valore las bondades del MATLAB.
- Desarrolle las actividades como miembro participante de un grupo.
- Elabore programas propios que puedan usarse de manera sencilla.
- Compruebe y valore la disminución en el tiempo de ejecución de sus labores, obteniendo rápidamente respuesta a sus inquietudes.
- Desarrolle habilidad y destreza en el procesamiento de información científica.
- Elabore un informe final en el que se deberán incluir los programas realizados, los resultados obtenidos y un análisis de los mismos.

Implementación de las actividades

En la Sala de Computación, con los docentes de la asignatura, los alumnos, en grupos, desarrollan las actividades propuestas (fase de experimentación). Para realizar los programas correspondientes a esta temática utilizan el MATLAB.

Durante las primeras semanas de iniciado el curso, se les da a los alumnos algunas nociones básicas sobre el uso de MATLAB, con apoyo de un Cuaderno elaborado por los docentes. La necesidad de implementar un cursillo de apoyo informático surgió como producto del análisis de las dos primeras fases.

Si bien se pretende que, por sí mismos, los alumnos desarrollen las actividades propuestas, ellos cuentan con el apoyo de los docentes y pueden intercambiar ideas con sus pares.

De esta manera, se espera contribuir a una mayor comprensión de los contenidos temáticos involucrados, y lograr un aprendizaje dinámico e interactivo favorecido por el intercambio de experiencias, producto del análisis y discusión de las situaciones problemáticas planteadas.

Evaluación de las actividades

Los alumnos deben:

- Realizar una lectura comprensiva de los resultados obtenidos.
- Emitir las conclusiones a las que arribaron.
- Realizar una síntesis de los resultados obtenidos de cada actividad y presentar los programas por ellos diseñados.
- Presentar un informe final que deberá ser expuesto y defendido, en forma individual, frente a los docentes y a los restantes alumnos, para producir un intercambio de experiencias y efectuar tareas remediales, si fuese necesario.

Esto redundará en beneficio del proceso de enseñanza-aprendizaje del contenido curricular, resultando enriquecedor tanto para los alumnos como para los docentes (evaluación y validación de la propuesta).

Se evalúa la presentación del informe, su exposición y defensa, el trabajo en grupo y el desempeño de cada integrante dentro del mismo.

Actividades propuestas

Presentamos una de las actividades propuestas. Se muestran los resultados y las conclusiones a las que arribaron.

Aunque esta actividad, tomada de la ingeniería química, pertenece a la predicción de temperaturas en sólidos, también se usa este planteamiento para simular la distribución continua de otras variables de la ingeniería.

Una delgada placa mide 2 pies x 2 pies x 1 pulg. Los bordes se mantienen a temperatura constante. Se quieren determinar las temperaturas en el interior de esta placa. Estas temperaturas pueden estimarse si se hace una retícula de puntos donde la separación entre cada punto mide 0.5 pies, y se hace que u_1, u_2, ..., u_9 sean las temperaturas en los puntos de la retícula.

En la figura se muestra una placa con estos puntos en la retícula. La temperatura u(x,y) en cada punto satisface una ecuación diferencial que puede simplificarse en un sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes.

	50°	50°	50°	
0°	u_1	u_2	u_3	100°
0°	u_4	u_5	u_6	100°
0°	u_7	u_8	u_9	100°
	50°	50°	50°	

El resultado es el siguiente sistema de nueve ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
-4u_1 + u_2 + u_4 &= -50 \\
u_1 - 4u_2 + u_3 + u_5 &= -50 \\
u_2 - 4u_3 + u_6 &= -50 \\
u_1 - 4u_4 + u_5 + u_7 &= -50 \\
u_2 + u_4 - 4u_5 + u_6 + u_8 &= 0 \\
u_3 + u_5 - 4u_6 + u_9 &= -100 \\
u_4 - 4u_7 + u_8 &= -50 \\
u_5 + u_7 - 4u_8 + u_9 &= -50 \\
u_6 + u_8 - 4u_9 &= -150
\end{aligned}
$$

Resultados obtenidos por los alumnos. La matriz asociada al sistema es:

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -50 \\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -50 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & -100 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & -50 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & -50 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -150
\end{bmatrix}
$$

Las soluciones obtenidas son:

	Métodos		
	Gauss- Jordan	Crout	Cholesky
u_1	33.9286	33.9286	33.9286
u_2	43.3036	43.3036	43.3036
u_3	39.2857	39.2857	39.2857
u_4	42.4107	42.4107	42.4107
u_5	50.0000	50.0000	50.0000
u_6	63.8393	63.8393	63.8393
u_7	35.7143	35.7143	35.7143
u_8	50.4464	50.4464	50.4464
u_9	66.0714	66.0714	66.0714

Conclusiones a las que arribaron los alumnos:

• La matriz del sistema es simétrica y definida positiva. Por lo tanto, el método de Cholesky es aplicable a este sistema.
• Con todos los métodos utilizados se puede obtener la solución del sistema.
• El método de Cholesky es el que más rápido arroja la solución, pues es menor la cantidad de operaciones que debe realizar.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Una vez finalizado el análisis de este tema, los alumnos:

- Dominan varias técnicas y valoran la confiabilidad de las mismas.
- Entienden los problemas de división por cero, errores de redondeo, mal condicionamiento y ventajas del pivoteo.
- Saben cómo evaluar la condición del sistema, cómo calcular determinantes, cómo aplicar las técnicas de corrección de errores para mejorar las soluciones, cómo calcular la matriz inversa.
- Comprenden por qué los esquemas compactos son particularmente eficientes en la solución de algunos problemas.
- Comprenden que todos los métodos numéricos vistos se pueden programar sin demasiada dificultad, y tienen la capacidad de diseñar programas para resolver el problema que se les plantee.
- Descubren las ventajas que proporciona el uso del paquete MATLAB.

Los principales aportes de este trabajo son:

• Incorporación y contemplación de aspectos pedagógicos y educativos.

• Incremento de la motivación y desarrollo de las destrezas.

• Intensificación de la estrecha vinculación entre los conocimientos, el problema y la computadora.

• Diseño y desarrollo de los programas.

• Incremento de la interacción entre docentes y alumnos.

Concluimos que la experiencia resultó positiva y que es viable implementarla en otros temas de Cálculo Numérico.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Artigue, M., 1998, *Ingeniería Didáctica en: Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

[2] Ascheri, M. E. - Pizarro R. A., 2005, *Software para la enseñanza-aprendizaje de algunos métodos numéricos*, Memorias del VII Simposio de Educación Matemática, EMAT Editora, Autores: Jorge E. Sagula, Nelson Hein y otros. Compilador: Jorge E. Sagula. Editor literario: Pablo C. Chale, Chivilcoy, Buenos Aires, Argentina, CD-ROM ISBN Nº 987-20239-3-X.

[3] Chapra, S. - Canale, R., 1992, *Métodos Numéricos para Ingenieros. Con aplicaciones en computadoras personales*, Mc Graw - Hill. (Trad. de Numerical Methods for Engineers with Personal Computer Applications, 1985, Mc Graw - Hill).

[4] Douady, R., 1998, *La Ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento Matemático en: Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica S. A.

[5] Gerald, C. - Wheatley, P., 2000, *Análisis Numérico con Aplicaciones*, México, Pearson Educación. (Trad. de Applied Numerical Analysis, A. Wesley, 1999).

[6] Golubitsky, M. - Dellnitz, M., 2001, *Álgebra Lineal y Ecuaciones Diferenciales con Uso de MATLAB*, International Thomson Editores. (Trad. de Linear Algebra and Differential Equations Using MATLAB, Brooks Cote Publishing Company, 1999).

IMPACTO DE LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUCANICACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Enrique Vílchez Quesada[1]

Resumen: *se plantea cuáles son las implicaciones de la sociedad de la información y el conocimiento en el ámbito educativo y cómo en particular las tecnologías digitales están transformando el modelo de universidad tradicional, en las instituciones de enseñanza superior. Además, se destaca la importancia que tiene el uso de materiales educativos computarizados, para la creación de ambientes de aprendizaje enriquecidos con nuevas estrategias didácticas basadas en el uso adecuado de la computadora.*

1. Introducción

La evolución de la sociedad en las últimas décadas, ha excedido el ritmo de los procesos históricos que tiempo atrás habían caracterizado a la humanidad, hoy en día lo único perdurable son los cambios constantes promovidos en gran medida por el avance tecnológico, que ha cerrado las brechas entre distancia y conocimiento, entre imaginación y realidad.

Un mundo globalizado como el actual, no puede pasar desapercibido en la comunidad docente encargada de preparar las futuras generaciones que tomarán a su cargo el importante reto del desarrollo nacional. Como educadores y educadoras tenemos el deber moral y profesional de circunscribir nuestra labor educativa en este contexto. El inicio de este proceso de cambio indudablemente relaciona nuestra actividad docente con el desarrollo tecnológico, tratando de incorporar en el salón de clase, estrategias de enseñanza y apredizaje que utilicen recursos didácticos basados en el uso de calculadoras programables o materiales educativos computarizados.
Lo anterior impone una transformación curricular en el contexto de las instituciones de enseñanza superior, quienes a priori tienen la responsabilidad de generar investigación,

[1] Universidad Nacional, Escuela de Matemática y Centro de Investigación y Docencia en Educación, evqm@costarricense.cr

experiencias y formación académica para lograr una transición benigna de la sociedad industrial a la sociedad de la información.

2. La Sociedad del Conocimiento y la Información y sus Implicaciones en la Educación

Los cambios culturales y económicos que la humanidad ha experimentado en las últimas décadas, han marcado un hito en el ritmo de los procesos históricos que antes de la aparición de la computadora, habían caracterizado la evolución de la sociedad. Hoy en día las naciones han comenzado una vertiginosa carrera, buscando luego de un par de siglos, la transición de una sociedad industrial ha una sociedad donde el conocimiento y la información se han convertido en los insumos fundamentales para el desarrollo en todos sus ámbitos. El Dr. Leopoldo Briones Salazar en su artículo Demandas de la Sociedad del Conocimiento a la Gestión del Currículum Escolar, opina que nos encontramos en un escenario donde las tecnologías de la información configuran las relaciones sociales; *"algunos sostienen que vivimos en una sociedad de cambios globales en que la información y el conocimiento se constituyen en los bienes más distintivos y preciados en la esfera social"* (2002 : 1).

Según Francisco Papa Blanco en su libro *Tecnología y Desarrollo*, la sociedad ha desplazado su centro de gravedad de la industria hacia los servicios, un cambio que ha implicado el movimiento irreversible hacia la "informatización". Papa considera que la informática es una ciencia cada vez más necesaria en una sociedad moderna: *"la expansión de las capacidades de registro y transmisión, y la facilidad de acceso a los sistemas, hará proliferar las redes de información sobre toda la diversidad imaginable de temas"* (1979 : 116).

La información masiva y sus facilidades de acceso son el mínimo común denominador de la sociedad de hoy. El desarrollo progresivo de la red de redes Internet, ha provocado profundos cambios culturales, donde la velocidad en las comunicaciones sin importar las fronteras y los idiomas, han convertido la transmisión de la información en una actividad cotidiana, que conlleva unos cuantos segundos.

Actualmente las instituciones educativas han tenido que considerar la necesidad de incorporar tecnología en los procesos educativos para desarrollar nuevos métodos de aprendizaje, a través del acceso a múltiples formas de interacción y fuentes de información. Para el Catedrático Martiniano Román Pérez de la Universidad Complutense de Madrid, éste proceso es un resultado ineludible, en su libro *Un Nuevo Currículum para la Sociedad del Conocimiento* propone; *"cada época posee su modelo de escuela y cada cambio social relevante reclama cambios también relevantes en la escuela"* (2002 : 1).

Manuel Area Moreira en su artículo ¿Qué aporta Internet al Cambio Pedagógico en la Educación Superior?, considera que los métodos tradicionales de enseñanza que se utilizan con mayor frecuencia en las instituciones educativas son: la clase magistral, la toma de apuntes por parte del alumno y, la lectura y memorización de textos. Para Area, este tipo de metodología lleva implícita una visión del conocimiento como algo definitivo, estático y sin cuestionamientos. Una paradoja si se piensa en la sociedad del conocimiento y de la información, en la cuál se circunscribe el momento histórico que vivimos. Area a este respecto opina: *"la llegada de las denominadas tecnologías digitales de la información y comunicación a los distintos ámbitos de nuestra sociedad, y de la educación en particular, puede representar, y en muchos casos así empieza a ocurrir, una renovación sustantiva o transformación de los fines y métodos tanto de las formas organizativas como de los procesos de enseñanza"* (2000 : 129).

De acuerdo con Peter J. Dirr en su artículo Desarrollo Social y Educativo con las Nuevas Tecnologías; en la educación superior los retos son aún mayores, la mayoría de los profesores universitarios se resisten al uso de recursos tecnológicos por dos razones: una consideran que al utilizar tecnología se disminuyen sus posiciones como expertos de su disciplina, y la otra aprendieron en un sistema educativo tradicional. Pese a ello señala Dirr: *"la tendencia de los centros de enseñanza superior; apunta al crecimiento en el uso* *de tecnologías, esto resulta de la presencia de un nuevo grupo de alumno -adultos- quienes trabajan y tienen competencias y experiencias que no tuvieron los alumnos de promociones anteriores”* (2004 : 73).

Nos encontramos en una nueva era; la era digital, la postura de las instituciones educativas ante este cambio, no puede seguir manteniéndose en la austeridad de las denominadas *“escuelas de piedra”* (Bartolomé, A., 1996 : 6). La educación, indica Dirr, ha dejado de ser un beneficio social; *“ahora los alumnos son vistos como un posible mercado, con recursos para gastar en educación”* (2004 : 74). Si un centro de enseñanza desea garantizar su supervivencia; debe competir, adecuando su oferta académica a la demanda sociocultural. El reto impone acciones prontas, eficaces y concretas, que conducen a transformaciones pedagógicas y metodológicas en un marco educativo completo, definiendo objetivos, reestructurando planes y programas de estudio, y creando estrategias didácticas que permitan adaptar los sistemas educativos y anticipar propuestas para enfrentar cambios futuros, promovidos por el desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación.

3. Transformación de la Educación Superior por las Tecnologías Digitales

El replanteamiento de la educación superior durante la década pasada, alcanzó un auge impresionante traducido en diversos esfuerzos académicos y asignación de recursos, por parte de múltiples instituciones y organizaciones a nivel mundial. Algunas de estas organizaciones participantes fueron la Asociación Internacional de Universidades y la UNESCO que en particular auspició cinco conferencias regionales en América Latina y el Caribe (Cuba, 1996), África (Senegal, 1997), Europa (Italia, 1997), Asia y Pacífico (Japón, 1997) y Países Árabes (Líbano, 1998). En el mes de octubre de 1998, se llevó a cabo en París la Conferencia Mundial sobre Educación Superior identificándose problemas, tendencias y nuevos requerimientos deseables, dentro de los cuales se destacaron la necesidad de una educación:

- De mejor calidad.

- Más accesible y equitativa.
- Más pertinente a las exigencias de la sociedad.
- Centrada en los estudiantes.
- Más sostenible desde los puntos de vista económico, pedagógico, social y político.

En ese mismo año, la UNESCO propuso un plan de acción para la transformación de la educación superior en América Latina y el Caribe, definiendo la forma en cómo las tecnologías de la información y comunicación podrían contribuir en la transición de un nuevo modelo de universidad. Entre otros aspectos el plan señala la gestión académica de nuevas tecnologías de la información y comunicación como un punto medular, que de acuerdo a la autora Elena Borrego en el artículo Transformación de la Educación Superior en América Latina, esto significa: *"la necesidad de que los países de la región conozcan cómo pueden utilizar, generar y adaptar las tecnologías para mejorar la calidad, la pertinencia y el acceso a la educación superior, sin el riesgo de un desfase entre sectores sociales y países, en función de la capacidad para el manejo de esas tecnologías"* (2004 : 125).

Diversos autores (Dirr, Silvio, Salinas, entre otros) piensan que la digitalización de la información y el desarrollo de nuevas formas de comunicación, promovidas en gran parte por el avance de la ciencia y la tecnología, podrían poner en riesgo las universidades tradicionales. Una nueva sociedad basada en la información como insumo de competitividad y permanencia en el mercado, ha abierto posibilidades inimaginables décadas atrás. La educación según José Silvio en su artículo ¿Cómo Transformar la Educación Superior con la Tecnología Digital?, está siendo conducida por tres grandes fuerzas: la social, la académica y el mercado. La fuerza conducida socialmente es la que ha caracterizado los procesos de democratización y universalización de la educación superior. La fuerza académica está orientada a satisfacer los problemas de las organizaciones científicas y académicas. Finalmente la fuerza del mercado ha querido sufragar las necesidades empresariales y corporativas. Esta última con una aparición reciente, cuyo objetivo principal se circunscribe en la actualización y renovación permanente de conocimientos, ha consolidado el surgimiento de “universidades corporativas” y “universidades empresariales”, orientadas a atender las necesidades de la clase trabajadora profesional y de adecuarse a su realidad. Hoy en día la Universidad debe actualizar su misión y visión, hacia una formación permanente y de por vida. Los cambios suscitados por las tecnologías digitales lo exigen y las instituciones de enseñanza superior no lo pueden ignorar más.

El desarrollo de las tecnologías digitales con sus consecuentes cambios sociales y culturales, está transformando el contexto de las instituciones de enseñanza superior. A su vez, muchas universidades concientes del proceso y su irreversibilidad, han optado por adaptarse y valerse de las bondades brindadas. Según Jesús Salinas en el artículo Educación Superior y Tecnología Digital; *“las TIC harán posible organizar la educación de forma diferente, esto puede conducir a nuevos modelos organizativos”* (2004: 114). Juan de Pablos Pons en el artículo La Formación Superior y el Reto de las Nuevas Tecnologías de la Información, se muestra optimista frente al uso de las TIC en las universidades; *“la incorporación de las nuevas tecnologías de la información a las actividades universitarias de formación, investigación y gestión es algo que solamente puede valorarse inicialmente como positivo, dadas las prestaciones y posibilidades de estas herramientas”* (2004 : 121).

En el ámbito de la formación universitaria, la aparición de las nuevas tecnologías digitales está imponiendo a los docentes cambios pedagógicos y metodológicos muy radicales. Dentro de estos cambios la autora venezolana Carlota Pérez en el artículo La Universidad en el Nuevo Paradigma para la Vida en la Sociedad del Conocimiento, considera indispensable una transformación en el estilo pedagógico; hacia la búsqueda de la autogestión del conocimiento; “*esto coincide con el eterno ideal de enseñar a aprender, en la práctica supone organizar la enseñanza con base a prácticas que desarrollen la autonomía del educando, lo cual implica: entrenamiento para la autogestión, trabajo en equipos interdisciplinarios, la investigación y la solución de problemas y hábitos de análisis y valoración de alternativas*” (2002 : 2).

Si nos encontramos en una sociedad caracterizada por el acceso masivo y rápido a la información, no tiene sentido un aprendizaje memorístico de contenidos. Antonio Bartolomé en el artículo Preparando para un Nuevo Modo de Conocer, considera que hoy en día se accede a la información a través de la cultura del espectáculo, la participación y la interactividad. Para él, la utilización de sistemas multimedia[2] son un claro ejemplo del denominado Edutenimiento; una relación conceptual entre la educación y el entretenimiento. Bartolomé considera que la enseñanza debe ser activa, entretenida y divertida; "*¿por qué un alumno incapaz de trabajar diez minutos seguidos en una clase, se pasa horas y horas delante de un ordenador?; la clave debe buscarse en la satisfacción que ofrece la actividad*" (1996 : 11).

En este sentido, la utilización de software y en particular de material educativo computarizado[3] está adquiriendo una importancia preponderante en la transformación de los procesos pedagógicos que caracterizan la educación superior. Una transformación lenta pero incuestionable, que implica profundos cambios curriculares y administrativos, en el perfil de la antigua Universidad.

4. Importancia de los Materiales Educativos Computarizados para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática

Galvis (1992) define material educativo computarizado (MEC) como: "*un ambiente informático que permite que la clase de aprendiz para el que se preparó viva el tipo de experiencias educativas que se consideran deseables para él frente a una necesidad educativa dada*". Un MEC se diferencia de un software educativo pues su campo de aplicación es más restringido. Un software educativo se ocupa de un dominio de utilización amplio, puede tener varios grados de especificidad o generalidad, para Galvis simplemente es un programa que cumple una tarea educativa relacionada con la

[2] Sistemas caracterizados por la integración de medios y por la interactividad o interactuación entre sujeto máquina. Tienen ventajas didácticas en comparación con películas o presentaciones; los usuarios influyen en el comportamiento del programa.
[3] Definido por Jaime Sánchez Ilabaca como cualquier programa computacional cuyas características estructurales y funcionales le permiten servir de apoyo a la enseñanza y el aprendizaje.

enseñanza o no, de esta forma un software que administre procesos educacionales se considera educativo.

Los materiales educativos computarizados, están adquiriendo cada vez más importancia en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática asistida por computadora. Los procesos educativos que caracterizan la enseñanza de la matemática en la mayoría de las instituciones de educación superior en Costa Rica, se fundamentan en una metodología tradicional, donde el docente asume el rol protagónico de transmisor de información y el estudiante un papel receptor-reproductivo.

Un proyecto de investigación realizado por el Dr. Luis Gerardo Meza Cascante y el M.Ed. Fabio Hernández Díaz titulado: *Enseñanza de la matemática en el ITCR; patrones de interacción en el aula*, pretendió investigar las dimensiones culturales en aulas universitarias en las que se desarrollaron procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática apoyados con software, la investigación arrojó dentro de una de sus conclusiones el predomino de las lecciones magistrales en combinación con el método interrogativo. Meza y Hernández lograron comprobar cómo el trabajo de aula es complementado casi exclusivamente, con prácticas adicionales que el estudiante asume por su cuenta. Los investigadores señalan (2000 : 85): *"los procesos que ordinariamente se desarrollan en la enseñanza de la matemática, se caracterizan por clases magistrales, presentación secuencial de los contenidos, prácticas adicionales, trabajo individualizado como norma general y comunicación entre las y los estudiantes escasa"*.

Hoy en día la tendencia impuesta por los avances científico-tecnológicos, demanda un cambio en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje, una transformación hacia la búsqueda de nuevos métodos y estrategias didácticas, aprovechando todas las potencialidades brindadas por las tecnologías de la información y la comunicación. Comparto con Meza (2000) el criterio acrítico y tecnofílico que asumen los vendedores de equipo y software, y algunos políticos quienes están interesados en exagerar los beneficios que a corto o mediano plazo podrían obtenerse al utilizar las computadoras en el aula. Lo cierto es, que ella constituye simplemente un recurso más; Meza (2000) a este respecto plantea: *"la tarea fundamental del docente es planificar, desarrollar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, la computadora juega en este contexto, el papel exclusivo de instrumento de apoyo"*.

Vivimos en una nueva sociedad caracterizada por la imagen y la interacción, por el espectáculo y la conectividad, los cambios culturales atribuidos a la computadora alcanzan todas las esferas; la social, la económica y desde luego la educativa. Hoy en día existe la creencia de que las nuevas generaciones parecen tener una aceptación casi inmediata, instintiva hacia el uso de los recursos tecnológicos, algunos autores piensan que esto no es del todo cierto; Badilla (1998) citado por Meza expone el error de suponer que a todos los jóvenes les gusta sentarse frente a una computadora; éste investigador detectó problemas de desinterés, asistencia y disciplina en algunos muchachos y muchachas que formaron parte de un estudio, realizado en la enseñanza secundaria.

También otros autores han cuestionado el mito de que la incorporación de la computadora en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje lleva implícito un efecto positivo. Galvis (1992) enfatiza la necesidad de sacarle el provecho adecuado a las computadoras, para lograr un verdadero enriquecimiento de la labor educativa; *"si la informática ha de tener un papel importante en el enriquecimiento de la labor educativa, es indispensable tener claro qué tipo de educación deseamos impulsar y cómo se puede favorecer tal enfoque educativo"* (1992 : 6). Lo anterior significa que el uso de materiales educativos computarizados en el salón de clase, no puede tener un fin en sí mismo, es necesario analizar su impacto y los beneficios que se obtendrán en términos de objetivos de aprendizaje.

Meza, Garita y Villalobos (2001) proponen que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática asistida por computadora, deben basarse en los siguientes principios:

- El uso de la computadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática debe enmarcarse un planteamiento educativo.
- La computadora debe incorporarse en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática sólo cuando se más eficaz o más eficiente que otros medios.

- La incorporación de la computadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática permite aumentar la eficiencia y eficacia de algunas estrategias que el docente utilizaba antes de incorporar la computadora.
- El empleo de la computadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática permite diseñar algunas estrategias didácticas que no es posible desarrollar con otros medios.

En este último punto, radica uno de los factores más importantes que justifican la necesidad de utilizar materiales educativos computarizados para la enseñanza de la matemática. La existencia de ambientes matemáticos apoyados con tecnología, de acuerdo a Kolman (1980) favorece la motivación y la curiosidad intelectual del estudiante.

Uno de los problemas fundamentales en la enseñanza de la matemática, consiste en el aprendizaje de conceptos que presentan en sí mismos serias dificultades de comprensión. José María Arias (s.a.) presidente de la Asociación Logo Madrid citando a Papert señala: *"como profesor de matemática (Papert) presenta una gran preocupación por el fracaso escolar en matemática, lo que él llama matemafobia, dice que se podría transformar en matemalandia, si los materiales y los medios lo permitieran"*. Es natural encontrarse con teorías matemáticas muy abstractas, difíciles de interiorizar si se le enseñan al estudiante de una manera exclusivamente magistral. En el campo del álgebra lineal esto parece ocurrir, temas como espacios vectoriales y aplicaciones lineales generalmente son etiquetados por el estudiante como difíciles y poco significativos, cuando en realidad tienen una trascendencia vital dentro de su formación académica en ingeniería o matemática.

Si la enseñanza de la matemática lleva implícita serios problemas cognoscitivos y muchos docentes no conocen nuevas formas de comunicación para cambiar sistemáticamente sus métodos tradicionales, ¿cuál debería ser el aporte de la utilización de materiales educativos computarizados en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje?, la respuesta a esta pregunta se enmarca en dos aspectos: primero me parece indispensable aprovechar todas las capacidades gráficas, de cálculo simbólico, de almacenamiento y velocidad del computador, diseñando situaciones de aprendizaje que le permitan al estudiante explorar, descubrir y conjeturar. Según Calderon; *"la computadora permite el uso de representaciones simbólicas, el acceso a representaciones numéricas y visuales dinámicas, y puede ser utilizada como un medio de exploración donde los alumnos pueden expresar ideas"* (1999 : 55). Harel y Kolman (1991) citados por Calderon plantean: *"se enfatiza la importancia de las representaciones en el proceso de aprendizaje, el proceso de construcción de significados involucra el uso de representaciones y el aprendizaje de un concepto puede ser facilitado cuando hay más oportunidades de construir e interactuar con representaciones externas del concepto"*.

En segundo lugar, la utilización de materiales educativos computarizados, se puede también circunscribir en la formación y capacitación de la población docente. Para Hernández y Rodríguez (1999) profesoras de matemática de la Facultad de Ingeniería Mecánica del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cuba; *"los problemas de la educación, y en particular, de la enseñanza de la matemática demandan una elevada preparación científica de los profesionales que participan en el proceso docente-educativo de esta disciplina, este objetivo solo se puede lograr si se introducen métodos y medios que propicien una efectiva superación y calificación técnica y profesional del personal docente"* (1999 : 248). Lo anterior propone la necesidad de involucrar a los profesores universitarios en un cambio curricular, fortaleciendo su alfabetización informática y pedagógica.

5. Conclusiones

Las tecnologías de la información y la comunicación, indudablemente han impactado las instituciones de enseñanza superior a nivel mundial, obligando en muchos casos a estos centros de enseñanza, a replantearse el concepto de Universidad en el contexto de una sociedad distinta; la sociedad de la información.

Este impacto ha traído a colisión los métodos tradicionales de enseñanza con todas las potencialidades brindadas por las nuevas tecnologías digitales, a tal punto, que actualmente muchos investigadores han vislumbrado en ellas, los medios ineludibles para poder superar problemas culturales y cognoscitivos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. La integración de materiales educativos computarizados en el currículum escolar, se está convirtiendo en una necesidad, en una respuesta para solventar la crisis que de acuerdo a Papert (1992) podríamos llamar *matemafobia*.

El uso de las tecnologías de la información y la comunicación para apoyar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, ha abierto una reciente área de investigación; la matemática asistida por computadora. El diseño de ambientes informatizados ricos en interactividad, exploración y recursos multimediales, caracterizados por una manipulación simbólica y representaciones múltiples de un concepto matemático, son hoy por hoy la carta de presentación que invita a los docentes universitarios, a asumir el importante reto de propiciar la enseñanza y el aprendizaje de nociones y conceptos matemáticos, más significativos.

6. Bibliografía

1. Ashby, E. (1969). Technology and the Academics. Inglaterra: MACMILLAN & CO LTD.
2. Area, M. (2000). Redes multimedia y diseños virtuales. Actas del III Congreso Internacional de Comunicación, Tecnología y Educación de la Universidad de Oviedo, 1(1), 128-135.
3. Bartolomé, A. (1996). Preparando para un Nuevo Modo de Conocer. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, *1*(4), 1-15.
4. Briones, L. (2002). Demandas de la Sociedad del Conocimiento a la Gestión del Currículum Escolar. *Revista Digital Umbral 2000, 1*(10), 1-23.
5. Dirr, P. (2004). Desarrollo Social y Educativo con las Nuevas Tecnologías. *Nuevas Tecnologías y Educación*, *1*(1), 70-84.
6. Dorrego, E. (2004). Transformación de la Educación Superior en América Latina. *Nuevas Tecnologías y Educación*, *1*(1), 125-127.
7. Galvis, A. (1992). Ingeniería de Software Educativo. Colombia: Ediciones Uniandes.
8. Gutiérrez, C. y Castro, M. (1990) La Sociedad Computarizada. Costa Rica: EUNED.
9. Kolman, B. (1999). Álgebra Lineal con Aplicaciones y *Matlab*. México: Pearson.

10. Meza, L., Garita, G. y Villalobos, L. (2001). Estrategias Didácticas para Desarrollar Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática Asistidos por Computadora. *Memorias del II Congreso Internacional de Matemática Asistida por Computadora*, *1*(1), 84-96.
11. Meza, L. (2000). Consideraciones sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. *Memorias del Segundo Festival de Matemáticas*, *1*(1), 129-136.
12. Meza, L. (2001). Elementos para Enseñar Matemática. Costa Rica: Editorial del Instituto Tecnológico de Costa Rica.
13. Meza, L. (1999). ¿Para qué Enseñamos Matemática en el Colegio?. *Memorias del I Congreso Internacional de Matemática Asistida por Computadora*, *1*(1), 300-307.
14. Meza, L. (1998). ¿Sirve la matemática para Tomar Decisiones?. *Memorias del I Festival de Matemática*, *1*(1), 130-141.
15. Moreira, M. (2004, enero 1). Universidad Nacional. [En línea]. <http://www.una.ac.cr/index.html> [2005, febrero 13].
16. Murillo, C. (1995). Ensayos sobre Desarrollo. Costa Rica: EFUNA.
17. Papa, F. (1979). Tecnología y Desarrollo. Cartago: Editorial Tecnológica de Costa Rica.
18. Pérez, C. (2002). La Universidad en el Nuevo Paradigma: Formar para la Vida en la Sociedad del Conocimiento. [En línea]. <http://www.carlotaperez.org/portada.htm> [2005, febrero 19].
19. Pérez, M. (2002). Un Nuevo Currículum para la Sociedad del Conocimiento. España: Universidad Complutense de Madrid.
20. Peters, O. (s.f). Educación a Distancia en Transición: Nuevas Tendencias y Desafíos. Alemania: FernUniversität.
21. Piaget y otros. (1971). La Enseñanza de las Matemáticas. Madrid: Editorial Aguilar.
22. Pons, J. (2004). La Formación Superior y el Reto de las Nuevas Tecnologías de la Información. *Nuevas Tecnologías y Educación*, *1*(1), 119-123.
23. Sánchez, J. (1995). Informática Educativa. Chile: Editorial Universitaria.
24. Sánchez, J. (2004). Aprendizaje Visible, Tecnología Invisible. Chile.
25. Salinas, J. (2004). Educación Superior y Tecnología Digital. *Nuevas Tecnologías y Educación*, *1*(1), 113-118.
26. Silvio, J. (2004). ¿Cómo Transformar la Educación Superior con la Tecnología Digital?. *Nuevas Tecnologías y Educación*, *1*(1), 93-112.
27. Tickton, S. (1974). La Educación en la Era Tecnológica. Buenos Aires: BOWKER.
28. Tsijli, T. (1998). Enseñar a Pensar. *Memorias del I Festival de Matemática*, *1*(1), 210-219.
29. Toranzos, F. (1963) Enseñanza de la Matemática. Argentina: Editorial Kapelusz.

INICIACIÓN Y PREPARACIÓN PARA UNA OLIMPIADA MATEMÁTICA

Aguilar Camacho Alonso[1]

Resumen:

El objetivo de la presente ponencia es dar a conocer un formato de trabajo que considero idóneo para alcanzar buenos resultados en olimpiadas matemáticas en el ámbito nacional.

Basado en mi experiencia en Olimpiadas de Matemática, tanto como estudiante como en mi labor docente en los colegios Sagrado Corazón (San José) y San Luis Gonzaga (Cartago), logro resumir un modelo de estudiante olímpico así como el trabajo que se podría implementar para la selección de un grupo adecuado de concursantes y la preparación para en cada una de las diferentes fases eliminatorias de la Olimpiada Costarricense de Matemáticas. Además, ilustro las diferentes facetas de preparación con ejercicios sencillos que corresponden al nivel académico del estudiante y a su etapa de preparación.

Introducción

Indudablemente las matemáticas han sido y son hoy día la barrera de muchísimos estudiantes de todos los niveles educativos y uno de nuestros fines como profesionales en este campo es promover el gusto y mejor desempeño en el área.

El movimiento olímpico mundial durante décadas ha desempeñado un papel importantísimo en el desarrollo de las matemáticas. Mostrándolo, tal vez, como un deporte más, impulsa el estudio y la investigación en el campo de la educación matemática, por medio de una competencia sana por el *saber más*.

Costa Rica no se ha visto exenta de tal movimiento y poco a poco ha venido desarrollando un programa de similar naturaleza. Durante los últimos 17 años, la Comisión Nacional de Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas ha propiciado un evento olímpico en secundaria compuesto por tres etapas eliminatorias y que, con el paso del tiempo y acompañado por los recursos y necesidades que se han venido originando, ha sufrido importantes variaciones en cuanto a su alcance. Actualmente, el programa se subdivide en tres niveles de acuerdo al grado académico de los participantes y sigue implementando las tres etapas eliminatorias tradicionales desde sus inicios.

[1] alonso_aguilar_2000@yahoo.com

A pesar del desarrollo y madurez que bien se nota del programa, el mismo debe reafirmarse con una mayor y mejor preparación tanto para los estudiantes como los docentes; debe cubrir un mayor territorio, pero para ello necesita impulsar la idea en más personas dedicadas a la educación matemática, de la importancia de brindar a los estudiantes habilidosos y gustosos por esta ciencia, la oportunidad de desarrollar esas habilidades; esta opción podría ser la adecuación curricular que el sistema no les permite alcanzar y limita para ser mejores estudiantes, matemáticos y profesionales.

Por eso, mi objetivo con el presente documento no es brindar la capacitación matemática que bien nos hace falta a todos los que nos identificamos con la Olimpiada Matemática, sino convencer al lector de la posibilidad de participar en ella y que además, sus estudiantes también tienen dicha posibilidad. Quisiera acabar con el mito de que sólo la educación privada tiene acceso al conocimiento, pues estoy convencido que sólo hacen falta dos ingredientes esenciales para tener éxito en una olimpiada nacional: estudiantes habilidosos – dispersos por todo el país, sin distinción social – y trabajo.

Por tal motivo, con base en mi humilde experiencia en los colegios Sagrado Corazón y San Luis Gonzaga, sólo trato algunos tópicos esenciales para el trabajo dirigido a la preparación para una Olimpiada Nacional que bien podrían serle útiles.

El papel de una olimpiada matemática

Las olimpiadas matemáticas fomentan el interés de los jóvenes por el estudio de las mismas, crean un interés adicional por un campo de las ciencias considerado por muchos como tabú, como un ente inalcanzable debido a su complejidad. Otros estudiantes no encuentran el gusto pues, más bien, representa una materia más, un cúmulo de números y signos con un sentido teórico que no excita su entendimiento.

Es tal vez a estos últimos a quienes va más dirigida una olimpiada matemática, en post de cumplir con sus expectativas de razonamiento y lograr en él el gusto por lo que está detrás de las matemáticas de la escuela tradicional: generalizaciones por medios algebraicos, ideas geniales en unas cuantas líneas, inducciones y deducciones reveladoras, la fuerza de conceptos que pueden parecer tan comunes y simples como lo son la divisibilidad, paridad, el algoritmo de la división, factorización por primos, principio de las casillas, entre otros.

Una olimpiada debe buscar el rescate del estudiante hábil e ingenioso en matemática pero más aún aquel que guste de ésta y lo apasione como el deporte al deportista. Y en realidad, esa es la imagen del matleta hacia las matemáticas; es un juego contra sí mismo y el problema planteado.

De esta manera: jugando, compitiendo; los estudiantes aprenden y crecen en razonamiento y conocimiento general de una rama que es base de la tecnología. Sí, tecnología, hoy por hoy fuente de progreso de una nación. Así que, cuando desarrollamos proyectos de este calibre, contribuimos con el desarrollo de la tecnología de nuestro país dotándolo de matemáticos, ingenieros, científicos, médicos – entre otros – de mayor capacidad.

Todo lo dicho anteriormente es sustentado por algunos de los objetivos de la Olimpiada Costarricense de Matemática:

- *Promover el desarrollo vocacional de los estudiantes de educación media en el estudio de la matemática.*
- *Contribuir al mejoramiento cualitativo de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.*
- *Promover el intercambio de experiencias entre estudiantes y profesores participantes.*

Una propuesta de trabajo

Cómo elegir a los estudiantes idóneos para la Olimpiada Costarricense de Matemáticas

Definitivamente, los matletas no son estudiantes comunes. Sin embargo, están sentados en nuestro salón de clase, distribuidos por todo el país, en instituciones grandes y pequeñas, rurales y urbanas, marginales y de clase alta, públicas y privadas; sólo hay que descubrirlos para poder convencerlos de su capacidad innata, para que crea en sí mismo.

De esta manera, sugiero buscar al estudiante:

- Amante de las matemáticas: el amor a las matemáticas es imprescindible pues es éste el motor del esfuerzo que el estudiante debe afrontar para combatir el ocio, el camino fácil y hasta el choteo por parte de compañeros y otras personas.
- Disciplinado: un estudiante disciplinado sabe cuándo y cómo prepararse; organiza su vida escolar, familiar y social para abrir espacio extra para las matemáticas. Además, tiene un comportamiento apropiado, es decir, sabe cuando se pueden romper las reglas y cuando no, tanto en su vida estudiantil como en matemáticas.
- Estudioso y constante: generalmente, el estudiante hábil en matemáticas estudia poco porque el sistema educativo no lo exige lo suficiente. Aún así, existen aquellos que, sin importar si tienen buenos resultados académicos, se esfuerzan por hacerlo mejor; compiten diariamente para superarse a sí mismos. Son características imprescindibles.
- Creativo: las matemáticas de la escuela tradicional fomentan de manera limitada, el desarrollo de la creatividad y premia al estudiante que mecaniza los procedimientos que su profesor le enseñó. El matleta en cambio debe tener la “chispa” de las ideas novedosas, encontrar aplicabilidad de un concepto matemático en un problema aunque éste no lo sugiera, buscar y encontrar diversas formas de resolución de manera que se conjugue la capacidad con la velocidad de pensamiento.
- Con un alto rendimiento académico: si bien es cierto, ésta no es una condición necesaria, si es importante que el estudiante presente un alto rendimiento. Esto le permite organizar mejor su tiempo, contar con el apoyo de los docentes en otras ramas del saber y tener un panorama más amplio de la matemática misma. La experiencia me ha mostrado que un altísimo porcentaje de los matletas medallistas pertenecen al cuadro de honor de la institución a la cual representan.
- Disponibilidad de tiempo: esta condición es relativa, ya que el tiempo necesario para trabajar en una olimpiada de matemática depende del estudiante. Además, tiene que ver mucho la forma de organizar el tiempo y las tareas de cada uno. Sin embargo, el

muchacho con mayor disponibilidad se dedicará más y, en consecuencia, podrá optar por mejores resultados.

El proceso de selección de un equipo olímpico debe plantearse con cuidado. No es preciso ser meticuloso en el procedimiento sino la manera de invitar al estudiante a hacer algo que generalmente no le gusta y le asusta: matemáticas.

En este punto cada quien tendrá su criterio de selección de acuerdo a las características de la institución y al tipo de estudiantes que le trabaje. Mas no está de sobra una propuesta que bien usted podría cuestionar pero que al menos a este servidor ha observado que funciona:

- <u>Invitación al estudiantado en general</u>: todos los estudiantes tienen derecho de tener la oportunidad de mostrar y desarrollar sus habilidades, sean escasas o no. Además, el entusiasmo de los más jóvenes populariza la olimpiada y atrae a los mejores.
- <u>Preparación psicológica</u>: podría parecer hasta cursi, pero un gran error sería enfrentarlos a una serie de problemas matemáticos sin hacerles ver primero que no son ejercicios comunes, tienen un grado de dificultad superior. Recordemos que estos estudiantes posiblemente están acostumbrados a que casi todos los problemas y ejercicios matemáticos que han enfrentado, los pueden resolver y rápidamente, y sería muy impactante que ahora, por ejemplo, de diez o veinte sólo puedan resolver uno de forma completa. Hay que hacerles ver que es una situación común, propia del proceso de aprendizaje y con el tiempo, el panorama irá cambiando; no podrán resolver todos los problemas pero sí una buena cantidad y los que no resuelvan, también les serán útiles para aprender; podrán acostumbrarse a resolver aquellos que requieren mayor dedicación o una idea creativa de su parte.
- <u>Resolución de ejercicios introductorios</u>: se debe buscar ejercicios de diversos temas que no sobrepasen el conocimiento básico de los estudiantes, para que no desconfíen de sus capacidades y más bien descubran los alcances de sus conocimientos. El primer acercamiento podría ser el más importante pues definiría el gusto hacia la los problemas retadores.

Algunos ejemplos:

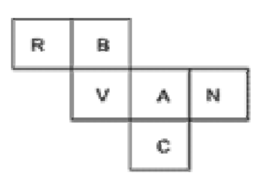
1) Encuentre el mayor número cuyas cifras suman 31.
2) ¿Cuántos números enteros entre 2 y 2002 son divisibles por 3?
3) Hallar los números de la forma $1b1cbc$ divisibles por 63.
4) Hallar la menor fracción que, dividida por $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ y $\frac{11}{12}$ dé cocientes enteros.
5) Dados seis puntos en un plano, ¿cuál es mayor número de cuadriláteros que se puede formar con cuatro de ellos?
6) El producto 5164489×84210035 es un número
   (a) par múltiplo de 5
   (b) par múltiplo de 9
   (c) impar múltiplo de 5
   (d) impar múltiplo de 9
7) Los enteros mayores que uno se ordenan en cinco columnas como se indica a continuación:

A	**B**	**C**	**D**	**E**
	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
17	16	15	14	
...	...	...	...	...

   El entero 2005 está en la columna
   (a) A
   (b) B
   (c) C
   (d) E

8) Alberto, Bernardo, Carlos y Diego fueron a cenar en compañía de sus esposas. En el restaurante se sentaron alrededor de una mesa redonda de forma que:
   I. Ningún marido se sentó al lado de su esposa.
   II. Al frente de Alberto se sentó Carlos.
   III. A la derecha de la esposa de Alberto se sentó Bernardo.
   IV. No había dos nombres juntos.
   Entonces la persona que se sentó entre Alberto y Diego, es la esposa de
   (a) Alberto
   (b) Bernardo
   (c) Carlos
   (d) Diego

9) Se colorean seis cuadrados por ambas caras del mismo color. Luego los cuadrados son unidos por visagras como se muestra en el diagrama R=rojo, B=blanco, V=verde, A=amarillo,



N=anaranjado, C=café. Luego se doblan las bisagras para formar un cubo. El color de la cara opuesta a la cara café es

(a) B
(b) N
(c) R
(d) V

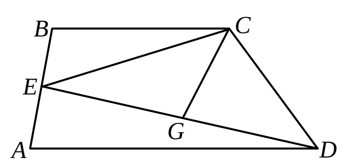
10) Cuando se divide el número 1999^{2000} por 5, el residuo es

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 4

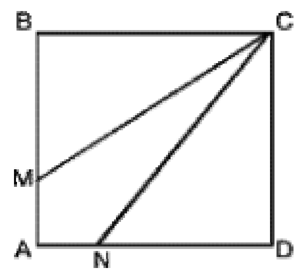
- <u>Sesiones de repaso y profundización de conocimientos básicos</u>: los conocimientos de la educación básica son importantes, mas no suficientes. Se requiere profundizar lo básico e ir más allá, demostrando resultados, propiedades y teoremas, mostrándoles la forma apropiada de expresar una respuesta, tratando temas como inducción matemática, ecuaciones diofánticas, series numéricas básicas, trasformaciones geométricas, entre otros. En este punto, recomiendo el trabajo por áreas temáticas, teoría y práctica sobre un tópico específico.

Algunos ejemplos:

1) Demuestre que el producto de dos números impares siempre es par.
2) Demuestre que el circuncentro equidista de los tres vértices del triángulo.
3) Pruebe que los seis triángulos determinados por las mediatrices del triángulo tienen igual área.
4) $ABCD$ es un trapecio, E y G son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$, respectivamente. Encuentre la razón entre las áreas de el ΔCDG y el trapecio.



5) El cuadrado *ABCD* tiene lados de longitud $3cm$. Los segmentos CM y CN dividen el área del cuadrado en tres partes iguales. ¿Cuál es la longitud, en centímetros, del segmento *CM*.



6) Considere los números naturales distribuidos en los siguientes grupos:

   Grupo 1: 1

   Grupo 2: 2, 3, 4

   Grupo 3: 5, 6, 7, 8, 9

   Grupo 4: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

   y así sucesivamente.

   Probar que la suma de los números naturales que conforman el grupo n viene dada por $(n-1)^3+n^3$.

- <u>Resolución de ejercicios en general</u>: el trabajo por áreas temáticas se puede intercalar con sesiones de ejercicios generales, de manera que los jóvenes se enfrenten a la realidad de las prueban por enfrentar.
- <u>Selección de los estudiantes que compondrían el equipo olímpico</u>: cada docente tiene su forma de elegirlos, pero yo recomiendo que se tome en cuenta no sólo la capacidad de resolución de ejercicios, sino también, el interés, la constancia, la disciplina, la motivación y la forma que el estudiantes enfrenta los problemas matemáticos.

Preparación para una Olimpiada Nacional

La preparación depende del torneo en el cual se quiere competir. Si bien es cierto, todos buscan evaluar el bagaje matemático de los concursantes, unos se inclinan más por medir la creatividad mientras otros tienden por el manejo teórico o hasta el trabajo incesante en resolución de cientos de problemas olímpicos.

En el caso de la Olimpiada Costarricense de Matemáticas, en buena medida depende de la intuición y del manejo ingenioso y creativo que los participantes puedan expresar. Habiendo elegido el equipo representante de la institución, la preparación depende de la fase clasificatoria:

I Eliminatoria

No es conveniente adentrarse mucho en conceptos novedosos, sino profundizar los existentes mostrando su utilidad en ejercicios habituales de esta eliminatoria.
Debo recordar que, tradicionalmente, esta fase sólo ha contado con la modalidad de selección única, así que es importante fijar la mirada en problemas de este tipo. Los distractores juegan un papel importante y el matleta debe aprender cuándo la solución obtenida es la correcta o no, debe usar su sentido común y lógica para diferenciar entre los distractores y la opción correcta.

No está demás decir que es apropiado resolver eliminatorias similares de ediciones anteriores, medir el tiempo apropiado para cada ítem y hacer conciencia en el estudiante de su potencial, independientemente si la prueba le resulta complicada o no.

II Eliminatoria

Habiendo superado la I Eliminatoria, el concursante se siente con mayor confianza pero ésta debe ser motivo de optimismo e impulso hacia la nueva tarea.
En esta fase debe darse énfasis en corregir los errores de la anterior, resolver problemas de desarrollo y promover algunos conceptos nuevos de utilidad, pues recuérdese que existe un temario oficial del evento que así lo exige. No es preciso que puedan esbozar sus respuestas con la mayor formalidad pero si que argumenten generosamente con los medios que tengan a su alcance.

Es la etapa de mayor cuidado. Una pequeña falla puede marcar la diferencia entre quedar en el camino o tener el derecho de disfrutar de una Final Nacional.

III Eliminatoria

A esta altura, el premio está asegurado. Saber que se está entre los mejores estudiantes de matemáticas del país es realmente gratificante, y la experiencia de compartir con otros jóvenes igualmente talentosos, con gustos, ideales y metas distintas pero, a la vez, con denominadores comunes como lo son capacidad intelectual, gusto por las matemáticas y, en muchos casos, un carácter polifacético; hacen de la III Eliminatoria la meta de para el año venidero.

El ganar una medalla debe ser visualizado como un extra pero siempre intentando llegar a ella: “si logro, magnífico, sino, di lo máximo de mí”.
Aunque en realidad, la brecha entre clasificar a una Final y ganar una medalla no es tan grande como parece. Si el estudiante clasificó, ya ha demostrado que tiene una gran capacidad y sólo hay que pulirla, afinando algunos conocimientos nuevos de acuerdo al temario oficial pero, principalmente, habituándolo a problemas propios de la etapa, y a diferencia de la etapa anterior, debe darse mucha importancia a la forma de responder pues no sólo le da presencia al ejercicio sino que proporciona un mejor panorama para la resolución del mismo.

¿Cómo trabajar con diferentes niveles?
Tal vez es una pregunta que aún me planteo, sin embargo, he tratado de esquivar la situación dando prioridad a los estudiantes que se inician.
Justifico mi posición recalcando que los estudiantes necesitan el impulso inicial y que de él depende su actitud y trabajo posterior. Por ejemplo, el estudiante de nivel A requiere de motivación, seguridad por sí mismo y un poco de teoría adicional; el de nivel B, es más independiente y requiere de un poco de teoría y ayuda con algunos ejercicios; mientras el de nivel C, ya es experimentado y básicamente requiere ayuda con ejercicios fuertes y dudas eventuales.

JUGANDO CON ESTRUCTURAS DE ALAMBRE EXPERIENCIA DIDÁCTICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Marcial Cordero Quirós[1]

Resumen

Este trabajo muestra la utilidad de un taller de Estructuras de Alambre como complemento a la enseñanza de la geometría en sétimo año. Se describe la forma en que se realizó el taller en el Colegio Técnico de Acosta, San José , Costa Rica . Además se hace una introducción al tema de los Puzzles de Alambre , con los aportes de investigadores en didáctica de la matemática y sus propiedades matemáticas. Se presentan algunas sugerencias didácticas y los resultados obtenidos , que reflejan motivación y aprendizaje significativo en un ambiente no tradicional.

Abstract

The following research shows the usefulness of a workshop on wire puzzles as part of the geometry learning process in seventh grade.
It is begin described the way in which the work shop was carried out in Colegio Técnico Profesional de Acosta (public Rural High School), in San José, Costa Rica. Besides there is an introductory section related to the puzzles including the points of view of some didactic and mathematical properties' investigators.
There are presented some didactic suggestions and the results obtained , revealing motivation and significant learning in a non-traditional environment.

Palabras claves : Didáctica, Puzzles de alambre, Taller de matemáticas

Introducción

A pesar de la rigurosa formación matemática que recibí en la Universidad de Costa Rica y con algunos años de experiencia en la enseñanza de la matemática , mantengo mis creencias sobre la importancia de los recursos didácticos y el papel del juego como herramienta didáctica.

Hoy presento una experiencia de aula , denominada Jugando con Estructuras de Alambre; la cual se realizó en el Colegio Técnico de Acosta (Secundaria) como recurso didáctico para la enseñanza de la geometría en sétimo año.

Como principal motivador para desarrollar en mi el interés por los talleres de matemática y como referente de esta actividad en España , con agrado debo mencionar al Dr. Pablo Flores Martínez , profesor e investigador en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, quien muy amablemente me mostró su valiosa colección de Puzzles de Alambre, muchos de su propia autoría y me proporcionó información sobre los talleres de matemáticas (Flores,2002).

[1] Profesor Colegio Técnico de Acosta, San José, Costa Rica, Centroamérica

El objetivo de este trabajo es presentar la experiencia del taller ,fundamentarla en el ámbito de la didáctica de las matemáticas y mostrar los resultados obtenidos.

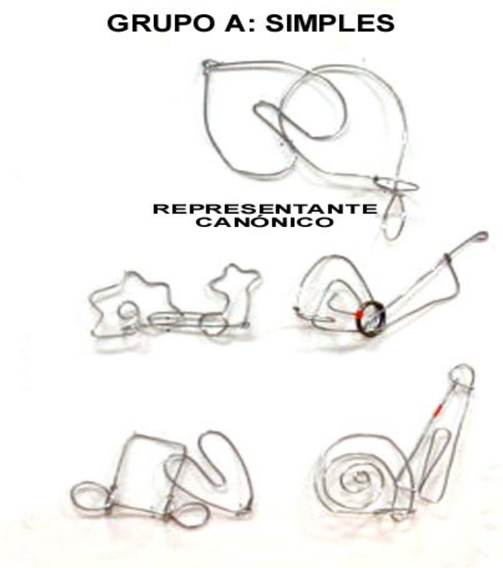
1. Puzzles de alambre

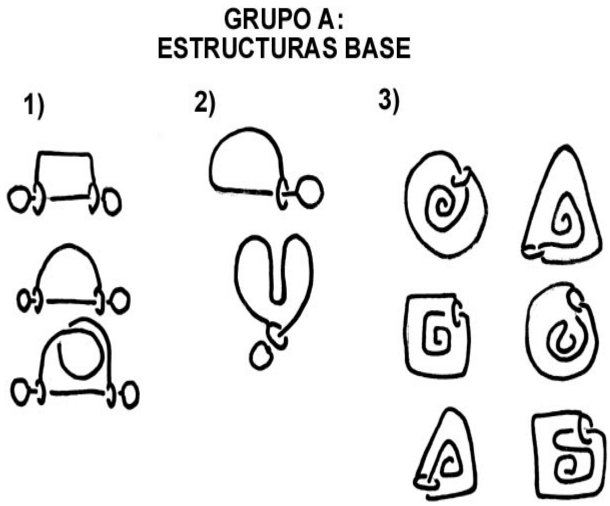
Para iniciar nuestro camino por el mundo de los Puzzles de alambre , debemos acercarnos un poco a sus propiedades y características didácticas para la enseñanza de la matemática.

1.1 ¿Qué es un Puzzle de alambre?

Los puzzles de alambres son juegos de ingenio que constan de varias piezas, que hay que separar (Grupo La X, 2004).

Son juegos muy antiguos , que parecen no tener solución, se componen de una estructura base o soporte y una pieza problema, la solución se trata de encontrar el camino que debe recorrer la pieza problema a lo largo de la estructura base (Montoya y Flores,2003)





1.2 ¿Qué propiedades matemáticas tienen?

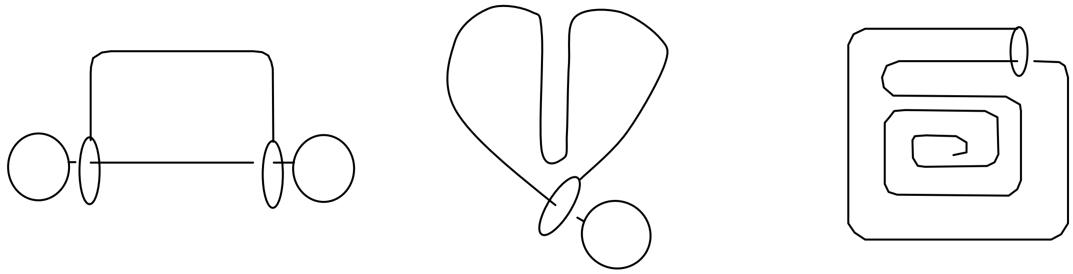
Poseen por la estructura de enlace una naturaleza topológica.

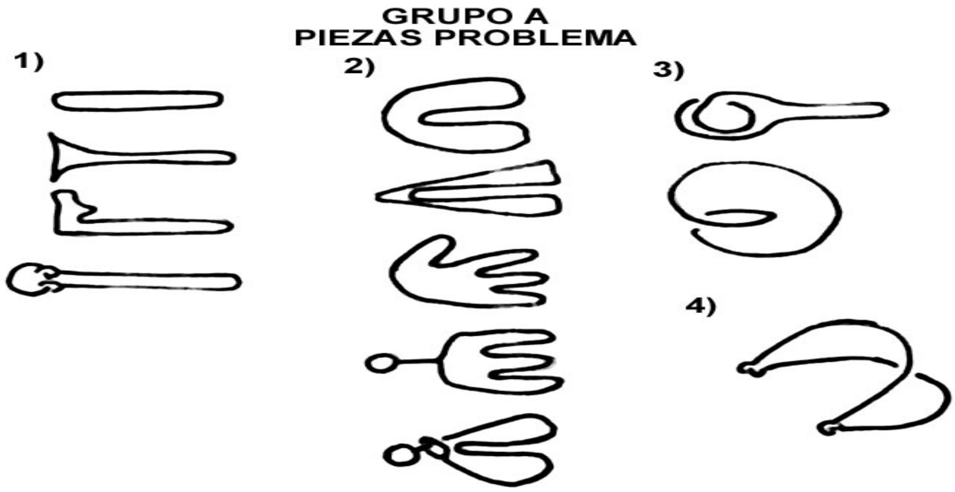
La Topología se encarga de un mundo de formas improbables y fascinantes , es un tipo especial de geometría referida a las posibilidades de que las superficies puedan hacerse retorcer, doblar o bien deformar.(Bergamini,1966)

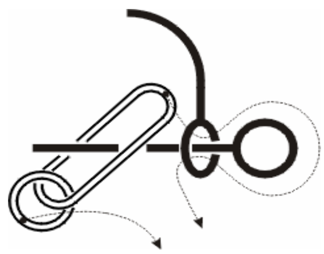
En los laberintos con alambre interesa observar su estructura topológica (agujeros, aristas, situación relativa de ellas. etc), pero también sus medidas (figuras que caben , dimensiones relativas, etc) (Flores,2002)

Las piezas de los puzzles de alambre tienen formas y medidas determinadas , que deben guardar una cierta relación entre ellas, para cumplir con una doble y paradójica función: determinar el grado de dificultad del puzzle, a la vez hacer posible su solución. (Montoya y Flores,2003)

Estructuras Base







1. 3 Puzzles de alambre : Meter-Salvar

Las principal característica es que se componen de dos piezas : La estructura soporte y la pieza problema, la estructura soporte es abierta un extremo al menos, termina en una anilla, que enlaza a otra pieza al final del otro extremo.

La pieza problema suele ser cerrada, con una parte alargada que pasa a través de la anilla del final de la estructura soporte.

Se denominan meter salvar , ya que para resolverla hay que introducir la parte alargada de la pieza problema por la anilla del extremo que enlaza, de la estructura soporte y salvar en ensanche final del otro extremo (http://ddm.ugr.es/personal/pflores/)

Abrazo Simple

Solución

Separar la pieza alargada de la otra

1.4 ¿Cómo se resuelven?

Los puzzles poseen un punto especial donde se puede acceder a la solución, pero que no se determina de antemano , debe buscarse por exploración.
Es importante aclarar que los puzzles deben cumplir restricciones geométricas para su construcción como las dimensiones de los aros y condiciones geométricas como la forma, dimensión y longitud del sector clave en la pieza problema.

1.5 Utilidad de los puzzles en la enseñanza de la matemática

Como se puede determinar es amplia la relación que existe entre los puzzles de alambre y la enseñanza de la geometría.

El primer elemento a considerar es el carácter lúdico que poseen ,inclusive se puede considerar como un buen juego :

“Un buen juego suele tener pocas reglas (y además muy sencillas de entender)...el hecho de tener pocas reglas no significa que sea sencillo...” (Corbalán ,2002)

También favorecen la capacidad de los alumnos en destrezas básicas de la geometría y desarrollan la creatividad e intuición espacial. Además favorece la resolución de problemas relacionados con situaciones reales (Flores,2002)

Algunas características especiales de trabajar con un Taller de Puzzles de alambre son las mencionada por el Grupo La X (2004) :

- Son ejercicios para desarrollar la capacidad de visión espacial
- Proponen retos y ejercitan en destrezas relacionadas con la geometría
- Son materiales didácticos que sirven de apoyo al profesor
- Favorecen la resolución de problemas

2. Descripción del Taller

Jugando con Estructuras de Alambre

Como referente para desarrollar las actividades de un taller con Puzzles de alambre ,decidí utilizar el propuesto por Carlos Montoya y Pablo Flores (Montoya y Flores,2003) , los cuales proponen la siguiente secuencia de actividades : juego , comunicación , representación por dibujo y reproducción.

Con algunas modificaciones de orden más que de contenido se desarrollaron las etapas anteriores.

El taller fue realizado en el mes de octubre del año 2004, con la sección 7-3 (sétimo año) en el Colegio Técnico de Acosta.

El contenido de estudio fue Geometría (Programa del MEP ,2001) y se trabajaron tres sesiones , una cada semana.

Objetivos del taller
Los objetivos planteados fueron los siguientes:

- Utilizar material concreto en el aprendizaje de la geometría
- Desarrollar la visión espacial
- Resolver problemas utilizando la creatividad
- Mejorar la motivación hacia el aprendizaje de la matemática , mediante el uso del juego y la manipulación del material.

Contenidos

Los puzzles de alambre poseen aspectos de la Topología : huecos, posiciones, enlaces (Montoya y Flores,2003) , este contenido no aparece explícito para la educación secundaria en Costa Rica, sin embargo los procesos de análisis y comprensión para el desarrollo de habilidades intelectuales (Programa del MEP ,2001) permiten utilizar dichos materiales para desarrollar los procesos de :

1. Identificación
"Fijar la atención en características de los objetos o de las situaciones que observa"
2.Representación mental
" Definir un concepto y orientar al estudiante para que a través de la mente , sustituya a los objetos por imágenes "
3.Comparación
" facilitar espacios para que el estudiante establezca relaciones y características de dos o más objetos"
4. Análisis
"Orientar a los estudiantes a que dividan situaciones complejas en otras más sencillas"
5.Razonamiento Transitivo
"Conducir al estudiante para que establezca deducciones y conclusiones"
6. Conceptualización
"Impulsar al alumno a que aplique diversos procedimientos en la solución de problemas cotidianos y académicos". (Programa del MEP ,2001, p.19-35)

Además en el Programa de Estudios se establece como sugerencia que " En los temas de Geometría se debe combinar la intuición, la experimentación y la lógica....Los aspectos experimentales o intuitivos de la geometría , requieren del uso de material concreto , con características de operatoriedad y flexibilidad."

Algunos de los contenidos propuestos son :
" Punto , recta , plano, puntos colineales , puntos coplanares , segmentos de rectas, rayos, semiplano, rectas paralelas y perpendiculares, ángulos, desigualdad triangular , clasificación de triángulos, rectas notables y cuadriláteros. (Programa del MEP ,2001,p.63-68)

En los niveles de sétimo a noveno(III Ciclo) se estudian también los conceptos de simetría axial , congruencia de triángulos y semejanza de triángulos.

En cuarto ciclo se utilizan nociones espaciales básicas de intuición, las cuales se desarrollan en el estudio de los sólidos geométricos, principalmente en el cálculo de áreas y volúmenes.

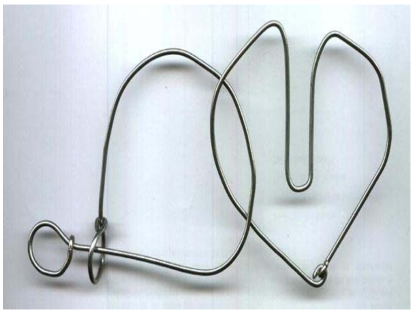
Etapas del taller

El desarrollo del taller se llevó a cabo en tres etapas , las cuales detallo a continuación:

Etapa 1 Representación gráfica:

Se inició el trabajo de aula realizando a los alumnos la siguiente pregunta ¿Conocen ustedes esos juegos de meter y sacar una estructura de otra, algunos tienen en la casa? , la respuesta más representativa fue que alguna vez lo habían visto pero que no lo intentaron resolver.

Entonces les dibujé tres del tipo Meter-Salvar (Flores,2002) en la pizarra y les solicité traer materiales como tijeras , alicates y cable flexible para la próxima sesión. Además les mostré algunos que obtuve de la internet y logre imprimir en ampliación.



Sin duda esta primera aproximación al mundo de los puzzles , les agradó ya que mostraron gran interés por trabajar con material concreto y enfrentar el reto de resolverlos , algunos mencionaron que trabajarían en la casa intentando construir los que se dibujaron o traerían alguno para la clase siguiente.

Etapa 2 Construcción de las estructuras de alambre

Como no tenía experiencia en la construcción de Puzzles de alambre , decidí realizar una búsqueda de material utilizable en clase y con bajo costo , logré conseguir dos tipos de cable :

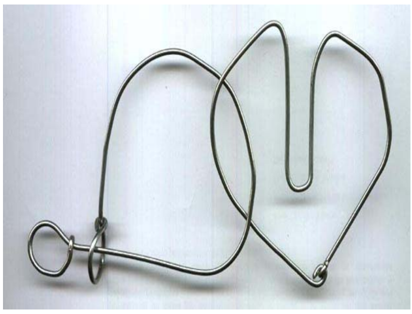
a) Alambre de construcción galvanizado, material rígido y sólo manipulable con alicates o tenazas.

b) Alambre de colores para cableado telefónico, material flexible y fácil de cortar con tijeras o alicates pequeños.

Escogí la segunda opción por las condiciones de trabajo y de recursos de los alumnos, aunque debo resaltar que los puzzles de alambre (meter-salvar) son una estructura totalmente rígida (Flores, 2002) y no aceptan transformaciones , lo cual podría pasar con el cable para teléfono.

Solicité a los estudiantes sacar sus materiales y a cada uno les entregué una cantidad considerable (1,30 cm) de alambre ,por su color y facilidad de manejo resultó muy atractivo a la vista del alumno.

Luego les indiqué que debíamos construir cuatro : Puzzles Modelo , clasificados como meter-salvar del tipo simples : "su estructura soporte tiene un solo bucle, en el que un extremo termina en una anilla que enlaza al otro extremo" (http://ddm.ugr.es/personal/pflores/), los cuales dibujarían en el cuaderno y luego intentarían reproducir con el alambre.



Al inicio las preguntas más frecuentes fueron las relativas a medidas , formas y proporcionalidad , las cuales ellos mismos intentaban responder , para poder dar la forma más próxima a cada objeto.

La clase se vivió con una intensidad diferente , libre de acción y de movimiento, además sus habilidades manuales salieron a flote , algunos con mayor o menor facilidad pero con el mismo objetivo.

La advertencia de relaciones métricas entre cada figura fue mi participación principal.

El primer objeto fue el más lento de reproducir , el tiempo resultó adecuado (65 minutos) y cualquier mejora podrían realizarla en la casa. La próxima sesión los debían traer para realizar la última etapa del taller.

Algunas de las preguntas de los estudiantes fueron:

1.” Profe, de que tamaño lo hago grande o chiquito , si lo hago grande talvez resulte más fácil de resolver”
2. “Primero que todo el corazón debe ser más largo”
3. “Debo hacer más grande la pieza base (estructura soporte) y más pequeña la pieza problema “
4. “Como hago para hacer un solo objeto , ya hice cada pieza por separado ,¿Debía hacerlas juntas?”

Etapa 3 Juego y creatividad

En esta etapa , debían intentar resolver los puzzles que habían construido la clase anterior y además se construiría uno nuevo y original , el cual debían nombrar y representar gráficamente el camino (recorrido) solución.

La mecánica para obtener la solución en la mayoría de los alumnos fue probando algunos movimientos con ambas piezas o sólo con una , sin identificar la relación entre ambas, por tanteo y sin darse cuenta lograban separar las piezas.

Algunas reacciones fueron :

1.”Ya estoy desesperado, profesor, ayúdeme , sáquelos”
2.”Profe , dígame la respuesta , ya me duelen los dedos”
3.”Por fin lo logré ,no sé como ,pero que importa lo hice y estoy muy feliz”
4.”Profe, está jugando con nosotros, verdad que es imposible de sacar”.

Sin duda la geometría espacial y la capacidad de relacionar estrategias de solución ,así como establecer características métricas de cada objeto salían a relucir con cada acción del alumno.

Luego de resolverlos , debían introducir nuevamente la pieza problema , lo cual representaba un nuevo reto , ya que a pesar de parecer fácil , no lo era.

Como lo mencionan Montoya y Flores , existe en la operación de recomposición del puzzle, una dificultad de sentido común , basada en que todo lo que ingresa a un espacio debe hacerlo de afuera hacia adentro, sin embargo se necesita un movimiento previo en sentido contrario, para lograr la unión deseada.

Una de las etapas que me pareció más interesante fue la de construir una nueva estructura, original y con ese toque personal que todo alumno desea imprimir a sus trabajos.

Cada alumno empezó a crear algo con formas diferentes y con nombre muy particulares como : el pescadito ,la zapatilla ,la lámpara, el bacterín ,etc.

Sin embargo mantenían la misma estructura de meter –salvar e inclusive ,eran muy similares a los utilizados como modelo.

Lo rescatable es la disposición a crear , a intentar construir, a vencer el temor de ser original y sobre todo la visualización de estrategias de solución.

Como parte final del taller los alumnos respondieron un pequeño cuestionario para conocer sus opiniones sobre la actividad.

3. Resultados de la aplicación del cuestionario

Al finalizar la actividad con el fin de realizar una evaluación ,los alumnos debían contestar algunas preguntas abiertas sobre la actividad :

1.¿Qué les pareció el taller de Puzzles?
2.¿Cómo consideran el material?
3. ¿Cómo relacionan la actividad con las matemáticas?
4.¿Qué aspecto considera más difícil del taller?

Además debían realizar una parte de representación gráfica de los puzzles que habíamos utilizado, así como el original creado por ellos :

5.Realice el dibujo de los puzzles Modelo y Nómbrelos
6. Realice el dibujo del que usted inventó, además con flechas señale el camino para resolverlo

Algunas respuestas fueron las siguientes :

1.¿Qué les pareció el taller de Puzzles?

“Muy interesante porque una misma se pone un reto de hacerlo y de poder sacar uno del otro” Stephanie Jiménez

“Me pareció muy bonito , porque, es muy entretenido y aparte , yo considero que aquí , con este juego uno desarrolla la agilidad mental y uno aprende a pensar” Fredd Quesada

“Me pareció muy interesante porque aprendimos que podemos hacer cosas lindas con materiales tan simples como cables “ Michael Umaña

“ Trabajamos con figuras geométricas y se aprende de ellas ,también es una forma de relajarse aprendiendo” Alfredo Rojas

2.¿Cómo consideran el material?

“Muy fácil de utilizar y lo podemos doblar sin mucha fuerza” Bryan Marín

“ Es bueno para comenzar a hacerlos, luego se debe utilizar uno más fuerte”
Tamara Quesada

“El material es bonito por ser de colores se puede diferenciar cual pieza debo sacar” Geiner Díaz

3. ¿Cómo relacionan la actividad con las matemáticas?

“Se parece mucho a los problemas de matemática porque hay que pensar mucho para resolverlos” Susan Gonzalez

"Las figuras que se forman con los puzzles son figuras geométricas , desarrollamos la mente y las destrezas manuales" Fanny Jiménez

"Se puede relacionar con la geometría por las figuras y además se debe descubrir la fórmula " Geiner Díaz

4.¿Qué aspecto considera más difícil del taller?

"Construirlos y sacarlos , pero con la práctica será mejor" Fredd Quesada

"Sacar y meter" Gerald Chavarría

"El meter y sacar el objeto aunque confieso que la primera figura fue muy fácil" Dayanna Gutierrez

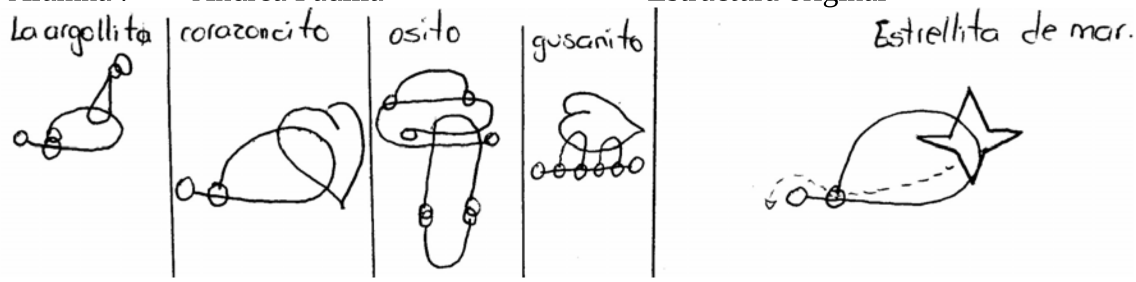
"Dibujarlos" Marlene Bonilla

5. Realice el dibujo de los puzzles Modelo y Nómbrelos

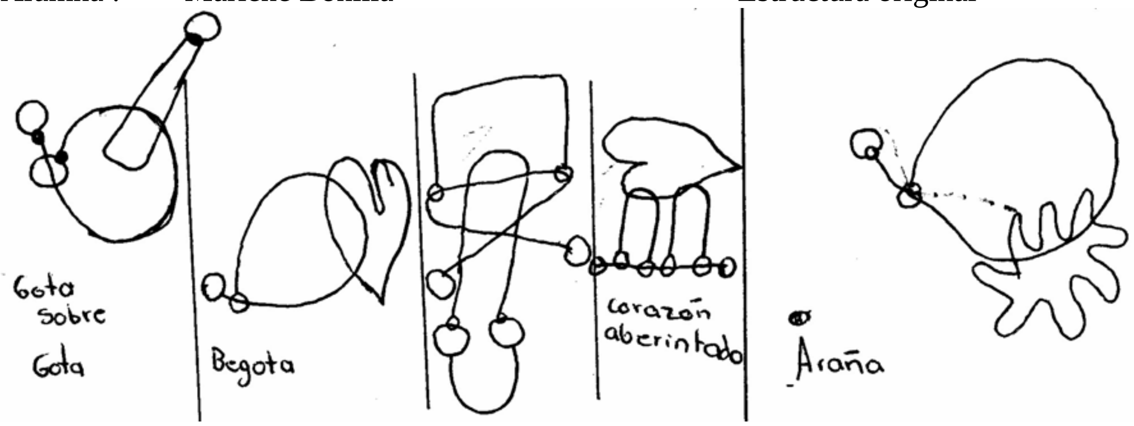
Se adjuntan figuras del resultado

6. Realice el dibujo del que usted inventó, además con flechas señale el camino para resolverlo

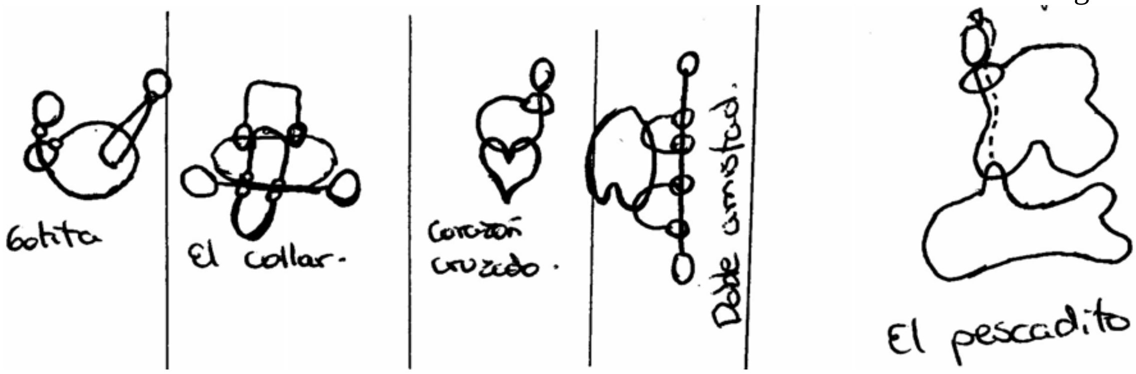
Alumna : Andrea Padilla Estructura original



Alumna : Marlene Bonilla Estructura original



Alumno : Michael Abarca Estructura original



4. Algunas sugerencias Didácticas del Dr. Pablo Flores

A continuación presento la valiosa colaboración y guía que me brindo el Dr. Pablo Flores , el cual contestó algunas de mis inquietudes antes y durante el desarrollo del taller de Estructuras de Alambre.
El objetivo de transcribirlo aquí es complementar la formación del Docente que desee incursionar en los talleres de matemática.

Jueves 05 de Octubre del 2004

Me alegró tu disposición a los alambres. Te recomiendo que comiences familiarizándote con los juegos de alambre antes de llevarlos al aula, ya que requieren destrezas específicas que solo se adquieren con el manejo. Para elaborarlos yo utilizo alambre de las barbacoas, que son alambres rectos , terminados en punta, y en el otro extremo una vuelta para que sirva hacerlo con la mano. Si no encuentras de estos en tu país utiliza un alambre con cierta fuerza , ya que los alumnos deben ser conscientes de que no pueden resolverlos forzándolos. Te recomiendo alicates de puntas redondas.
Para iniciar utilizo el que llamo “ Brazos entrelazados” , juego en que se amarran dos personas y deben salir y volverse a colocar en la posición inicial, luego estudian la situación haciendo un dibujo. Luego empiezo con los del tipo “meter-salvar” , revisa la guía del artículo sobre puzzles (Montoya y Flores, 2003).

Martes 08 de Octubre del 2004

Te reitero mi alegría de que pongas en juego a los chicos con los puzzles , ya que probablemente sea eficaz engancharlos a las matemáticas a través de juegos de ingenio , manipulando objetos relacionados con la actuación artesanal, en la que algunos se encontraran mejor incluso que los profesores.

Paso a contestar algunas de tus cuestiones :

1. ¿Qué relación métrica existe entre los agujeros de cada pieza y su tamaño?

En los puzzles que llamo meter –salvar se componen de dos piezas: la pieza problema , que suele ser cerrada y la estructura base, que debe tener alguna abertura, existe un punto crítico que es el lugar de la estructura por donde sale la pieza problema y que generalmente está formado por una anilla (anilla traba) que abraza otro extremo terminado en un tope (anilla base), que generalmente tiene forma de anilla. La pieza problema tiene que caber a través de la anilla traba y tener longitud suficiente para que a su vez quepa la anilla base. Para que no sea trivial , la anilla traba debe ser del mismo tamaño que la anilla base, de manera que no haya tentación de pasarla a través y convertir la estructura base en una figura abierta.

2. ¿Cuáles destrezas específicas se desarrollan al trabajar con los puzzles?

Una capacidad que se debe trabajar es la visualización o imaginación espacial , que se considera una cualidad imprescindible para aprender geometría. Se define como “el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarias para que los estudiantes de geometría puedan producir , analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales , modelos y conceptos geométricos”. La información visual producida (imágenes) puede ser física (figuras o diagramas, mental (imágenes mentales).
Generalmente se afronta el estudio y aprendizaje de la geometría de una manera teórica, en la que se enfatiza el conocimiento de términos, definiciones y fórmulas. La educación matemática actual aboga por una formación que permita relacionar los objetos con sus formas , variar estas formas , imaginarlas cuando se dan representaciones bidimensionales de las mismas o ser capaz de hacer esas representaciones.
Una forma de poder desarrollar la visualización es hacer que los niños hagan objetos, ya que junto a la construcción de polígonos con diversos materiales
(palillos, plastilina , papel) es fijarse en las cualidades topológicas de algunos objetos, tal como los huecos.

3. ¿Puede existir una leve flexibilidad en cada pieza o deben ser totalmente rígidos?

La mayoría de los puzzles son completamente rígidos y tienen solución si se cuidan sus dimensiones. Sólo los del tipo Escamotables-espiras ,tienen necesidad de alguna flexibilidad.

4.¿La solución es única?

En muchos casos la solución se puede alcanzar haciendo recorridos diferentes , aunque al final en todas hay que hacer algo similar

5.¿ Cómo se clasifican los puzzles de alambre?

Todas introducen a los alambres en juegos de extraer o separar, puedes revisar mi página y encontrarás la clasificación que he utilizado.

6.¿Cuándo un puzzle no tiene solución?

Carlos Montoya y su compañero , el profesor mexicano Gómez , dieron un teorema que me parece válido y que fija una condición suficiente para no tener solución, dice que si un puzzle de alambre se construye en cuerda elástica y no se pueden separar sus piezas , el puzzle de alambre no tiene solución. Es muy interesante, pues con ello se demuestra que un puzzle que ha estado en duda su demostración de si tiene o no solución, finalmente se demuestra que no la tiene (Doble rectángulo, de la serie meter –salvar, cuerda, en mi página web).Hay otros que no tienen solución por culpa de las formas, pero no existe un principio general .

7.¿Qué determina el grado de dificultad de cada puzzle?

En primer lugar su complejidad. En mi clasificación he diferenciado los meter-salvar simples, compuestos, etc. Para resolver los complejos hay que repetir varias veces las operaciones que se hacen en los simples.

8.¿Se pueden inventar algunos , a pesar de no tener certeza de si existe o no solución?

POR SUPUESTO que se debe intentar inventar uno nuevo. Lo que harán los alumnos será darle nueva forma a alguno conocido. Si inventan alguno que no te suena , no dudes en mostrarme una fotografía , trataré de decirte algo sobre él.

Espero haber respondido a tus dudas. Recibe un cordial saludo y mis mejores deseos de éxitos en tus experimentos en el Taller.

5. El taller en fotografías


V/15/10/04
gotita

Es esta fotografías se aprecia el momento de completar el cuestionario y la muestra de los puzzles por toda la sección 7-3

6.Conclusión

Después de realizar este taller , un resultado inevitable es la reflexión sobre la necesidad de utilizar recursos didácticos en las clases de matemáticas , luego de leer las opiniones de los estudiantes y mirar los resultados tangibles como lo son los Puzzles que cada uno construyó y su motivación hacia el aprendizaje de la matemática ,puedo afirmar que me motiva a enseñar y que creo en la posibilidad de cambiar las concepción de materia poco amigable y fría.

Cambio que es posible con pequeñas actividades como lo son los talleres de matemáticas, además me parece que resultan actividades de aprendizaje en conjunto entre el Docente y los alumnos , no sólo en la dirección: tradicional.

Como estudiante de Matemática , existen tópicos que recibimos en nuestra formación pero que son escasos en los programas de estudio de la educación secundaria, uno de ellos es la Topología.

No se pretende dar una clase formal con demostraciones sobre espacios topológicos , pero si con ejemplos pequeños crear un marco de referencia significativo para generar una introducción al tema.

Establecer los talleres dentro de un programa de estudio y como estrategia didáctica es un reto todavía en proceso, por ahora el primer paso es conocer sobre los recursos que tenemos disponibles y las posibilidades de acceso .

Los puzzles de alambre son un pretextó más para hacer más ameno el aprendizaje de las matemáticas, para hacer lo que más nos gusta : jugar.

Referencias

Bergamini,D. y Otros (1966) Matemáticas .Colección científica . México, D. F pp176-190

Corbalán, F (2002) Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato.
Editorial Síntesis. Madrid , España.

Flores,P.(2002a) Laberintos con alambre. Estructuras topológico-métricas, SUMA 41. pp 29-35

Grupo la X, (2004)Taller de Puzzles de alambre. IX CEAM, Huelva. Abril 2004

Ministerio de Educación Pública (2001) Programa de estudios matemática
para III Ciclo ,MEP Costa Rica

Montoya ,C. y Flores, P (2003).Los puzzles en alambre como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española.Vol.6,n°3 ,pp.665-684

Página internet <http://ddm.ugr.es/personal/pflores/>

LAS CARITAS DE DON CUBO: LA APLICACIÓN DE NUEVAS TECNOLOGIAS

Lima Sánchez, Salvador[1]; Bañuelos Tepallo, Francisco[2];
Carrasco Garcia, Guillermo[3]

Resumen:

El presente trabajo es producto de un Proyecto de Investigación que se baso en el trabajo cooperativo aplicando los principios constructivistas, (Coll Pozo, J.; Valls, E. 1992; Díaz Barriga Arceo, Frida y Gerardo Hernández Rojas, 1998; Ferreiro, R., 2003; Pozo Muncio, J. I. et al, 1994; Senge, Peter, 2002) a nivel medio superior en el Instituto Politécnico Nacional sobre la el tema de volúmenes.
Teniendo como Hipótesis: Al darse el trabajo cooperativo el alumno se transforma en un elemento autónomo, dentro del proceso enseñanza aprendizaje, en sus actividades dentro del grupo, plantea soluciones inéditas y trabajo en equipo de forma cooperativa, pasando con ello, a un modelo constructivista que permite la apropiación significativa del conocimiento.
Donde el profesor se vuelve en un facilitador del conocimiento, y que, al final de la clase, da una evaluación cualitativa.
Desarrollo de la Actividad: Al problematizar sobre la actividad a realizar: "Las caritas de don Cubo", los alumnos se conformaron en equipos, dentro de un proceso de integración trabajando entre pares, se les dieron las pautas de las actividades para la sesión, trabajaron con plastilina para tener una relación espacial para el desarrollo de la figura de un cubo, procediendo a elaborar un modelo de un cubo y su relación con el concepto de volumen.
Presentación del Resultado de su Actividad: Pasaron a exponer los resultados de su trabajo en equipo cooperativo, se eligió a un primer equipo con avance mayor, a otro equipo con un avance intermedio y finalmente un tercer equipo con avance menor, realizando un reporte de su actividad por escrito.
Observación de un video: Finalmente, se concluyó con la presentación del video "una gota en el océano".
Reporte de la Actividad: Realizaron un reporte por escrito de su actividad por cada equipo al final de la sesión, donde aparecen las operaciones, esquemas y resultados de la misma.
Evaluación de la Actividad: Se elaboró una conclusión final por parte del profesor con la participación activa de los alumnos. Y se realizo la evaluación cualitativa de la actividad por cada equipo, y del grupo en general. Este proyecto de Investigación ha concluido en su totalidad.

Palabras Clave: Trabajo cooperativo, Constructivismo, Aprendizaje, Volumen.

Introducción:

El trabajo colaborativo dentro del aula es una forma diferente al trabajo tradicional, en el que predomina el cambio de actitud del alumno con sus pares, en la forma de abordar diferentes problemas se les da una solución mas rápida, inédita y con la participación de todos los compañeros que forma un equipo de trabajo. En este caso, tenemos que al irse dando el avance de la actividad "Las caritas de don cubo", el alumno a través del mediador logra obtener un aprendizaje significativo, al lograr obtener la apropiación del conocimiento de forma constructivista. El Constructivismo es una forma de trabajo en

[1] salvador_lima@hotmail.com, CECyT 4-Instituto Politécnico Nacional, México
[2] frabate51@yahoo.com.mx, CECyT 5- Instituto Politécnico Nacional, México
[3] gcarrasco@ipn.mx, CECyT 9- Instituto Politécnico Nacional, México

equipo, donde se da el “aprendizaje cooperativo es el empleo didáctico de grupos reducidos en los que los alumnos trabajan juntos para maximizar su propio aprendizaje y el de los demás. Este método contrasta con el aprendizaje competitivo, en que cada alumno trabaja en contra de los demás para alcanzar objetivos escolares como sacar un 10, etc.” (David W. Jonhson, et al, 1999; Senge, Peter, 1999; Coll, C., Pozo, et al, 1992) con lo que, en el caso de alumnos de nivel medio superior, se logra un impacto sustancial en su proceso aprendizaje- enseñanza.

Justificación:

Dentro de la asignatura de Álgebra que esta contenida en el primer semestre del nivel medio superior de Instituto Politécnico Nacional, se inscribe la unidad temática de volúmenes, donde se tiene que el alumno encuentre la diferencia dentro del aprendizaje significativo entre área y volumen, observando como el alumno construye su conocimiento a partir del manejo de materiales propuestos y note la diferencia donde se desarrolla una actividad de aprendizaje constructivista con respecto al modelo tradicional.

Hipótesis:

Al darse el trabajo cooperativo el alumno se transforma en un elemento autónomo, dentro del proceso enseñanza aprendizaje, en sus actividades dentro del grupo, plantea soluciones inéditas y trabajo en equipo de forma cooperativa, pasando con ello, a un modelo constructivista que permite la apropiación significativa del conocimiento.

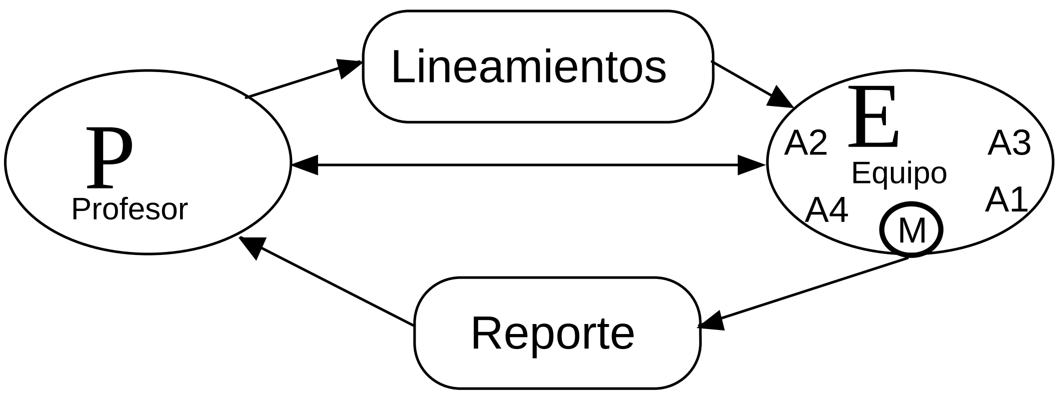
Desarrollo de la Actividad de Aprendizaje:

Se realizo en equipos colaborativos con la actividad denominada:

“Las caritas de don Cubo”

Un cubo de madera que mide 20 cm. de lado se pinta de amarillo. Una vez seca la pintura, se corta en cubos de 2 cm. de lado. ¿Cuántos de estos cubos chicos no están pintados en ninguna de sus caritas?

LINEAMIENTOS PARA LA INTERACCIÓN DE LOS PARTICIPANTES Y LA INTERVENCIÓN DEL PROFESOR.



En el que al ser un problema donde se desarrolla el concepto de volumen, en el que el alumno debe determinar que cantidad de cubos están pintados en alguna de sus caras, en que al irse, esto es el **objetivo de la clase**, el cual debe especificarse apropiadamente para que el alumno logre entender la actividad en su totalidad. Aquí es importante tomas decisiones sobre el tiempo de la duración de cada proceso aprendizaje-enseñanza. El tiempo se dará de la siguiente forma:

- Conformación de los equipos de 4 miembros (2 minutos)
- Lectura del problema (2 minutos)
- Trabajo con material (Plastilina) y la resolución de la actividad por escrito en una hoja de papel, que servirá de soporte de la actividad (20 minutos).

- Exposición de tres equipos, uno de mayor avance, uno de mediano avance y uno de menor avance en la actividad, cada equipo tiene 5 minutos para exponer, lo cual se toma como una guía de discusión (15 minutos).
- Presentación del video “una gota en el océano” (10 minutos)
- Evaluación y cierre de la clase (5 minutos)
- Duración total de la actividad (55 minutos).

En este caso, es importante señalarle a los alumnos la relación positiva de la interdependencia entre los equipos, dado que algunos de ellos no están insertos en experiencias anteriores de trabajo en equipo, lo que impide su inserción con facilidad, dado que están acostumbrados a un sistema de educación tradicional en donde se priva mas lo individual que lo colectivo, otros ya han tenido la experiencia de trabajo en equipo lo que les permitió incorporarse mas rápido a un trabajo colaborativo.

Dentro el desarrollo de la actividad el profesor debe supervisar la actividad de los alumnos, por lo que su papel es un mediador de la actividad dentro del aula, con el fin de mejorar el desarrollo interpersonal y el desempeño de los alumnos, para evitar la dispersión o la falta de interés en la actividad a realizar. Lo cual rompe un esquema que se ha convertido en un paradigma hegemónico, el que el aprendizaje no se puede dar en equipos, que tiene que ser individual, no colaborativo. Modificando la actitud de los alumnos con respecto al proceso aprendizaje- enseñanza, el aprender a aprender, logra un aprendizaje significativo, dentro de los alumnos (Fragoso, Margarita, 2004).

Al darse la evaluación del desempeño de los equipos se logra percibir el nivel de eficacia adquirido por cada uno de los alumnos dentro del propio equipo, dado que se elige al azar un alumno que exponga el desarrollo de la actividad, los resultados que lograron obtener y sus propias conclusiones. Al observar el video “una gota en el océano”, se tiene una visión mas clara de lo que los alumnos lograron realizar dentro del salón de clases, al tener una relación visual, física y poder intercambiar sus puntos de vista, se tienen cubiertas las tres áreas del conocimiento, lo que tiene un impacto mayor en la apropiación del conocimiento, llegando a la institucionalización del conocimiento dentro del propio alumno. Cabe aclarar que el impacto del video es positivo porque encuadra al alumno que la matemática tiene una representación dentro de la realidad, lo que en algunas ocasiones es difícil de poder lograrlo.

Con lo que se llega al cierre de la clase, donde se presentan las conclusiones finales de la actividad y donde se presenta una solución de referencia del ejercicio, que puede ser como sigue: “imaginemos que tenemos una naranja en forma de cubo a la que se le quita la cáscara que corresponde a una capa de cubos y nos queda la parte interna que no esta pintada, la externa tiene por lo menos un cubo pintado, lo cual nos da que, si tenemos una de sus caras podemos observar que se forma diez cubos de dos centímetros por lado, entonces al quitarle la cáscara solo nos quedan ocho cubos de dos centímetros.

Solución: 8*8*8=8^3 =512 total de cubos que no están pintados en alguna de sus caras.

De un total de 1000 cubos =10*10*10

Lo que no da, por lo tanto, que por lo menos están pintados en algunas de sus caras un total de = 1000-512=488 cubos.

Además es importante señalar la presencia de liderazgos dentro de cada equipo, el cual facilita el desempeño de cada uno de sus miembros, en el impacto de la actividad, en ocasiones favorecen su desempeño y en otras ocasiones distorsiona su nivel de eficacia, dado que lo que se quiere lograr es un desempeño exitoso.

El profesor se vuelve un facilitador o mediador del conocimiento dentro del aula de clase, al dar una conclusión final. Debe contemplar que no hay una solución única a cada actividad que realicen los alumnos, dado que el conocimiento se va construyendo, a partir de conocimientos previos que tiene los estudiantes, o por un proceso de indagación espontánea, (Coll, C. Salvador, 2004).

Variables del problema:

Se puede decir que las variables que tiene este problema son:

- Podemos acoparlo para manejo de aritmética
- Para álgebra
- Manejo de volúmenes y áreas

El impacto del constructivismo dentro del aula.

- Cambio de actitudes.
- Trabajo en equipo cooperativo.
- Logra desarrollar conceptos de con mayor facilidad.
- Que el alumno observe las ventajas del trabajo en equipos cooperativos,
- Lograr llegar a tener una seguridad en la solución correcta de una actividad.
- Obtener una validación correcta en el planteamiento y desarrollo al enfrentar un problema.

El cambio de actitud del alumno es algo importante, dado que dentro de un esquema tradicional no valido que un alumno trabaje en equipo, que no pueda dialogar entre sus pares, que no realice ningún tipo de critica dentro del proceso enseñanza-aprendizaje, donde el aprendizaje debe ser memorístico, no reflexivo, la relación profesor-alumno, es predominantemente hermenéutica, no académico. Al darse la aplicación del constructivismo se rompe un paradigma hegemónico y se logra dar pie, a un dialogo permanente entre profesor y alumno, en el que la critica se vuelve practica cotidiana para modificar la practica docente, se presenta una reflexión a cada actividad que se realiza dentro del aula, se un razonamiento dialéctico en el proceso aprendizaje-enseñanza. El alumno aprende dentro de la libertad del pensamiento.

Trabajo cooperativo, permite la integración de los alumnos en formas alternas de didácticas dentro de cada salón de clase, donde se da un intercambio permanente entre sus pares, son el objetivo de lograr resolver problemas de forma eficaz, a través de andiamajes que va construyendo el alumno, por lo que se da una curva de aprendizaje cada vez mayor que posibilita que el alumno resuelva cada vez mejor cada actividad que se le pida. La conformación de equipos puede ser de forma azarosa, preferentemente con el fin de evitar caer en la conformación de grupos, que compitan entre si, por lo que no es conveniente comparar el trabajo de cada alumno, dado que no todos tienen las mismas habilidades, destrezas, capacidades y valores.

Lograr conceptos con mayor facilidad, nos permite que si bien existe un andamiaje en cada alumno, al irse enfrentando a un problema, desarrollan por medio de la creatividad y en trabajo en equipo, conceptos para darle solución al ejercicio que están realizando, es decir, se da un proceso dinámico en el aprender a aprender, si bien hay, mecanismo de ajuste, estos se desarrollan hasta que se de la actividad (Díaz Barriga Arceo, Frida, et al, 1998).

Al irse dando cada vez mas procesos de trabajo colaborativo dentro del aula, se puede ir construyendo un mecanismo de reforzamiento que permite al alumno tener una seguridad el la actividad que esta realizando, y con lo que al pasar a exponer el desempeño de su actividad, puede trasmitir al resto de los equipos y del grupo, todo el proceso de resolución, que formulas aplico o desarrollo, que conceptos utilizo, que se le dificulto mas, o que no pudo resolver. Lo que facilita la intervención de otros miembros del equipo en este dialogo académico.

Cada vez que se enfrenta el alumno a "problemas", se le presenta la disyuntiva de hacerles frente o evadirlos, en el constructivismo, el cambio esta siempre presente, el adaptarse a nuevas condiciones permite encontrar soluciones a cada problema, con mayor creatividad, dándole una validación a cada actividad que se realiza en el aula, en la vida profesional, se tendrá que enfrentar a condiciones cambiantes dentro de un mercado laboral flexible, tendrá como premisa el éxito en la forma que se enfrenta y se le encuentra a la solución de un problema con ambientes diferentes, dependiendo del equipo y las condiciones iniciales en la solución del problema (Ferreiro, R, 2003). En el caso de la actividad la construcción del concepto de volumen en un cubo y la posibilidad de poder encontrar cuantas caras están pintadas, permite al alumno poder visualizar el problema, ya sea medio de la utilización de la plastilina o por medio de un diagrama que pueda realizar en una hoja, donde plasma una idea que surge un su zona próxima del conocimiento a través de la presencia de un dialogo académico con sus pares, con una guía de discusión que posibilita la difusión y socialización de su propuesta con el resto del grupo, dialogo permanente (Mercer, Neil, 2003), el alumno se vuelve en mediador, en trasmisor de su propio conocimiento, en docente, en facilitador, al poder compartir su conocimiento con sus pares de forma exitosa, y con lo que se dan cuenta que si trabajan en equipo sus resultas son mejores y mas rápidos, no tienen dudas y lograr ser mas seguros en la forma de expresarse ante el publico, dialogan y crean conocimiento (Coll, C. Salvador, 2003), tal como lo hizo Platón.

El trabajo coolaborativo también nos permite realizar coevalucaciones dentro de cada equipo, el encontrar la causa del porque no se lograron los resultados esperados, que impidió un buen desarrollo de la actividad, porque no se presento un dialogo, evitar caer en su evasión dado que se puede pensar que la evaluación individual se puede debilitar si se trabaja en equipo, al contrario se fortalece, los alumnos saben sus fortalezas y debilidades, detectan mejor sus capacidades y destrezas, sus valores y actitudes (Anijovich, Rebeca, et al, 2004).

Metodología:

En el caso de la presente investigación se utilizo un técnica cualitativa para la obtención de los resultados en el trabajo de cada equipo colaborativo, con presencia de un dialogo entre pares, en la forma en que tuvieron su desempeño, presentaron sus resultados, conclusiones, se dieron las guías de discusión y el debate entre los equipos. Lo cual se reflejo en una evaluación para cada equipo en particular y el grupo en total, con una lista de cotejo, ya sea a nivel individual como grupal, lo que se le dio seguimiento durante el resto del semestre. Esto permite evitar caer en una visión conductista de la enseñanza, pasando a una visión constructivista de la misma.

Conclusiones y reflexiones:

Existen resistencias en un principio, por parte de los alumnos al trabajo cooperativo, cuando se logran vencer, y pueden darse cuenta de los beneficios que puede obtener al trabajar en equipo, los alumnos tienen un cambio de actitud con respecto a la actividad que se les indica a realizar.

Las ventajas es que aprendizaje es mayor, al lograr llegar a un aprendizaje significativo, que queda en la mente de los alumnos, es mas difícil que se les pueda olvidar el concepto de volumen y su aplicación a un cubo, el impacto dentro del proceso aprendizaje-enseñanza es mayor.

Se dan mecanismos de ajuste de ayuda durante la realización de la actividad, con el fin de mejorar el desempeño de su actividad y evitar la dispersión de la misma por algunos miembros de equipo. Es decir debe dar un acompañamiento permanente de los alumnos en su trabajo en equipo (Pozo Muncio, J. I. et al,, 1994).

Se rompe un esquema dominante de enseñanza tradicional y con ello se posibilita el trabajo en equipo de forma exitosa, lo anterior dentro del Instituto Politécnico Nacional dentro de un nuevo modelo educativo que esta incorporando al constructivismo como una alternativa ante esquemas conductistas, lo que provocara en el mediano plazo un cambio en la actitud de los egresados cuando se enfrenten a la solución de problemas en su práctica tradicional.

Se logro que el grupo en su totalidad conformada por diferentes equipos lograran tener un aprendizaje significativo del concepto de volumen y que lo pudieran aplicar a un cubo. Entregando un reporte de su actividad realizada por todos los integrantes del equipo. El que quedo como evidencia de su actividad.

Los alumnos se vuelven en constructores de su propio conocimiento y en sus difusores del mismo, se transforman en mediadores, facilitadores del proceso aprendizaje-enseñanza.

Se rompen mecanismos de intolerancia dentro de los grupos, lo que facilita la interculturalidad entre los alumnos con sus pares y pudiendo generar mecanismo de convivencia cada vez mayores, con resultados positivos dentro de las escuelas, dentro de ellas los de nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional.

Finalmente, como escribió Lian Karp Siordia, el mas ilustre matemático mexicano del siglo XX, "la vida es para vivirla, no para sufrirla".

Bibliografía:

Anijovich, Rebeca, Malbergier, Mirta y Sigal, *Celia, Una introducción a la enseñanza para la diversidad*, Fondo de Cultura Económica, Buenos Aires, Argentina, 2004.

Coll, C., Pozo, J.; Valls, E. *Los Contenidos de la reforma educativa. Enseñanza y aprendizaje de conceptos procedimientos y actitudes*, Buenos Aires, Santillana, 1992.

Coll, C. Salvador, *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento, Paidos Educador***,** México, 1 reimpresión, 2003.

Díaz Barriga Arceo, Frida y Gerardo Hernández Rojas, *Estrategias docentes parta un aprendizaje significativo*, México, Mc Graw Hill, 1998.

Ferreiro, R. *Estrategias didácticas del aprendizaje cooperativo. El Constructivismo Social: Una nueva forma de enseñar y aprender***,** México, Trillas, 2003.

Fragoso, Margarita, *Seminario permanente sobre experiencias académicas exitosas de aprendizajes en equipos.* Reflexiones, UNAM, México. 1 edición, 2004.

David W. Jonhson, Roger T. Jonhson y Edythe J. Holubec *El aprendizaje cooperativo en el aula***,** 1 edición. Paidos Educador. Buenos Aires, Argentina. 1999.

Mercer, Neil, *La construcción guiada del conocimiento. El habla de profesores y alumnos*, Paidos Educación, 1 edición, Barcelona, España, 2003.

Pozo Muncio, J. I. et al, *La solución de Problemas*, Madrid, Santillana, 1994.

Senge, Peter, *Escuelas que aprenden*, México, Norma, 2002.

LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AGRONÓMICA EN UNA ACTIVIDAD INTEGRADORA CON SOPORTE INFORMÁTICO

Dal Bianco, Nydia; Acinas, Sonia[1]
Pía Salvadori, Andrea[2]

Resumen

En este artículo presentamos una experiencia desarrollada con alumnos de Ingeniería Agronómica de la U.N.L.Pam, que cursaron la actividad curricular Práctica Agronómica Módulo II durante el segundo cuatrimestre de primer año del ciclo académico 2004.
La actividad consistía en tabular el peso de materia seca de 3 pasturas durante un período de tres semanas, para luego, integrando conocimientos adquiridos en las materias Biología y Matemática y mediante la utilización de un asistente informático, responder a diferentes cuestiones relacionadas al peso y a la velocidad de crecimiento de dichas pasturas.
Entre los diferentes asistentes informáticos disponibles en nuestra Universidad seleccionamos el Software Derive que funciona en cualquier ordenador sin necesidad de otros programas, además como su aplicación es relativamente sencilla mejora la habilidad procedimental del alumno para resolver diferentes situaciones problemáticas.

INTRODUCCIÓN:

El aprendizaje es dependiente del conocimiento previo del estudiante pues éste lo aplica en la construcción de un nuevo conocimiento.
Por otra parte, el desarrollo tecnológico con la incorporación de los ordenadores a todos los ámbitos, tiene su incidencia en la educación y principalmente en la enseñanza de las matemáticas. Entre los diferentes asistentes informáticos que hay en el mercado elegimos el Software Derive pues funciona en cualquier ordenador sin necesidad de otros programas, es de fácil manejo y mejora la habilidad procedimental del alumno para resolver problemas, disminuyendo errores al enfrentarse a cálculos tediosos.
En este artículo presentamos una experiencia desarrollada con alumnos que cursaron la actividad curricular Práctica Agronómica Módulo II, correspondiente al segundo cuatrimestre de primer año del ciclo académico 2004 de la carrera de Ingeniero Agrónomo en la Universidad Nacional de la Pampa. En la misma, se pretendía la integración de conceptos adquiridos en Matemática y Biología utilizando la herramienta informática dada por el Software Derive.

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa , Uruguay 151 - (6300) - Santa Rosa (LP) – Argentina, dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar , soniaacinas@latinmail.com

[2] Facultad de Agronomía - Universidad Nacional de La Pampa, Ruta Nacional 35 km 335 (6300) - Santa Rosa (LP) - Argentina. andreapia@agro.unlpam.edu.ar

En las actividades programas, correspondientes a la parte práctica de la asignatura, se realizan salidas al campo en las cuales se recolectan datos sobre los que se trabaja posteriormente con determinadas actividades en el aula.

DESARROLLO:

El Trabajo Práctico titulado: “El crecimiento de las plantas y la acumulación de biomasa” correspondiente a la asignatura Práctica Agronómica que analizamos tiene por objeto evaluar el contenido de materia seca de los vegetales y observar el crecimiento y la acumulación de fitomasa de las plantas, así como discutir su incidencia en un sistema ecológico según se trate de especies anuales o perennes.

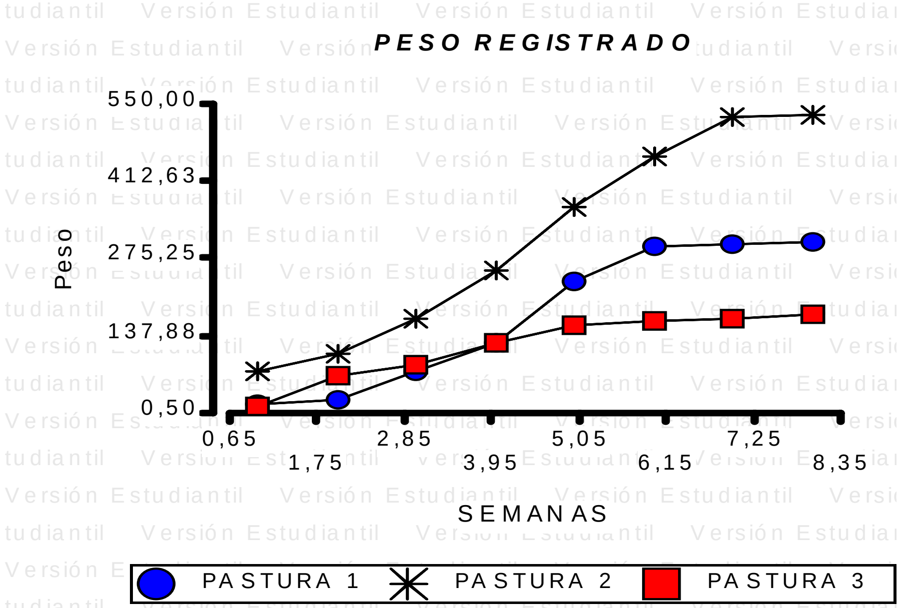
Para dar respuesta a este objetivo se tuvieron en cuenta las siguientes pautas:

1. Establecer grupos de trabajo tal que cada uno de ellos realice cortes y embolse separadamente el contenido de pasto de tres parcelas de $1m^2$ de un verdeo existente en la Facultad de Agronomía de la U.N.L.Pam.
2. Pesar cada muestra inmediatamente luego de cortada y embolsada, y a continuación poner en estufa hasta peso constante.
3. Registrar diariamente y durante una semana el peso de cada una de las muestras.

Después de realizadas las actividades de campo, los grupos se reunieron en el aula a fin de trabajar sobre los datos obtenidos.

En primer lugar, se tabularon los datos correspondientes de cada pastura para posteriormente realizar un bosquejo del gráfico en forma manual sobre los ejes cartesianos; siendo la variable independiente el tiempo (expresado en semanas) y la variable dependiente el peso de cada pastura.

Los docentes a cargo de la experiencia propusieron otro encuentro con los alumnos en el gabinete de computación a fin de utilizar el Software Derive para realizar un gráfico más preciso de la curva de crecimiento de las pasturas.



I. Peso de fitomasa por pastura

Observando el gráfico obtenido los alumnos respondieron las preguntas formuladas al respecto, entre las cuales mencionamos las siguientes:

- ¿Cuál de las tres pasturas produce mayor cantidad de fitomasa?
- ¿En qué momento tiene la máxima producción cada una de las pasturas?
- ¿Cuál sería la producción máxima posible para cada una de las pasturas?

A partir de la observación del gráfico y de los estudios previos realizados sobre funciones exponenciales, logarítmicas y sus aplicaciones, los alumnos conducidos por el docente de Matemática, conjeturaron que esta curva de crecimiento respondía al modelo Logístico.

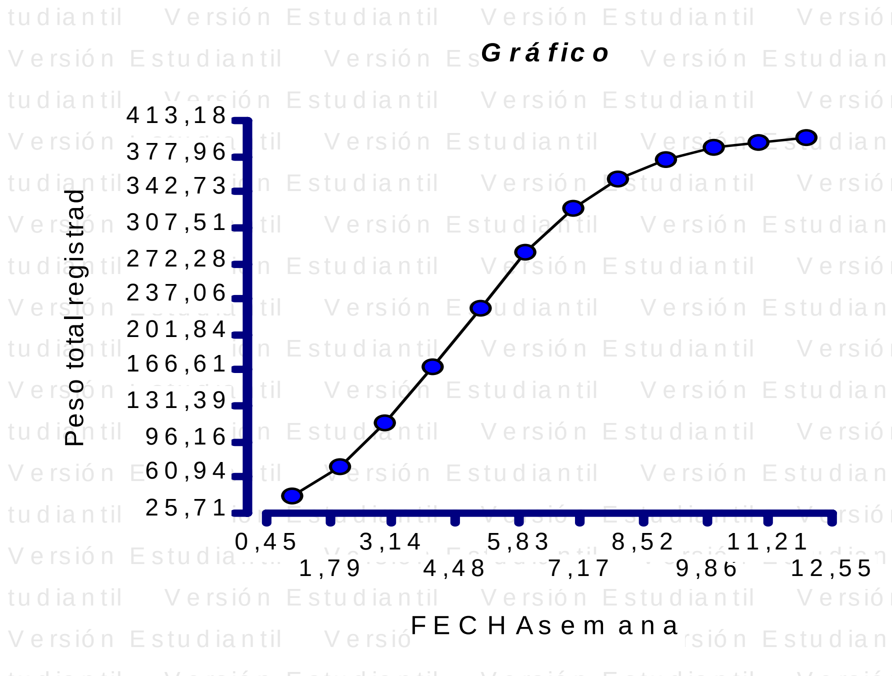
Por lo que posteriormente se construyó, en base a los datos tabulados, la expresión algebraica de la Función Logística, que modelaba el crecimiento de la pastura:

$$P(t) = \frac{400}{\left(1 + 15.e^{-0.6t}\right)}$$

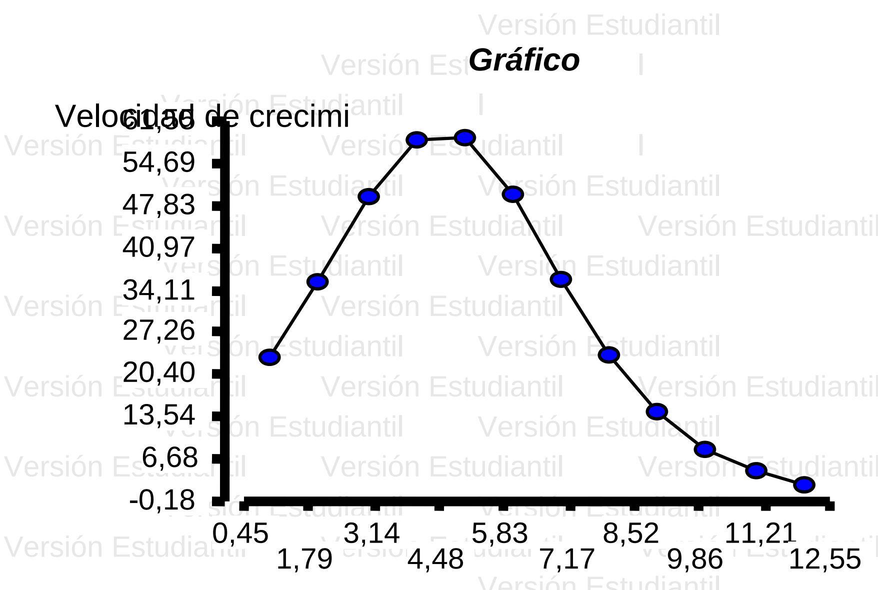
Continuando con el desarrollo del trabajo, donde se pretendía ahora, hallar la velocidad de crecimiento semanal de las pasturas y en función de ella la producción total, los alumnos establecieron la vinculación entre el concepto de velocidad con la primera derivada de la función. Por lo que, aplicando nuevamente el Software Derive, se calculó la derivada primera de la función y se la especializó para cada valor de tiempo. Construyeron así dos nuevas gráficas, una para el peso total y otra para la velocidad de crecimiento de fitomasa en función del tiempo, que les permitieron responder las siguientes cuestiones planteadas en el trabajo práctico:

¿A medida que t crece que sucede con el peso de fitomasa?

¿A medida que t crece que sucede con la velocidad de crecimiento?



II. Variación del peso total de la fitomasa



III. Velocidad de Crecimiento de fitomasa

Utilizando los gráficos realizados los alumnos concluyeron que al aproximarse a la décima semana el peso de la pastura tiende a estabilizarse en un valor aproximado de 400grs., mientras que la velocidad decrece notoriamente a partir de la sexta semana tendiendo a anularse pasada la décima semana.

Posteriormente se pudieron validar estas conclusiones con la realización del cálculo del límite de las funciones P(t) y de su primera derivada para t tendiendo a infinito, mediante el asistente informático Derive.

CONCLUSIONES:

A partir de una actividad considerada integradora dada en un Trabajo Práctico de la asignatura Práctica Agronómica Módulo II los estudiantes tuvieron la oportunidad de vincular conceptos inherentes a su disciplina específica con elementos de análisis matemático y herramientas informáticas.

Respecto de estas últimas, cabe destacar que fue seleccionado el Software Derive por ser sencillo, potente y demandar al alumno poco tiempo en habituarse a su utilización.

Finalizado el Trabajo Práctico, los alumnos manifestaron su conformidad por las actividades realizadas ya que les permitieron ver las aplicaciones y utilidades de los conceptos teóricos aprendidos en asignaturas anteriores, como así mismo los beneficios de la utilización del Software Derive, con el que realizaron más rápidamente cálculos y gráficos.

BIBLIOGRÁFÍA

1. Guía de Trabajos Prácticos de la Asignatura "Práctica Agronómica Módulo II" (2004). Facultad de Agronomía de la U.N.L.Pam. Argentina.
2. AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1990). *"Funciones y Gráficas"*. Editorial Síntesis. España.
3. CARRILLO, A.; LLAMAS, I. *Derive. Aplicaciones matemáticas para PC.* RA - MA. España. 1994.
4. SWOKOWSKI, E.; COLE, J. (1996). *"Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica"*. Tercera Edición. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
5. COLERA, J. y GUZMÁN, M. (1996). *"Matemáticas II"*. Grupo Anaya S.A. España.
6. SADOSKY-GUBER. (2004). *"Elementos de cálculo diferencial e integral"*. Librería y Editorial Alsina. Argentina.
7. STEWART. (1999). *"Cálculo de una variable - Trascendentes Tempranas"*. 3ra. Edición. International Thomson Editores. México.

Universidad Nacional de La Pampa Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA AGRONÓMICA EN UNA ACTIVIDAD INTEGRADORA CON SOPORTE INFORMÁTICO

DAL BIANCO, Nydia dalbianco@exactas.unlpam.edu.ar

PÍA SALVADORI, Andrea andreapia@agro.unlpam.edu.ar

ACINAS, Sonia soniaacinas@latinmail.com

ARGENTINA

Introducción:

En este artículo presentamos una experiencia desarrollada con alumnos de Ingeniería Agronómica de la U.N.L.Pam, que cursaron la actividad curricular Práctica Agronómica Módulo II durante el segundo cuatrimestre de primer año del ciclo académico 2004.

La actividad consistía en tabular el peso de materia seca de 3 pasturas durante un período de tres semanas, para luego, integrando conocimientos adquiridos en las materias Biología y Matemática y mediante la utilización de un asistente informático, responder a diferentes cuestiones relacionadas al peso y a la velocidad de crecimiento de dichas pasturas.

Desarrollo:

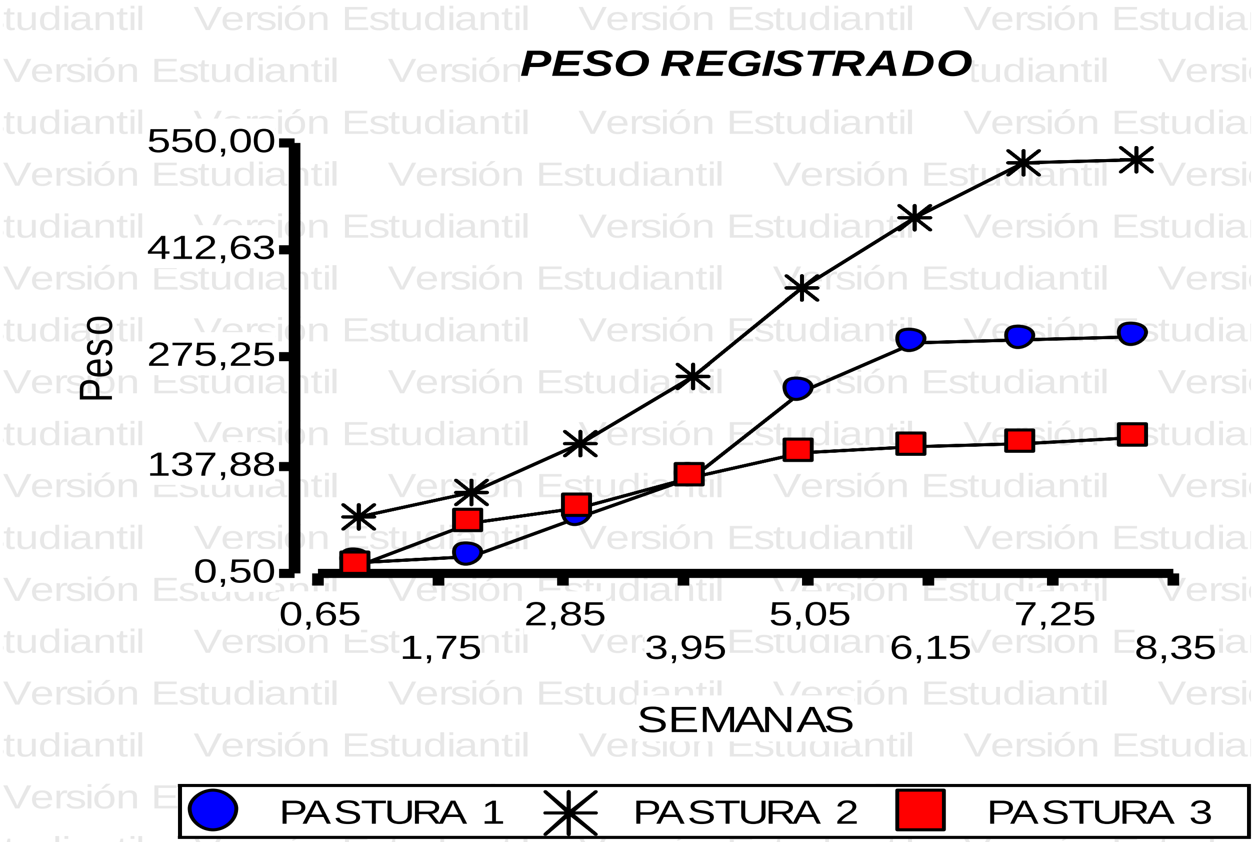
Para realizar la actividad correspondiente al Trabajo Práctico titulado: "El crecimiento de las plantas y la acumulación de biomasa" se tuvieron en cuenta las siguientes pautas:

- **Establecer grupos de trabajo tal que cada uno de ellos realice cortes y embolse separadamente el contenido de pasto de tres parcelas de $1m^2$ de un verdeo existente en la Facultad de Agronomía de la U.N.L.Pam.**
- **Pesar cada muestra inmediatamente luego de cortada y embolsada, y a continuación poner en estufa hasta peso constante.**
- **Registrar diariamente y durante una semana el peso de cada una de las muestras.**

Los grupos trabajaron en el aula sobre los datos obtenidos.

- Se tabularon los datos correspondientes de cada pastura.
- Se realizó un bosquejo del gráfico en forma manual sobre los ejes cartesianos.
- Los docentes a cargo de la experiencia propusieron otro encuentro con los alumnos en el gabinete de computación a fin de utilizar el Software Derive para realizar un gráfico más preciso de la curva de crecimiento de las pasturas.

Utilizando un asistente informático se obtuvo el siguiente gráfico:



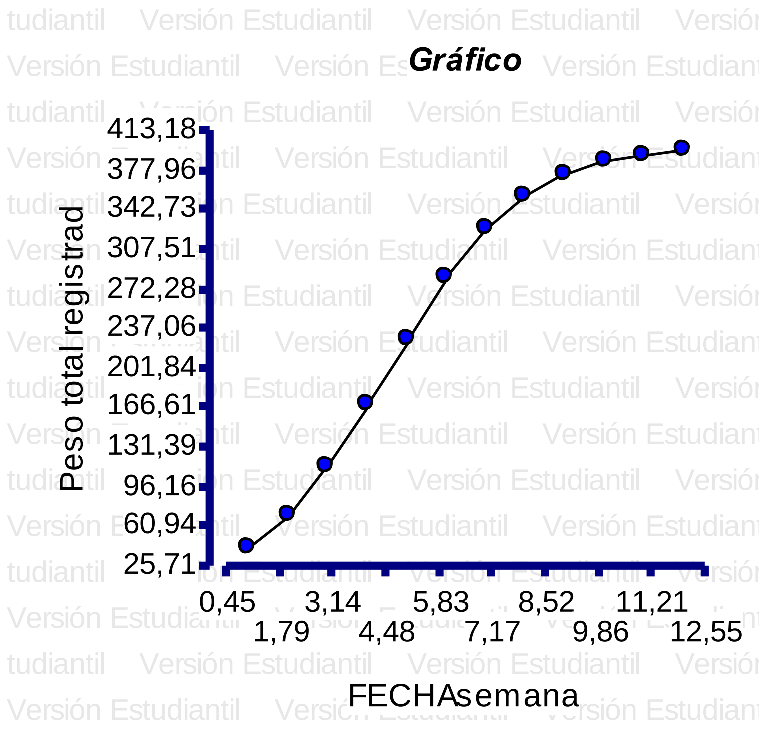
De la observación del gráfico los alumnos respondieron las siguientes preguntas:

- ¿Cuál de las tres pasturas produce mayor cantidad de fitomasa?
- ¿En qué momento tiene la máxima producción cada una de las pasturas?
- ¿Cuál sería la producción máxima posible para cada una de las pasturas?

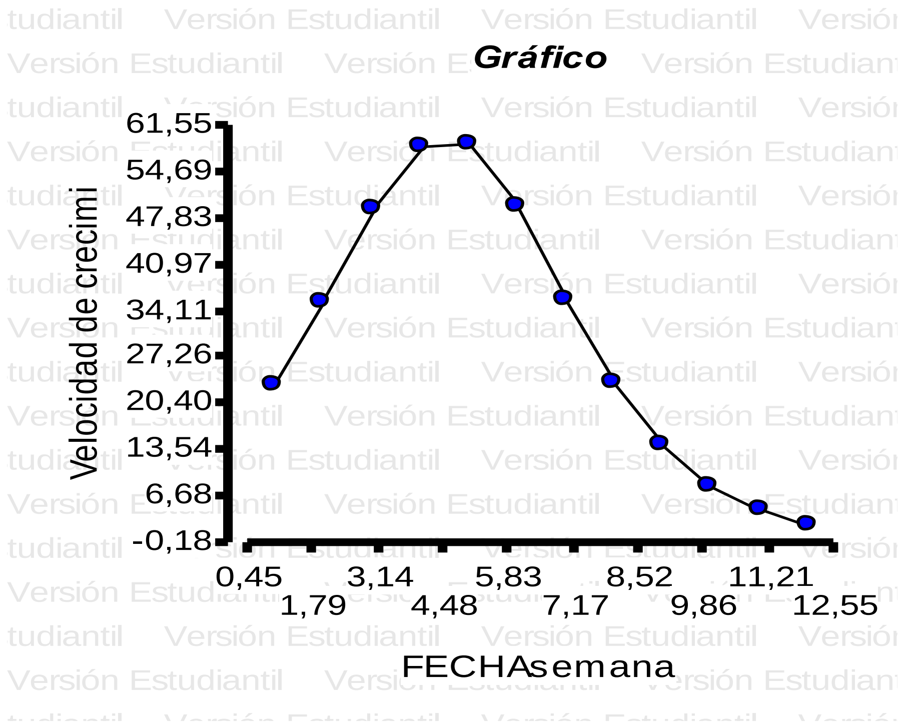
Al relacionar los conceptos matemáticos antes adquiridos y con la ayuda del docente se concluyó que el crecimiento de las pasturas se podía modelar con la Función Logística cuya ecuación es la siguiente:

$$P(t) = \frac{400}{\left(1 + 15.e^{-0,6t}\right)}$$

Los alumnos establecieron la vinculación entre el concepto de velocidad con la primera derivada de la función y hallaron la velocidad de crecimiento semanal de las pasturas y en función de ella la producción total. Aplicando nuevamente el Software Derive, se construye una tabla de valores para cada valor de tiempo, obteniendo así dos nuevas gráficas



Variación del peso total de fitomasa



Velocidad de Crecimiento de fitomasa

Utilizando los gráficos los alumnos concluyeron que:

- Al aproximarse a la décima semana el peso de la pastura tiende a estabilizarse en un valor aproximado de 400grs.

- La velocidad decrece notoriamente a partir de la sexta semana tendiendo a anularse pasada la décima semana.

Estas conclusiones se validaron con la realización del cálculo del límite de las funciones P(t) y de su primera derivada para t tendiendo a infinito y utilizando el asistente informático Derive.

Conclusiones:

- Los estudiantes tuvieron la oportunidad de vincular conceptos inherentes a su disciplina específica con elementos de análisis matemático y herramientas informáticas.
- El Software Derive fue seleccionado por ser sencillo, potente y demandar al alumno poco tiempo para habituarse a su utilización
- Los alumnos lograron vincular conceptos teóricos aprendidos en asignaturas anteriores y reconocer la utilidad del Software Derive al aplicarlo a situaciones agronómicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Guía de Trabajos Prácticos de la Asignatura "Práctica Agronómica Módulo II" (2004). Facultad de Agronomía de la U.N.L.Pam. Argentina.
- AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1990). "*Funciones y Gráficas*". Editorial Síntesis. España.
- CARRILLO, A.; LLAMAS, I. *Derive. Aplicaciones matemáticas para PC.* RA - MA. España. 1994.
- SWOKOWSKI, E.; COLE, J. (1996). *"Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica"*. Tercera Edición. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
- COLERA, J. y GUZMÁN, M. (1996). *"Matemáticas II"*. Grupo Anaya S.A. España.
- SADOSKY-GUBER. (2004). "*Elementos de cálculo diferencial e integral"*. Librería y Editorial Alsina. Argentina.
- STEWART. (1999). "*Cálculo de una variable - Trascendentes Tempranas"*. 3ra. Edición. International Thomson Editores. México.

LOS NÚMEROS REALES UTILIZANDO CORTADURAS DE DEDEKIND Y SUCESIONES DE CAUCHY: UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

Geovany Sanabria Brenes[1]

Resumen

Con base en la noción de Transposición Didáctica y la Teoría de Situaciones Didácticas se aborda la problemática de la enseñanza de los números reales en secundaria. Se describe nuestra realidad sobre esta temática, se recuerdan y comparan las construcciones rigurosas de los números reales utilizando cortaduras de Dedekind y sucesiones de Cauchy, como parte del saber institucionalizado, posteriormente se realiza una reflexión sobre lo cercano de estas construcciones al concepto de número real y finalmente, se propone una manera de introducirlos con base en situaciones problemas. Se presenta una síntesis del trabajo realizado.

1. Introducción: La realidad de la enseñanza de los números reales

El fenómeno de transposición didáctica de los números reales en uno de sus tantos aspectos presenta un buen panorama, nuestro entorno cuenta con una buena calidad de **textos del saber** y con profesionales que los pueden "narrar" de diversas maneras, si bien no son muchos pero se cuenta con ellos.

Conforme dicho fenómeno avanza, el buen panorama que se tenía al inicio se desvanece. A nuestros docentes el estado les brinda un programa muy deficiente y no exige ni incentiva un mayor nivel de preparación, además los libros de texto que se encuentran en el mercado muestran un progresivo **desgaste moral** sobre el tema, no presentan maneras novedosas de introducirlo. En otras palabras, el docente recibe un Saber a Enseñar muy deficiente, **el tiempo didáctico legal** (los programas del MEP) que se asigna es poco planificado, la tasa de fracaso es elevada y generalmente el docente inducido por el tiempo asignado, estipula en el contrato didáctico la aprehensión de los aprendizajes sin que una buena parte de sus alumnos hallan superado la contradicción antiguo-nuevo. Entonces, ¿Por qué hay un gran nivel de fracaso en matemática si lo exigido en su mayoría es a un nivel sintáctico? ¿Será que aprender sintaxis sin semántica es muy difícil y se olvida rápido?

Además la poca enseñanza de los reales no ha sido renovada ni modificada desde hace años, por lo que el fenómeno de transposición no esta muy lejos de colapsar en una

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática, gsanabriab@costarricense.cr

obsolescencia externa (ocurre cuando el objeto de enseñanza ha envejecido en relación a la sociedad en general, el saber enseñado y popular no están distanciados).

En el trabajo realizado se ha evidenciado que la raíz del problema se encuentra en la noosfera (autoridades encargadas de redactar los programas de estudio) donde se planifica el Saber a Enseñar. Además los textos del saber que utilizan son desvirtuados, los libros de texto son poco atractivos y se reducen a las representaciones y a la sintaxis.

La propuesta que se expone a continuación está orientada al paso del Saber sabio al Saber a Enseñar, y se desarrolla a partir de una priorización de los textos del saber que presentan los números reales vía construcción sobre la presentación vía axiomatización, en la introducción de los números reales.

2. Las construcciones de P

La construcción formal de P a partir de Θ es presentada principalmente *reales* utilizando cortaduras de Dedekind y sucesiones de Cauchy. Cada construcción adopta una manera distinta de ver la continuidad de P de acuerdo a las propiedades que se conocían. Es decir, de acuerdo a las propiedades propias de P, cada una halla una herramienta que, "estando" en Θ y asumiendo la no existencia de P les permite detectar las discontinuidades de Θ. ¿Cuál es la herramienta utilizada?

En el paso de Z a Θ se perdió el axioma del extremo superior, sin embargo, se obtuvo como ganancia un campo totalmente ordenado, la idea es construir un conjunto P que conserve esta propiedad y retome el axioma del extremo superior.

La construcción utilizando sucesiones de Cauchy define sobre el conjunto formado por las sucesiones de Cauchy de racionales C(Θ) una relación de equivalencia que establece que dos secesiones son equivalentes si su diferencia es infinitesimal. Luego se prueba que el conjunto formado por las clases de equivalencia obtenidas es un campo y lo denomina P e identifica con un monomorfismo a Θ con un subconjunto de P. Esta construcción es basada en una construcción realizada por Cantor utilizando sucesiones períodicas.

Por otro lado, Dedekind, parte la definición de cortadura: una cortadura (izquierda) α es un subconjunto de P con las siguientes propiedades: $\alpha \neq \phi$; $\alpha \neq \Theta$; si $p \in \alpha$, $q \in \Theta$ y $q < p$ entonces $q \in \alpha$; si $p \in \alpha$ existe $q \in \alpha$ tal que $q>p$. Luego se define P como el conjunto de cortaduras, mediante un monomorfismo se identifica cada número racional p con la cortadura {r en Q/ r<p}, de esta forma se obtiene que Θ es subconjunto de P.

3. Comparación de las dos construcciones

Una comparación detallada de algunos elementos de las construcciones nos permitirá considerarlas como un texto de saber unificado.

Ambas construcciones comparten una idea central: no se puede decir explícitamente cuáles son las discontinuidades de Θ, por que se escapan de nuestra realidad. Así, se tiene un conjunto Θ que con las operaciones suma y producto forman un campo totalmente ordenado que no cumple el axioma del extremo superior. La matemática insatisfecha con esto, procede de una manera atropellada a la realidad y crea un conjunto P formado por Θ agregándole esos supremos que ocupa, que son percibidos como fantasmas que por un milagro divino fueron creados en P.

Así, ambas construcciones recurren a definir esos fantasmas como el método o la herramienta que puede detectarlos, o mejor dicho como el objeto que necesita de su existencia. Es decir, el número real es una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy o una cortadura, pero realmente lo que esta implícito es que el número real es a lo que converge las sucesiones de la clase o el extremo superior de la cortadura respectivamente.

Lo anterior quiere decir que van construir por la víspera, saben de ante mano las propiedades de la obra que van a realizar. La construcción basada en sucesiones de Cauchy sabe que una propiedad que caracteriza a P y lo diferencia de Q, es: toda sucesión de

Cauchy es convergente en P, y además todo número real se puede aproximar por una sucesión de Cauchy de números racionales.

Por otro lado, Dedekind, se vale de la densidad de Θ en el orden de P, así entre el "inexistente" número real y un racional menor que él, siempre hay otro racional, por lo que considera todos los racionales menores que el real para definirlo.

Ambas construcciones se relacionan. La construcción basada en sucesiones de Cauchy debe tomar todas las sucesiones de racionales que convergen a un mismo número real x para definirlo; cada una de estas sucesiones (x_n) cumple

$$\forall \varepsilon > 0: \exists\ k \in N \text{ tal que } |\ x_n - x\ | < \varepsilon\ \forall\ n > N \ \leftrightarrow$$

$$\exists\ k \in N \text{ tal que } x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\ \forall\ n > N,$$

es decir siempre van a existir racionales en cualquier intervalo abierto que contenga a x, y esto es la densidad de Θ en el orden de P (idea de Dedekind).

En cuanto al axioma del extremo superior, para Dedekind probarlo es muy sencillo, ya que obedece a su intuición inicial de cómo definió cortadura, valga decir como aquel conjunto que necesita un extremo superior. Por otro lado, en la construcción basada en sucesiones de Cauchy, la prueba requiere un tratamiento más delicado, aquí es necesario contar con la arquimedianidad de P.

4. Concepción de la propuesta: ¿Qué hacer en secundaria? ¿Cómo contar un buen cuento?

En secundaria, es un pecado hablar del axioma del extremo superior, algunos profesores no establecen ninguna relación de P y este axioma, incluso los texto de secundaria actuales no lo nombran ni el programa del MEP.

Además, se debe desechar la famosa anécdota que Θ no es completo porque en él no se pueden resolver ecuaciones como $x^2 - 2 = 0$. Esta historia desvirtúa totalmente la idea de continuidad de P, pues es válida solo para los números algebraicos y cuando los alumnos vean la imposibilidad de resolver en P ecuaciones como $x^2+1=0$, se dan cuenta que ese conjunto ya no es tan completo como se decía, pues algunas no se pueden resolver.

Entonces, ¿Qué hacer? La respuesta no es fácil, pero una primera aproximación a ella la señalan las construcciones: ver el número real no como un nuevo número sino como el detector que se posee para caracterizar esos números. A primera vista, esta propuesta pareciera descabellada y sin duda muchos brincarían, pero si vemos la realidad, ambas construcciones pintaron la realidad fielmente:

Vimos en un mundo numerable, cuando el estudiante conoce a Q, este puede respirar tranquilo por el resto de la vida, ya que todos las situaciones las podrá modelar con Θ (basta para vivir) . El Carpintero trabaja con triángulos rectángulos de hipotenusa raíz de 2, sin necesidad de conocerlo. El científico, las computadoras y la tecnología en general usan decimales con expansión finita y a lo más infinita periódica.

Ahora, para nosotros los docentes, ¿Qué es un número real?, o más precisamente ¿qué es raíz de dos?. La respuesta no puede ser que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, los expertos (arquitectos y carpinteros) dicen que es 1,4 y aquella persona que debe raíz de dos colones dice que es 1. Y la matemática es la que peor responde y me dice que es un símbolo, es $\sqrt{2}$, sin "saber" qué es.

Así, raíz de 2, es otra dimensión, no es el número 2 que todos entienden. Es más, no es un número si se ve desde el mundo real o más bien cambia la concepción de número (al igual que en las construcciones se tienen los números racionales, y luego hacen una clase de equivalencia de sucesiones de Cauchy o una cortadura y tienen la osadía de llamarlo número y para peores le agregan el real mofándose, cuando no se acerca para nada a la realidad, ¿Esto será cierto?).

*Se mencionó que cambia la concepción de número por que según lo expuesto tiene sentido decir que el **N**úmero raíz de dos es un **número racional** entre 1 y 2 que cada quien lo toma como le convenga, donde número con n es la concepción natural de número que se* *tiene y número con N es otro dimensión (e incluso algunos lo pueden tomar menor a 1 o mayor a dos según su necesidad). Esta nueva idea de* ***N****úmero responde en cierta medida a la relatividad, ya que representa un conjunto de racionales del cual cada quién escoge el racional que se adapta a sus necesidades, y entonces ¿en que se diferencia esta intuición que se tiene de número real en nuestra realidad de la formalización dada por las* cortaduras de *Dedekind* y las sucesiones de Cauchy*?.*

El discurso anterior, es una interpretación de la incertidumbre que siento es reflejada por el estudiante en secundaria, y a la vez justifica la propuesta presentada.

Ahora, ¿Por qué en el colegio se oculta la verdadera realidad con símbolos como raíz de dos que en cierta medida carece de significado real (no matemático)? ¿Por qué los alumnos se sorprenden cuando se dibuja un triángulo rectángulo de catetos uno y se les dice que la hipotenusa es raíz de dos, cuando se les pudo haber dicho que es 1.42 o cualquier otro símbolo x? ¿Por qué no adoptamos un enfoque histórico y se parte de la intuición de los Babilonios, nutrida por las construcciones, para introducir el conjunto de los reales y luego pasar a la axiomatización de los griegos para darle estructura de campo ? En otras palabras ¿por que no introducimos las cortaduras o sucesiones de Cauchy a un nivel intuitivo, que respete la realidad? ¿Por que no darle primero importancia a los métodos numéricos y luego ver la idea de número real y las raíces como un modelo matemático que trata de mejorar las precisiones y no como algo que carece de significado?

Sin duda el problema que se da en secundaria es querer encasillar la noción de número real bajo la misma camisa de número racional. Cuando debe ser lo contrario, se le debe tejer una nueva camisa a P y luego ver si esta le sirve a Θ. Así lo plantean las construcciones, crean un conjunto P cuyos elementos se denominan números reales pero son diferentes totalmente a los números racionales y luego se identifica Θ con un subconjunto de P.

5. La enseñanza de los números reales. Un ejemplo.

Se pretende introducir el concepto de continuidad a nivel intuitivo, es decir lograr que el estudiante tenga la idea de un número real como una cortadura o como una clase de sucesiones de Cauchy en Q, desde su visión del mundo, desde su percepción sin entrar en definiciones rigurosas y demostraciones, o sea sobreponer el concepto a la definición, donde la expansión decimal jugará un elemento importante.

a) Un primer acercamiento: la concepción de número real

Esta primera etapa se plantean actividades en que el estudiante tome conciencia de que Θ no satisface el axioma del extremo superior.

El profesor le plantea el siguiente problema al estudiante: ¿Cuál es el número cuyo cuadrado es 2? El profesor debe tener en mente que la cortadura izquierda $\{x \in Q, x^2 < 2\}$ y la derecha $\{x \in Q, x^2 < 2\}$ no poseen supremo ni ínfimo respectivamente.

Ante el problema el profesor les pide a los estudiantes que traten de irse aproximando ese número por la izquierda y derecha (idea: Cortadura de Dedekind izquierda y derecha). Deben utilizar expansiones decimales, y lo pueden presentar por medio de una tabla, en la cual van colocando una sucesión de números que al cuadrado sean aproximadamente 2 (idea del profesor: sucesiones de Cauchy):

Tabla 1

Por la izquierda $x^2 \leq 2$		Por la izquierda $x^2 \geq 2$	
x	x^2	X	x^2
1.4	1.96	1.5	2.25
1.41	1.9881	1.43	20449
…	…	…	…

El estudiante debe utilizar una calculadora que pueda brindar bastantes decimales, incluso se le puede asignar para el hogar o el profesor puede utilizar una computadora. Es 100% seguro que los estudiantes llegarán a decir que ese número no existe. El profesor debe darle la razón al alumno, pues para ellos los números son los números racionales.

Es necesario recalcar aquí que al llenar la tabla se observará que varios estudiantes expusieron sucesiones diferentes que se acercan al número cuyo cuadrado es 2, note la estrecha relación de esto con el concepto de real dado por la construcción basada en sucesiones de Cauchy.

Luego el profesor les modela situaciones en que es necesario saber cuánto es ese número que no existe, y les solicitará a los alumnos la manera de solucionar esas situaciones ante el impedimento de la no existencia de ese número. Las situaciones deben ser cuidadosamente planteadas de manera que provoquen respuestas en las que considerar ese número como 1 o 1,41 o 1,4142 sea suficiente. El profesor debe hacer conciencia de que la no existencia de ese número no me impide resolver problemas reales ya que según la situación podemos considerarlo como un número racional aproximado.

Ahora bien, la idea de las construcciones de definir número por el detector que lo señala, nos permite seguir adelante:

Como las situaciones se pueden resolver, el profesor señala que la matemática debe tratar de modelarlas, por lo que abusándose de la idea de número, se dice que este numero buscado es el conjunto de todos los racionales que al cuadrado dan casi dos, de los cuales se elige el que más se adapte a la situación. Este nuevo concepto de número como conjunto se le llamará número real y es totalmente diferente al concepto de número que se tenía.

Con esta primera definición de real, se puede plantear una serie de ejercicios. Sin embargo, en esta definición se dijo que del número real se elige "*el que más se adapte a la situación*", esto no es propio de una definición matemática, por lo que hasta ahora ha dado una aproximación a la definición, que para objetivarla debe introducir la idea de precisión, para ello es necesario recurrir a la representación decimal de los reales. Aunque la definición no tiene objetividad tiene una estrecha relación con los reales de las construcciones, se ha convertido en un puente entre la realidad y los entes creados en estas.

b) Representación decimal de los reales.

El profesor sobre la tabla 1, debe realizar dos observaciones importantes:

1. Muchos estudiantes en esta tabla construyen sucesiones distintas para aproximarse al número. El profesor debe hacer ver de manera intuitiva que como todas las sucesiones dadas por los estudiantes convergen a un mismo número, estas pertenecen a la misma clase de equivalencia según la construcción basada en sucesiones de Cauchy, entonces se puede elegir cualquiera para representar el número real, Por ejemplo, para un carpintero que tiene una pieza de madera cuyo ancho es un número que al cuadrado da 2 m, da lo mismo decirle que ese ancho es 1,412 m o 1,413 m.

2. Algunos en esta tabla construyen sucesiones que dan más rápido mejores aproximaciones que otras y la mayoría conforme avanzan van fijando decimales. Aquí se puede dar el ejemplo de una sucesión que en cada término fija un decimal.

De las dos observaciones, el profesor justifica la representación del número real x por una sucesión muy particular, que se llamará la sucesión principal (b_n), y formalmente sería:

$$\begin{cases} b_0 = [x] \text{ (parte entera de x)} \\ b_n = b_{n-1} + i \bullet 10^{-n}, \text{ donde i es el} \\ \text{mayor dígito que cumple } b_n \leq x. \end{cases}$$

Esta es una creación didáctica bastante justificada que no dista mucho del texto de saber de representación de los números reales en expansión decimal.

A nivel intuitivo se le dice a los estudiantes que esta sucesión en cada uno de sus términos (a partir del segundo) fija un decimal. Por ejemplo para el número que al cuadrado es dos, la sucesión principal es: $b_0 = 1$; $b_1 = 1{,}4$; $b_2 = 1{,}41$; $b_3 = 1{,}414$…

El profesor debe enseñar al estudiante a determinar algunos términos de la sucesión principal por medio de ensayo y error en donde debe ir fijando decimal por decimal (solo hay diez posibilidades) valiéndose de una calculadora. Así, en el ejemplo anterior, el estudiante al buscar el tercer decimal puede comprobar que: $(1{,}410)^2 \leq 2$, $(1{,}411)^2 \leq 2$, $(1{,}413)^2 \leq 2$, $(1{,}414)^2 \leq 2$, $(1{,}415)^2 \geq 2$, por lo tanto el tercer decimal es 4.

Ahora, se puede definir la precisión. Se dice que un representante de un número irracional x tiene una precisión de n decimales si los primeros n decimales de este racional coinciden con los primeros n decimales del término b_{n+1} de la sucesión principal de x.

Dado que si se conoce el término enésimo de una sucesión principal se conocen sus primeros n términos, se suele denotar esta sucesión por medio de un término enésimo seguido de puntos suspensivos, el término se elige de acuerdo a la precisión que se quiera. Por ejemplo el número real cuyo cuadrado es 2 está representado por 1,4142…

Los puntos suspensivos, ya que diferencia la representación del número real de la representación decimal de los racionales. El estudiante debe notar que antes colocaba puntos suspendidos cuando se presentaba un período.

c) Inserción de Θ en **R**.

No faltará un estudiante que ante la notación de la sucesión principal de un número real, pregunte si puede suceder que por ejemplo 11,2333…o 1,2999… represente una sucesión principal de un número real x, lo cual provocaría un conflicto ya que esta notación coincide con la representación de un número racional. El profesor debe hacer al estudiante, que ante este caso, el número racional que tenga esa expansión decimal sería la mejor aproximación de x, es decir, x es racional. Así se concluye que todo racional, se puede ver como un número real, por ejemplo: 2 =2,000…. y que Θ es subconjunto de **R**.

De esta manera, dado que la notación de la sucesión principal es consistente con la representación decimal de los racionales, en adelante, se hablará de representación decimal de un número real para referirse a la notación de la sucesión principal. Luego se define el conjunto de los números irracionales como el conjunto de los reales que no son racionales, que por lo expuesto anteriormente deben tener expansión decimal finita no periódica.

d) Representación simbólica de un real

Es conveniente, en un primer momento, hablar de raíces cuadradas solo de números racionales y luego introducir los otros casos, incluyendo los reales que tiene una notación simbólica especial como π = 3,1415…, e = 2,71… y problemas de aplicación.

Dado un **número racional** x > 0 existe un **número real** cuyo cuadrado es igual a x y se denota $\sqrt{x}$. Por ejemplo, el número cuyo cuadrado es 2 es un número real denotado por:

$$\sqrt{2} = \{1; 1{,}4; 1{,}41;\ldots\} = 1{,}4142\ldots$$

Se debe recalcar que la notación de conjunto es ineficiente, en cambio la notación simbólica permite en cualquier momento obtener la precisión que se quiera de ese número.

d) P satisface el axioma del extremo superior

El profesor lanza de nuevo el problema del inicio: ¿Cuál es el número cuyo cuadrado es 2? Después de todo lo ocurrido, el alumno debe leer con otra óptica este problema, por número no entiende lo que entendía antes, la noción fue modificada totalmente, su respuesta debe ser ese número es $\sqrt{2}$ (1.4241…).

Conclusiones

En el trabajo realizado se abordaron aspectos de la transposición didáctica de los números reales en nuestro sistema educativo y a partir del análisis de esta y sus deficiencias se expuso en este artículo una pequeña introducción a la enseñanza de los números reales, en la cuál se integraron tanto la historia del saber como sus diferentes textos.

Este trabajo se puede ampliar para que cubra temas como: la estructura de campo en R, los números algebraicos y trascendentes, los números constructibles, incluso se puede obtener una muy buena relación entre la propuesta y la introducción al cálculo.

Es necesario resaltar que se brinda un objeto de enseñanza que tome en cuenta de manera integrada los textos del saber. No se pretenden despojar la enseñanza de los números reales de la axiomatización, esta será necesaria para abordar la estructura de campo de los reales, pues es quizás poco didáctico querer construir todo. La diferencia sustancial de esta propuesta respecto a la realidad expuesta no radica en el camino elegido, sino pretende lograr una concepción de los números reales que en la realidad ni si intenta.

El trabajo apunta a una verdad, es necesario dar una buena preparación matemática a los futuros docentes en secundaria, esto le puede permitir transponer de una mejor manera el conocimiento que será objeto de enseñanza. Se plantean como una buena opción la introducción de las construcciones en la preparación de los futuros docentes.

Esta propuesta es una primera aproximación para hacer frente a la problemática de enseñar los números reales y requiere de un análisis para mejorarla y nutrirla con otros aportes, o rechazarla por producir más malestares del que trata de solucionar, pero intenta poner a la matemática como subordinada a la realidad y no como se ha venido presentando.

Por otro lado, se podrían analizar las ventajas que presentaría la implementación de la propuesta expuesta en la enseñanza del cálculo diferencial.

La alternativa brindada aquí no pretende dar una fórmula mágica o receta a seguir para que cualquier profesor enseñe los números reales. Por el contrario, el profesor que se supone ha estudiado muy bien las construcciones se le brinda más que una receta de cocina un pastel del cual él conoce sus ingredientes, y puede probarlo, juzgarlo y mejorarlo en sus lecciones, se deja en sus manos el Saber Enseñado.

Bibliografía

Bourbaki, Nicolas (1972). *“Elementos de historia de las matemáticas”*. Alianza Editorial S.A., Madrid, España.

Brousseau, Guy (1986). *“Fundamentos y Métodos de la Didáctica de las Matemáticas”*, traducción de *“Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques”*. Revista Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 7, n 2, pp.33-111.

Cambronero, Santiago (2002). “*Una construcción elemental de las Funciones Exponencial y Logarítmica”*. Revista Virtual Matemática, Educación e Internet del Instituto Tecnológico de Costa Rica, Vol 3, N° 1; Abril 2002. Dirección: http:// www.itcr.ac.cr/ carreras/ matematica/ revistamate/ Contribucionesv3n1002/ funcionexponencial/ index.html.

Chevallard, Yves (1991). *“La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado”*. Aique grupo Editor S.A., Argentina.

Coriat, Moisés; Scaglia, Sara (sf). *Investigación Didáctica: Representación de los Números Reales en la Recta Numérica*. Grupo de Pensamiento Numérico. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Duarte, Asdrúbal (2003). *"Apuntes sobre Expansiones Decimales"*. Universidad de Costa Rica

Duarte, Asdrúbal; Cambronero, Santiago (sf). *"Números Reales"*. Universidad de Costa Rica.

Ruiz, Ángel (2003). *"Historia y filosofía de las Matemáticas"*. EUNED, San José, Costa Rica.

MAT-3: MATERIAL EDUCATIVO COMPUTARIZADO PARA LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL UTILIZANDO *MATHEMATICA*

Enrique Vílchez Quesada[1]

Resumen:

Se presenta un material educativo computarizado denominado MAT-3, para apoyar la docencia de un curso básico de álgebra lineal, utilizando como herramienta de cálculo, investigación y programación el software Mathematica.

1. Introducción

El material educativo computarizado *MAT-3* es el resultado del proyecto de graduación titulado: "*Material Educativo Computarizado para Apoyar el Desarrollo del Curso Matemática III*", propuesto para optar por el grado de Magister en Tecnología e Informática Educativa. *MAT-3* fue desarrollado con el objetivo principal de mediar pedagógicamente el curso Matemática III para Informática, dirigido a los estudiantes de las carreras Ingeniería en Informática e Informática Educativa de la Universidad Nacional. Matemática III en términos de contenido, abarca los temas clásicos de un primer curso de álgegra lineal, a saber: ecuaciones lineales y matrices, determinantes, vectores en IR^n, espacios vectoriales, valores y vectores propios, transformaciones lineales y aplicaciones, con la particularidad de utilizar el software *Mathematica* como herramienta de cálculo y programación, para desarrollar cada una de las unidades temáticas del curso.

El MEC (material educativo computarizado) *MAT-3* diseñado mediante el lenguaje de programación Microsoft Visual Basic 6.0, será de gran ayuda para el docente ya que tiene como finalidad orientar su labor educativa hacia la creación de ambientes de aprendizaje heurísticos, en donde bajo un método de enseñanza basado en el laboratorio, el estudiante

[1] Universidad Nacional, Escuela de Matemática y Centro de Investigación y Docencia en Educación, evqm@costarricense.cr

explore, conjeture, experimente, construya y comprenda el contenido de clase. También es importante recalcar la innovación del trabajo pues en el ámbito comercial y académico en nuestro país, no existe una aplicación dirigida a sufragar las necesidades educativas de profesores interesados en enseñar álgebra lineal con apoyo de *Mathematica*.

El material que se ha elaborado cuenta con un diseño de comunicación de fácil acceso para cualquier usuario estándar del sistema operativo Windows. Las pantallas presentan con claridad los objetivos de aprendizaje, y proporcionan botones y un menú principal donde sus funciones son rápidamente identificables.

2. Características del Material Educativo Computarizado MAT-3

MAT-3 está constituido por los siguientes módulos:

- Una guía didáctica fácil de consultar a partir de una navegación flexible.
- Un módulo de videos demostrativos por unidad temática, que muestran al docente cómo realizar tareas de cálculo y programación utilizando *Mathematica*.
- Un módulo que permite construir pruebas y prácticas para cada una de las unidades temáticas del curso Matemática III.

La guía didáctica que se ha integrado en el MEC, es el resultado de un esfuerzo conjunto con el profesor de la Escuela de Informática de la UNA, M.Sc. Juan Felix Ávila Herrera, quien revisó y corrigió reiteradas veces el documento, con la finalidad de adaptar los ejemplos y ejercicios seleccionados, al perfil de salida y los objetivos de aprendizaje del curso Matemática III para Informática.

La guía didáctica está constituida por siete capítulos que corresponden a los ejes temáticos del curso Matemática III y a su vez cada capítulo se encuentra subdividido en cuatro secciones: *generalidades, ejemplos, trabajo en el laboratorio y evaluación*. En la sección de *generalidades*, se exponen al usuario los nuevos comandos con los que cuenta el software *Mathematica,* para efectuar cálculos relacionados con los contenidos del capítulo correspondiente. En la sección de *ejemplos*, se plantean una serie de ejercicios programados y no programados resueltos utilizando el programa *Mathematica,* haciendo explícito al profesor del curso Matemática III, las posibilidades que ofrece *Mathematica* para explicar cada uno de los temas. En la sección de *trabajo en el laboratorio*, se presenta una lista de ejercicios no resueltos asistidos por computadora, con el objetivo de ser desarrollados en clase con los estudiantes. Finalmente, en la sección de evaluación, se brindan ejemplos de exámenes cortos, que utilizan el software *Mathematica* como principal herramienta de cálculo y programación.

El módulo de videos demostrativos, presenta una serie de videos elaborados mediante el software CamStudio. Los videos muestran al profesor del curso Matemática III, como se resuelven algunos de los ejercicios (debidamente elegidos) programados y no programados, que forman parte de la sección *ejemplos* de cada uno de los capítulos de la guía didáctica, de tal modo, que constituyen un complemento visual más dinámico de esta guía.

El módulo de construcción de pruebas y prácticas, le permite al profesor elaborar pruebas y prácticas para cada uno de los capítulos del curso. A futuro, será indispensable en el material, actualizar la base de datos de ejercicios con otros ejemplos recomendados por los docentes de la cátedra.

Además se añadieron al MEC tres módulos adicionales; *archivos fuente* que brinda al usuario archivos del software *Mathematica* que resuelven todos los ejemplos integrados en la guía didáctica del curso, un *glosario de comandos* que resume los comandos más importantes con los que cuenta el software *Mathematica*, para llevar acabo funciones y tareas en el área del álgebra lineal, y un módulo denominado *complementos* que integra software gratuito para apoyar el uso de la herramienta (*Mathematica*) y la labor docente. El módulo de *complementos* provee al profesor del curso Matemática III, del siguiente software gratuito:

- MathReader 5.0: permite abrir archivos propios del software *Mathematica*, bajo la opción solo lectura.

- Adobe Reader 6.0.1: permite abrir como solo lectura la guía didáctica del curso Matemática III.
- GLP: Graphic LP Optimizar permite resolver problemas de programación lineal utilizando el método gráfico.

También en complementos se dispone de una aplicación *Flash* para abordar el estudio de la resolución de problemas de programación lineal, utilizando como herramienta de cálculo el software *Mathematica*.

La pantalla que se le presenta al usuario al iniciar el uso de *MAT-3*, es la siguiente:

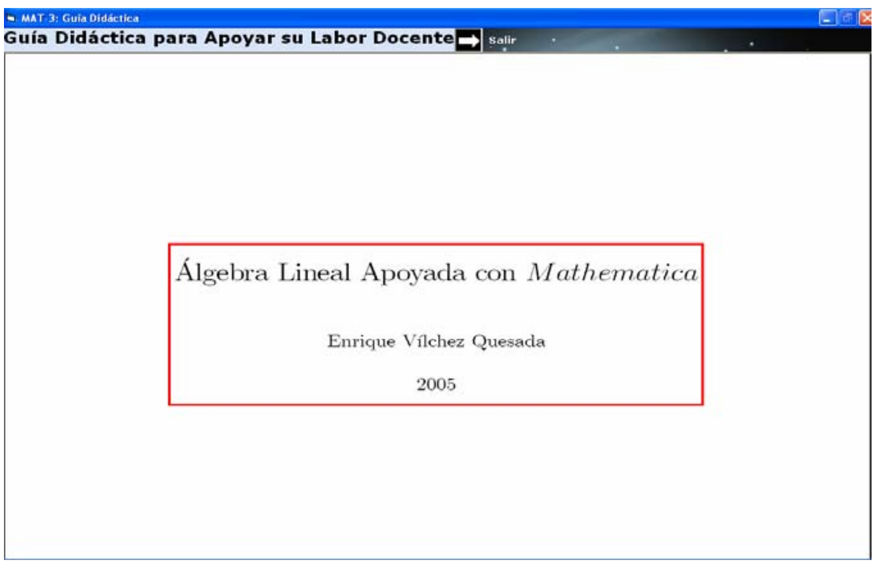
Esta pantalla proporciona al profesor del curso Matemática III los siguientes elementos:

- Bienvenida: abre un archivo de sonido con un mensaje de bienvenida al uso del material educativo computarizado.
- Al hacer clic sobre los créditos del autor (*Trabajo Elaborado por: Enrique Vílchez Quesada*) se despliega una dirección electrónica, con la finalidad de facilitar una vía de comunicación entre los miembros de la cátedra del curso Matemática III y el autor del MEC.

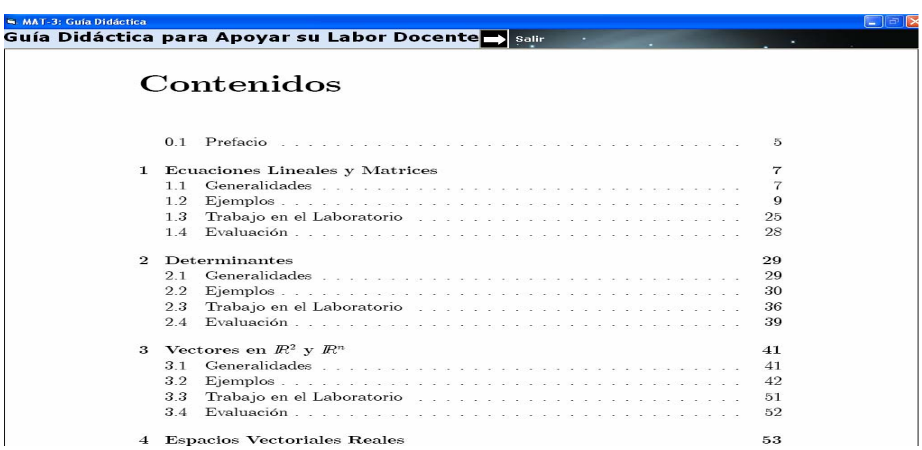
- Al hacer clic sobre *Material Educativo Computarizado para Apoyar el Desarrollo del Curso Matemática III para Informática*, *Complementos*, *Guía Didáctica*, *Videos Demostrativos*, *Construcción de Pruebas y Prácticas*, *Archivos Fuente* y *Glosario de Comandos*, se otorga al usuario una ayuda, mediante un mensaje de texto que explica cuál es el contenido del módulo seleccionado.

3. Guía Didáctica del Curso Matemática III

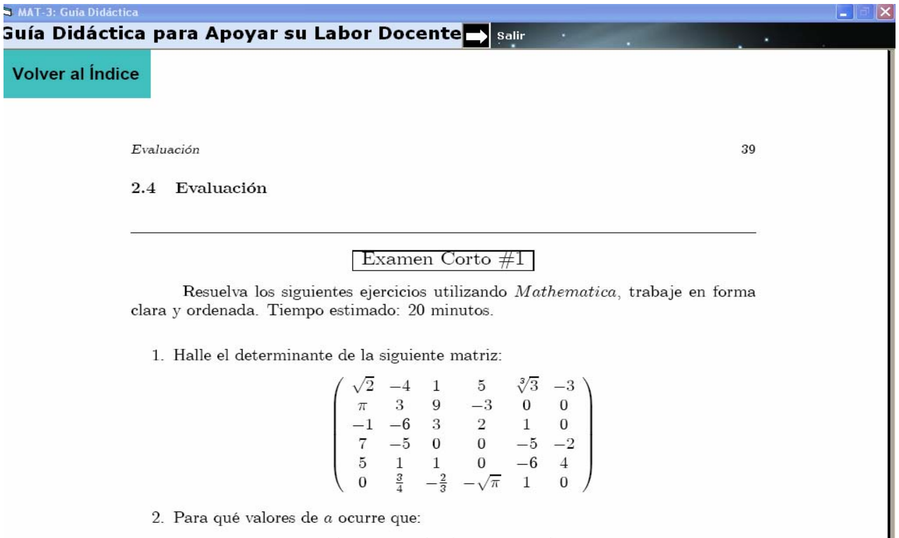
Para entrar a la guía didáctica del curso Matemática III, se hace clic sobre el botón *Entrar* que aparece al lado derecho de este módulo, desplegándose la siguiente pantalla:



Al hacer clic sobre el título "Álgebra Lineal Apoyada con *Mathematica*" el MEC pone a disposición del usuario el índice de contenidos, como se observa en la siguiente figura:



Todos los capítulos de la guía están constituidos por cuatro secciones: *generalidades, ejemplos, trabajo en el laboratorio* y *evaluación* (como se explicó en la sección 2). El índice de contenidos le permite a los usuarios navegar a cada una de las secciones de la guía didáctica, con un simple clic sobre la sección de interés, por ejemplo, si hace clic en la sección *evaluación* del capítulo *Determinantes*, aparece en pantalla lo siguiente:

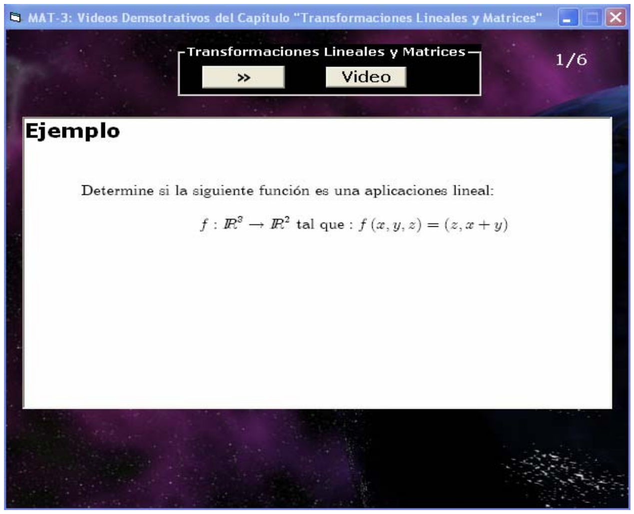


El botón *"Volver al Índice"* devuelve al usuario al índice de contenidos, con la finalidad de explorar otras secciones de la guía didáctica.

4. Videos Demostrativos

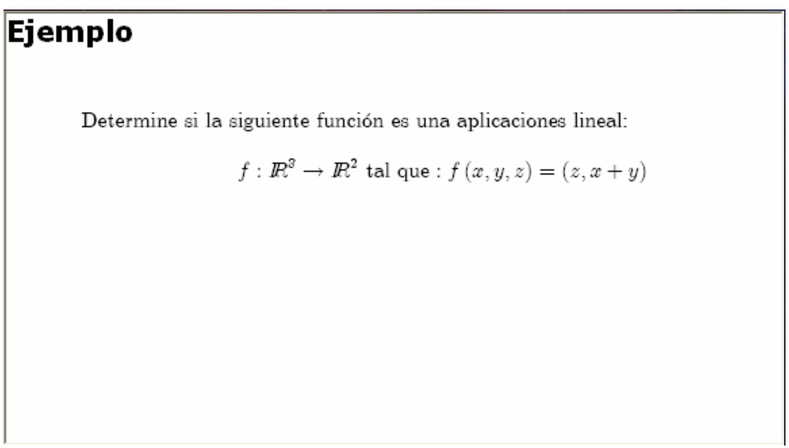
Al entrar al módulo videos demostrativos se despliega en pantalla lo siguiente:

El usuario elige el capítulo del curso para el cual desea visualizar algunos videos demostrativos, por ejemplo, al marcar con un *check* el capítulo *Transformaciones Lineales y Matrices*, se abre la siguiente ventana:



En esta pantalla se destacan los elementos indicados a continuación:

- La ventana principal:



presenta el enunciado de cada uno de los ejemplos para los cuales se puede abrir un video demostrativo.

- El botón:

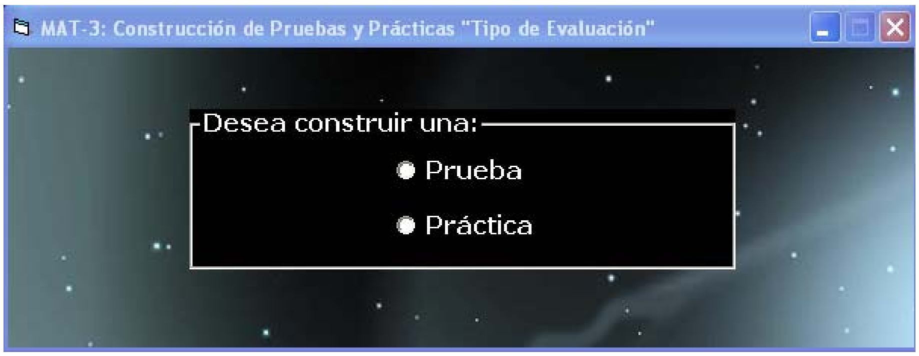
navega sobre cada uno de los ejemplos para los cuales hay disponible un video demostrativo.

- El elemento *“1/6”* indica al usuario que el ejercicio de la ventana principal es el número 1 de un total de 6.

Para desplegar un video demostrativo se presiona el botón *video*, lo cual abre un archivo *avi* desde el reproductor Windows Media Player.

5. Construcción de Pruebas y Prácticas

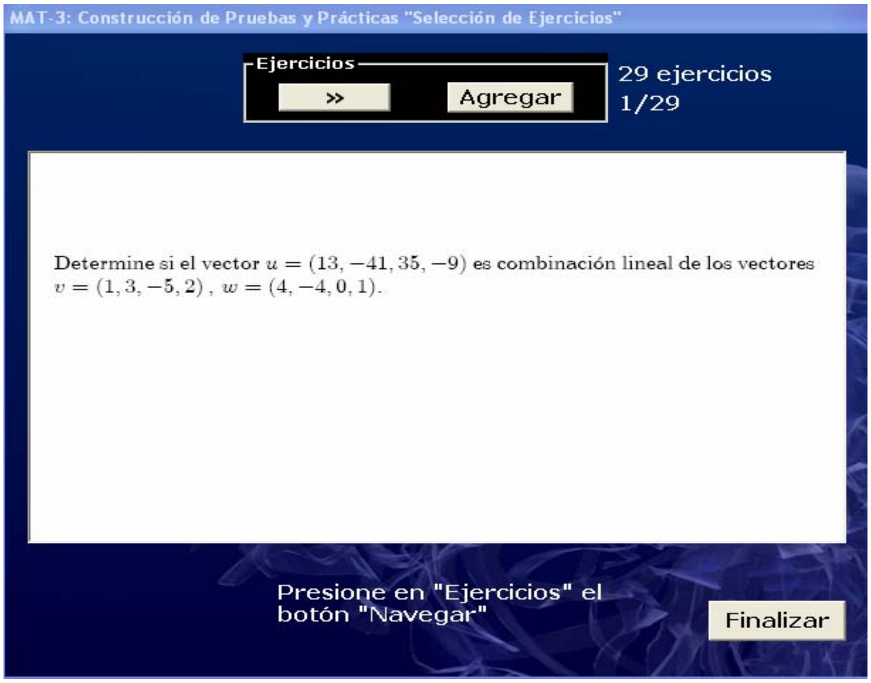
Cuando se entra al módulo de construcción de pruebas y prácticas, se le solicita al usuario indicar el tipo de evaluación, mediante la siguiente pantalla:



Al elegir cualquiera de las opciones se despliega:

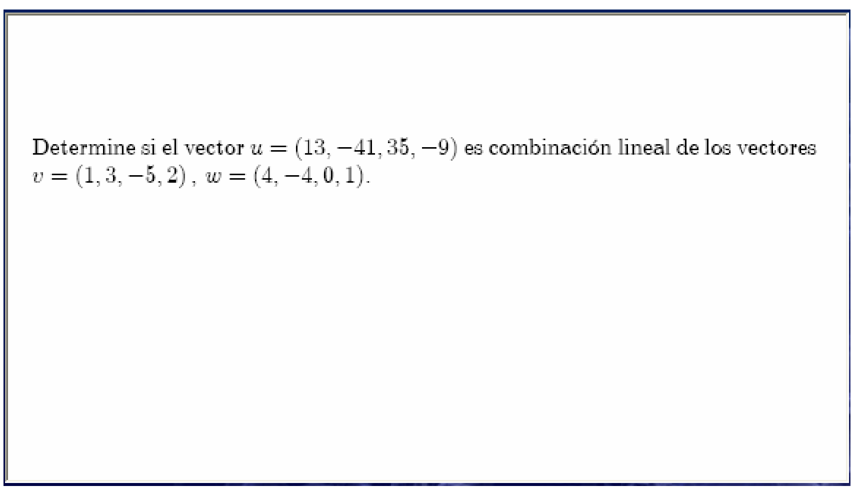
Donde el docente escoge aquellos temas a evaluar, con respecto a los siete capítulos que conforman el curso Matemática III para Informática.

Por ejemplo, si el usuario elige los capítulos *Espacios Vectoriales Reales* y *Programación Lineal* se abre la siguiente pantalla:



Como es observable esta ventana se asemeja a la pantalla principal del módulo de videos demostrativos, lo cuál dota al MEC desarrollado de una consistencia adecuada en términos de la interfase. Los elementos que se destacan son los siguientes:

- La ventana principal:

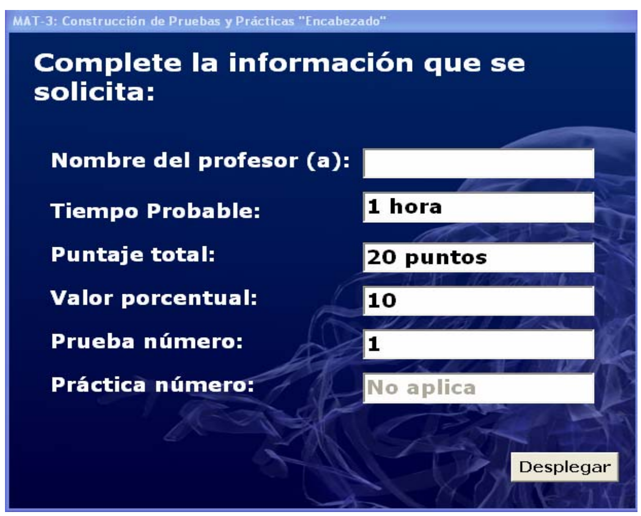


presenta la lista uno a uno, de todos los ejercicios que el profesor puede elegir de la base de datos, para ser agregados a la prueba o práctica que se esta diseñando.

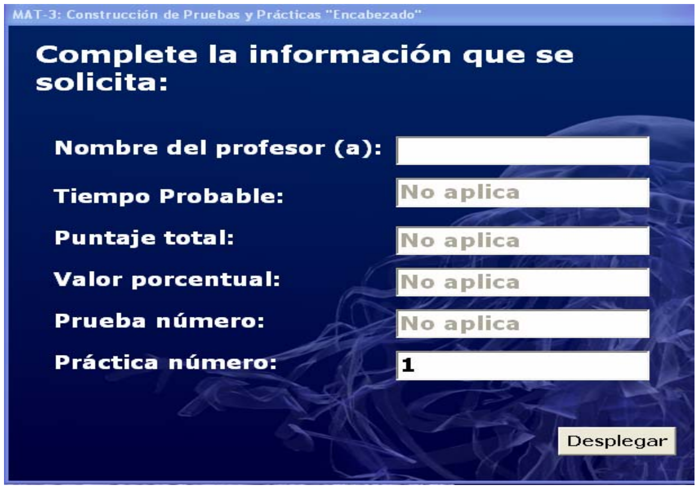
- El botón *“navegar”* de igual forma con respecto al módulo videos demostrativos, navega de izquierda a derecha sobre cada uno de los ejercicios disponibles.
- El botón *“agregar”* agrega a la prueba o práctica que se esta diseñando, el ejercicio que aparece en la ventana principal.
- La pantalla brinda una ayuda al usuario respecto al número total de ejercicios existentes en la base de datos y el número de ejercicio que aparece en la ventana principal, en este caso los elementos:

indican que existen 29 ejercicios de *Espacios Vectoriales Reales* y *Programación Lineal* y que el ejercicio mostrado en la ventana principal es el número 1.

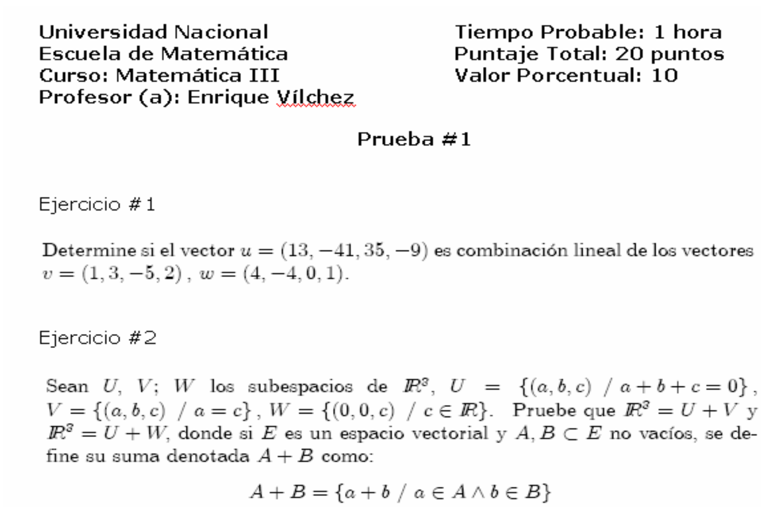
Cuando el docente finaliza sus elecciones debe presionar el botón *Finalizar*, lo cual despliega:



Si el usuario eligió como tipo de evaluación una prueba, la pantalla que se le presenta es idéntica a la anterior, si por el contrario eligió una práctica, entonces ella es de la forma:



En ambas ventanas el objetivo principal es que el docente complete la información personalizada que llevará el encabezado de la prueba o práctica diseñada. Al presionar el botón *"Desplegar"* se abre un archivo de Word que se guarda automáticamente en el disco C:/ de la computadora del usuario y que por default lleva el nombre "*PYP*". Por ejemplo, si suponemos el diseño de una prueba donde se han agregado los ejercicios 1 y 2 de la base de datos, al seleccionar los capítulos *Espacios Vectoriales Reales* y *Programación Lineal*, presionando el botón *Desplegar* se abre el siguiente archivo de Word:


Universidad Nacional
Escuela de Matemática
Curso: Matemática III
Profesor (a): Enrique Vílchez

Tiempo Probable: 1 hora
Puntaje Total: 20 puntos
Valor Porcentual: 10

Prueba #1

Ejercicio #1

Determine si el vector $u = (13, -41, 35, -9)$ es combinación lineal de los vectores $v = (1, 3, -5, 2)$, $w = (4, -4, 0, 1)$.

Ejercicio #2

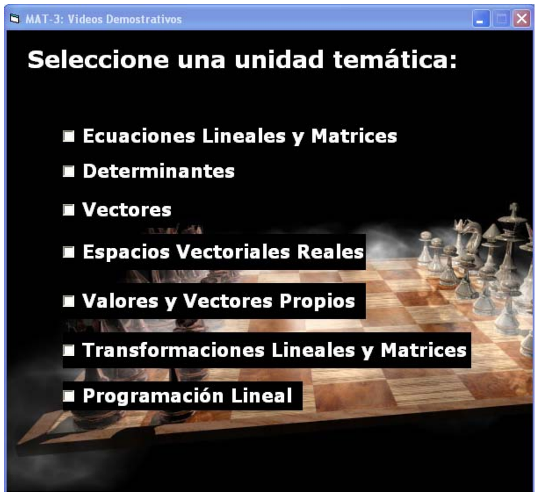
Sean U, V; W los subespacios de $I\!R^3$, $U = \{(a, b, c) \ / \ a + b + c = 0\}$, $V = \{(a, b, c) \ / \ a = c\}$, $W = \{(0, 0, c) \ / \ c \in I\!R\}$. Pruebe que $I\!R^3 = U + V$ y $I\!R^3 = U + W$, donde si E es un espacio vectorial y $A, B \subset E$ no vacíos, se define su suma denotada $A + B$ como:

$$A + B = \{a + b \ / \ a \in A \wedge b \in B\}$$

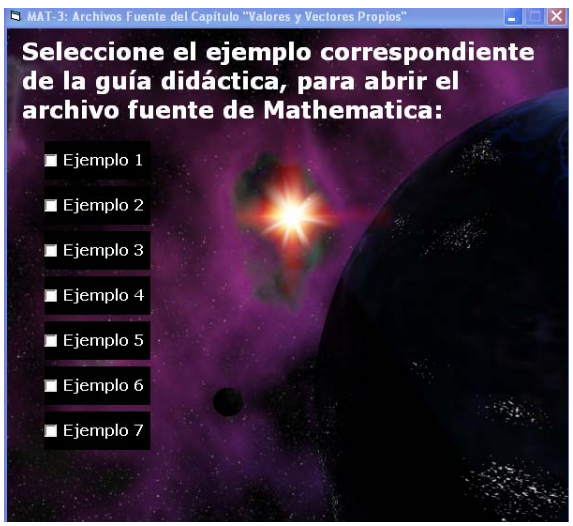
Los ejercicios agregados son imágenes prediseñadas y el encabezado y los subtítulos textos comunes.

6. Archivos Fuente

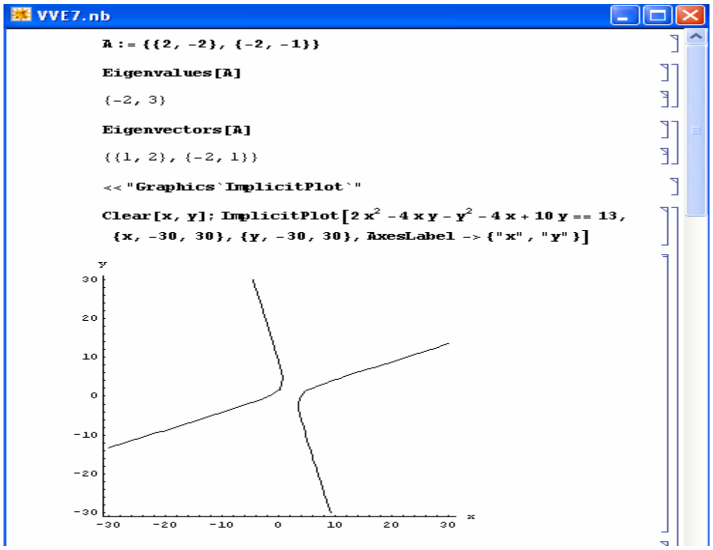
Al entrar al módulo de archivos fuente se presenta la siguiente pantalla:



En ella, el profesor del curso Matemática III, selecciona la unidad temática para la cual desea obtener el archivo fuente del software *Mathematica*, de la sección de *ejemplos* de la guía didáctica del curso. Por ejemplo, si se selecciona el capítulo *Valores y Vectores Propios* aparece en pantalla lo siguiente:



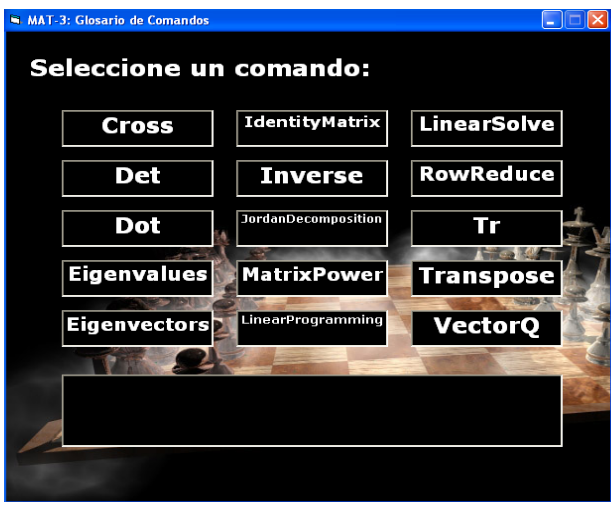
Al marcarse un *check* sobre *Ejemplo 7* se despliega:



Que corresponde al archivo fuente de *Mathematica* utilizado para resolver el ejemplo siete de la guía didáctica del curso, ubicado en el capítulo de *Valores y Vectores Propios.*

7. Glosario de Comandos

Al hacer clic en *Entrar* a glosario de comandos, se presenta en pantalla lo siguiente:



Al seleccionar un comando se le brinda al usuario una explicación (en la parte inferior de la ventana) indicando la función que desempeña ese comando en el software *Mathematica* y su sintaxis. Por ejemplo, si se hace clic sobre *Inverse* aparece en pantalla:

8. Complementos

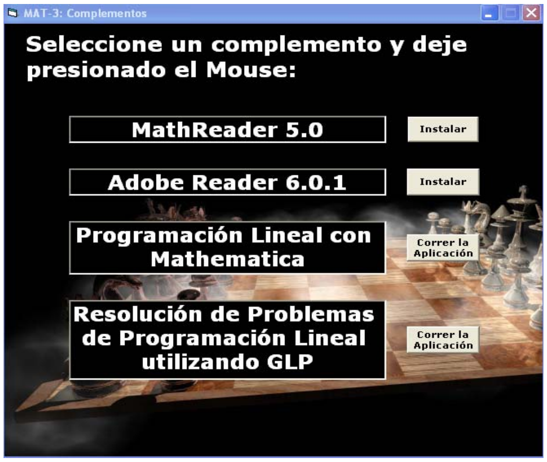
En complementos el profesor del curso Matemática III, encontrará software necesario para correr algunos de los módulos de *MAT-3,* tales como:

- La guía didáctica del curso: para leer este archivo se ha añadido el software gratuito Adobe Reader 6.0.1.
- Los archivos fuente: se dispone de un software gratuito denominado MathReader 5.0, el cual abre archivos del software *Mathematica* bajo la opción solo lectura. Este complemento es necesario si la computadora del usuario no tiene instalado *Mathematica.*

También en este módulo se le proporciona al docente una presentación *Flash* para el introducir al estudiante en el tema de programación lineal y la forma en cómo utilizando el software *Mathematica* es posible resolver problemas de este tipo.

Finalmente se adiciona un software gratuito denominado GLP, que sirve para resolver problemas de programación lineal en dos dimensiones utilizando el método gráfico.

La interfase del módulo complementos se presenta a continuación:



Al hacer clic sobre *MathReader 5.0*, *Adobe Reader 6.0.1*, *Programación Lineal con Mathematica* y *Resolución de Problemas de Programación Lineal utilizando GLP*, se le proporciona al usuario una ayuda, explicando mediante un mensaje de texto el contenido de cada complemento.

9. Conclusiones

MAT-3 es una solución ante el problema detectado en la Escuela de Matemática de la UNA, frente a la necesidad de contar con un material educativo que apoye la mediación pedagógica del curso Matemática III apoyado con *Mathematica*. Este proyecto de aplicación práctica de tecnología educativa, es un complemento del esfuerzo que está haciendo la Escuela de Informática de la Universidad Nacional, por actualizar el currículum del plan de estudios en esta unidad académica.

Se ha presentado un multimedia que le ayudará al profesor del curso Matemática III para Informática a capacitarse en el uso adecuado de *Mathematica* como herramienta de cálculo y programación, para la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal. El trabajo cobra un carácter innovador por la inexistencia a nivel nacional de un MEC similar y su aporte es fundamental para contribuir con la transformación pedagógica que requiere la Escuela de Informática de la Universidad Nacional, al incorporar la informática educativa en el currículum de la formación matemática de sus estudiantes.

10. Bibliografía

1. Apostol, T. (1985). Calculus. México: Reverté.
2. Arce, C. (2001). Ejercicios Resueltos y Exámenes de Álgebra Lineal. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.
3. Arce, C., Castillo, W. y González, J. (2004). Álgebra Lineal. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.
4. Arce, C. (2004, agosto 1). Materiales para los Cursos MA0429 y MA0275. [En línea]. <http://maltsev.emate.ucr.ac.cr/~carce/> [2005, febrero 7].
5. Barrantes, H. (1993). Elementos de Álgebra Lineal. Costa Rica: UNED.
6. E, Checa y Márquez, A. (2001). Álgebra Lineal Numérica: Teoría y Práctica con *Mathematica*. España: Universidad Politécnica de Valencia.
7. Grossman, S. (1996). Álgebra Lineal. México: McGraw-Hill.
8. Guadamuz, L. y Vega, L. (1988). Categorías de Análisis y Marco General de Evaluación para “Software” Educativo. San José: EUNA.
9. Hill, R. (1997). Álgebra Lineal Elemental con Aplicaciones. México: Prentice-Hall.
10. Hough, D. (1997). Mathematics with Maple. New York: Addison-Wesley.
11. Hoffman, K. y Kunze, R. (1971). Álgebra Lineal. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
12. Kolman, B. (1999). Álgebra Lineal con Aplicaciones y *Matlab*. México: Pearson.
13. Lehmann, M. (1992). Exploring Calculus with Mathematics. New York: Addison-Wesley.
14. Squires, D. y McDougall, A. (1994). Cómo Elegir y Utilizar Software Educativo. Madrid: Morata.
15. Shuchat, A. (2000). The Joy of Mathematics. New York: Harcourt Academic Press.
16. Wicks, J. (1996). Linear Algebra with Mathematics. New York: Addison-Wesley.

MATERIAL DIDÁCTICO EN LÍNEA

Walter Mora F.[1]
Giovanni Figueroa M.

Resumen:

Hace poco más de un año nace este proyecto con el objetivo de desarrollar versiones digitales y en línea de nuestros principales cursos: cálculo diferencial e integral, cálculo superior, métodos numéricos, ecuaciones diferenciales, algebra lineal y probabilidad, pero enriquecidos con actividades interactivas, con las cuales el estudiante pueda explorar, visualizar y comprender mejor algunos conceptos. A la fecha el proyecto esta en ejecución, pero con avances significativos en el desarrollo de algunos de los cursos.

El objetivo de esta comunicación es mostrar el material desarrollado para los cursos: matemática general, métodos numéricos, cálculo diferencial e integral, algebra lineal y probabilidad. Además de explorar el material teórico, se mostrarán algunas de las actividades interactivas que se usan para la exploración de algunos conceptos. También, se hará una descripción de las herramientas de software usadas (LaTeX, LaTeX2HTML, JavaScript, HTML, Mathematica, Java, LiveGraphics3D y JavaView) en la implementación y desarrollo de los cursos, así como de algunas consideraciones sobre diseño Web.

Palabras claves:

Cursos en línea, páginas Web, software, actividades interactivas, matemática interactiva.

Sitio Web:
http://www.cidse.itcr.ac.cr/

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, wmora2@yahoo.com.mx, gfigueroam@yahoo.com.mx

MCM:
APOYANDO LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS CON MATHEMATICA

Juan F. Ávila[1]

Abstract

The purpose of this work is to show an educational package denominated MCM, developed by the author, to support the teaching-learning process of the first university courses in Mathematics using the software Mathematica. The package MCM consists of 4 PDF files that cover the topics: elementary algebra, trigonometry, calculus, and introduction to the differential equations, series and the introduction to the numerical methods.

This product was developed as part of an effort of the School of Computer Science of the Universidad Nacional de Costa Rica to incorporate support software in the courses of mathematics dedicated to its students. This approach is certainly novel in our institution.

Keywords: Mathematics, Mathematica, software, support, elementary algebra, trigonometry, calculus, differential equations, series, numerical methods.

Resumen

El propósito de este trabajo es mostrar un paquete educativo denominado MCM, desarrollado por el autor, para apoyar el proceso enseñanza-aprendizaje de los primeros cursos universitarios en Matemáticas usando el software Mathematica. El paquete MCM consta de 4 archivos PDF que cubren los temas álgebra elemental, trigonometría, cálculo diferencial, introducción a las ecuaciones diferenciales, series e introducción a los métodos numéricos.

Este producto fue desarrollado como parte de un esfuerzo de la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica por incorporar software de apoyo en los cursos de matemáticas destinados a sus estudiantes. Este enfoque es ciertamente novedoso en nuestra institución.

[1] Universidad Nacional de Costa Rica, Escuela de Informática, Heredia, Costa Rica
e-mail: javila@una.ac.cr

Palabras claves: Matemáticas, Mathematica, software, apoyo, álgebra elemental, trigonometría, cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales, series, métodos numéricos.

1. INTRODUCCIÓN

Cada vez que se cuenta con un nuevo recurso que pueda venir a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, es necesario hacer algunas adaptaciones para determinar la mejor forma de incorporarlo. Siempre se podrá hallar distintas posiciones. Unos probablemente lo emplearán ampliamente, otros pensarán que es una moda pasajera y que lo "tradicional" es siempre lo mejor. Es de imaginarse que hace muchos años cuando la historia, y en general todo el acerbo cultural, se transmitía de generación en generación en forma verbal, la introducción del material escrito fue objetada por algunos. "Se pierde el sentimiento", dijeron talvez los más viejos, "ya no es tan interesante", probablemente dijeron los más jóvenes. Lo cierto es que los libros y en general cualquier material escrito ha sido decisivo en el avance todas las civilizaciones. Normalmente lo que sucede es que las distintas alternativas coexisten hasta que se halla un punto de equilibrio que es marcado por la comunidad que emplea esas opciones.

La introducción de la informática en la enseñanza no es una actividad nueva. Casi paralelamente a la construcción de las primeras computadoras modernas, se ha buscado la forma en cómo apoyar la educación mediante sistemas automatizados. Estos esfuerzo se denominan frecuentemente CAI (computer assisted instruction) o bien instrucción asistida por computadora. Idealmente se desea crear un tutor informático que se capaz de diagnosticar al estudiante y enseñar nuevos temas monitoreando apropiadamente su avance. Estos tutores informáticos expertos todavía, hasta donde se sabe, siguen siendo un ideal. Por supuesto han habido avances sorprendentes y las ayudas informáticas día con día son más valiosas. Parece que todavía la presencia del tutor humano es necesaria y que pasarán muchos años antes de que se pueda prescindir de ella.

Con el trabajo que a continuación se presenta, se pretende dar una pequeña contribución en la introducción de la informática en la enseñanza de la matemática. Debe quedar bien claro que no se busca desechar el enfoque tradicional, sino reforzarlo con la introducción de software diseñado ad hoc. No se pretende que el estudiante sea solamente un digitador de comandos. No se persigue que los ejercicios difíciles los resuelva el software. No se intenta que una vez que el estudiante gane el curso, olvide todo lo que aprendió. Nada más alejado de nuestro objetivo. Se desea que el estudiante refuerce el enfoque tradicional con el uso de las nuevas tecnologías informáticas.

Cada vez que se cuenta con un nuevo recurso, se podría caer en la situación de usarlo más allá de lo conveniente. Consideremos el caso del proyector de transparencias. Este aparato, un poco pasado de moda por cierto, es una herramienta útil, pero no se puede usar todos los días y en todas las clases. Si un estudiante llega después de almorzar a una clase en donde se apaga la luz y el calor es algo fuerte, probablemente esta persona se duerma durante las clases. Lo interesante es que esto no tiene que ver necesariamente con que tan motivador sea el expositor. Muchos, después de comer, se duermen mientras ven su programa favorito en la televisión. Simplemente es la naturaleza humana.

Los diferentes recursos que la tecnología va generando deben combinarse para hacer que las clases y en general el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más interesante y provechoso. Esta es la perspectiva que se busca al introducir software en los cursos de matemática.

Mathematica es una herramienta bastante completa para “hacer” matemáticas. Sin embargo, se debe tener cuidado con la forma en que se emplee para propósitos didácticos. El nivel y propósito de los ejercicios que se proponen debe ser distinto al usado en el enfoque “tradicional”. El estudiante puede usar el software para corroborar si el resultado que obtuvo es correcto o no. Ya no necesita preguntar al profesor o a sus compañeros, o consultar el libro. El software le ayuda en esto. Uno de los aspectos que se puede aprovechar con Mathematica es la posibilidad de lograr que el estudiante interprete los resultados obtenidos. Se debe entonces diseñar ejercicios o problemas que, a pesar de que Mathematica hace el “trabajo sucio”, le corresponde al estudiante interpretar los resultados arrojados por el software y proponer la solución final del problema. Finalmente se debe señalar que se abre la posibilidad de contar con un verdadero laboratorio para los cursos de matemática. Los estudiantes pueden ahora experimentar y descubrir resultados importantes. Si tenemos en cuenta que normalmente es más satisfactorio descubrir algo a que alguien nos lo cuente, el uso de Mathematica o cualquier software similar, podrá servir de catalizador en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Uno de los principales retos al introducir software, es la evaluación. Con una herramienta como Mathematica, un ejercicio como factorice a^6+b^6 ya no es tan atractivo, pues solo tiene la dificultad de ingresar la expresión y usar el comando para factorizar. Se debe, entonces, elaborar ejercicios en los que el grado de dificultad vaya más allá de lo que típicamente se hace en forma manual, ejercicios en los que se propicie que el estudiante descubra o desarrolle o interprete algo. Resulta muy interesante que muchos de los problemas que los docentes desarrollan en clase han sido planeados para que salgan "bonitos". No se quiere disponer de 3 horas para resolver un ejercicio. Usando un software como Mathematica, este supuesto ya no marca decisivamente el tipo de ejercicios que se resuelva en clase.

Hablemos ahora de las prácticas en el laboratorio. En cada tema se debe preparar una práctica guiada que los estudiantes deberán desarrollar en el computador. Esto se puede hacer indicando algunos ejercicios del libro texto que deben resolverse con la ayuda de Mathematica o bien preparando una lista de problemas aprovechando, para ello, el mismo software. Eventualmente se puede incluir en la práctica algún comando que se use posteriormente. Si no hay suficientes computadoras, es viable que los estudiantes trabajen en parejas. Se puede indicar a los estudiantes que deben salvar la práctica en un disco y enviarla (por correo) a su profesor o al asistente antes de la próxima clase o alguna fecha que se considere conveniente. Es aconsejable que los estudiantes tengan acceso al laboratorio fuera de las horas de clase. Conviene también advertir que la explicación que da el profesor sobre el tema que se abordará usando el software, debe ser fuera del laboratorio. Si los estudiantes desean seguir paso a paso lo que el docente hace, la marcha del curso se tornará muy lenta. Si se separan ambas actividades, el docente servirá de facilitador y estará disponible para ayudar a aquellos que lo necesiten.

En cuanto a la evaluación, se recomienda dividir la nota del curso en 2 partes: un 70% para el enfoque tradicional y un 30% para la evaluación con apoyo informático. Estos porcentajes pueden ser modificados según la experiencia del cuerpo docente. Lo cierto es que el porcentaje asignado al enfoque con apoyo informático no debe ser muy bajo pues esto podría traerse abajo esta modalidad.

Hablemos ahora de la evaluación. Con este nuevo paradigma de hacer matemáticas, la evaluación tradicional no funciona de la misma forma. La situación es muy similar a aquella en la que se debe evaluar aritmética a estudiantes que toman el examen con ayuda de la calculadora. El estilo de los ejercicios debe cambiar. Nosotros hemos recomendado hacerlo de dos formas. Una es elaborar una serie de ejercicios, solicitar a los estudiantes que lo resuelvan, pedir a los estudiantes que graben los resultados (archivo de Mathematica) en un disco y luego recogerlos para su corrección. Esto tiene algunos inconvenientes. Algunas veces los discos se dañan o bien adquieren algún virus que nos puede dar muchos complicar la existencia. Por otro lado, los estudiantes pueden hacer fácilmente duplicados y propiciar algún tipo de fraude. Como se advierte, este primer enfoque no es muy recomendable. Dicho sea de paso, se debe eliminar el acceso a Internet mientras se efectúan los exámenes para evitar que los estudiantes se comuniquen. Finalmente se debe agregar que el manejar una pila de, digamos 35 disquetes, es una tarea laboriosa y aburrida.

Una segunda forma de evaluar el uso del software es escoger ejercicios que difícilmente se puedan hacer en forma manual y pedir a los estudiantes que escriban las respuestas en una hoja. Las respuestas de los ejercicios no deben ser muy cortas pues, en ese caso, son fáciles de copiar. Sería deseable que el proceso de plantear el problema, resolverlo mediante el software y luego interpretar los resultados hiciera énfasis en la primera y tercera etapa. Una de las críticas que se hace a este enfoque es que evaluamos en forma indirecta el uso del software. Es por esto que los ejercicios deben ser claramente propuestos y deben ser resueltos antes de que se aplique la prueba para evitar dificultades. Se recomienda (sobre todo en los primeros exámenes) dar, como ayuda, una parte de la respuesta para tranquilizar a aquellos estudiantes que lo han hecho bien y para alertar a aquellos que se han equivocado en algún paso intermedio. Además se puede pedir a los estudiantes que escriban parte del código en que emplearon.

El enfoque aquí empleado supone que el estudiante tiene cierta afinidad por la computación. Se pretende que el estudiante programe usando Mathematica, software que utiliza una sintaxis semejante a la del lenguaje C. Sin embargo para estudiantes de algunas carreras, este supuesto podría ser eliminado, dejando solamente los comandos necesarios para resolver problemas del curso.

Finalmente se debe aclarar con humildad y honestidad que el autor de este trabajo no es un erudito en el área, que cualquier contribución al mejoramiento de este trabajo será bienvenida. Probablemente después de aplicar este material en clase la primera vez, se deban hacer muchas modificaciones. Sin embargo se tiene la convicción de que el trabajo aquí expuesto será de valor para los estudiantes y para los docentes.

2. ¿EN QUÉ CONSISTE MCM?

MCM es un producto digital (consistente en 4 archivos PDF) que viene a complementar digitalmente los libros "Álgebra y Trigonometría" y "Ejercicios de Cálculo" escritos por el autor años atrás. Los primeros dos archivos PDF1 y PDF2 se usan en un primer curso universitario de matemática elemental. Ambos PDF son equivalentes excepto que el PDF2 ha sido adaptado con una tipografía más apropiada, una navegación más sencilla y la inclusión de vídeos. Dicho de otra forma, el PDF2 es una versión multimedial del primero.

Los otros dos archivos PDF3 y PDF4 se emplean en el siguiente curso, en el que se estudia cálculo diferencial, series, elementos de ecuaciones diferenciales y una introducción a los métodos numéricos. Al igual que el caso anterior el PDF4 es una versión multimedial de PDF3.

MCM es un sistema ciertamente novedoso en Costa Rica y requiere que la computadora cuente con Acrobat Reader que se consigue gratuitamente. Este hecho hace que su diseminación sea mucha más expedita en tiempo y precio.

MCM está diseñado para que el profesor lo use para presentar sus clases usando una computadora y un proyector. Para cada tema a estudiar se divide el proceso de la siguiente forma:

- Comandos a emplear: se muestra los comandos nuevos que se emplearán en el capítulo.
- Supuestos teóricos: se indica los temas que se supone que el profesor ha cubierto en clase antes de un abordaje con Mathematica.
- Ejemplos que ilustran la forma de abordar la temática: estos son un conjunto de ejercicios resueltos empleando la herramienta.
- Vídeos (solo en algunos casos): se hallan solamente en los PD2 y PDF4. Estos videos pretenden que el profesor no tenga que levantar Mathematica para visualizar algún efecto especial. Eso se ha grabado de previo y se evita así que el docente pierda tiempo en esas tareas. Además el reproductor de vídeo permite que se retroceda o bien se detenga la película para enfatizar algún aspecto importante. Por otro lado, el contar con un vídeo de un proceso, le permite al estudiante analizar todos los detalles de lo explicado en clase.
- Práctica para el laboratorio
- Evaluación (ejemplos de posibles exámenes)

La elaboración de los PDF resultó ser un trabajo arduo que evidentemente implicó un dominio de los contenidos del curso, de la herramienta Mathematica y una adecuada estructuración de los temas. El texto fue levantado usando LaTex y; dicho sea de paso, empleando un editor de código LaTex desarrollado por el autor: FelTex. Posteriorme, se usó el Acrobat Distiller para generar los PDF1 y PDF3. Para incorporar los hipervínculos y los vídeos se empleó Adobe Acrobat 6.0 Professional. Esta herramienta es muy fácil de utilizar y convierte cualquier archivo plano en un documento multimedial.

La siguiente es la lista de los temas que se cubren en el primer curso:

- Fundamentos de Álgebra
- Fracciones
- Exponentes y radicales
- Ecuaciones y problemas

- Elementos de cálculo proposicional y teoría de conjuntos
- Desigualdades
- Funciones
- Función exponencial y función logaritmo
- Trigonometría

La siguiente es la lista de los temas que se cubren en el primer curso:

- Límites y continuidad
- Derivadas y aplicaciones
- Integral indefinida
- Integral definida y aplicaciones
- Introducción a las ecuaciones diferenciales
- Series
- Introducción a los métodos numéricos

3. FACTORES CRÍTICOS DE ÉXITO

El apoyar los cursos de matemática (o de cualquier otra materia) usando software, supone que se cumplan algunos requisitos básicos. A continuación se analizan algunos de los aspectos que definitivamente no se deben obviar:

- Elección del software: se debe escoger una herramienta que realmente venga a dar una contribución significativa en el área de interés. Se debe buscar referencia sobre las posibles opciones y elegir la más apropiada. El contar con un experto en la herramienta es realmente un aspecto deseable.
- Licencias: es deseable que el software se consiga legítimamente. Definitivamente el precio es un factor que incidirá directamente en la elección de la herramienta a usar.
- Capacitación: el personal docente debe ser capacitado oportunamente de manera que manejen con soltura la herramienta escogida. El profesor debe servir de aleado en la introducción del software. Si no está apropiadamente capacitado, este funcionará como un obstáculo en el proceso. Por otro lado, debe escogerse un

cuerpo docente proclive al cambio hacia el nuevo enfoque. Normalmente los más viejos se resisten a estas herramientas.

- Material bibliográfico: la elaboración de una guía que apoye la labor docente en la introducción de la herramienta es muy importante. El profesor no sentirá que tiene que partir de cero. El paquete MCM cumple esta función.
- Equipo de cómputo: se debe verificar que la herramienta se desempeñe bien sobre el hardware con el que se cuenta. Si no se toma en cuenta este aspecto, podría ser necesario comprar software y también equipo.
- Experiencia: es muy normal que la primera vez que se implemente el enfoque mediante software, las cosas no salgan del todo bien. De hecho, sería extraordinario que todo saliera bien. El cuerpo docente debe experimentar y buscar un punto de equilibrio que compagine el enfoque tradicional y el apoyado con software.
- Retroalimentación: es recomendable que a lo largo del curso, los docentes se reúnan periódicamente para intercambiar experiencias. Es conveniente nombrar algún líder que se encargue de recoger los aportes del grupo y encausarlos apropiadamente.

En la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica, se empezó a impartir, a inicios del año 2005, dos de sus cursos de matemática usando software para apoyarlos. La experiencia ha sido muy interesante y, definitivamente, lo más importante es aplicar el enfoque con una mentalidad flexible que dé campo a improvisaciones y adaptaciones sobre la marcha. De seguro cuando se repita la experiencia, las cosas mejorarán.

4. Conclusiones y recomendaciones

El uso de software en el proceso enseñanza-aprendizaje de un tema es un aspecto que puede ser muy enriquecedor. Probablemente no es cierto que una herramienta informática venga a resolver todos los problemas de promoción en los cursos de matemáticas. Sin embargo, es importante que todas estas opciones las conozca el docente para que tenga diferentes posibilidades a la hora de elegir el rumbo de sus cursos.

La experiencia de introducir software en los cursos de matemáticas en la Universidad Nacional de Costa Rica es todavía incipiente. Es un proceso en el que estamos aprendiendo todos. Es importante hallar ese punto de equilibrio que marca hasta dónde se debe emplear el enfoque “tradicional” y dónde sería provechoso usar el nuevo enfoque.

Definitivamente contar con una material como MCM hace que el proceso cuente con una orientación explícita y facilite la introducción de Mathematica en los temas de matemática elemental, cálculo diferencial, series, ecuaciones diferenciales e introducción a los métodos numéricos.

La experiencia con MCM evidencia que la tarea no es sencilla. El proceso requiere que cada docente se encuentre comprometido, o por lo menos identificado, con el enfoque.

Algo interesante de comentar es que el proceso es diferente para cada curso. El elegir los temas que serán apoyados con software, el grado de dificultad de los ejercicios, el propósito de la introducción de la o las herramientas es algo que debe definirse explícitamente por los promotores del nuevo paradigma.

Bibliografía

[1] Ávila, J.F. *Álgebra y Trigonometría*. Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica. 1998

[2] Ávila, J.F. *Ejercicios de Cálculo.* Tercera Edición, Costa Rica: Editorial Tecnológica de Costa Rica. 2003.

[3] Wolfran S. The Mathematica Book, Third Edition, USA. 1988.

METODOS NUMÉRICOS PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Mynor Chacón Díaz[1]

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar una opción alternativa para impartir un curso de Métodos Numéricos dirigido a estudiantes de ingeniería, utilizando la calculadora TI-89 como una herramienta para agilizar procesos. Se hace énfasis en lograr que el aprendizaje es más significativo mediante la visualización gráfica de determinados problemas y su solución. El curso en mención pretende que el alumno aplique los conceptos y métodos aprendidos mediante el uso de la calculadora, sin tener que pasar por el estudio previo de un lenguaje y su programación.

ANTECEDENTES.

El presente artículo trata sobre un curso de métodos numéricos dirigido a estudiantes de ingeniería. Inicialmente se utilizó, hace aproximadamente 5 años, un laboratorio dotado de calculadoras Hewlett Packard HP-48, actualmente se trabaja con calculadoras Texas Instruments TI-89.

Durante un período intermedio se impartió en un laboratorio de computadoras, sin embargo la experiencia no fue muy provechosa ya que los laboratorios existentes no están totalmente adecuados para una clase de matemática. Por ejemplo, normalmente la disposición de las computadoras dentro del aula no es la óptima para un curso que no sea 100% trabajo con ellas, si no que requiera de la pizarra una porción considerable del tiempo de clase, tal es el caso de matemática o estadística.

El estudiante que llega al curso ya ha tenido experiencia con las calculadoras de manera que esto es un factor que contribuye a que la clase sea más ágil.

[1] Universidad de Costa Rica, min-60@costarricense.cr

TECNOLOGÍA VS PROFESORES

Uno de los tópicos de mayor interés en la enseñanza de la matemática en los últimos años ha sido el uso de calculadoras y computadoras como herramientas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Según Susan D.Barton en su artículo "*Reluctant Reforms` Instructional Practice and Conceptions of Teaching Calculus When Using Calculators*", deben cumplirse tres fases para que la integración de la tecnología en el aula se propague, la cuál precisamente es mi intención al escribir esta notas.

La primera, es que los profesores se den cuenta, tomen conciencia, de la necesidad de mejorar la instrucción matemática, viendo la tecnología como facilitadora del aprendizaje.
La segunda, se da cuando los profesores empiecen a experimentar con distintas formas de utilización de la tecnología en el mejoramiento de la enseñanza.
La tercera, se inicia en el instante en que los nuevos métodos sean los preferidos como formas de enseñanza y aprendizaje.

Aun cuando la primer calculadora grafica aparece en 1985, hoy, veinte años después, una considerable parte de los profesores se niegan a su utilización. Esto significa que existe una gran parte de la población de profesores de matemática que no se pueden ubicar en ninguna de las tres fases mencionadas. Esto nos sitúa lejos aún de lograr la integración de la tecnología en el aula.

¿QUÉ CAMINO DEBEMOS SEGUIR?

En la incansable búsqueda de encontrar un camino para obtener el mejor provecho de la tecnología, algunos colegas se han inclinado por la idea de construir laboratorios de computación, enseñar algún lenguaje de programación para que el alumno pueda programar sus algoritmos para la solución de determinado problema. Otros han hecho uso de computadoras y calculadoras como un instrumento que resuelve ciertos problemas sin preocuparse de la comprensión del concepto.

En este sentido es que debemos hallar un camino intermedio. En un curso para ingenieros, probablemente, gran parte de los alumnos no tengan interés ni tiempo de aprender un lenguaje de programación o el uso de algún software sofisticado de matemáticas. Esto resta tiempo y atractivo al concepto matemático que queremos enseñar.

Por otra parte, recordemos que las calculadoras y las computadoras realizan operaciones, pero no nos informan ha cerca de cómo resolver una situación determinada.

El objetivo debe ser el uso de la calculadora como instrumento facilitador de la comprensión y aprendizaje de los contenidos matemáticos. La disponibilidad de un instrumento como la calculadora gráfica TI-89, ayuda a describir y comprender con claridad los conceptos que sustentan las imágenes que despliegan en la pantalla.

EJEMPLOS DEL USO DE LA TI-89

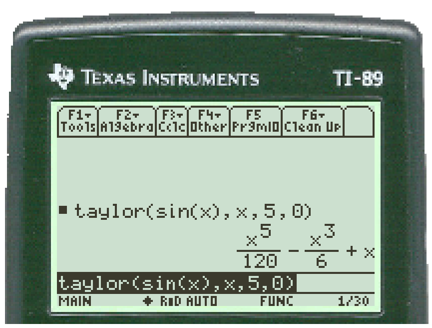
A continuación se presentan dos ejemplos de cómo se puede utilizar la calculadora gráfica TI-89 para la solución de los mismos.

Ejemplo1 : Polinomio de aproximación de Taylor

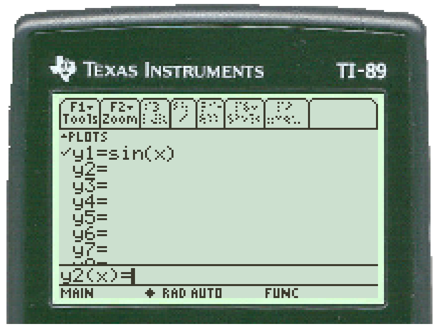
Determine el polinomio de Taylor de grado $n = 5, P_5(x)$ alrededor de $a = 0$, para la función $f(x) = sen(x)$. Graficar la función, el polinomio y dar una estimación de $sen(3/4)$.

Solución:

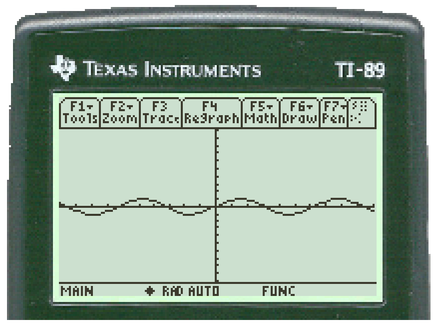
Para obtener el polinomio de Taylor se presionan las teclas ***F3*** y ***9*** (lo cual se denota en lo sucesivo como ***F3; 9)*** y se usa el formato *taylor* $(f(x), x, n, a)$



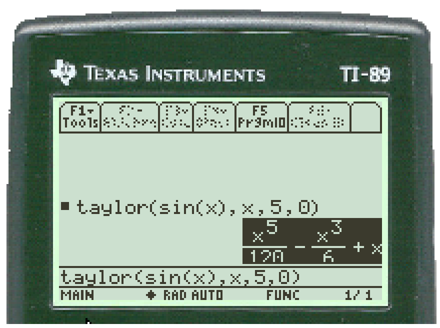
El próximo paso es graficar $f(x) = sen(x)$, para ello se ingresa la función al presionar ◊; F1



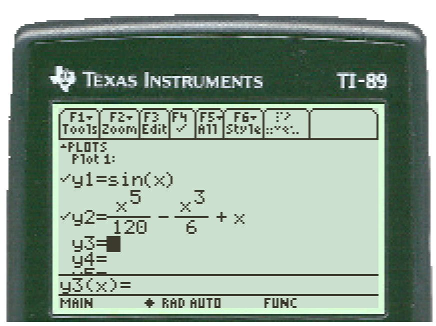
luego para graficar se presiona ◊; F3 y obtenemos:



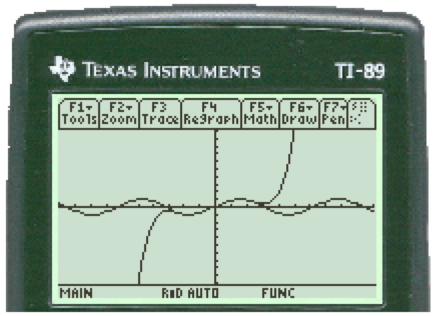
Con el objetivo de ver como aproxima el polinomio $P_5(x)$ a la función $f(x) = sen(x)$ vamos a graficar el polinomio de Taylor en el mismo gráfico de $f(x)$, para esto nos salimos a la pantalla principal con ***HOME***, seguidamente subimos el cursor y marcamos el $P_5(x)$ del $sen(x)$, lo copiamos con ◊; ***COPY***



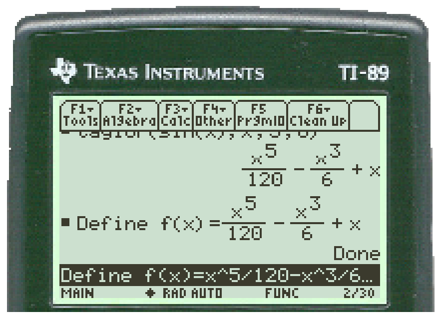
de nuevo ◊; ***F1*** y en el lugar correspondiente a ***y2*** lo copiamos con ◊; ***PASTE***



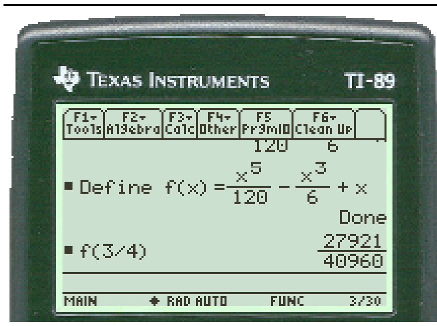
así se obtiene



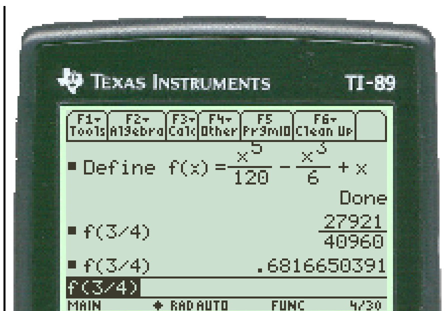
Para obtener la estimación de $sen(3/4)$, marcamos el polinomio obtenido anteriormente, luego presionamos ***F4; 1***, se escribe $f(x) = y$ se copia el polinomio, así queda definida la función por medio del comando ***Define***



ahora se digita $f(3/4)$



para obtener el valor numérico correspondiente (NO en fracción), presionamos ◊; ***ENTER*** y se tiene la aproximación siguiente:

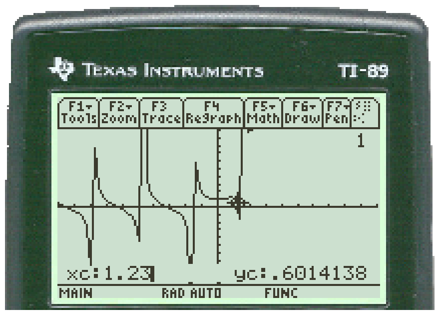


Ejemplo 2 : Resolución de ecuaciones no lineales. Método de Punto Fijo

Determine la solución positiva de la ecuación $e^x = \tan x$

Solución:

Primero graficamos la función $e^x - \tan x = 0$ para determinar la primer aproximación de la raíz, x_0.



tomaremos entonces $x_0 = 1.23$. Luego, existen claramente dos formas distintas de despejar $\boldsymbol{x}$ de la ecuación $e^x = \tan x$, las dos formas son las siguientes: $x = \ln(\tan(x))$ y $x = \arctan(e^x)$

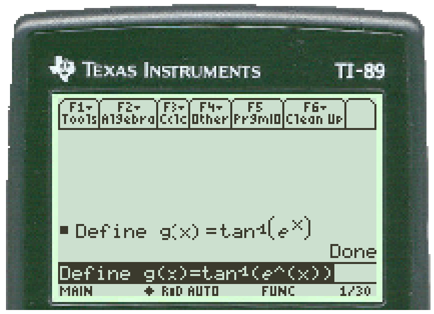
Para poder decidir cuál de las dos promete convergencia para la sucesión x_n, se construye la siguiente tabla:

$g(x)$	$g'(x)$	$g'(x_0)$
$\ln(\tan(x))$	$\dfrac{1}{sen(x)\cos(x)}$	3.17
$\arctan(e^x)$	$\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$	0.269

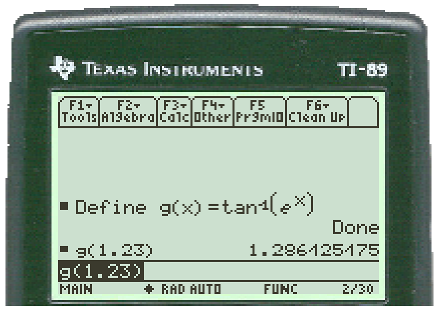
Puesto que $\left|g'(x_0) < 1\right|$ para la segunda opción se escoge como ecuación de punto fijo

$$x = \arctan(e^x)$$

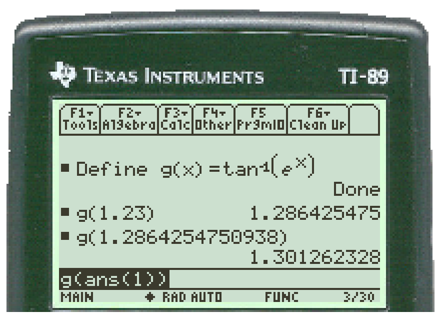
Con el objetivo de determinar los términos de la sucesión x_n, hasta llegar a la aproximación deseada, definimos la función ***(F4; 1)***



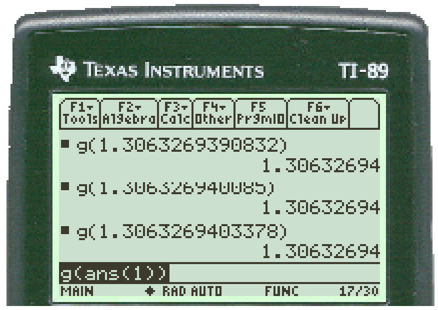
calculamos $g(x_0) = g(1.23)$



obtenemos $x_1 = 1.286425475$, luego $x_2 = g(x_1) = g(1.286425475)$, para realizar este y los siguientes cálculos de una forma rápida e iterativa sin tener que digitar el x_{i-1} para obtener x_i, se procede digitar ***g(ans(1))*** (note que ***ans*** se obtiene con ***2nd; (−)***)luego presionamos ***ENTER*** y se obtiene $x_2 = 1.301262328$



de nuevo presionamos ***ENTER*** y se obtiene $x_3 = g(1.301262328) = 1.305046298$, así sucesivamente se continua presionando ***ENTER*** hasta que $g(x_{i-1}) = x_i$. Al llegar a esta situación el punto fijo es x_{i-1}, en el ejemplo ocurre $g(x_{14}) = x_{15}$ es decir $x_{14} = x_{15} = 1.3063694$, en conclusión la solución aproximada de $e^x = \tan x$ es $x \approx 1.3063694$


TEXAS INSTRUMENTS
TI-89
F1 Tools
F2 Algebra
F3 Calc
F4 Other
F5 PrgmIO
F6 Clean Up
g(1.3063269390832)
1.30632694
g(1.306326940085)
1.30632694
g(1.3063269403378)
1.30632694
g(ans(1))
MAIN RAD AUTO FUNC 17/30

CONCLUSIONES:

El propósito fundamental del uso de una calculadora gráfica, es enseñar conceptos clásicos con algunos acercamientos interesantes. Recordemos que los estudiantes no hacen visualización gráfica de los problemas matemáticos, estos son más interesantes si los logran ver en la pantalla. El uso de las calculadoras nos permite primero reforzar los conceptos y avanzar más allá en los conocimientos, y segundo enfocar el trabajo del aula en solución de los problemas más que en cálculos tediosos. Permite la comprensión de muchos conceptos con los que tradicionalmente los profesores nos hemos peleado para facilitar su aprendizaje.

Por último, la sola presencia de la calculadora en el aula no produce los efectos que deseamos, estos dependen del papel que se le asigne a la tecnología dentro del sistema curricular.

BIBLIOGRAFÍA

-Del Puerto Silvia y Minnard Claudia, *El uso de la calculadora gráfica en el aprendizaje de la matemática*, Universidad CAECE, Argentina; Revista Iberoamericana de Educación.

-Del Puerto Silvia y Minnard Claudia, *La calculadora como recurso didáctico*, Universidad CAECE, Argentina.

-Queralt Llopis Tomás, Un *enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras*; Centro de Formación, Innovación y Recursos Educativos de Torrent(CEFIRE)-España.

-Beaudin Michael, *Teaching mathematics to engineering students with hand-held technology; Ecole de Tecnologie Supérieure*, Montreal, Canada.

-Susan D. Barton, *Reluctant Reformers' Instructional Practice and Conceptions of Teaching Calculus When Using Supercalculators*, Brigham Young University-Hawaii.

PoliEstudio:
Una herramienta computacional para la enseñanza de la Matemática, en secundaria

Juan José Fallas Monge[1]
Jeffry Chavarría Molina.

Resumen

PoliEstudio 1.0, es una herramienta computacional desarrollada en el lenguaje de programación Visual Basic 6.0, de licencia libre, orientada a la enseñanza media para el trabajo y manipulación de polinomios en una variable, tanto por los estudiantes, como por los docentes que estén desarrollando este tema.

El programa tiene como objetivo brindar ayuda al usuario en tres ámbitos: teoría, práctica y algoritmos; y fue diseñado para el trabajo en el aula (si se cuenta sólo con una PC), o en un laboratorio de computadoras. Se pretende que el programa ayude a los estudiantes a entender ciertos procedimientos, como el de la división de polinomios, y a los docentes a desarrollarlos en una forma innovadora; combinando la lección tradicional con una exploración más efectiva, de las propiedades y manipulaciones básicas, de los polinomios.

PoliEstudio, brinda, además, los resultados, de una forma clara, de las operaciones entre polinomios en una variable: adición, sustracción, multiplicación, división, y otras manipulaciones como: factorización, expansión, representación gráfica.

Se pretende que los asistentes a esta ponencia, conozcan de las fortalezas y ventajas que se pueden obtener, haciendo uso de dicha herramienta, en el desarrollo de una clase de matemática, a nivel de secundaria.

Objetivo general:

- Fortalecer la incorporación de la herramienta computacional en la enseñanza de la matemática en secundaria.

Objetivos específicos:

- Motivar a los y las participantes a innovar en cuanto a la metodología de enseñanza de la matemática.
- Facilitar una herramienta computacional, de fácil uso, a los y las docentes, que les permita desarrollar el tema de polinomios en una variable, de una manera innovadora.

Descripción de la ponencia

Temas a tratar:

- *Objetivos de la ponencia.*
- *Aspectos generales sobre PoliEstudio:*
    - Naturaleza del proyecto. ¿Por qué se llevo a cabo este proyecto?
    - Lenguaje de programación, requerimientos, licencia.

[11] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, jfallas@itcr.ac.cr, jchavarria@itcr.ac.cr

        - Alcance del programa. ¿En qué temas de secundaria se puede utilizar y para qué niveles?.
- *Descripción del sofware:*
    - Interfaz principal (menús, pantalla, botones).
- *Uso del programa:*
    - Operaciones entre polinomios (suma, resta y multiplicación).
    - Expandir expresiones polinomiales.
    - División de polinomios (sintética y larga).
    - Resolución de ecuaciones polinomiales.
    - Búsqueda de ceros de un polinomio.
    - Factorización de polinomios.
    - Evaluar un polinomio en una constante real dada.
    - Algunas extras:
        1. Definición de polinomios.
        2. Manejo de la precisión de los dígitos.
        3. Color del texto y color de la pantalla.
        4. Insertar comentarios.
        5. Imprimir.
        6. Guardar (compatibilidad del archivo generado con Microsoft Word).
    - *Graficación:*
        1. Gráfica de uno o más polinomios.
        2. Flexibilidad del software en:
            - Manejo de las escalas.
            - Rangos de graficación.
            - Inventario de gráficas y sus herramientas.
            - Manejo de colores de las gráficas, ejes, etiquetas y fondo de la pantalla.
            - Exportar las gráficas.
    - Presentación de las ayudas del software.
- Ventajas y desventajas del programa.
- Preguntas por parte de los participantes.

Desarrollo de los aspectos anteriores

✓ **Aspectos generales sobre PoliEstudio:**

PoliEstudio1.0 es un software diseñado en el año 2004, por estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, del Instituto Tecnológico de Costa Rica; como proyecto del curso Taller de Software Didáctico, impartido por el profesor Luis Acuña Prado.

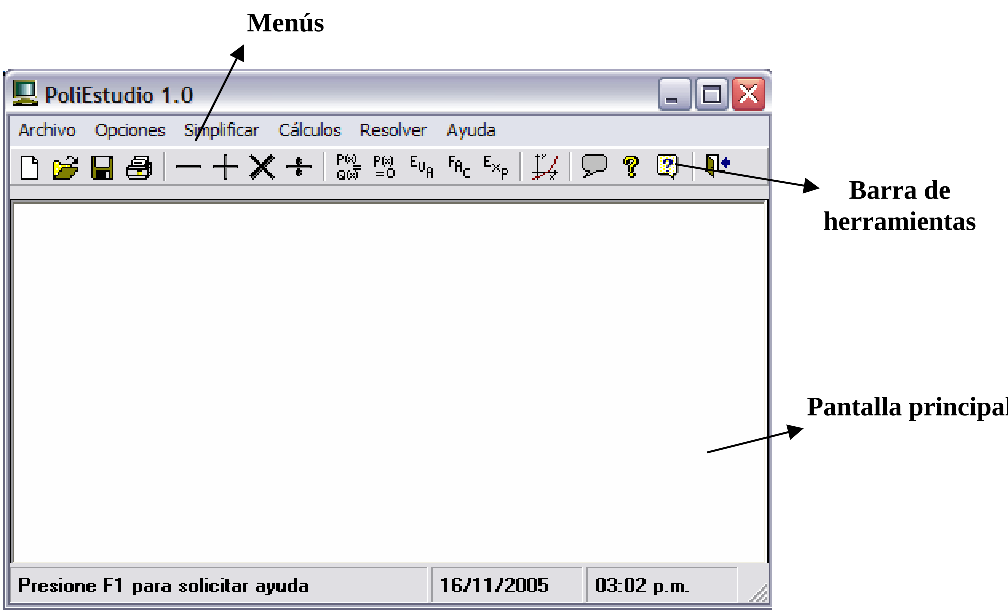
Fue desarrollado en el lenguaje de programación Visual Basic 6.0. Es un software de licencia libre.

i. **Requerimientos:** Computadora Pentium II, Windows 98 o cualquier versión posterior.

ii. **Alcance del programa:** El programa fue creado para trabajar a nivel de secundaria, para el desarrollo del tema de polinomios en **una variable**. Se puede utilizar, prácticamente desde octavo año, pues se puede explotar potenciales del software para desarrollar temas tan básicos como la suma de monomios o valor numérico de una expresión algebraica; hasta algoritmos más elaborados como la división de polinomios o graficación de funciones polinomiales.
En general puede ser utilizado por cualquier persona que se esté familiarizando con manipulaciones algebraicas, así como fuente de consulta y revisión de ejercicios. Sin embargo, el objetivo principal es que sea utilizado por profesores y profesoras de matemática, como un complemento para el desarrollo de su lección, de una manera diferente; empleando la computadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje; quebrando de esta forma el paradigma tradicional en que se ha desarrollado la enseñanza de la matemática desde siempre.

✓ **Descripción del software:**

Interfaz principal: En el momento de ejecutar PoliEstudio1.0, la pantalla principal de trabajo que se muestra es la siguiente:



La **barra de herramientas** contiene botones de acceso rápido a la mayoría de las opciones del programa. **La pantalla principal**, será donde el programa irá "imprimiendo" los resultados obtenidos, esto con la intención que el usuario cuente con un resumen de todos los resultados de las operaciones que ha estado realizando. Esto lo iremos abordando de modo que se avanza en el documento.

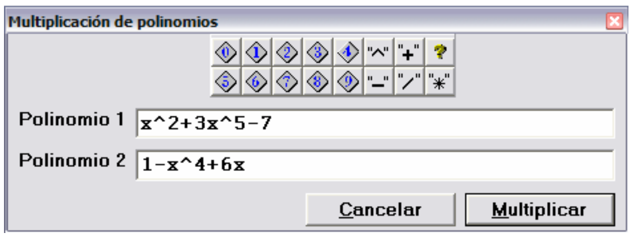
<u>Uso del programa</u>

➢ **Operaciones entre polinomios** (suma, resta y multiplicación).

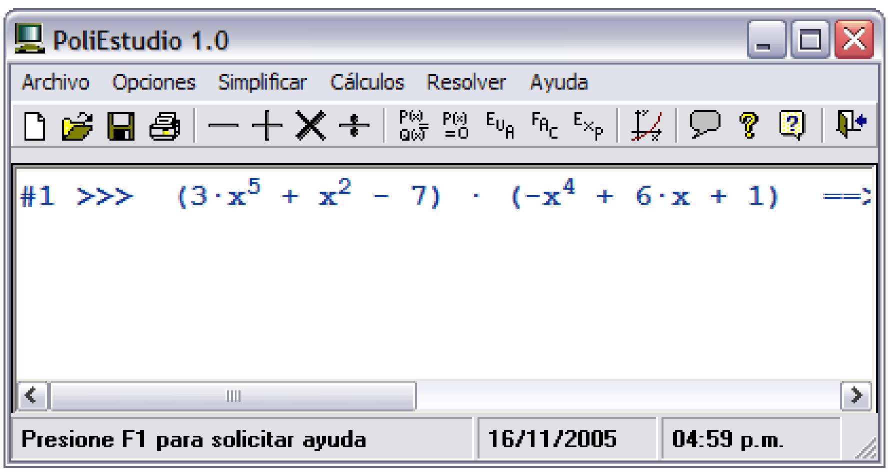
Para trabajar en PoliEstudio con la suma, resta y multiplicación de polinomios, se sigue una estructura semejante en los pasos a seguir; por ello explicaremos el caso de la multiplicación entre dos polinomios. Para seleccionar esta opción existen tres posibilidades:

1. Seleccionando **Cálculos|Multiplicación**…
2. Presionando la tecla **F4.**
3. Presionar directamente en la barra de herramientas el botón .

Luego se genera el formulario para el ingreso de datos. Realicemos la multiplicación entre los polinomios $P(x) = x^2 + 3x^5 - 7 \ y \ Q(x) = 1 - x^4 + 6x$. El ingreso de datos se realiza como se muestra en la siguiente figura (al finalizar presione multiplicar):



Automáticamente se carga en la pantalla principal, la manipulación realizada:

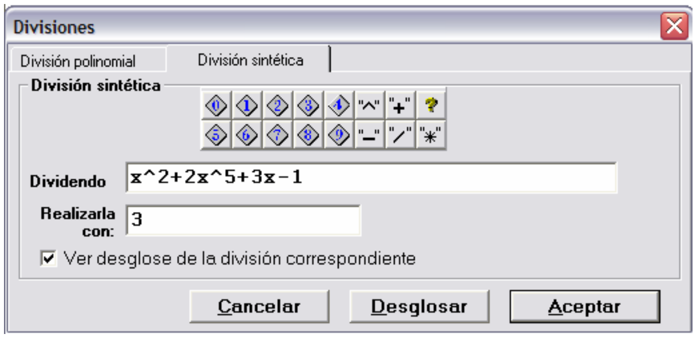


Análogamente, se trabaja con las otras manipulaciones como: restar y sumar.
Un procedimiento semejante se sigue para: *búsqueda de ceros, factorización, evaluar y resolución de ecuaciones polinomiales.*

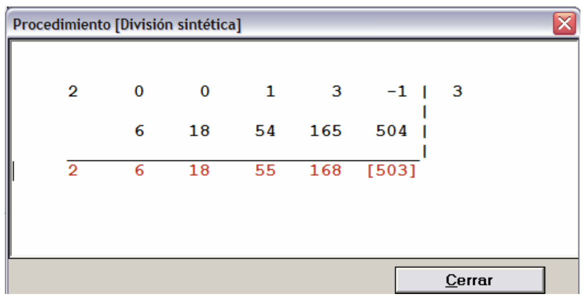
- **División de polinomios:**

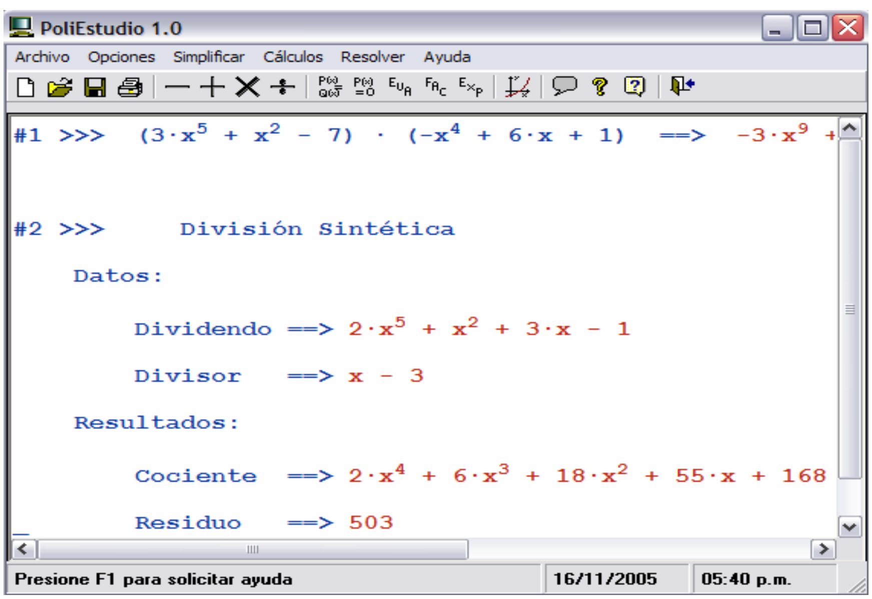
Una de las principales potencialidades que posee el programa consiste en realizar la división polinomial mediante el método largo y mediante la división sintética; pero lo fuerte recae en que PoliEstudio muestra el procedimiento del cómo se realiza la división, en cualquiera de los dos métodos.
Para ejemplificar, primero realicemos la división sintética entre los polinomios $P(x) = x^2 + 2x^5 + 3x - 1$ y $Q(x) = x - 3$. Cargamos el formulario de división y seleccionamos la viñeta **División sintética**. Ingresamos los datos, para realizar la

división de $P(x)$ entre $Q(x)$, teniendo el cuidado que para esta opción es necesario ingresar el cero de $Q(x)$; para este caso $x=3$. Como se muestra a continuación:

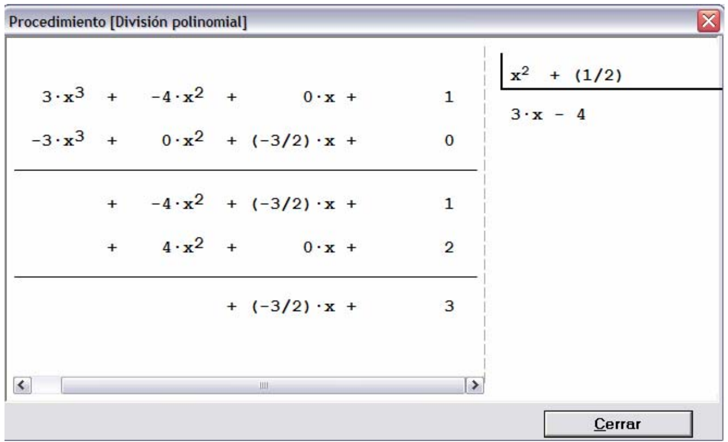


A continuación presione **Aceptar**, para que se muestre el procedimiento de la división sintética y finalmente, se carguen en la pantalla principal los datos relativos a la división.



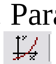


Por otra parte, de manera análoga, podemos seleccionar realizar la división larga, denominada **División polinomial** entre los polinomios $Q(x)=3x^3+1-4x^2$ y $S(x)=\frac{1}{2}+x^2$. Así tenemos:

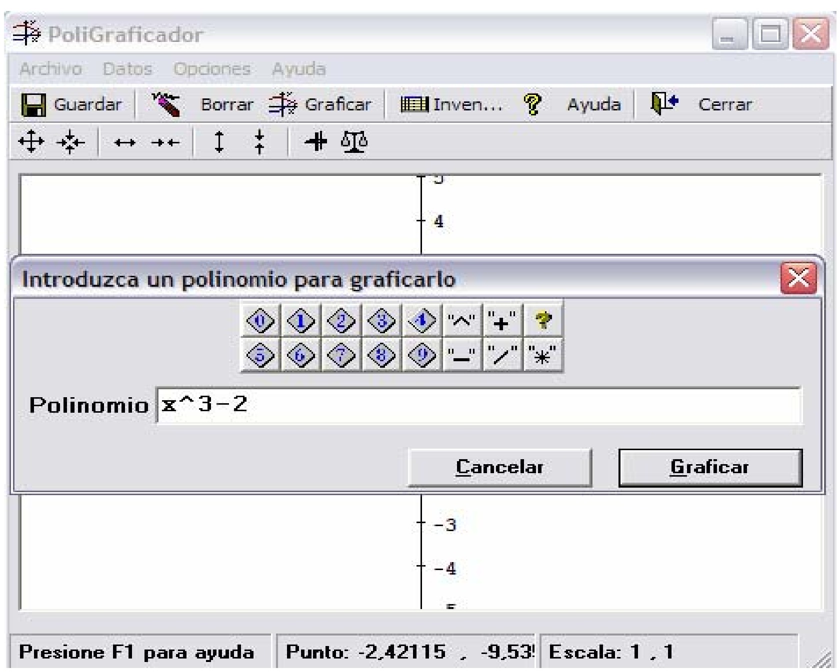


Análogamente al caso anterior, se cargará en pantalla el desglose de la división, donde se indica los polinomios dividendo, divisor, cociente y residuo.

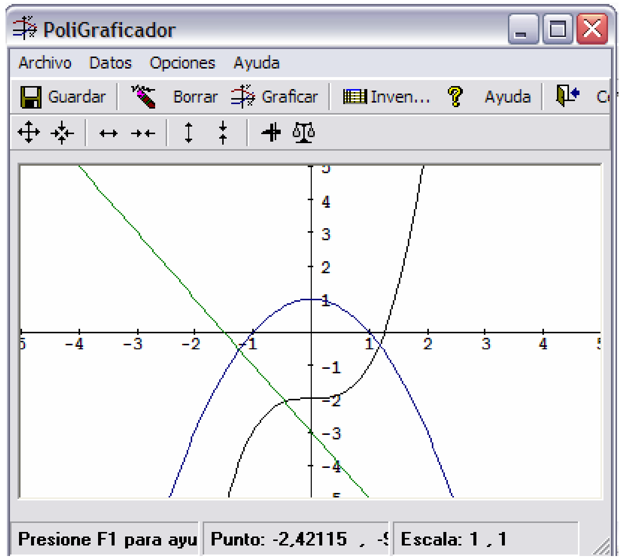
- **Graficación:**

PoliEstudio ofrece la posibilidad de realizar la gráfica de uno o más polinomios, según se desee. Para ello se diseñó, el formulario denominado **PoliGraficador**, que se carga con el botón , en la barra de herramientas.

Seleccione **Archivo|Nueva gráfica…** o bien **Ctrl+G**. y grafiquemos la función polinomial $f(x) = x^3 - 2$, como se muestra a continuación:



Análogamente podemos graficar otras funciones en el mismo plano cartesiano (si se desea, o bien borrar la anterior). Grafiquemos $g(x) = -x^2 + 1$ y $h(x) = -2x - 3$, para obtener:



Algunas de las opciones interesantes que presenta el **PoliGraficador** son:

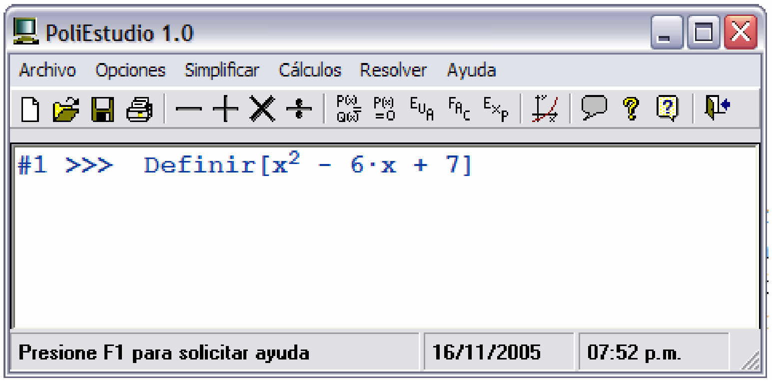
a) En la barra de herramientas del formulario, se presenta el botón **Inventario** (ver la figura anterior), donde tenemos acceso a reeditar los polinomios graficados (modificar el criterio de las funciones polinomiales, cambiar el color de las gráficas, ocultar o mostrar cualquiera de las gráficas).
b) Guardar la o las gráficas que hayamos graficado, utilizando la opción **Archivo|Guardar gráfica…**, esto generará una imagen en formato bmp.
c) Definir el rango de graficación, tanto en el eje *x* como en el eje *y*, seleccionando **Datos|Rango de graficación…**
d) Relacionado con el punto anterior, podemos manipular las escalas de graficación utilizando los botones , en la barra de herramientas.
e) Se brinda la facilidad, de exportar a la pantalla principal del programa una imagen de las gráficas, esto con el objetivo de continuar almacenando los resultados obtenidos. Esto se logra seleccionando **Datos|Exportar a pantalla**.
f) Dentro del menú **Opciones**, podemos cambiar el color de fondo, color de las gráficas, color de los ejes y color de las etiquetas.

➢ **Ayudas de PoliEstudio:**

PoliEstudio cuenta con dos ayudas. La primera de ellas se accesa directamente presionando **F1** o utilizando el botón , de la barra de herramientas; y proporciona la ayuda sobre el uso del programa. La otra se accesa presionando **Ctrl+F1** o utilizando el botón , de la barra de herramientas; y contiene toda la materia, ilustrada mediante ejemplos, relativa a polinomios en una variable. Lo anterior con la intención que el usuario tenga una fuente rápida donde consultar sobre la teoría correspondiente.

➢ **Algunas extras de PoliEstudio:**

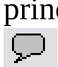
- **Definición de polinomios:** En Poliestudio es posible definir uno o más polinomios, con la intención de que si se necesita realizar varias manipulaciones para un mismo polinomio, podamos hacer referencia a él, sin necesidad de estarlo digitando una y otra vez. Para esto se selecciona **Simplificar|Definir polinomio…** produciendo, por ejemplo:



Así, podemos hacer referencia sobre este polinomio en cualquier parte de PoliEstudio simplemente con la sintaxis #1.

- **Manejo de la precisión de los dígitos:** Seleccionando **Opciones|Precisión…** es posible cambiar la cantidad de dígitos con que se desea PoliEstudio realice y muestre los cálculos, que se efectúan en punto flotante; como por ejemplo aproximar los ceros irracionales de un polinomio.

- **Color del texto y color de la pantalla:** En el menú de **Opciones** se permite al usuario cambiar los colores del texto de salida y de entrada de datos, así como el color que desea para la pantalla principal del programa.

- **Insertar comentarios:** Es posible insertar uno o varios comentarios, en la pantalla principal, junto con los resultados que vamos obteniendo. Para esto utilice el botón , de la barra de herramientas.

- **Imprimir:** Utilice el botón , de la barra de herramientas. Se imprimirá el contenido que tengamos acumulado en la pantalla principal.

- **Guardar:** Utilice el botón , de la barra de herramientas. PoliEstudio genera un archivo en formato **txt** que puede ser abierto utilizando Microsoft Word. Esto brinda gran flexibilidad para que el usuario pueda observar su trabajo en casi cualquier computadora, sin la necesidad de tener a mano PoliEstudio.

Conclusiones

Ventajas:

- PoliEstudio es un software de licencia libre, por lo que no representa ningún gasto, para el profesor o profesora que lo desea utilizar.

- PoliEstudio permite observar el procedimiento de la división polinomial larga y división sintética, lo cual nos facilita utilizarlo como un tutor para el estudiante.
- El producir archivos de texto formateado permite que sea compatible con cualquier editor de texto con formato para Windows, en especial con Microsoft Word. Lo que permite que cualquier usuario pueda tener acceso a los archivos sin necesidad de poseer el programa.
- Exige pocos requerimientos para su uso.
- PoliEstudio se puede aprender a usar en forma rápida, siendo accesible para tanto profesores como para estudiantes.
- Posee dos tipos de ayuda: Una con la teoría de polinomios y la otra sobre el uso del programa.
- Se pueden exportar las gráficas en formato bmp.

Desventajas:

- El software trabaja únicamente con polinomios de una única variable, por lo que no debe ser el único apoyo del profesor.
- El programa, en algunos pocos casos, se ve limitado a la hora de factorizar polinomios que no poseen ceros reales.
- El programa no resolverá ecuaciones, encontrar ceros o factorizar polinomios donde el grado de dichos polinomios sobrepase el grado 100.
- Las raíces y soluciones irracionales son expresadas en punto decimal.
- Para fracciones cuyo denominador o denominador sobrepase 1 000 000 000 se trabajará en punto decimal.

PROBLEMAS DE CONTEO: ¿POR QUÉ SON TAN DIFÍCILES?

BASADO EN LAS IDEAS DE ANDRÉ ANTIBÍ

Félix Núñez Vanegas[1]

Resumen:

El siguiente trabajo plantea la necesidad de resolver los problemas de conteo de una forma más rigurosa que la intuitiva. Aquí se expone la solución a un problema específico de conteo de dos formas: la usual, la que se hace en una clase; y una forma rigurosa, la que se exige en otros dominios de la matemática.

Los problemas de conteo se caracterizan a menudo por ser difíciles y además porque a menudo no se tiene la certeza de que la solución dada es la correcta. Por lo general plantean grandes interrogantes y resulta difícil en muchas ocasiones hacerle notar a un estudiante, con razonamientos que de verdad lo que convenzan, el error en una solución dada por él (en el caso en que así sea). Lo anterior obedece a que las soluciones a estos problemas son más o menos intuitivas, cortas y sin el rigor matemático que se exige en otros dominios de esta disciplina. La regla del producto o de la suma no son reglas fáciles de utilizar adecuadamente, incluso la aplicación misma de algunos teoremas como por ejemplo el número de aplicaciones de un conjunto finito A en un conjunto finito B que es $|B|^{|A|}$ *no es tan sencilla. Puede suceder, en caso de que se logre ver que en efecto tal teorema es utilizable, que se equivoque el conjunto de partida con el de llegada. Así por ejemplo, cuando se pide determinar el número de maneras de contestar un cuestionario de 10 preguntas utilizando los vocablos "si" o "no", podría darse una respuesta errada (*10^2*) si se equivoca el dominio.*

El profesor Antibí planteó a 20 profesores de superior y 35 de liceo y también a 37 estudiantes, en Francia, el siguiente problema:

Test: ¿Cuál es el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto que tiene n+1 elementos en uno que contiene n elementos?

De los profesores, un total de 16% respondió correctamente (3 de superior y 6 de liceo), mientras que el resto, no respondió o la solución dada fue incorrecta. Además, de los estudiantes, tan sólo un 11% respondió acertadamente. Lo anterior, aunque se trate de un problema específico y de una muestra pequeña de profesores y estudiantes, no deja de ser alarmante.

A continuación, se resolverá el ejercicio propuesto en el test de dos maneras: La que se haría usualmente en un curso, es decir la manera intuitiva y corta, y la solución rigurosa, usando resultados de la teoría de conjuntos, justificando matemáticamente cada igualdad y cada implicación. Es decir se hará con todo detalle, para que resulten diáfanos al lector.

Problema:

Determine el número de aplicaciones sobreyectivas de un conjunto E que tiene n+1 elementos en un conjunto F que contiene n elementos.

Solución Usual

Se hará por etapas y luego se usará la regla del producto:

[1] Instituto Tecnológico de Costa Rica, Costa Rica. fnunez@itcr.ac.cr

Recordemos que la regla del producto dice así: Si una operación se puede ejecutar en n_1 formas, y si para cada una de éstas se puede llevar a cabo una segunda operación en n_2 formas, y para cada una de las primeras dos se puede realizar una tercera operación en n_3 formas, y así sucesivamente, entonces la serie de k operaciones se puede realizar en $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ formas.

Sea $E = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$ y $F = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Bajo estas condiciones, una función de E en F es sobreyectiva si y solamente si un elemento de F y sólo uno admite dos preimágenes y si todos los demás admiten sólo uno. Este resultado será demostrado más adelante.

<u>I Etapa</u>. Selección del elemento de F que admite dos preimágenes, digamos b_s: Como en F hay n elementos, entonces hay n posibilidades de escogerlo.

<u>II Etapa</u>. Selección de los dos elementos de E que serán preimágenes del elemento de F, digamos a_k y a_l: Como en E hay $n+1$ elementos, entonces hay $\binom{n+1}{2}$ posibilidades de escogerlos. Esto es

$$\binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{2(n+1-2)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{2(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

<u>III Etapa</u>. En E quedan sin asignar $n-1$ elementos y en F también. De esta forma,

Elementos de $E - \{a_k, a_l\}$	Posibilidades en F-$\{\mathrm{b_s}\}$
a_1	$n-1$
a_2	$n-2$
$\vdots$	$\vdots$
a_{n+1}	1

Por lo tanto, por la regla del producto, el número de maneras de definir una biyección de un conjunto que tiene $n-1$ elementos en otro que tiene la misma cantidad de elementos es $(n-1)!$.

Así, todo el proceso se puede llevar a cabo, de acuerdo con la regla del producto de $n \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n-1)! = \frac{n \cdot \left[(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!\right]}{2} = \frac{n \cdot (n+1)!}{2}$ maneras. Es decir, el número de aplicaciones sobreyectivas de E en F es $\frac{n \cdot (n+1)!}{2}$.

Solución Rigurosa

Lo que se va a hacer es redactar una solución para nada escueta como la anterior, sino que más bien, se hará con todo el rigor que el exigido en otros dominios de la matemática. Por tanto, la solución no se llevará tan sólo unas líneas, sino que más bien, necesita algunas páginas.

Se necesitan dos resultados:

1. Dos conjuntos finitos en biyección tienen la misma cardinalidad.
2. Si $(E_i) i \in I$ es una partición de un conjunto finito E, entonces

$$Card(E) = \sum_{i \in I} Card(E_i)$$

Recuérdese que una partición de un conjunto E es un conjunto de conjuntos no vacíos, disjuntos dos a dos y tal que su unión es E. Así por ejemplo, si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, entonces $\{\{1\}, \{2,3\}, \{4\}\}$ es una partición de E.

Nótese que $Card(E) = 4 = \sum_{i \in \{1,2,3\}} Card(E_i) = Card(E_1) + Card(E_2) + Card(E_3) = 1 + 2 + 1$ donde $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2,3\}$ y $E_3 = \{1\}$. Se ve la importancia de que los conjuntos E_1, E_2, E_3, sean disjuntos dos a dos, de lo contrario se estarían contando algunos elementos de E dos veces o más.

Sean $E = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}\}$, $F = \{b_1, \ldots, b_n\}$ y $S = \{ f : E \to F \,/\, f \; es\, sobreyectiva\}$. Se trata de calcular $Card(S)$. Para ello se va a buscar una partición de S, y luego tal partición se hará más fina, para luego usar el resultado dos.

<u>Teorema 1</u>:

Para toda aplicación f de E en F, $\left\{ f^{-1}\{b_i\} : i = 1, 2, \ldots, n \right\}$ es una partición de E, donde $f^{-1}\{b_i\}$ es el conjunto de preimágenes de cada b_i. En efecto, dada una aplicación f de E en F:

a. Cada $f^{-1}\{b_i\} \neq \varnothing$ ya que f es aplicación.

b. Es claro que $\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}\{b_i\} = E$

c. $f^{-1}\{b_i\} \cap f^{-1}\{b_j\} = \varnothing \ \ \forall i \neq j$

Prueba de c: Supóngase por contradicción que existen b_i y b_j $i \neq j$ elementos en F tales que

$f^{-1}\{b_i\} \cap f^{-1}\{b_j\} \neq \varnothing$
$\Rightarrow \exists a_k \in E \ tq \ f(a_k) = b_i \wedge f(a_k) = b_j$, pero esto no puede ser dado que f es aplicación.

Luego, $\left\{ f^{-1}\{b_i\} : i = 1, 2, \ldots, n \right\}$ es una partición de E.

<u>Teorema 2</u>:

Una aplicación f de E en F es sobreyectiva si y solamente si un elemento de F y sólo uno admite dos preimágenes y si todos los demás admiten sólo uno.

<u>Demostración:</u>

Como para cada aplicación f de E en F, el conjunto $\left\{ f^{-1}\{b_i\} : i = 1, 2, \ldots, n \right\}$ es una partición de E, entonces por el resultado 1, $Card(E) = \sum_{i \in I} Card(f^{-1}\{b_i\})$

$\Rightarrow n + 1 = \sum_{i \in I} Card(f^{-1}\{b_i\})$. De esta manera, es claro que f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $Card\left(f^{-1}\{b_i\} \right) \geq 1$. Esto dice que cada $b_i \in F$ debe tener al menos una, pero además se vio que $\sum_{i \in I} Card(f^{-1}\{b_i\}) = n + 1$, de donde se concluye que una condición necesaria y suficiente para que f sea sobreyectiva es que alguno de los $f^{-1}\{b_i\}$ tenga cardinalidad 2 (puesto que en F hay tan sólo n elementos) y que los demás tengan cardinalidad uno. Veamos algunas posibilidades

- Si cada $\left|f^{-1}\{b_i\}\right|$ es uno, entonces $n+1=\sum_{i\in\{1,2,,\ldots,n\}} Card(f^{-1}\{b_i\})=n \quad \Rightarrow\Leftarrow$
- Si cada $\left|f^{-1}\{b_i\}\right|$ es dos, entonces $n+1=\sum_{i\in\{1,2,,\ldots,n\}} Card(f^{-1}\{b_i\})=2n \quad \Rightarrow\Leftarrow$
- Si hay dos $f^{-1}\{b_i\}$ tales que $\left|f^{-1}\{b_i\}\right|$ iguales a 2, y los demás uno, entonces

$$n+1=\sum_{i\in\{1,2,,\ldots,n\}} Card(f^{-1}\{b_i\})=4+n-2=n+2 \quad \Rightarrow\Leftarrow$$

Por lo que la única posibilidad para que f sea sobreyectiva es que alguno de los $f^{-1}\{b_i\}$ tenga cardinalidad 2 y que los demás tengan cardinalidad igual a uno. En tal caso, se cumpliría que $n+1=\sum_{i\in\{1,2,,\ldots,n\}} Card(f^{-1}\{b_i\})=2+n-1=n+1$.

Ahora para cada $j=1,2,\ldots,n$, denotamos el conjunto $S_j=\left\{s\in S : b_j \text{ tiene dos antecedentes}\right\}$. Es decir, S_j es el conjunto de todas las funciones de E en F que son sobreyectivas y que además le asignan a cada b_j de F dos preimágenes en E. Así por ejemplo, S_2 es el conjunto de todas las funciones sobreyectivas de E en F en las que b_2 admite dos preimágenes.

Teorema 3:

El conjunto $\left\{S_j : j=1,2,\ldots,n\right\}$ es una partición de S.

Demostración:

a. Es claro que cada $S_j\neq\varnothing$ por el teorema anterior.

b. $\bigcup_{j=1}^{n} S_j = S$. En efecto, si $s \in \bigcup_{j=1}^{n} S_j \Rightarrow s \in S_{j_0} \Rightarrow s \in S$. Por otro lado, si $s \in S \Rightarrow s$ es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ un elemento b_j admite únicamente dos preimágenes bajo s y los demás elementos de F admiten sólo uno (Teorema 2). Por lo tanto $s \in S_j$, de donde $s \in \bigcup_{j=1}^{n} S_j$.

c. $S_j \cap S_k = \varnothing$, $j \neq k$.

Prueba: Supóngase por contradicción que existen j y k , con $j \neq k$ tales que

$S_j \cap S_k \neq \varnothing$
$\Rightarrow \exists s \in S_j \cap S_k$
$\Rightarrow s \in S_j \wedge s \in S_k$

$\Rightarrow s$ es sobreyectiva y además el elemento b_j y el b_k admiten dos preimágenes con la aplicación s . Pero esto, por el teorema 2, se vio que no puede ser

Definición:

Sea P_2 el conjunto de subconjuntos de E que tienen dos elementos. Para cada $\{k,l\} \in P_2$, definimos el conjunto $S_j^{k,l} = \{s \in S_j : s(a_k) = s(a_l)\}$. Es decir, $S_j^{k,l}$ es el conjunto de todas las funciones sobreyectivas que asignan a a_k y a_l a b_j .

Teorema 4:

Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, el conjunto $\{S_j^{k,l} : \{k,l\} \in P_2\}$ es una partición de S_j .

Demostración:

a. Es claro que cada $S_j^{k,l} \neq \varnothing$ (teorema 1)

b. $\bigcup_{\{k,l\} \in P_2}^{n} S_j^{k,l} = S_j$

Prueba: Sea $s \in \bigcup_{\{k,l\}\in P_2}^{n} S_j^{k,l} \Rightarrow s\left(a_{k_0}\right) = s\left(a_{l_0}\right) = b_j$ para algún $\{k_0, l_0\} \in P_2$ y la función s sobreyectiva $\Rightarrow s \in S_j$. Por el otro lado, si $s \in S_j$ $\Rightarrow b_j$ admite dos preimágenes en E bajo la función $s \Rightarrow s \in \bigcup_{\{k,l\}\in P_2}^{n} S_j^{k,l}$.

c. Si $\{k,l\} \neq \{k^{'}, l^{'}\} \Rightarrow S_j^{k,l} \cap S_j^{k^{'},l^{'}} = \varnothing$.

Se puede razonar por reducción al absurdo. Supóngase que

$\{k,l\} \neq \{k^{'}, l^{'}\} \wedge S_j^{k,l} \cap S_j^{k^{'},l^{'}} \neq \varnothing$

$\Rightarrow \{k,l\} \neq \{k^{'}, l^{'}\}$ y existe $s \in S_j^{k,l} \cap S_j^{k^{'},l^{'}}$

$\Rightarrow \{k,l\} \neq \{k^{'}, l^{'}\}$ y $s\left(a_k\right) = s\left(a_l\right) = s\left(a_{k^{'}}\right) = s\left(a_{l^{'}}\right) = b_j$ donde la función s es sobreyectiva. Ahora, como $\{k,l\} \neq \{k^{'}, l^{'}\}$ entonces al menos un elemento de uno no es elemento del otro, digamos por ejemplo que $k \neq k^{'}\ y\ k \neq l^{'}$, se ve entonces que b_j admite tres preimágenes distintos, lo que contradice el teorema 1. Por lo tanto, si $\{k,l\} \neq \{k^{'}, l^{'}\} \Rightarrow S_j^{k,l} \cap S_j^{k^{'},l^{'}} = \varnothing$

Denotemos ahora con B al conjunto de biyecciones del conjunto E sin los elementos a_k y a_l en el conjunto F sin el elemento b_j. Es decir, $B = \left\{ b : E - \{a_k, a_l\} \rightarrow F - \{b_j\} / b\ es\ biyectiva \right\}$.

__**Teorema 4**__**:**

$Card\left(S_j^{k,l}\right) = Card(B)$.

__Demostración__: Considérese la aplicación

$$\varphi : B \rightarrow S_j^{k,l}$$

$$b \rightarrow \varphi(b) = s(a_i) = \begin{cases} b(a_i)\ si\ \ i \neq k, i \neq l \\ b_j \qquad si\ \ i = k, i = l \end{cases}$$

Nótese que

1. $s : E \rightarrow F$

2. s es sobreyectiva porque la aplicación b tiene como ámbito todo F salvo b_j (pues b es biyectiva) y claramente el ámbito de s es $\left[F-\left\{b_j\right\}\right]\cup\left\{b_j\right\}=F$.

3. $s\left(a_k\right)=s\left(a_l\right)=b_j$

Así se tiene que $s\in S_j^{k,l}$.

Mostremos ahora que φ es una biyección. En efecto,

a. φ es inyectiva:

Sean b y $b^{'}$ en B tales que

$\varphi(b)=\varphi(b^{'})$. Como el dominio de b y $b^{'}$ es el conjunto $E-\left\{a_k,a_l\right\}$, se tiene que $\varphi(b)(a_i)=\varphi(b^{'})(a_i)\ \forall i\neq l\ \forall i\neq k$

$$\Rightarrow s(a_i)=s^{'}(a_i)\quad \forall i\neq l\ \forall i\neq k$$
$$\Rightarrow b(a_i)=b^{'}(a_i)\quad \forall i\neq l\ \forall i\neq k$$
$$\Rightarrow b=b^{'}$$

b. φ es sobreyectiva. Hay que demostrar que $\forall s\in S_j^{k,l}\ \exists b\in B\ tq\ \varphi(b)=s$

Sea $s\in S_j^{k,l}$ tómese $b=s\big|_{E-\{a_k,a_l\}}$. La función s restringida al conjunto $E-\left\{a_k,a_l\right\}$ es biyectiva, pues es sobreyectiva de un conjunto que tiene $n-1$ elementos en otro que tiene igual número de elementos, de este modo $b\in B$

Por otro lado, $\varphi(b)=s$ ya que $\forall i\neq k\ \forall i\neq l\ \ \varphi(b)(a_i)=s(a_i)$

Por el resultado 2, $Card(S_j^{k,l})=Card(B)$.

Ahora bien, se sabe que $Card(B)=(n-1)!\Rightarrow Card(S_j^{k,l})=(n-1)!$.

Así ya se puede calcular la cardinalidad de cada S_j . En efecto,

$$Card(S_j)=\sum_{\{k,l\}\in P_2} Card(S_j^{k,l})=\sum_{\{k,l\}\in P_2}\left(n-1\right)!$$

Pero el número de subconjuntos de dos elementos de un conjunto que tiene $n+1$ elementos es $\binom{n+1}{2}$ por lo que

$$Card(S_j) = \sum_{\{k,l\}\in P_2} (n-1)! = \binom{n+1}{2}(n-1)! = \frac{(n+1)!}{2(n-1)!}\cdot(n-1)! = \frac{(n+1)!}{2}.$$

De esta forma estamos en capacidad de calcular la cardinalidad del conjunto S:

$$Card(S) = \sum_{j=1}^{n} Card(S_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1)!}{2} = \frac{n(n+1)!}{2}.$$

<u>Conclusión</u>

Si todos los problemas de conteo se realizaran con todo detalle como en este caso, de seguro la solución no sería tan escueta, sino más bien prolija por la rigurosidad matemática con que se trabajarían. Por otro lado, la incertidumbre que se tiene cuando se da una solución a un problema de este tipo en unas pocas líneas, disminuiría con esta manera de proceder, ya que se tiene más control en cada etapa de la solución dada.

La solución propuesta para este ejercicio necesita muchas etapas y por lo general no se hace así. Se ve entonces que no es fácil atinarle al error que tiene una solución dada en el caso de que lo tenga. Es muy frecuente que en casos como éste se dé un conteo doble. De hecho, el profesor Antibí descubre en la solución que da un profesor, un error, que sin haber planteado primero la solución que él propuso, hubiera sido muy difícil lograr identificarlo.

La solución errada considera el conjunto $S_A = \{s \in S : s/A \ \ s\, biyección\ de\ A\ sobre\ F\}$ donde el conjunto A es subconjunto de E con n elementos. En alguna parte de su solución establece la igualdad:

$Card(S) = \sum Card(S_A)$, pero esto es falso, puesto que las S_A no constituyen una partición de S. En efecto, si esto fuera cierto, para cada $s \in S$ existiría un único elemento b_j de F que admite dos preimágenes, digamos a_k y a_l. Ahora, considérese los conjuntos $A_1 = E - \{a_k\}$ y $A_2 = E - \{a_l\}$. Así, la función s es una función sobreyectiva que tiene como dominio A_1 el cual tiene n elementos y como ámbito F que también tiene n

elementos. Por tanto, $s \in S_{A_1} \wedge s \in S_{A_2}$, por lo que al hacer la suma de los cardinales de los S_A, hay un conteo doble.

Se observa entonces que el requisito de ser partición del conjunto S es muy fuerte.

Bibliografía

Antibí, André. 2000. Métodos de resolución de problemas. Segunda Edición. Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica.

Artigue, Michéle; Douady, Régine; y otros. 1995. Ingeniería didáctica en educación matemática, Grupo Editorial Iberoamérica, Colombia.

Ayres, Frank. 1991. Álgebra moderna. McGraw Hill. México, D.F.

Banach, Stefan 1967. Cálculo diferencial e integral. Segunda Edición. Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana. México, D.F.

Brousseau, Guy. 1986. Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas.

Calderón, Silvia; Morales Mario. 1988. Análisis Combinatorio. Editorial Tecnológica de Costa Rica, Cartago.

Chevallard, Yves. 1998. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.

Kudriavtsev, L.D.1988. Curso de Análisis matemático. Segunda edición. Editorial MIR, Moscú.

Lipschuts, Seymour. 1976.Teoría y Problemas de Teoría de Conjuntos y temas afines. McGraw Hill. México, D.F.

Piza, Eduardo. Introducción al Análisis real en una variable. 2003. Primera Edición. Editorial de la Universidad de Costa Rica. Costa Rica.

Polya, G. 1966. Matemática y razonamiento plausible. Editorial Tecnos S.A. Madrid, España.

Rudin, Walter. 1979. Análisis real y complejo. Alhambra. Madrid, España.

Vergnaud, Gérard. La teoría de los campos conceptuales.

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA:
Análisis a-priori de un Problema de Solución Numérica

Ascheri, M. E. – Rechimont, E. E.[1]

RESUMEN

En este trabajo analizamos los registros de representación semiótica de conceptos matemáticos presentes en problemas propuestos para la Educación Polimodal, y que pueden ser utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas*, contemplada en los C.B.C. del mencionado nivel.

Las representaciones juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático (Hitt, 1996).

Analizamos los registros de representación semiótica y las funciones semióticas que relacionan estos registros en un problema relativo a las ecuaciones polinómicas. Con este análisis, pretendemos dilucidar cuáles de los registros de representación son de mayor peso a la hora de incorporar o darle sentido al concepto relativo a funciones polinómicas y a la determinación de las raíces de las correspondientes ecuaciones. Buscamos respuestas a:

¿Cuáles son los distintos registros de representación puestos en juego en la solución del problema? ¿Cómo se suceden? ¿Cómo aparecen y cuál es la necesidad de su conversión? ¿Cómo se coordinan en la actividad conceptual? ¿En qué medida la presentación del tema desde una situación problemática es beneficiosa para incorporar y dar sentido a la determinación de las raíces de una ecuación polinómica?

INTRODUCCIÓN

El concepto de funciones polinómicas en una variable forma parte de los Contenidos Básicos para la Educación Polimodal del Ministerio de Cultura y Educación de la Nación (1997). En el Bloque 2: Álgebra y Geometría, en la propuesta de alcance de los contenidos conceptuales figura: Funciones polinómicas en una variable**.** Operaciones. Raíces de una función polinómica.

En la síntesis explicativa se pone de manifiesto la relevancia que adquieren las funciones polinómicas como herramientas para representar situaciones funcionales de una variable describiendo situaciones de la vida real. Se mencionan también, que los procedimientos para el cálculo de las raíces de polinomios, por métodos gráficos e iterativos, se podrán realizar con ciertos recursos didácticos como, por ejemplo, calculadoras, calculadoras graficadoras, computadoras, etc.

---

[1] Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Universidad Nacional de La Pampa - Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa – Argentina, mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar

En los Contenidos Procedimentales del Bloque 2, no hay especificación concreta en cuanto al tratamiento de las funciones y/o ecuaciones polinómicas. La determinación de las raíces de dichas ecuaciones puede ser una tarea rutinaria o problemática (Chevallard, 1992), según sea el grado del polinomio considerado y en función de los conocimientos previos que posee el alumno.

En el Bloque 4: Contenidos Procedimentales del Quehacer Matemático, se presenta una síntesis categorizada de los alcances más ligados a las formas de trabajo de la disciplina:

1. Respecto de la investigación y resolución de problemas.
2. Respecto del razonamiento matemático.
3. Respecto de la comunicación.

Dentro de la primera categoría, en este trabajo, indagamos en cuanto a:

- Formulación de problemas y situaciones.
- Creación y desarrollo de estrategias para la resolución de problemas (descripción de un patrón, construcción de tablas, construcción de gráficos, análisis sistemático de posibilidades, reducción a problemas más simples, actuar o experimentar).
- Predicción, estimación y verificación de resultados y procedimientos.

La habilidad y destreza en la determinación de las raíces de las ecuaciones correspondientes es uno de los objetivos primordiales en el estudio de las funciones polinómicas. Su importancia reside en que es imprescindible para analizar otros conceptos matemáticos, como por ejemplo, determinación de asíntotas, obtención de puntos extremos, intervalos de monotonía, explicitar el comportamiento de la función, etc.

MARCO TEÓRICO

En el análisis y estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se observa, últimamente, que gran parte de las investigaciones en Didáctica de la Matemática se desarrollan alrededor del uso de nociones semióticas.

A partir de la semiótica, teoría lógica sobre los sistemas de signos, se observa en las investigaciones un empleo frecuente de la noción de representación. El concepto de esta noción se toma como equivalente a una señal externa, un signo o marca, esquemas o imágenes mentales, que muestran y hacen presente un concepto matemático.

Duval (1995), hace referencia a las representaciones mentales y a las representaciones semióticas y sostiene que el desarrollo de las representaciones mentales se lleva a cabo como una interiorización de las representaciones externas.

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento. Esto es, las estructuras matemáticas adquieren significado para el sujeto mediante el trabajo con las representaciones, y de aquí surge su interés didáctico. No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de *representación* en Matemática.

Dentro de las formas convencionales de representación, suelen distinguirse dos familias de sistemas: *representaciones simbólicas* y *gráficas* (Rico, 2000). Las *representaciones simbólicas* son de carácter alfanumérico. Se pueden simular mediante programas informáticos y la sintaxis se describe por reglas de procedimientos. Las *representaciones gráficas* incluyen las de tipo figurativo, de carácter analógico y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación.

La representación pone en consideración el objeto *representante* (símbolo o representación) y el objeto *representado* (conceptos o contenidos conceptuales) que Godino y Batanero (1994) denominan, respectivamente, *significante* y *significado*.

No existe conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación. Sin embargo, Duval (1995) establece que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación, y define los registros de representación como un medio de expresión que se caracterizan por signos propios y por la forma en que se organizan. Por ejemplo, una palabra escrita, una notación, un símbolo o una gráfica representan a un objeto matemático. Un registro está constituido por signos (símbolos, íconos o trazos). Constituyen los grados de libertad que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, un sentimiento latente, para explorar las informaciones o para comunicarlas a un interlocutor. Es cierto que cambiar la forma de una representación en matemática es difícil y a veces imposible para los alumnos, y que la comprensión de un contenido pareciera limitada a la forma de representación utilizada. En cuanto al análisis del desarrollo de los conocimientos y de los obstáculos hallados en los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento, a la comprensión de textos y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos, Duval (1995) pone de manifiesto tres fenómenos estrechamente vinculados que deben tenerse en cuenta en la relación de enseñanza-aprendizaje:

* *Diversificación de los registros de representación semiótica*. El lenguaje natural y las lenguas simbólicas no pueden considerarse como formando un único y mismo registro, así como tampoco los esquemas, los gráficos cartesianos, las tablas o las figuras geométricas, los cuales son sistemas de representación diferentes entre sí.

* *Diferenciación entre representante y representado*. Generalmente, esta diferenciación se asocia con la comprensión de lo que una representación representa y así permite integrarlas con otras representaciones.

* *Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica*. La mayor dificultad para la coordinación de registros radica en la importancia de los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones en diferentes sistemas semióticos.

Al analizar las relaciones enseñanza-aprendizaje en matemática se hace necesario explicitar los distintos tipos de objetos a los que se recurre para describir la actividad matemática y los procesos que de dicha actividad resultan. Una manera de llevar esto a cabo es observar y analizar qué proponen los textos de matemática respecto de una determinada temática. Tendremos en cuenta para el análisis del problema propuesto las siguientes entidades (Godino, en Prensa):

* *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, tanto oral como escrito). Esto es, las representaciones a las que hace referencia Duval.

* *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas, intramatemáticas, ejercicios,...).

* *Conceptos:* Definiciones o descripciones (operar, algoritmos, técnicas de cálculo, ...).

* *Propiedades:* Enunciados o proposiciones.

La actividad matemática surge cuando el sujeto se enfrenta a situaciones problemáticas en cuya solución hace uso de elementos ostensivos e intensivos de los que dispone. Godino (1998), denomina “entidades actuativas” a las acciones que realiza el sujeto en la búsqueda de una solución.

Consideramos, en la actividad matemática, los elementos ostensivos, extensivos e intensivos. Los elementos ostensivos son cualquier representación material usada en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos) y las entidades lingüísticas/notacionales. En los extensivos incluimos las entidades fenomenológicas como situaciones-problemas, aplicaciones. Y como elementos intensivos, las ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones (conceptos, proposiciones, teorías).

La relación entre la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento se da a través de las funciones semióticas, que permiten formular en términos semióticos el conocimiento matemático.

En los casos que no resulta posible recurrir a las propiedades de los polinomios (principalmente, los teoremas de factorización) para resolver el problema, se suele recurrir a métodos numéricos.

La comprensión de las relaciones entre representaciones mentales, computacionales y semióticas se logra, fundamentalmente, por la posibilidad de una clasificación de estos tipos de representación.

Presentamos un problema que resume esta consideración.

El problema de la caja

En una fábrica de chocolates se decidió envasar los bombones en un modelo de caja que sea un prisma de base x cm, de altura (x-2) cm, de profundidad (x+10) cm y cuyo volumen sea igual a 957 cm^3*. Para poder armar esta caja se desean conocer las medidas de sus lados. Para ello:*

a) Plantee la ecuación correspondiente, según los datos del problema.

b) Separe las raíces de esta ecuación realizando, primero manualmente y luego con la computadora, el gráfico de la función polinómica resultante.

c) En el apartado b) localizó las raíces de la ecuación polinómica. Utilizando estos datos y realizando 10 iteraciones del método de bisección, obtenga las medidas de los lados de este prisma.

c) Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC.

Solución

a) Planteamos la igualdad

$$V_{prisma} = x\,(x + 10)\,(x - 2) = 957, \text{ de donde, resulta}$$

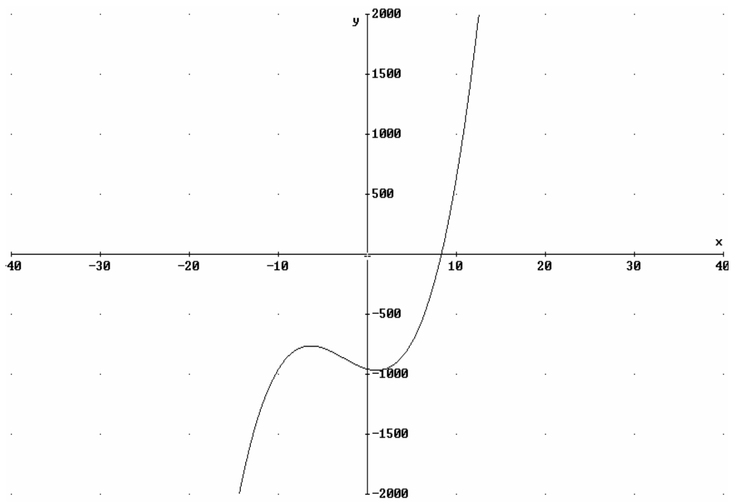
$$x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0.$$

Ll7amamos

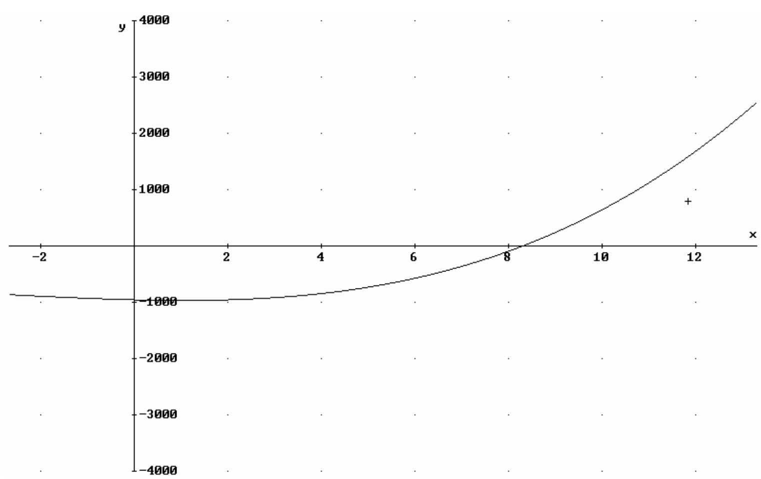
$$P(x) = x^3 + 8x^2 - 20x - 957.$$

b) Para hacer el gráfico manualmente primero calculamos la tabla de valores

x	P(x)
-11	-1100
-10	-957
-5	-782
0	-957
5	-732
8	-93
9	240
10	643



Se observa que la única raíz real de esta ecuación polinómica se encuentra entre 8 y 9. Más precisamente, observando la gráfica que se realiza utilizando el software Derive y cambiando el rango de graficación, entre 8 y 8.5.



c) Método de bisección.

Nro. de iter, n	a_{n-1}	x_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(x_{n-1})$	$f(b_{n-1})$
1	8	8.25	8.5	-93	-15.984375	65.125
2	8.25	8.375	8.5	-15.984375	24.052734	65.125
3	8.25	8.3125	8.375	-15.984375	3.905518	24.052734
4	8.25	8.28125	8.3125	-15.984375	-6.071503	3.905518
5	8.28125	8.296875	8.3125	-6.071503	-1.091022	3.905518
6	8.296875	8.304688	8.3125	-1.091022	1.405239	3.905518
7	8.296875	8.300078	8.304688	-1.091022	0.156607	1.405239
8	8.296875	8.298828	8.300078	-1.091022	-0.467334	0.156607
9	8.298828	8.299805	8.300078	-0.467334	-0.155395	0.156607
10	8.299805	8.300293	8.300078	-0.155395	0.000598	0.156607

d) Con la computadora (se utiliza un programa hecho en MATLAB) y según los datos del problema:número de iteraciones: 10; $a_0 = 8$; $b_0 = 8.5$, se obtiene que $x \approx 8.3$ y $P(8.3) \approx 0.0006$.

Luego, se llega a la conclusión de que la base del prisma es de 8.3 cm, su altura es de 6.3 cm y su profundidad es de 18.3 cm.

Además, se puede comprobar que para estas medidas de las aristas, se tiene que

$$V_{prisma} = 957.907 \text{ cm}^3 \approx 957 \text{ cm}^3.$$

Observación. Como es una ecuación de orden 3 y las raíces complejas aparecen de a pares, utilizando la descomposición factorial de un polinomio, se podrían obtener los valores de estas dos raíces complejas conjugadas, si fuese de interés.

Análisis didáctico de la solución del problema

Aplicaremos el marco teórico descrito para analizar el problema de la caja, conjuntamente con su solución. En este estudio nos interesamos en analizar los distintos registros de representación que se abordan en la situación problemática que hemos propuesto con la finalidad de la comprensión y la aprehensión del concepto: *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas.*

El cálculo numérico es estrictamente dependiente del sistema de representación de los números que se adopte.

En un primer análisis del enunciado de este problema podemos detectar un registro verbal (“el lenguaje común es el utilizado para representar situaciones del mundo real”).

Siguiendo el análisis, podemos observar que subyacen en la posible solución los registros simbólicos (... *un prisma de base x cm* ...), analíticos y algebraicos (... *Plantee la ecuación correspondiente* ...), tabular y grafical (... *separe las raíces* ..., *el gráfico* ...). También detectamos un registro numérico (... *realizando 10 iteraciones del método de bisección* ...).

En este proceso se pasa de los registros analítico y algebraico a los registros algebraico y numérico a través de la utilización de un método numérico (método de bisección).

El enunciado de la tarea describe una situación problemática para los sujetos (alumnos) a los que se propone: construir una argumentación que convenza de la necesidad universal y atemporal de la verdad expresada en el enunciado. Desde el punto de vista de la pragmática, el contexto en que la tarea es propuesta por el investigador desencadenan, asimismo, procesos interpretativos por parte de los alumnos de la misma.

Las palabras y expresiones usadas en el enunciado y la solución que desencadenan procesos interpretativos son las siguientes: *volumen de un prisma, plantee, separe y localice las raíces de una ecuación polinómica, grafique la función polinómica, obtenga las medidas de los lados utilizando un método numérico, compruebe.*

Estos términos y expresiones denotan entidades conceptuales u operaciones matemáticas controladas por definiciones que el sujeto competente debe recordar (implícitamente en la mayoría de los casos) y saber aplicar en la tarea y circunstancias pedidas.

Entra en juego, en este caso, la utilización de la computadora como una herramienta colaboradora en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la *Resolución Numérica* *de Ecuaciones Polinómicas* (por ejemplo, en la parte del enunciado: ... *Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC*).

Con la introducción de: ... *realizando 10 iteraciones del método de bisección* ..., en este proceso se ha pasado a los registros algebraico – numérico.

En la solución que presentamos se aplicaron diversos registros de representación:

En el apartado a) destacamos los registros verbal, analítico, simbólico y algebraico:

- Verbal: el lenguaje común se utiliza para representar esta situación del mundo real.
- Analítico: se hace referencia al volumen del prisma, según la definición (el volumen del prisma es igual al área de la base por la altura del prisma).
- Simbólico: se da esta definición mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal ($V_{prisma} = x\,(x + 10)\,(x - 2) = 957$).
- Algebraico: se llega a la expresión final por medio de operaciones algebraicas ($x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0$).

En el apartado b) destacamos los registros tabular y grafical:

- Tabular: corresponde a los valores numéricos de la función polinómica organizados en una tabla de valores.
- Grafical: corresponde a la representación en el plano cartesiano, incluyendo los convenios implícitos en la lectura de gráficos. Por ejemplo: interpretación de ejes coordenados, de unidades, de corte o cruce de la gráfica con respecto al eje x, etc.

En el apartado c) destacamos los registros simbólico, algebraico, analítico, tabular y numérico:

- Simbólico: se dan el número de iteraciones (n), extremos de los intervalos que contienen o encierran a la raíz de la ecuación polinómica (a_{n-1}, b_{n-1}), punto medio (x_{n-1}), valores de la función en los extremos y punto medio ($f\,(a_{n-1})$, $f\,(x_{n-1})$, $f\,(b_{n-1})$), a través de expresiones simbólicas sustentadas por las reglas del método de bisección.
- Analítico – algebraico: se obtiene el punto medio a partir de la definición, utilizando la expresión algebraica correspondiente ($x_{n-1} = (a_{n-1} + b_{n-1})/2$).
- Numérico: se realizan todas las evaluaciones que conllevan y que están involucradas en el método de bisección.

- Tabular: todos los valores numéricos obtenidos se organizan en una tabla.

Finalmente, para facilitar y mejorar la comprensión e interpretación de los resultados obtenidos manualmente y para comprobar la validez de los mismos, se utiliza la computadora. Las tareas de computación son importantes en la enseñanza – aprendizaje de los métodos numéricos, pues ayudarán a mejorar las habilidades de los alumnos, tanto en el conocimiento de la teoría como en la práctica de las temáticas involucradas.

CONCLUSIONES

El análisis a priori pone de manifiesto que, debido a la complejidad, la determinación de las raíces de la ecuación polinómica requiere del uso de procedimientos numéricos para su solución. Permite mostrar la compleja trama de entidades y relaciones entre los registros de representación en una actividad matemática elemental. En este caso, la utilización de herramientas computacionales resulta ideal.

Esta clase de análisis puede ayudar a superar la creencia de que la solución de algunos problemas es simple, al explicitar la multiplicidad de registros que se ponen en juego y observar que las conversiones de uno a otro, implica posicionarse en un determinado marco del cual es necesario conocer sus reglas lógicas. Es útil para describir los procesos de interpretación y comunicación del saber matemático e identificar las razones que pueden condicionar el aprendizaje.

Esperamos que los alumnos comprueben lo indispensable del uso de las computadoras para resolver este tipo de problemas, y tengan una demostración tangible de cómo pueden ayudarles a realizar estas tareas que conllevan una gran cantidad de cálculos.

BIBLIOGRAFÍA

Chevallard, Y., 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportes par une approche anthropologique.* Recherches en Didactique des Mathématique, 12 (1).

Duval, R, 1995, *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals,* Peter Lang S.A., Editions scientifiques européennes.

Godino, J. D., (Prensa), *Un enfoque semiótico de la cognición matemática,* U. de Granada.

Godino, J. D. - Batanero, C., 1994, *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.* Recherches en Didactique des Mathématique, Vol. 14 (3), pp. 325-355.

Godino, J. D. - Recio, A. M., 1998, *Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en Educación Matemática*, Proceedings of the 22 th International Conference of PME, Vol. 3, pp. 1-8, South Africa.

Hitt, F., 1996, *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos,* Investigaciones en Matemático Educativa, México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 245-264.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, 1997, *Contenidos Básicos para la Educación Polimodal,* República Argentina.

Piaget, J., 1968, *La formation du symbole chez l'enfant,* Neuchatel, Delachaux & Niestlé.

Rico, L., 2000, *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática,* Ponencia en el IV SEIEM (Huelva, 2000), U. de Granada, España.

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Análisis a-priori de un Problema de Solución Numérica

Ascheri, María E. - Rechimont, Estela E.

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa
Uruguay 151 - (6300) Santa Rosa - La Pampa - Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar
rechimont@exactas.unlpam.edu.ar

RESUMEN

En este trabajo analizamos los registros de representación semiótica y las funciones semióticas que relacionan estos registros en un problema relativo a las ecuaciones polinómicas.

Las representaciones juegan un rol fundamental en los procesos de construcción de conceptos, por lo que son importantes en la enseñanza, el aprendizaje y la comunicación del conocimiento matemático (Hitt, 1996).

Con este análisis, pretendemos dilucidar cuáles de los registros de representación son de mayor peso a la hora de incorporar o darle sentido al concepto relativo a funciones polinómicas y a la determinación de las raíces de las correspondientes ecuaciones. Buscamos respuestas a:

¿Cuáles son los distintos registros de representación puestos en juego en la solución del problema? ¿Cómo se suceden y aparecen, y cuál es la necesidad de su conversión? ¿Cómo se coordinan en la actividad conceptual? ¿En qué medida la presentación del tema desde una situación problemática es beneficiosa para incorporar y dar sentido a la determinación de las raíces de una ecuación polinómica?

INTRODUCCIÓN

El concepto de funciones polinómicas en una variable forma parte de los Contenidos Básicos de la Educación Polimodal del Sistema Educativo Argentino. En el Bloque 2 de los Contenidos Curriculares (1997), figura:

Funciones polinómicas en una variable. Operaciones. Raíces

La determinación de las raíces de las ecuaciones correspondientes puede ser una tarea rutinaria o problemática (Chevallard, 1992), según sea el grado del polinomio considerado y los conocimientos previos que posee el alumno.

Respecto de la investigación y resolución de problemas (Bloque 4), en este trabajo se indaga en cuanto a:

- Formulación de problemas y situaciones.
- Creación y desarrollo de estrategias para la resolución de problemas.
- Predicción, estimación y verificación de resultados y procedimientos.

Uno de los objetivos primordiales en el estudio de las funciones polinómicas es obtener habilidad y destreza en la determinación de las raíces de las ecuaciones correspondientes. Su importancia reside en que es imprescindible para analizar otros conceptos matemáticos: determinación de asíntotas, obtención de puntos extremos, intervalos de monotonía, comportamiento de la función, etc.

MARCO TEÓRICO

A partir de la semiótica, teoría lógica sobre los sistemas de signos, se observa, en las investigaciones en Didáctica de la Matemática, un empleo frecuente de la noción de *representación*. El concepto de esta noción se toma como equivalente a una señal externa, un signo o marca, esquemas o imágenes mentales, que muestran y hacen presente un concepto matemático.

Las representaciones matemáticas se entienden como herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, con las cuales los sujetos registran y comunican su conocimiento. De aquí surge su interés didáctico. En Matemática, no es posible estudiar los fenómenos sobre el conocimiento sin recurrir a la noción de representación.

Dentro de las formas convencionales de representación, suelen distinguirse dos familias de sistemas: *representaciones simbólicas* y *gráficas* (Rico, 2000).Las *representaciones simbólicas* son de carácter alfanumérico. Se pueden simular mediante programas informáticos y la sintaxis se describe por reglas de procedimientos. Las *representaciones gráficas* incluyen las de tipo figurativo, de carácter analógico, y su sintaxis viene dada por reglas de composición y convenios de interpretación.

Duval (1995) establece que no se deben confundir los objetos matemáticos con su representación. Define los *registros de representación* como un medio de expresión que se caracterizan por signos propios y por la forma en que se organizan. Por ejemplo, una notación, un símbolo o una gráfica pueden representar a un objeto matemático.

Un registro de representación constituye los grados de libertad que puede disponer un sujeto para objetivarse él mismo una idea aún confusa, para explorar las informaciones o para comunicarlas a un interlocutor. Cambiar la forma de una representación en matemática es difícil y a veces imposible para los alumnos, y la comprensión de un contenido pareciera limitada a la forma de representación utilizada.

Duval (1995) pone de manifiesto tres fenómenos estrechamente vinculados que deben tenerse en cuenta en la relación de enseñanza-aprendizaje:

• *Diversificación de los registros de representación semiótica*. El lenguaje natural y el simbólico no pueden considerarse como formando un único y mismo registro, así como tampoco los esquemas, los gráficos cartesianos, las tablas o las figuras geométricas, los cuales son sistemas de representación diferentes entre sí.

• *Diferenciación entre representante y representado*. Ésta se asocia con la comprensión de lo que una representación representa, lo que permite integrarla con otras.

• *Coordinación entre los diferentes registros de representación semiótica*. La mayor dificultad para llevarla a cabo radica en la importancia de los fenómenos de no-congruencia entre las representaciones en diferentes sistemas semióticos.

Para el análisis del problema propuesto, se tienen en cuenta las siguientes entidades (Godino, en Prensa):

• *Lenguaje* (términos, expresiones, notaciones, gráficos, tanto oral como escrito). Esto es, las representaciones a las que hace referencia Duval.

• *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas, intramatemáticas, ejercicios,...).

• *Conceptos:* Definiciones o descripciones (algoritmos, técnicas de cálculo, ...).

• *Propiedades:* Enunciados o proposiciones.

La actividad matemática surge cuando el sujeto se enfrenta a problemas en cuya solución hace uso de elementos ostensivos e intensivos de los que dispone. Estos elementos se considerarán en esta actividad.

La relación entre la actividad matemática y los procesos de difusión del conocimiento se da a través de las *funciones semióticas*.

Cuando no resulta posible usar las propiedades de los polinomios para resolver el problema, se suele recurrir a métodos numéricos.

La comprensión de las relaciones entre representaciones mentales, computacionales y semióticas se logra, fundamentalmente, por la posibilidad de una clasificación de estos tipos de representación.

El problema de la caja

En una fábrica de chocolates se decidió envasar los bombones en un modelo de caja que sea un prisma de base x cm, de altura (x-2) cm, de profundidad (x+10) cm y cuyo volumen sea igual a 957 cm^3. Para poder armar esta caja se desean conocer las medidas de sus lados. Para ello:

a) Plantee la ecuación correspondiente, según los datos del problema.

b) Separe las raíces de esta ecuación realizando, primero manualmente y luego con la computadora, el gráfico de la función polinómica resultante.

c) En el apartado b) localizó las raíces de la ecuación polinómica. Utilizando estos datos y realizando 10 iteraciones del método de bisección, obtenga las medidas de los lados de este prisma.

d) Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC.

Solución

a) Sea

$$V_{prisma} = x\,(x + 10)\,(x - 2) = 957,$$

de donde,

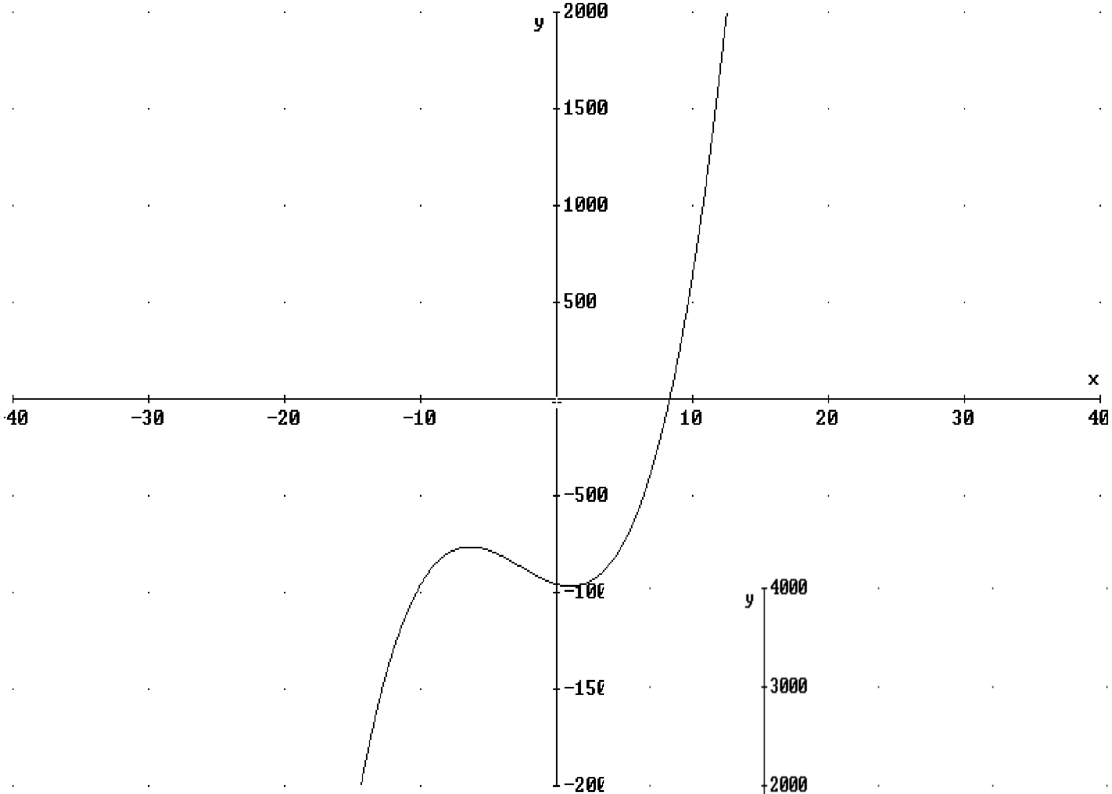
$$x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0.$$

Sea

$$P(x) = x^3 + 8x^2 - 20x - 957.$$

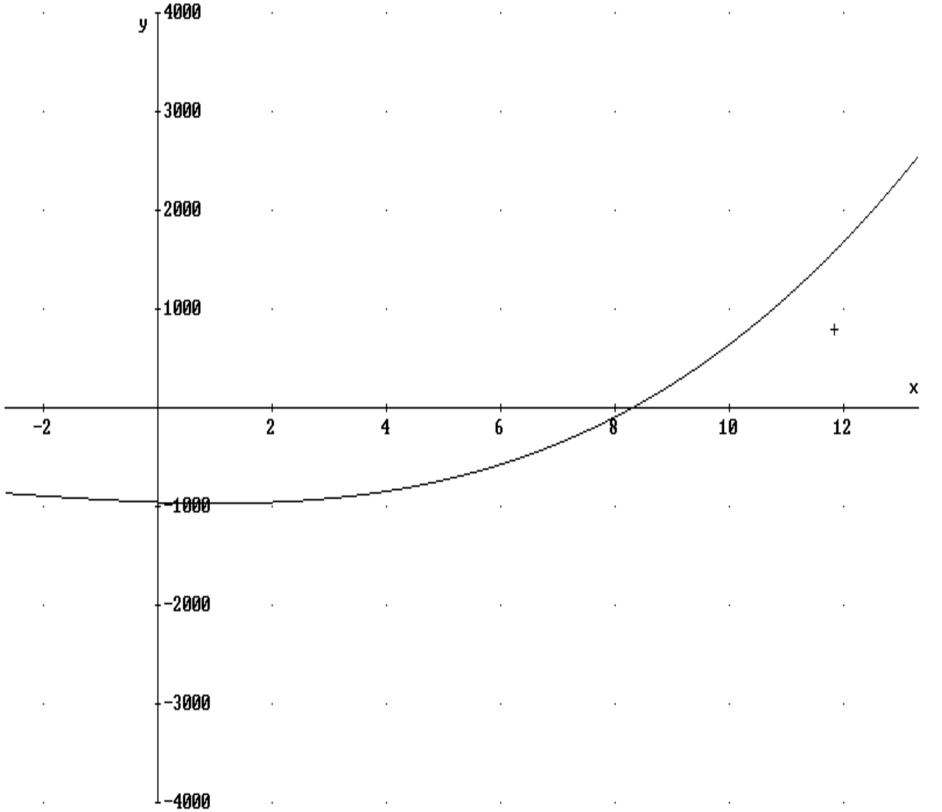
b) Para hacer el gráfico manualmente primero se obtiene una tabla de valores.

x	P(x)
-11	-1100
-10	-957
-5	-782
0	-957
5	-732
8	-93
9	240
10	643



Se observa que la única raíz real de esta ecuación polinómica se encuentra entre 8 y 9.

Más precisamente, observando la gráfica que se realiza utilizando el software Derive y cambiando el rango de graficación, la raíz se visualiza entre 8 y 8.5.



c) Método de bisección

Nro. de iter, n	a_{n-1}	x_{n-1}	b_{n-1}	$f(a_{n-1})$	$f(x_{n-1})$	$f(b_{n-1})$
1	8	8.25	8.5	-93	-15.984375	65.125
2	8.25	8.375	8.5	-15.984375	24.052734	65.125
3	8.25	8.3125	8.375	-15.984375	3.905518	24.052734
4	8.25	8.28125	8.3125	-15.984375	-6.071503	3.905518
5	8.28125	8.296875	8.3125	-6.071503	-1.091022	3.905518
6	8.296875	8.304688	8.3125	-1.091022	1.405239	3.905518
7	8.296875	8.300078	8.304688	-1.091022	0.156607	1.405239
8	8.296875	8.298828	8.300078	-1.091022	-0.467334	0.156607
9	8.298828	8.299805	8.300078	-0.467334	-0.155395	0.156607
10	8.299805	8.300293	8.300078	-0.155395	0.000598	0.156607

d) Con la computadora (se utiliza un programa hecho en MATLAB) y según los datos del problema:

número de iteraciones: 10; $a_0 = 8$; $b_0 = 8.5$,

se obtiene

$$x \approx 8.3 \quad \text{y} \quad P(8.3) \approx 0.0006.$$

Luego, se llega a la conclusión de que la base del prisma es de 8.3 cm, su altura es de 6.3 cm y su profundidad es de 18.3 cm.

Además, se puede comprobar que para estas medidas de las aristas, se tiene

$$V_{prisma} = 957.907 \text{ cm}^3 \approx 957 \text{ cm}^3.$$

Observación. Como es una ecuación de orden 3 y las raíces complejas aparecen de a pares, utilizando la descomposición factorial de un polinomio, se podrían obtener los valores de estas dos raíces complejas conjugadas, si fuese de interés.

Análisis didáctico de la solución del problema

Aquí se analizan los distintos registros de representación utilizados en la situación problemática propuesta con la finalidad de lograr la comprensión y la aprehensión del concepto: *Resolución Numérica de Ecuaciones Polinómicas.*

En el enunciado de este problema se detecta un registro verbal ("el lenguaje común es el utilizado para representar situaciones del mundo real").

En la posible solución, se observa que subyacen los registros simbólicos (... *un prisma de base x cm* ...), analíticos y algebraicos (... *Plantee la ecuación correspondiente* ...), tabular y grafical (... *separe las raíces* ..., *el gráfico* ...), y numérico (... *realizando 10 iteraciones del método de bisección* ...). Así, se pasa de los registros analíticos y algebraicos a los algebraicos y numéricos a través del uso de un método numérico.

Las palabras y expresiones usadas en el enunciado y en la solución que desencadenan procesos interpretativos son las siguientes: *volumen de un prisma*, *plantee*, *separe y localice las raíces de una ecuación polinómica*, *grafique la función polinómica*, *obtenga las medidas de los lados utilizando un método numérico*, *compruebe.*

Entra en juego la utilización de la computadora como herramienta colaboradora en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de esta temática (por ejemplo, en la parte del enunciado: ... *Compruebe los resultados obtenidos utilizando la PC*).

Con la introducción de: ... *realizando 10 iteraciones del método de bisección* ..., en este proceso se ha pasado a los registros algebraico – numérico.

En el apartado a) se destacan los siguientes registros de representación:

- Verbal: el lenguaje común se utiliza para representar esta situación del mundo real.

- Analítico: se hace referencia al volumen del prisma, según la definición (el volumen del prisma es igual al área de la base por la altura del prisma).

- Simbólico: se da esta definición mediante expresiones simbólicas sustentadas por las reglas de la lógica formal ($V_{prisma} = x\,(x+10)\,(x-2) = 957$).

- Algebraico: se llega a la expresión final por medio de operaciones algebraicas ($x^3 + 8x^2 - 20x - 957 = 0$).

En el apartado b) se destacan los siguientes registros de representación:

- Tabular: corresponde a los valores numéricos de la función polinómica organizados en una tabla de valores.

- Grafical: corresponde a la representación en el plano cartesiano, incluyendo los convenios implícitos en la lectura de gráficos. Por ejemplo: interpretación de ejes coordenados, de unidades, de corte o cruce de la gráfica con respecto al eje x, etc.

En el apartado c) se destacan los siguientes registros de representación:

- Simbólico: se dan el número de iteraciones (n), extremos de los intervalos que contienen a la raíz de la ecuación polinómica (a_{n-1}, b_{n-1}), punto medio (x_{n-1}), valores de la función en los extremos y punto medio ($f(a_{n-1})$, $f(x_{n-1})$, $f(b_{n-1})$), a través de expresiones simbólicas sustentadas por las reglas del método de bisección.

- Analítico – algebraico: se obtiene el punto medio a partir de la definición, utilizando la expresión algebraica correspondiente.

- Numérico: se realizan todas las evaluaciones que conllevan y que están involucradas en el método de bisección.

- Tabular: los valores numéricos obtenidos se organizan en una tabla.

Finalmente, para facilitar y mejorar la comprensión e interpretación de los resultados obtenidos manualmente y para comprobar la validez de los mismos, se utiliza la computadora. Las tareas de computación son importantes en la enseñanza – aprendizaje de los métodos numéricos, pues ayudarán a mejorar las habilidades de los alumnos, tanto en el conocimiento de la teoría como en la práctica de la temática involucrada.

CONCLUSIONES

El análisis a priori pone de manifiesto que, debido a la complejidad, la determinación de las raíces de la ecuación polinómica requiere del uso de procedimientos numéricos para su solución. Permite mostrar la compleja trama de entidades y relaciones entre los registros de representación en una actividad matemática elemental. En este caso, la utilización de herramientas computacionales resulta ideal.

Esta clase de análisis puede ayudar a superar la creencia de que la solución de algunos problemas es simple, al explicitar la multiplicidad de registros que se ponen en juego y observar que las conversiones de uno a otro implican posicionarse en un determinado marco del cual es necesario conocer sus reglas lógicas. Es útil para describir los procesos de interpretación y comunicación del saber matemático e identificar las razones que pueden condicionar el aprendizaje.

Se espera que los alumnos comprueben lo indispensable del uso de las computadoras para resolver este tipo de problemas, y tengan una demostración tangible de cómo pueden ayudarles a realizar estas tareas que conllevan una gran cantidad de cálculos.

BIBLIOGRAFÍA

Chevallard, Y., 1992, *Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportes par une approche anthropologique*. Recherches en Didactique des Mathématique, 12 (1).

Duval, R, 1995, *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*, Peter Lang S.A., Editions scientifiques européennes.

Godino, J. D., (Prensa), *Un enfoque semiótico de la cognición matemática*, U. de Granada.

Godino, J. D. - Batanero, C., 1994, *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. Recherches en Didactique des Mathématique, Vol. 14 (3), pp. 325-355.

Hitt, F., 1996, *Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos*, Investigaciones en Matemático Educativa, México: Grupo Editorial Iberoamérica, pp. 245-264.

Ministerio de Cultura y Educación de la Nación, 1997, *Contenidos Básicos para la Educación Polimodal*, República Argentina.

Piaget, J., 1968, *La formation du symbole chez l'enfant,* Neuchatel, Delachaux & Niestlé.

Rico, L., 2000, *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática*, Ponencia en IV SEIEM (Huelva, 2000), Universidad de Granada, España.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN POLYA Y SCHOENFELD

Chavarría, Jesennia[1].

Alfaro, Cristian [2]

Resumen

El objetivo principal de esta ponencia consiste en una exposición de las ideas fundamentales planteadas por Polya y Schoenfeld en relación con la resolución de problemas. Abordaremos, brevemente, algunas de las investigaciones realizadas por ellos en este tema.

Investigaciones realizadas por Polya en la resolución de problemas

En 1945, Polya en su libro "*How to solve it*", desarrolla una serie de estrategias importantes en la resolución de problemas, con lo cual potencia la construcción de una nueva metodología en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En este libro, el autor propone cuatro pasos básicos para resolver un problema, a saber: comprender el problema, concebir un plan, ejecutarlo y examinar la solución. En cada uno de estos pasos, según Polya, el docente debe guiar a sus estudiantes con una serie de preguntas.

En la etapa de comprensión, el docente debe proponer un problema con un nivel de dificultad adecuado (ni muy fácil, ni muy difícil), el cual debe ser expuesto de forma natural e interesante para el estudiante. En la etapa de concebir un plan, el papel del docente radica en guiar al estudiante, a través de preguntas, hacia una estrategia para la solución del problema basada en experiencias anteriores y conocimientos previos. En lo que respecta a la etapa de ejecución del plan, es el estudiante quien examina todos los detalles y analiza que los pasos realizados sean correctos (es importante hacer notar la diferencia entre demostrar que un paso es correcto a simplemente comprobarlo). Finalmente, en el cuarto paso, se lleva a cabo una visión retrospectiva de la solución con

[1] UNA. jcha@una.ac.cr
[2] UNA. Crisalfaro2002@yahoo.es

el objeto de verificar el resultado y el razonamiento seguidos, esto le permite al estudiante afianzar sus conocimientos y desarrollar aptitudes para resolver otros problemas.

La idea fundamental de este libro, es en síntesis, plantear una serie de pasos para resolver un problema, en donde se definen claramente el rol del estudiante y del docente en cada uno de ellos.

Es importante señalar, que a pesar del abordaje efectuado por Polya en las estrategias a seguir para la resolución de problemas, éste no ofrece una definición clara de lo que es un problema en el libro "*How to solve it*", será hasta 1961, con su libro *Mathematical Discovery*, en el cual define un problema como aquella situación que requiere la búsqueda consciente de una acción apropiada para el logro de un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata. En otras palabras, *una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma (Krulik y Rudnik, 1980).*

En el año 1966, Polya brinda un nuevo aporte significativo a la enseñanza de la matemática, en particular, a la resolución de problemas con su libro, "*Matemáticas y razonamiento plausible*", pues muestra cómo la construcción matemática puede ser aprovechada para su enseñanza, es decir, cómo las estrategias seguidas por un profesional en matemática, que Polya denomina "razonamientos plausibles" pueden permitirle a un estudiante aprender matemáticas.

Por otro lado, su enfoque en el desarrollo de estrategias heurísticas, delimita claramente las condiciones que debe tener un problema para generar un aprendizaje significado, pues sugiere que un problema debe permitirle al estudiante recurrir a problemas análogos, realizar conjeturas, generalizar, entre otras.

En resumen, los trabajos de Polya aluden a las características básicas que debe presentar un problema, así como el impacto cognitivo que genera la resolución de problemas en los procesos de enseñanza-aprendizaje

Investigaciones realizadas por Schoenfeld en la resolución de problemas

Schoenfeld (1985) en su libro "*Mathematical Problem Solving*", considera insuficientes las estrategias planteadas por Polya para la resolución de problemas, sostiene que este proceso es más complejo e involucra más elementos, inclusive de carácter emocional-afectivo, psicológico, sociocultural, entre otros. Establece, por tanto, la existencia de cuatro aspectos que intervienen en el proceso de resolución de problemas: los recursos (entendidos como conocimientos previos, o bien, el dominio del conocimiento), las heurísticas (estrategias cognitivas), el control (estrategias metacognitivas) y el sistema de creencias.

Los recursos, refieren al conocimiento matemático que el individuo es capaz de brindar en la resolución de un problema. Las estrategias heurísticas son reglas o planteamientos generales que ayudan en el abordaje de un problema; este aspecto fue ampliamente considerado por Polya en su libro "Matemáticas y razonamientos plausibles". La manera en que los individuos utilizan la información y las estrategias heurísticas que poseen para resolver un problema, es lo que Schoenfeld denomina control, éste involucra conductas de interés tales como: planificar, seleccionar metas y submetas y monitoreo constante durante el proceso de resolución. Finalmente, Schoenfeld establece un aspecto transversal en la resolución de problemas y lo denomina sistema de creencias. Éste consiste en el conjunto de ideas o percepciones que los estudiantes poseen a cerca de la matemática y su enseñanza.

Schoenfeld documenta las siguientes creencias:

1. Las matemáticas son de carácter abstracto, no se relacionan con la vida cotidiana o que los conceptos no se aplican en la resolución de problemas.
2. Los problemas matemáticos deben ser resueltos en menos de diez minutos, de lo contrario no tienen solución.

3. Sólo genios o superdotados son capaces de descubrir o crear matemática.

Estas creencias forman parte del contexto norteamericano y, según Schoenfeld, han condicionado, la forma en la cual los estudiantes abordan la resolución de un problema. Consideramos que este último aspecto merece especial consideración, ya que condiciona cualquier propuesta curricular, metodológica y de evaluación, en los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Éstas consideraciones teóricas planteadas anteriormente, serán la base para la ponencia que deseamos realizar. Adicionalmente, efectuaremos una comparación entre ambos autores y pretendemos abrir un espacio de reflexión respecto al trabajo que se realiza actualmente en las aulas a la luz de estas teorías.

RETOS MATEMÁTICOS

Ana Magali Salazar Ávila[1]

Irene Herrera Zamora [2]

Resumen

La finalidad de este trabajo consiste en recopilar y analizar diversos "juegos matemáticos" y "adivinanzas" desde el punto de vista de retos mentales, en los que se evidencia el carácter fundamental y prioritario de las propiedades de los números. Además, de identificar criterios de relación y comparación que poseen ciertos juegos matemáticos, con el fin de crear estrategias para resolver un nuevo problema. Provocando una concientización en la importancia de estos juegos en la construcción del conocimiento matemático, así como en el desarrollo de capacidades como la creatividad, el análisis y razonamiento lógico.

INTRODUCCIÓN

Como docentes de matemática, es fundamental tener conciencia de la gran cantidad de estereotipos por la que se encuentra enmarcada nuestra apreciada disciplina, tanto por parte de los alumnos como de los mismos padres de familia, y hasta por algunos de nuestros propios colegas. Estos estereotipos han creado una mentalidad negativa en los estudiantes con respecto a su aprendizaje y por ello comúnmente se les escucha expresiones como: "Las matemáticas son muy difíciles", "Las matemáticas son las responsables del incremento de la deserción en los colegios", entre otras. Debido a ello, los educandos, desde mucho antes de iniciar su proceso de aprendizaje, están predispuestos a que dicho proceso en el área de la matemática será bastante complicado, sino, imposible.

El ideal, como profesores, es eliminar (o reducir) dicha mentalidad en las personas. Para lograrlo, debemos convertirnos en verdaderos facilitadores del conocimiento, aprovechándonos de que la matemática se puede perfilar en gran parte como todo un juego y así cambiar la visión errónea de muchos.

Como sabemos los juegos tienen un carácter fundamental de pensamiento y diversión. Si cada día ofreciéramos a nuestros alumnos un elemento de diversión junto con el contenido temático de nuestra enseñanza; quizá podríamos ir eliminando poco a poco esos tabúes.

[1] asalazaravila@yahoo.com (Colegio Universitario de Alajuela)

[2] imherreraz@racsa.co.cr (Liceo de Alajuelita)

Por la semejanza que posee el juego con las matemáticas, es natural que los antiguos matemáticos tuvieran inclinación por algunos juegos matemáticos, la mayoría de ellos con un contenido matemático profundo, permitiéndoles así explorar su realidad mental propia.
Esta actividad, además de recalcar la importancia que tienen los juegos matemáticos y la historia de algunos personajes matemáticos que reflejaron inclinación por estos, muestra también diversos juegos y trucos matemáticos, la mayoría con sus respectivas soluciones.
Además, pretende que lo que se construya, se desarrolle y se aprenda; nos dé una idea de cómo desarrollar la enseñanza de la matemática, lo cual permitirá que el estudiante pueda explotar su creatividad y capacidad critica; para lograr unas clases más activas e innovadoras donde se promueva el "aprender haciendo".

LAS MATEMÁTICAS Y LOS JUEGOS

¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta es totalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.
La matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias entre la práctica del juego y la de la matemática. En el juego se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente; pero la matemática no es sólo diversión, sino ciencia e instrumento de exploración de la realidad propia mental y externa. El juego tiene bien definidas sus reglas y posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático.

La matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.

Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemática profundamente seria.

La importancia de implementar los juegos en la enseñanza de la matemática es imprescindible ya que estos poseen un carácter fundamental de pasatiempo y diversión. Si cada día ofreciésemos a nuestros alumnos, junto con el rollo cotidiano, un elemento de diversión, incluso aunque no tuviese nada que ver con el contenido de nuestra enseñanza, el conjunto de nuestra clase y de nuestras mismas relaciones personales con nuestros alumnos variarían favorablemente.

El juego bien escogido y bien explotado puede ser un elemento auxiliar de gran eficacia para lograr algunos de los objetivos de nuestra enseñanza más eficazmente.

El objetivo primordial de la Educación General Básica consiste en ayudarles a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, físicas, de modo armonioso. Y para ello nuestro instrumento principal debe consistir en el estímulo de su propia acción, colocándole en situaciones que fomenten el ejercicio de aquellas actividades que mejor pueden conducir a la adquisición de las actitudes básicas más características que se pretende transmitir con el cultivo de cada materia.

Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, e ideas para el desarrollo de herramientas apropiadas, para enfrentar la vida de las matemáticas. Es claro que no todos los juegos que se encuentran en los libros de recreaciones matemáticas se prestan igualmente al aprovechamiento didáctico.

TEORÍA DE JUEGOS EN LAS MATEMÁTICAS

Aunque la teoría de juegos tiene sus orígenes en el estudio de conocidos pasatiempos como tres en raya, el ajedrez y el póquer, también incluye conflictos más serios que pueden aparecer en los campos de la sociología, la economía y la ciencia política y militar.

Ciertos aspectos de la teoría de juegos fueron estudiados por primera vez por el matemático francés Émile Borel, quien publicó varios artículos sobre los juegos de azar y la teoría de las partidas. Sin embargo, el matemático estadounidense de origen húngaro John von Neumann es considerado como el padre de la teoría de juegos. A pesar de sus aplicaciones empíricas, la teoría de juegos es esencialmente un producto de las matemáticas.

APLICACIONES

Las aplicaciones de la teoría de juegos son muy variadas y han dado lugar a un continuo incremento del interés por su estudio. Von Neumann y Morgenstern mostraron la utilidad inmediata de su teoría de juegos matemáticos al emplearla para estudiar el comportamiento de la economía. Se pueden construir modelos que representan a los mercados financieros con diferentes números de compradores y vendedores, fluctuación de los valores de la oferta y la demanda, variaciones cíclicas o estacionales, además de diferencias estructurales que dependerán de la economía estudiada. En este campo, la teoría de juegos es especialmente útil para analizar los conflictos de interés entre obtener mayores beneficios e incrementar la distribución de bienes y servicios. La división equitativa de propiedades y herencias es otro ámbito de interés legal y económico que puede estudiarse con las técnicas de la teoría de juegos.

En las ciencias sociales, la teoría de juegos tiene importantes aplicaciones, como por ejemplo la distribución de poder en los trámites legislativos. También se pueden estudiar los problemas de gobierno en mayoría y de toma de decisión individual. Los sociólogos han desarrollado toda una rama de la teoría de juegos para estudiar los problemas que aparecen en la toma de decisiones en grupos. En epidemiología también se utiliza la teoría de juegos, especialmente con respecto a operaciones de inmunización y métodos de prueba de vacunas y otros medicamentos.

Los estrategas militares usan la teoría de juegos para estudiar conflictos de interés, aunque el uso de esta teoría para analizar acontecimientos políticos o militares ha sido criticado como inhumano y potencialmente peligroso por simplificar lo que en realidad son factores muy complicados.

ROMPECABEZAS MATEMÁTICOS Y LÓGICOS

Todos presentan un reto atractivo, y resolverlo implica que el jugador se ha esforzado en pensar situaciones nuevas y experimenta una gratificante sensación.

Los pasatiempos y rompecabezas pueden agruparse en tres grandes grupos: acertijos y juegos de palabras; juegos matemáticos y de lógica, y juegos físicos y mecánicos. Los más antiguos que se conocen datan de Oriente Próximo hace 3.000 o 4.000 años.

Los cuadrados mágicos son otra forma muy antigua de acertijo numérico. Surgieron en China antes de finales del siglo I y consisten en formar un cuadrado de números cuyas columnas, filas y diagonales suman lo mismo.

¿CÒMO RESOLVERLO?

Seguidamente, se brindarán algunos pasos que pretenden dar una estrategia general para resolver juegos, la cual nos indica a grandes rasgos cómo debemos abordar un reto matemático. Sin embargo, no debemos olvidar que para resolver cualquier juego matemático es fundamental el conocimiento y entendimiento de los principios matemáticos que permiten darle solución y comprender su esencia.

1. <u>Antes de hacer trataré de entender</u>.
2. <u>Tramaré una estrategia</u>: se trata de buscar conexiones con otros elementos que ya se conocen.
3. <u>Miraré si mi estrategia me lleva al final</u>: se debe de llevar adelante la estrategia planeada. Si se tiene varias ideas, deben ser probadas una a una. Si una de ellas lleva a una situación muy complicada, se debe buscar entonces otra estrategia. Probablemente hay otro modo más sencillo. Si nos va bien con la estrategia, se debe de estudiar detenidamente para convencer de que no es por casualidad.
4. <u>Sacaré el jugo al juego</u>. Es conveniente aprovechar la solución para asimilar bien la experiencia.

CONOCIMIENTO TEÓRICO MATEMÁTICO

A continuación se enunciarán una serie de definiciones y propiedades básicas para la comprensión de algunos de los juegos que se desarrollarán.

Definiciones Importantes:

<u>Numero par</u>: Un número entero n es par si y sólo si existe m, m entero tal que $n = 2m$

<u>Número impar</u>: Un número entero n es impar si y sólo si existe m, m entero tal que $n = 2m + 1$

<u>Número primo</u>: Un número natural n mayor que 1 es primo si y solo si existe los únicos divisores positivos de n son 1 y n.

<u>Número compuesto</u>: Un número natural n mayor que 1 es compuesto si y solo si existe a, b números naturales tal que $n = a{\cdot}b$ con a y b mayores que 1

<u>Múltiplo</u>: Un número natural b es múltiplo de otro número natural a, si existe un número natural n tal que $a{\cdot}n = b$

<u>Divisor</u>: Un número natural a se dice que es un divisor de un número natural n si el cociente de la división de a por n es un número natural b y el residuo es igual a cero

<u>Divisibilidad</u>: En el sistema decimal existen algunas reglas para determinar si un número natural es divisible por otro número natural, sin necesidad de dividir.

Divisibilidad por dos: Un número natural es divisible por dos cuando el último dígito de su numeral representa un número par

Divisibilidad por tres: Un número es divisible por tres si la suma de los números representados por los dígitos de su numeral es un múltiplo de tres.

Divisibilidad por cinco: Un número es divisible por cinco si el último dígito de su numeral es cero o cinco

Divisibilidad por siete: Un número natural es divisible por siete si el doble del número representado por el último dígito de su numeral, restado del número representado por los otros dígitos es un múltiplo de 7

Divisibilidad por once: Un número es divisible por once si el numero representado por el último dígito de su numeral, restado del número representado por los otros dígitos es un múltiplo de 11

Resultados a considerar:

<u>Teorema Fundamental de la Aritmética</u>: Cada entero n, n número natural se puede expresar como producto de factores primos, de manera única salvo el orden de sus factores

<u>Algoritmo de la División</u>: Sean a y b números enteros con a diferente de cero. Entonces existen únicos k y r números enteros tal que $b = ak + r$ con $0 \leq r < |a|$

<u>Representación de un entero positivo en una base</u>: Sean b y n números naturales con $b \geq 2$.

Si $n = \sum_{0 \leq j < k} a_j b^j$ con $0 \leq a_j \leq b - 1$, para todo j, $0 \leq j \leq k$. $a_k \geq 0$.

Algunos Problemas de Aplicación

En esta sección utilizaremos algunos resultados o lemas de la teoría de números, sobre los cuales se hizo mención anteriormente.

Algunos de los retos que analizaremos en la presentación son los siguientes:

- Adivinar un número par
- Viendo a través de un libro
- La estrella de David
- Cuadrados mágicos
- Adivine un número
- Los cuatro mágicos
- Todos con el dos
- La herencia del pastor
- El cuadrado de un numero terminado en cinco
- Sumando los números que no se han formado
- Cuantos años tiene y cuantas monedas anda en el bolsillo
- Método ingenioso para multiplicar números de dos cifras cercanos a 100
- Entre otros…

Conclusión

Actividades de esta índole, dan la posibilidad de entender que con interés, una actitud positiva hacia el trabajo que realizamos, la imaginación y una técnica adecuada se puede resolver problemas y ejercicios a los cuales nunca se ha enfrentado con anterioridad. Se adquieren nuevos conocimientos que fortalecen los previos enriqueciendo nuestra capacidad mental lógica y analítica.

También se aprende que la capacidad para captar el significado de las cosas y traducirlas a un lenguaje matemático requiere de un razonamiento lógico y dominio correcto de la temática en cuestión, para poder llegar a una respuesta coherente y lógica.

Por otra parte, se obtienen nuevas ideas para fortalecer los juegos como estrategia metodológica dentro del proceso de la enseñanza con el fin de mejorar las actitudes de los estudiantes y lograr una participación más activa de éste en las lecciones.

BIBLIOGRAFÍA

Jones, Burton. Teoría de números. México: Editorial Trillas, 1969.

Perero, Mariano. Historia e historias de matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 1994

Sánchez, G. La lección de juegos en la enseñanza de las matemáticas. Costa Rica: Editorial de la Universidad de Costa Rica, 1984

II CIEMAC Asociación de Estudiantes de la Carrera de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, ITCR 2000

Enciclopedia Microsoft® Encarta® 2000.

Enciclopedia Audiovisual – Educativa. Matemáticas. Océano Multimedia. 1995 España Océano Grupo Editorial.

http://www.xtec.es/~jcorder1/entreten.htm

http://ocho.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm

http://www.lomascurioso.com/matematicas_detalle.php?Id=43

http://ayura/udea/edu/co/~deca/epistociencias/histociencias.%20uni112002\Entretenimientos.htm

SISTEMAS EXPERTOS PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN LA EDUCACIÓN SUPERIOR

Enrique Vílchez Quesada[1]

Resumen:
El impacto que ha tenido el desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la sociedad, ha obligado a muchas instituciones de educación superior a replantear sus modelos educativos tradicionales, hacia la búsqueda de una integración apropiada de las TIC en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje. En particular, la crisis en el aprendizaje de la matemática a nivel mundial, que algunos han catalogado en nuestro país como una emergencia nacional, está demandando soluciones prontas, que a la luz de las nuevas posibilidades ofrecidas por el uso adecuado de los recursos computacionales en el aula, apuntan a una incorporación creciente de las TIC en la educación. Bajo esta perspectiva, proponemos en este artículo la utilización de los sistemas instruccionales como una metodología complementaria para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en la educación superior. Los avances de la inteligencia artificial en este campo, están otorgando a profesores y estudiantes, nuevas oportunidades donde el proceso educativo logre respetar la diversidad y permita la adquisición de competencias difíciles de alcanzar en la educación tradicional, tales como: aprendizaje autodirigido, gestión del propio conocimiento, automotivación y autodirección.

Palabras claves: matemática, enseñanza, aprendizaje, tecnología, desarrollo, sistemas, expertos, instruccionales.

1. Introducción

Muchos investigadores preocupados por los pésimos resultados que los alumnos obtienen en matemática en la mayoría de las instituciones de enseñanza a nivel mundial, vislumbran hoy por hoy el importante aporte que las tecnologías digitales pueden brindar al enriquecimiento de la labor educativa. Algunos piensan que la solución de los problemas entorno a los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, se circunscribe en replantear pedagógicamente el ¿cómo?, en diseñar nuevas estrategias metodológicas donde el estudiante tenga la posibilidad de construir su propio conocimiento.

El desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, está demandando un cambio en los tradicionales ambientes de aprendizaje algorítmicos, un gran dilema, si se piensa en la forma en cómo durante décadas de décadas, los profesores de matemática sesgados por sus propios mitos y creencias, han hecho las cosas, negándose la posibilidad de explorar formas distintas de enseñanza. A nivel universitario esta tendencia es todavía más marcada, docentes con un alto nivel de especialización en matemática pura, aplicada o educativa, se resisten con frecuencia al cambio, reproduciendo en su práctica profesional el sistema educativo donde ellos mismos fueron formados, caracterizado por el predominio de clases magistrales, asignación de listas de ejercicios y un comportamiento pasivo.

La utilización de software y materiales educativos computarizados como un recurso para apoyar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, se ha convertido en una necesidad y constituye una respuesta ante la problemática que gira en torno de la comprensión cognoscitiva de conceptos y nociones matemáticas en los salones de clase.

[1] Escuela de Matemática, Universidad Nacional, e-mail: evqm@costarricense.cr.

En particular el reciente surgimiento de la inteligencia artificial como una disciplina científica, y el desarrollo tecnológico que ha impulsado en el campo de los sistemas expertos, ha abierto una nueva gama de posibilidades a docentes y alumnos en el marco de un modelo educativo centrado en el aprendizaje y no en la enseñanza.

Este artículo expone la importancia del uso de recursos computacionales para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, los conceptos fundamentales de los sistemas expertos e instruccionales, los beneficios y limitaciones que ofrecen en el campo educativo y algunas de sus aplicaciones en el área de la matemática educativa.

2. Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática

En nuestra vida profesional, muchas veces hemos experimentado la frustración al contar únicamente con la tiza, el marcador, el borrador y la pizarra; como principales herramientas disponibles para llevar a cabo el proceso de comunicación de los aprendizajes. Un sentimiento impulsado en gran medida, por las posibilidades que brindan las nuevas tecnologías digitales, en un mundo donde ellas se han convertido en una parte integral de los procesos económicos y sociales. Un sentimiento que además se origina, por las constantes intervenciones en el salón de clase, de aquel estudiante que frente a la explicación reiterada de un tema, no logra comprender conceptualmente su contenido, repitíendose a sí mismo y a sus compañeros la típica frase *"no entiendo nada"*. La frustración anuncia su llegada, provocando irritación, que finalmente alcanza un punto de conformidad, donde como docentes dictamos a nuestra conciencia un noble discurso, que finaliza con la afirmación *"... hice todo lo que pude"*. Esta escena representa una vivencia cotidiana en nuestra ardua labor educativa, que en algunas ocasiones por el cansancio o el estrés, ignoramos por completo. Lo anterior ha traído como consecuencia en nuestro sistema educativo, un arcaísmo pedagógico, que está poniendo en riesgo, en muchas instituciones de enseñanza media y superior, el aprendizaje efectivo de la matemática.

Las razones de esta crisis obedece a diversos factores; al respecto el actual director de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica M.Sc. Alcides Astorga plantea en el artículo Enseñanza de la matemática asistida por computadora experiencia en el Instituto Tecnológico de Costa Rica: *"para muchos estudiosos el problema radica en que los métodos de enseñanza son obsoletos, lo cual hace que el proceso pedagógico sea aburrido y poco estimulante"* (1999 : 198).

¿Cómo podemos revertir este panorama?, los elementos medulares relacionados con esta interrogante, son tan amplios y diversos que responder a esta pregunta de forma absoluta es casi imposible, Meza (2000 : 132) a este respecto plantea: *"muchos de los problemas relacionados con las deficiencias que los y las estudiantes muestran en el aprendizaje de conceptos matemáticos, obedecen en gran parte a la forma en como se presentan dichos conocimientos a los educandos, en este sentido, es necesario que se generen en el salón de clase, otro tipo de ambientes de aprendizaje, donde predomine la curiosidad, la creatividad y la investigación"*. El computador puede ser la solución más viable de nuestra era tecnológica, para diseñar recursos didácticos (como sistemas inteligentes) que brinden la posibilidad a los docentes y educandos, de romper los estándares del aprendizaje conductista.

La evolución tecnológica en las últimas décadas, está dotando tanto a profesores como a estudiantes, de nuevas herramientas que enriquecen con su uso sistemático y adecuado, a los procesos pedagógicos. Como resultado de estos cambios, muchos investigadores y docentes a nivel universitario, han realizado estudios y publicado libros relacionados con la utilidad de diversos programas específicos para la enseñanza de la matemática dirigida a estudiantes de ingeniería, enseñanza de la matemática, matemática pura y aplicada. El profesor José Cuevas del Departamento de Ciencias de de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas y los profesores Manuel Álvarez e Iván Valido del Departamento de Matemática de ISPJAE en la Habana Cuba, opinan en el artículo Curso de ecuaciones diferenciales asistido por computadora en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas, lo siguiente: *"las transformaciones en la esfera científico técnica que la humanidad ha experimentado en las últimas décadas constituyen un reto para la pedagogía de las matemáticas en el nivel universitario, se imponen transformaciones en los métodos y medios de enseñanza que tradicionalmente se han venido empleando ... la computadora se ha insertado al proceso de enseñanza y aprendizaje para enriquecerlo, su uso adecuado incrementará la eficiencia y calidad del mismo"* (1999 : 271).

Desde esta perspectiva, se identifica una necesidad de cambio con relación a las metodologías que tradicionalmente han caracterizado la enseñanza de la matemática en las instituciones de enseñanza superior, trayendo al escenario una nueva modalidad; la matemática asistida por computadora. La matemática asistida por computadora se basa fundamentalmente en sesiones de aprendizaje que utilizan el método del laboratorio, complementado con el trabajo de equipo, en un ambiente de aprendizaje caracterizado por la exploración, el descubrimiento, el planteamiento de conjeturas y la comprobación de resultados.

La modalidad de enseñanza de la matemática asistida por computadora, si bien es cierto, no es un enfoque nuevo, ha sido poco explorado y adoptado en las universidades más importantes de nuestro país. No se trata de utilizar computadoras en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje con un fin en ellas mismas, se trata de acertar en la forma de utilizar la computadora para un mayor enriquecimiento de la labor educativa, tal y como lo señala Galvis (1992 : 63): *"la pretención de enriquecer el currículo con el uso de materiales educativos computarizados no se debe limitar a conseguir computadores y programas que corran en ellos"*, a este respecto Meza (2001 : 132) también señala: *"los resultados positivos que podamos obtener al utilizar computadoras en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, dependerán del uso que les demos, esto significa que la computadora no es un aparato que resolverá los problemas educativos por arte de magia ... el empleo de computadoras en los procesos de enseñanza y aprendizaje debe justificarse en el marco de un planteamiento educativo completo, lo que supone la selección de objetivos educativos y la definición de estrategias didácticas específicas"*.

En este sentido, la utilización de software y materiales educativos computarizados, está adquiriendo una importancia preponderante en la transformación de los procesos pedagógicos que caracterizan la educación superior. Una transformación lenta pero incuestionable, que implica profundos cambios curriculares y administrativos, en el perfil de la antigua Universidad.

3. Importancia del Uso de Recursos Computacionales para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la Educación Superior

Los procesos educativos que caracterizan la enseñanza de la matemática en la mayoría de las instituciones de educación superior en Costa Rica, se fundamentan en una metodología tradicional, donde el docente asume el rol protagónico de transmisor de información y el estudiante un papel receptor-reproductivo. Un proyecto de investigación realizado por el Dr. Luis Gerardo Meza Cascante y el M.Ed. Fabio Hernández Díaz titulado: *Enseñanza de la matemática en el ITCR; patrones de interacción en el aula*, pretendió investigar las dimensiones culturales en aulas universitarias en las que se desarrollaron procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática apoyados con software, la investigación arrojó dentro de una de sus conclusiones el predomino de las lecciones magistrales en combinación con el método interrogativo. Meza y Hernández lograron comprobar cómo el trabajo de aula es complementado casi exclusivamente, con prácticas adicionales que el estudiante asume por su cuenta. Los investigadores señalan (2000 : 85): *"los procesos que ordinariamente se desarrollan en la enseñanza de la matemática, se caracterizan por clases magistrales, presentación secuencial de los contenidos, prácticas adicionales, trabajo individualizado como norma general y comunicación entre las y los estudiantes escasa"*.

Hoy en día la tendencia impuesta por los avances científico-tecnológicos, demanda un cambio en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje, una transformación hacia la búsqueda de nuevos métodos y estrategias didácticas, aprovechando todas las potencialidades brindadas por las tecnologías de la información y la comunicación. Compartimos con Meza (2000) el criterio acrítico y tecnofílico que asumen los vendedores de equipo y software, y algunos políticos quienes están interesados en exagerar los beneficios que a corto o mediano plazo podrían obtenerse al utilizar las computadoras en el aula. Lo cierto es, que ella constituye simplemente un recurso más; Meza (2000) a este respecto plantea: *"la tarea fundamental del docente es planificar, desarrollar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, la computadora juega en este contexto, el papel exclusivo de instrumento de apoyo"*.

Vivimos en una nueva sociedad caracterizada por la imagen y la interacción, por el espectáculo y la conectividad, los cambios culturales atribuidos al uso adecuado de la computadora alcanzan todas las esferas; la social, la económica y desde luego la educativa. Hoy en día existe la creencia de que las nuevas generaciones parecen tener una aceptación casi inmediata, instintiva hacia el uso de los recursos tecnológicos, algunos autores piensan que esto no es del todo cierto; Badilla (1998) citado por Meza expone el error de suponer que a todos los jóvenes les gusta sentarse frente a una computadora; éste investigador detectó problemas de desinterés, asistencia y disciplina en algunos muchachos y muchachas que formaron parte de un estudio, realizado en la enseñanza secundaria. También otros autores han cuestionado el mito de que la incorporación de la computadora en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje lleva implícito un efecto positivo. Galvis (1992) enfatiza la necesidad de sacarle el provecho adecuado a las computadoras, para lograr un verdadero enriquecimiento de la labor educativa; *"si la informática ha de tener un papel importante en el enriquecimiento de la labor educativa, es indispensable tener claro qué tipo de educación deseamos impulsar y cómo se puede favorecer tal enfoque educativo"* (1992 : 6). Lo anterior significa que el uso de software o materiales educativos computarizados en el salón de clase, no puede tener un fin en sí mismo, es necesario analizar su impacto y los beneficios que se obtendrán en términos de objetivos de aprendizaje.

Meza, Garita y Villalobos (2001) proponen que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática asistida por computadora, deben basarse en los siguientes principios:

- El uso de la computadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática debe enmarcarse en un planteamiento educativo.
- La computadora debe incorporarse en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática sólo cuando sea más eficaz o más eficiente que otros medios.
- La incorporación de la computadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática permite aumentar la eficiencia y eficacia de algunas estrategias que el docente utilizaba antes de incorporar la computadora.
- El empleo de la computadora en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática permite diseñar algunas estrategias didácticas que no es posible desarrollar con otros medios.

En este último punto, radica uno de los factores más importantes que justifican la necesidad de utilizar software y materiales educativos computarizados para la enseñanza de la matemática. La existencia de ambientes matemáticos apoyados con tecnología, de acuerdo a Kolman (1980) favorece la motivación y la curiosidad intelectual del estudiante.

Uno de los problemas fundamentales en la enseñanza de la matemática, consiste en el aprendizaje de conceptos que presentan en sí mismos serias dificultades de comprensión. José María Arias (s.a.) presidente de la Asociación Logo Madrid citando a Papert señala: *"como profesor de matemática (Papert) presenta una gran preocupación por el fracaso escolar en matemática, lo que él llama matemafobia, dice que se podría transformar en matemalandia, si los materiales y los medios lo permitieran"*. Es natural encontrarse con teorías matemáticas muy abstractas, difíciles de interiorizar si se le enseñan al estudiante de una manera exclusivamente magistral.

Si la enseñanza de la matemática lleva implícita serios problemas cognoscitivos y muchos docentes no conocen nuevas formas de comunicación para cambiar sistemáticamente sus métodos tradicionales, ¿cuál debería ser el aporte de la utilización de software y materiales educativos computarizados en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje?, la respuesta a esta pregunta se enmarca en dos aspectos: primero nos parece indispensable aprovechar todas las capacidades gráficas, de cálculo simbólico, de almacenamiento y velocidad del computador, diseñando situaciones de aprendizaje que le permitan al estudiante explorar, descubrir y conjeturar. Según Calderon; *"la computadora permite el uso de representaciones simbólicas, el acceso a representaciones numéricas y visuales dinámicas, y puede ser utilizada como un medio de exploración donde los alumnos pueden expresar ideas"* (1999 : 55). Harel y Kolman (1991) citados por Calderon plantean: *"se enfatiza la importancia de las representaciones en el proceso de aprendizaje, el proceso de construcción de significados involucra el uso de representaciones y el aprendizaje de un concepto puede ser facilitado cuando hay más oportunidades de construir e interactuar con representaciones externas del concepto"*.

En segundo lugar, la utilización de software y materiales educativos computarizados, se puede también circunscribir en la formación y capacitación de la población docente. Para Hernández y Rodríguez (1999) profesoras de matemática de la Facultad de

Ingeniería Mecánica del Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría, Cuba; *“los problemas de la educación, y en particular, de la enseñanza de la matemática demandan una elevada preparación científica de los profesionales que participan en el proceso docente-educativo de esta disciplina, este objetivo solo se puede lograr si se introducen métodos y medios que propicien una efectiva superación y calificación técnica y profesional del personal docente”* (1999 : 248). Lo anterior devela la necesidad de involucrar a los profesores universitarios en un cambio curricular, fortaleciendo su preparación informática y pedagógica. Bajo esta tendencia, pretendemos con este artículo dar a conocer a los docentes universitarios los fundamentos de los sistemas expertos e instruccionales y sus beneficios y limitaciones, con la finalidad de mostrar otras posibilidades pedagógicas que el desarrollo de la inteligencia artificial, está dotando en el ámbito educativo.

4. Conceptos Fundamentales de los Sistemas Expertos e Instruccionales

En el año de 1960 la inteligencia artificial (IA) surge como una nueva disciplina científica (no tan nueva, si se analiza su eclosión desde la época de los griegos), gracias principalmente al desarrollo computacional que para esta fecha propicio las primeras investigaciones, científicos como Turing y Shannon se consideran pioneros de la IA.

La IA es una disciplina científica que busca la creación de software y hardware con la finalidad de reproducir actividades en una máquina, que en este momento son realizadas de mejor manera por las personas. No existe una definición universal de inteligencia artificial, sin embargo, casi todas las definiciones existentes, involucran dos ideas fundamentales:

- El estudio de cómo funciona la mente humana y la inteligencia, en este sentido, en la IA se buscan modelos que permitan comprender cómo los seres humanos almacenan información y la utilizan para resolver problemas o tomar decisiones.
- Representar este tipo de procesos en una máquina.

Winston y Predergast consideran que la IA tiene tres objetivos principales:

- Construir máquinas cada vez más inteligentes.
- Construir máquinas cada vez más útiles.
- Estudiar el funcionamiento de la mente humana.

Actualmente la IA esta pasando por un período de comercialización y aunque esta disciplina no ha tenido desde sus orígenes fines comerciales, la inteligencia artificial aplicada a abiertos campos de estudio diversos en muchos casos financiados por compañías con intereses publicitarios o empresariales (por ejemplo la Toyota financia diversos proyectos en robótica). Bajo esta perspectiva, señalamos a continuación algunas áreas de investigación en las cuáles se puede subdividir la IA:

- Sistemas expertos: son sistemas que buscan representar el conjunto de conocimientos, habilidades, métodos, juicios que utilizaría un experto en un área de conocimiento particular, para diagnosticar, aconsejar o resolver problemas.
- Sistemas de procesamiento del lenguaje natural: son sistemas donde la comunicación entre el usuario y la máquina se realiza utilizando el lenguaje natural. Por ejemplo los buscadores como Yahoo o Altavista, utilizan el

reconocimiento del lenguaje natural para realizar las consultas solicitadas por sus usuarios.
- Robótica: no todas las áreas de estudio de la robótica tienen relación con la IA, cuando se piensa en la construcción de un robot que modifique su comportamiento de acuerdo a la información que recibe de su ambiente, es allí donde la IA brinda un importante aporte.

Existen otros campos de estudio de la IA que no señalaremos en este artículo. En particular, nos interesa el área de los sistemas expertos, que profundizaremos a continuación.

Los sistemas expertos tienen la característica de poseer dos tipos de ambientes, un ambiente de desarrollo donde el programador diseña cada una de las componentes del sistema y el ambiente de consulta utilizado exclusivamente por los usuarios de la aplicación.

Todo sistema experto está constituido por las siguientes componentes:

- La adquisición del conocimiento: por lo general un ingeniero del conocimiento se encarga de recopilar toda la información disponible sobre el campo de acción del sistema, y además realiza las entrevistas o rastreos pertinentes a expertos en el área de conocimiento.
- La base de conocimiento: que esta formada por hechos (la información documentada y codificada) y por reglas que usualmente son heurísticas (a manera de predicados) que le dan al sistema los *"volados"* para resolver las consultas de los usuarios.
- El motor de inferencias: se considera el cerebro del sistema, define una metodología de búsqueda para utilizar la base de conocimiento y las consultas de los usuarios con la finalidad de brindar una respuesta.
- Interfase: posibilita la comunicación hombre-máquina.
- El subsistema de explicación o justificador: una particularidad de los sistemas expertos es contar con un módulo de explicaciones, el cuál se encarga de explicarle al usuario por qué se ha llegado a una determinada conclusión o recomendación, inclusive algunos sistemas pueden explicar por qué un determinado estado del problema no se eligió como meta.

En términos de diseño los sistemas expertos presentan una importante limitación; el *factor humano* que interviene en la interacción entre el ingeniero del conocimiento y los expertos. Un experto es una persona que por estudio personal y entrenamiento en una determinada tarea, cuenta con los suficientes recursos para brindar diagnósticos y resolver problemas en un área de conocimiento particular. En la etapa de adquisición del conocimiento el ingeniero de conocimiento debe abstraer la experiencia del experto, con la finalidad de ser codificada e integrada en la base de conocimiento del sistema, muchas veces esta tarea puede ser muy complicada, por factores tales como: contar con la colaboración de expertos con poco tiempo, lo cuál generalmente ocasiona que participen en el proceso de una manera superficial, que existan problemas de relación interpersonal entre el experto y el ingeniero del conocimiento o que el experto se comporte de forma diferente cuando es entrevistado u observado.

En el ámbito educativo los sistemas expertos presentan ciertas ventajas, en particular los sistemas creados con fines pedagógicos e instruccionales. Un sistema experto instruccional diagnostica, depura y corrige la ejecución de los estudiantes en un área particular de conocimiento. El sistema determina el nivel cognoscitivo del alumno y lo ayuda a mejorar sus debilidades para que alcance un nivel superior de aprendizaje.

En la siguiente sección se exponen los beneficios y limitaciones del uso de este tipo de sistemas en los salones de clase, y en particular los utilizados para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

5. Beneficios de los Sistemas Expertos para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática

Una característica común de la mayor parte de las instituciones educativas de enseñanza media y superior en nuestro país, radica en la demanda educativa que usualmente supera la oferta, trayendo como consecuencia salones de clase infestados de estudiantes con un interés promedio por obtener un título universitario.

De esta forma, es muy común encontrarse grupos que superan cuarenta estudiantes matriculados, a cargo de un solo profesor. Una paradoja si revisamos a groso modo los planteamientos discursivos de la política educativa vigente, que reclama un sistema educativo donde se respete la diversidad y las condiciones particulares de aprendizaje de cada estudiante, la verdad es, que los sistemas educativos de la mayor parte de los países en Latinoamérica, se encuentran totalmente colapsados.

En la enseñanza de la matemática la situación se agrava más, dadas las características socioculturales de una sociedad que le ha otorgado una postura divina, cuyo conocimiento es alcanzado únicamente por aquellos prodigios que han sido bendecidos con una *"mente sobrehumana"*. La tarea de enseñar matemática a un numeroso grupo de estudiantes, quienes deben ser convencidos de la importancia, belleza y bondades que les ofrece su estudio, es un trabajo sumamente arduo, tan arduo, que bajo estas circunstancias, los docentes tienden a centrarse más en el cumplimento de un programa que en el aprendizaje real de los estudiantes.

La matemática es una ciencia naturalmente formativa. Además de proporcionar conocimientos indispensables de carácter práctico o instrumental, otorga toda una estructura de pensamiento constituida bajo el estandarte de la duda. El aspecto más importante de este *síndrome de la duda*, es su integración a la forma de vida cotidiana y los efectos intrínsecos que la acompañan, tales como: confianza, autoestima, criticidad y una modalidad de pensamiento fundamentada bajo los principios de la lógica matemática.

Estamos convencidos que la enseñanza de la matemática puede contribuir decisivamente con el desarrollo de las habilidades del pensamiento y destrezas cognitivas, que fortalecen la capacidad de razonamiento, la disciplina mental y el rigor en la toma de decisiones, una percepción ratificada por diversos investigadores. Por ejemplo, Dieudonne (1961) citado por Meza al referirse a la finalidad que se persigue con la enseñanza de la matemática en los centros educativos, señala: *"ciertamente, no es la de hacerles conocer (a los estudiantes) una colección de teoremas más o menos ingeniosos sobre bisectrices de un triángulo o la sucesión de los números primos, de los* *que no harán ningún uso (a menos que se conviertan en matemáticos profesionales), sino la de enseñarles a ordenar y a encadenar sus pensamientos con arreglo al método que emplean los matemáticos, y porque se reconoce que este ejercicio desarrolla la claridad del espíritu y el rigor del juicio. El objeto de esta enseñanza debe ser, por tanto, el método matemático, y las materias de enseñanza no serán más que ilustraciones bien elegidas del mismo".*

Cómo podemos contribuir con el desarrollo de las habilidades del pensamiento, si la expansión masiva de los servicios en educación, ha obligado muchas veces a los profesores y profesoras de matemática a no considerar las diferencias individuales de los alumnos en el proceso de enseñanza aprendizaje, la respuesta implica un cambio en el sistema educativo tradicional e involucra la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación. En particular consideramos que el uso de los sistemas expertos para la instrucción, puede ser una solución viable de esta problemática.

La idea es poder conseguir que los profesores y profesoras atiendan con mayor eficacia la diversidad de los alumnos, nuestra propuesta se empeña en combinar la enseñanza mediante el uso de sistemas artificiales que se adapten a las características y necesidades individuales de los educandos. El profesor puede asumir diversos roles, el de instructor cuando realiza explicaciones generales al grupo y el de guía cuando contribuye de una manera menos directa, en las sesiones de aprendizaje asistidas por computadora.

Los sistemas instruccionales pueden tener también, ciertas desventajas, a saber:

- Es un área de conocimiento donde no se ha incursionado mucho todavía, esto genera resistencia y anticuerpos que ocasiona que algunos docentes se opongan rotundamente al cambio.
- Como un sistema experto debe brindar a los usuarios (estudiantes y profesores) un alto nivel de confiabilidad, al profesor desde un punto de vista pedagógico y al estudiante cognitivo.
- El software disponible sobre todo en el área de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, es escaso aún, se espera aumente la productividad en los próximos años.
- Se desempeñan en un área de conocimiento muy restringida.

Pese a estas limitaciones señaladas, creemos que a largo plazo los sistemas expertos instruccionales pueden convertirse en una solución para alcanzar objetivos de aprendizaje que van más allá (de acuerdo con la taxonomía de Bloom) de la simple memorización, a niveles superiores tales como: comprensión, aplicación y análisis. También vislumbramos en este tipo de tecnología, una reducción de costos que permite mitigar el colapsamiento demográfico en las instituciones de enseñanza, puede resultar más barato la compra o diseño de este tipo de sistemas, que la contratación de mayor personal docente o la construcción de infraestructura.

6. Aplicaciones de los Sistemas Expertos para la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática en la Educación Superior

En esta sección se brinda una serie de ejemplos de sistemas expertos diseñados para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, donde se han identificado dos tipos: los de cálculos matemáticos de propósito general y aquellos de propósito más específico.

6.1 Sistemas Expertos en Cálculos Matemáticos de Propósito General

Actualmente en el mercado existen distintos tipos de sistemas expertos en cálculos matemáticos de propósito general, que son utilizados como herramientas sofisticadas para hallar resultados, programar o bien realizar investigación en muy diversas áreas relacionadas con la simulación matemática. Entre los paquetes más conocidos están *Mathematica*, *Matlab* y *Geometer´s Sketchpad*.

De acuerdo con Juan Trujillo (2002) en su artículo *"Un Tour por el Mathematica"*, estos sistemas expertos reúnen una serie de características comunes, a saber:

- Son potentes manipuladores simbólicos.
- Pueden usar algoritmos de cálculo numérico basados en el método de almacenamiento denominado de *Coma Flotante*, típico de los lenguajes de programación científicos (como *C*) ampliamente aplicados tradicionalmente para la solución numérica de problemas matemáticos, y el de la aritmética racional, que permite al usuario llegar a obtener en la resolución del problema en cuestión la precisión que desee a cambio de coste computacional.
- Se puede trabajar con ellos de modo indistinto e interactivo, contando con una amplísima biblioteca de funciones y una *interfase* gráfica muy potente y cómoda de usar.
- Cuentan con un lenguaje de programación de alto nivel, tipo *C*, que le permite al usuario desarrollar sus propios paquetes o funciones.
- Cuentan con versatilidad en su relación con otros programas o lenguajes de programación.

6.1.1 Mathematica

El software *Mathematica* es una herramienta informática muy poderosa, y una excelente opción para implementar laboratorios de matemática asistida por computadora, en muy diversas áreas. El profesor M.Sc. Juan Felix Ávila Herrera de la Escuela de Informática de la Universidad Nacional, opina a este respecto en su artículo Conjeturas con *Mathematica*, lo siguiente: "*desde 1988 Mathematica se convirtió en uno de los mejores (probablemente el mejor) ambiente completamente integrado para realizar computación técnica, marcando un hito en esta área. Una de las grandes ventajas de Mathematica estriba en la integración de tareas específicas como análisis numérico, algebra lineal y graficación mediante un lenguaje simbólico de fácil manipulación. Mathematica ha servido también de plataforma para el desarrollo de software educativo en muchos cursos en primaria, secundaria y universidad*".

Mathematica se ha utilizado en nuestro país para apoyar procesos de enseñanza y aprendizaje en la educación superior. El profesor Carlos Arce de la Escuela de Matemática de la Universidad de Costa Rica, ha trabajado desde la década del 90 con el software *Mathematica* para impartir los cursos MA0429: Matemática para Computación IV y MA0275: Álgebra Lineal. Como resultado de este trabajo publicó el libro *Álgebra Lineal* mediante la Editorial de la Universidad de Costa Rica junto a sus colegas

William Castillo y Jorge González. El libro expone la teoría y los ejercicios de un primer curso en esta área de conocimiento y han complementado su uso mediante una serie de prácticas con ejercicios resueltos utilizando *Mathematica*, publicados en la dirección electrónica: http://maltsev.emate.ucr.ac.cr/~carce/. La experiencia del profesor Arce ha sido pionera en nuestro país, fue uno de los primeros académicos a nivel nacional interesado en complementar la labor docente de un curso de matemática universitario, utilizando software como herramienta de cálculo e investigación.

El profesor Jorge Monge Fallas de la Escuela de Matemática del Instituto Tecnológico de Costa Rica, mediante una entrevista realizada nos informó acerca de los diversos usos pedagógicos que en esta unidad académica se le ha dado al software *Mathematica*, principalmente para apoyar la docencia en cursos propios de la carrera Matemática Asistida por Computadora. Según Monge, *Mathematica* se ha utilizado en los cursos como una herramienta de programación y cálculo. En la Revista Virtual el uso de *WebMathematica* ha sido fundamental para poner en línea cursos virtuales tales como: Cálculo de Probabilidades y Cálculo Superior.

6.1.2 Matlab

Matlab es una herramienta de cálculo simbólico, es decir, un sistema que realiza dos funciones: una super calculadora y un intérprete de un lenguaje de programación propio.

Nakamura (1997) opina que *Matlab* puede considerarse un lenguaje de programación que presenta las siguientes características:

- La programación de tareas matemáticas es más sencilla (si se compara con otros lenguajes).
- Hay continuidad entre valores enteros, reales y complejos (no hay distinción entre reales, complejos, enteros, de precisión sencilla y de doble precisión).
- La amplitud de intervalo y la exactitud de los números son mayores.
- Cuenta con una biblioteca matemática amplia.
- Cuenta con abundantes herramientas gráficas, incluidas funciones de interfaz gráfica con el usuario.
- Puede vincularse con lenguajes de programación tradicionales.
- Los programas elaborados en la aplicación son fáciles de transportar.

En matemática e ingeniería *Matlab* se ha convertido en una herramienta por excelencia, al contar con una biblioteca muy amplia que facilita los análisis matemáticos. En nuestro país el software no ha sido muy utilizado, sin embargo, diversas universidades a nivel internacional, han abierto cursos donde el programa constituye el principal apoyo pedagógico. Por ejemplo, en la Universidad Privada de Santa Cruz de la Sierra en Bolivia, la profesora Ma. Isabel Bueno (1999) realizó una propuesta metodológica para la enseñanza del álgebra lineal con *Matlab*, dirigida a estudiantes de carreras en el área empresarial.

6.1.3 Geometer's Sketchpad

El programa *Geometer's Sketchpad* es un software producido por la empresa norteamericana Key Curriculum Press y fue diseñado principalmente para servir como una herramienta de enseñanza y aprendizaje.

El software se desarrolló como parte del Proyecto de Geometría Visual (Visual Geometry Project, VGP), que recibe fondos de la Fundación Nacional de las Ciencias (National Science Foundation) dirigido por el Dr. Eugene Klotz del Swarthormore College y la Dra. Doris Schattschneider del Moravian College en Pennsylvania, E.U.A.

El programador del *Sketchpad* es Nicholas Jackiw, quien se integró al equipo de investigación en 1987, e inicio las tareas de programación en 1988. En 1990 Jackiw diseñó la versión "beta" del programa que se utilizó para probarlo en las aulas.

La versión para Windows se empezó a comercializar en 1993 y actualmente ya está en el mercado la versión 4.0.

Aunque inicialmente el programa fue diseñado para la enseñanza de la geometría en la educación secundaria, la práctica ha demostrado que el *Sketchpad* es una herramienta pedagógica que se puede utilizar en niveles superiores. El programa permite diseñar experiencias de aprendizaje en áreas muy diversas de la matemática, tales como: la teoría de funciones, el cálculo y las ecuaciones diferenciales.

Algunos investigadores a nivel nacional han implementado proyectos para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática utilizando el *Sketchpad*. Por ejemplo el Dr. Luis Gerardo Meza Cascante, actual vicerrector académico del Instituto Tecnológico de Costa Rica, desarrollo el proyecto de investigación en docencia *"Enseñanza de la Matemática en Sétimo Año con el Programa Geometer's Sketchpad"*, los objetivos (alcanzados) de la investigación fueron los siguientes:

- Diseñar un conjunto de sesiones de aprendizaje para el logro de los objetivos propuestos en el programa de la educación secundaria, a nivel de sétimo año, en el área de la geometría, en los cuales se utilice el programa *Geometer´s Sketchpad*, que favorezca el logro de los fines expresados por el Ministerio de Educación en el programa de matemática de la educación secundaria.
- Elaborar un manual de la profesora o del profesor, con orientaciones didácticas, que le permitan utilizar el conjunto de lecciones diseñadas en el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

También las investigadoras Grettel Gutiérrez y Margot Martínez en el año 2002, diseñaron una unidad didáctica para el tema de funciones en secundaria mediante el uso del programa *Geometer's Sketchpad*, con el propósito de ser utilizado en un ambiente de laboratorio. En la unidad didáctica se desarrollaron sesiones de aprendizaje acordes con los objetivos del programa oficial del MEP.

6.2 Sistemas Expertos de Propósito Específico

Este tipo de sistemas generalmente han sido el resultado de proyectos de investigación y esfuerzos académicos, que tienen por objetivo desarrollar sistemas inteligentes con un dominio de acción particular. Diversas universidades a nivel mundial, han incursionado en su diseño, en áreas de aplicación tales como: probabilidades, redes neuronales y geometría.

En este artículo se destaca a manera de ejemplo, un sistema experto de propósito específico denominado *AgentGeom*. *AgentGeom* fue desarrollado por Pedro Cobo de la Universidad de Catalunya y Joseph Fortuny del Departamento de Matemática de la Universidad Autónoma de Barcelona, con el objetivo de ayudar a los alumnos en la apropiación de habilidades estratégicas y argumentativas implicadas en la resolución de problemas, y en particular de problemas geométricos.

AgentGeom contribuye de manera autónoma en las competencias que debe poseer un estudiante para resolver un problema, creando condiciones interactivas para que el alumno pueda analizar el proceso de solución (en un área gráfica). También brinda ayudas al estudiante solo con la información necesaria, con la finalidad de favorecer un tipo de aprendizaje constructivista. Genera además habilidades argumentativas en matemática, contando para ello con un área deductiva donde el alumno dicta sentencias escritas siguiendo las normas del lenguaje matemático, lo anterior desarrolla la capacidad de abstracción y las ideas relacionadas con la demostración en matemática.

AgentGeom simula la conducta de un tutor humano en tres aspectos: tiene autonomía en el sentido de mostrar cierta iniciativa y comportamientos calificables como espontáneos, se desempeña como un tutor; guía al estudiante y le proporciona mensajes de ayuda, y funciona como un mediador al recibir las entradas de los alumnos y del profesor, validando las acciones del estudiante. Este sistema experto de acuerdo con sus creadores: *"puede ser una herramienta auxiliar del profesor para ayudarle a atender la diversificación de alumnos con la que se encuentra cada día"*.

Como ya lo hemos apuntado, la enseñanza de la matemática puede contribuir decisivamente con el desarrollo de las habilidades del pensamiento y destrezas cognitivas, que fortalecen la capacidad de razonamiento, la disciplina mental y el rigor en la toma de decisiones. Mediante el desarrollo de este tipo de sistemas por computadora, se ratifica esta percepción, recalcando además cómo los avances de las nuevas tecnologías, están favoreciendo el desarrollo de competencias directamente relacionadas con la capacidad de los estudiantes para la resolución de problemas.

7. Conclusiones

La inteligencia artificial en la actualidad, presenta múltiples aplicaciones en distintos ámbitos de las actividades comerciales, militares y de la vida en sociedad. En el campo educativo, sus más importantes aportes se circunscriben en los avances de las tecnologías que tienen que ver con los sistemas expertos y en particular los sistemas instruccionales.

La creación de sistemas instruccionales inteligentes en mayor o menor medida, está permitiendo automatizar procesos de enseñanza y aprendizaje, que por las características de globalización en los centros educativos (reflejadas con aulas sobrecargadas de alumnos), se ha convertido en una nueva opción que da posibilidad de respetar la diversidad y las condiciones individuales de aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática la crisis demanda soluciones nuevas, que le permitan a los educandos aprender de una forma más interactiva (matemática asistida por computadora), como complemento de la educación tradicional. Es en este sentido, donde el uso de las tecnologías de la información y la comunicación cobra un lugar preponderante, hacia la búsqueda de ambientes de aprendizaje heurísticos donde el estudiante explore, conjeture y construya su propio conocimiento.

El uso adecuado de sistemas expertos con un propósito general o específico para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, a largo plazo creemos, tendrá que ocupar gran parte de los esfuerzos académicos en las instituciones de enseñanza superior. La sociedad de la información y comunicación lo exige, los cambios pedagógicos y metodológicos de la antigua Universidad, se orientan a la búsqueda de una formación matemática, que otorgue a los individuos un verdadero desarrollo en sus habilidades de pensamiento y toma de decisiones.

Finalizamos con una frase citada por B. Eckmann: *"respecto al ordenador, he oído una y mil veces decir: les guste o no a los matemáticos, el ordenador está allí, yo no estoy de acuerdo con esta afirmación; nos gusta el ordenador y lo usamos, más vuelvo la frase por pasiva y respondo que, les guste o no el ordenador, las matemáticas están ahí"*.

8. Bibliografía

Arce, C. (1997). Reglas de Reescritura para Ecuaciones de Superficies Cuadráticas con *Mathematica*. *Memorias del V Encuentro Centroamericano de Investigadores en Matemática*, *1*(1), 105-113.

Arce, C. (2001). Ejercicios Resueltos y Exámenes de Álgebra Lineal. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Arce, C., Castillo, W. y González, J. (2004). Álgebra Lineal. San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Arce, C. (2004, agosto 1). Materiales para los Cursos MA0429 y MA0275. [En línea]. <http://maltsev.emate.ucr.ac.cr/~carce/> [2005, febrero 7].

Arias, J. (s.a.). Publicaciones y Documentos. [En línea]. <http://roble.pntic.mec.es/~apantoja/publica/arias1.htm> [2005, julio 10].

Ashby, E. (1969). Technology and the Academics. Inglaterra: MACMILLAN & CO LTD.

Astorga, A. y Sánchez, A. (1999). Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora: Experiencia del Instituto Tecnológico de Costa Rica. *Memorias del Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, *1*(1), 197-206.

Ávila, J. (1999). Conjeturas con *Mathematica*. *Memorias del Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, *1*(1), 124-130.

Bartolomé, A. (1996). Preparando para un Nuevo Modo de Conocer. *Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, *1*(4), 1-15.

Briones, L. (2002). Demandas de la Sociedad del Conocimiento a la Gestión del Currículum Escolar. *Revista Digital Umbral 2000, 1*(10), 1-23.

Bueno, M. (1999). Aprendiendo Álgebra Lineal con *Matlab*, una Experiencia Didáctica. *Memorias del Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, *1*(1), 60-71.

Cobo, P. y Fortuny, J. (2003). Artificial and Human Tutoring in Mathematics Problem Solving. [En línea]. < www.um.es/ead/red/M2 > [2005, julio 15].

Cuevas, J., Álvarez, M. y Valido, I. (1999). Curso de Ecuaciones Diferenciales Asistido por Computadoras en la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. *Memorias del Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, *1*(1), 270-272.

Dorrego, E. (2004). Transformación de la Educación Superior en América Latina. *Nuevas Tecnologías y Educación*, *1*(1), 125-127.

Galvis, A. (1992). Ingeniería de Software Educativo. Colombia: Ediciones Uniandes.

Gutiérrez, G. y Martínez, M. (2002). Tesis: Aplicaciones del programa "*El Geometra*" en la enseñanza del tema de *Funciones* en secundaria. Universidad Nacional.

Hernández, L. y Rodríguez, M. (1999). La Formación de Profesores de Matemática en las Nuevas Tecnologías. *Memorias del Primer Congreso Internacional de Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora*, *1*(1), 248-252.

Kolman, B. (1999). Álgebra Lineal con Aplicaciones y *Matlab*. México: Pearson.

Meza, L., Garita, G. y Villalobos, L. (2001). Estrategias Didácticas para Desarrollar Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática Asistidos por Computadora. *Memorias del II Congreso Internacional de Matemática Asistida por Computadora*, *1*(1), 84-96.

Meza, L. (2000). Consideraciones sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática. *Memorias del Segundo Festival de Matemáticas*, *1*(1), 129-136.

Meza, L. (2001). Elementos para Enseñar Matemática. Costa Rica: Editorial del Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Monge, J. (2005). [entrevista con el profesor Jorge Monge Fallas, docente].

Nakamura, S. (1997). Análisis Numérico y Visualización Gráfica con *Matlab*. México: Prentice-Hall.

Pérez, C. (2002). La Universidad en el Nuevo Paradigma: Formar para la Vida en la Sociedad del Conocimiento. [En línea]. <http://www.carlotaperez.org/portada.htm> [2005, febrero 19].

Pons, J. (2004). La Formación Superior y el Reto de las Nuevas Tecnologías de la Información. *Nuevas Tecnologías y Educación, 1*(1), 119-123.

Rich, E. y Knight, K. (1994). Inteligencia Artificial. España: Mc Graw Hill.

Roman (s.a.) Inteligencia Artificial: los Sistemas Expertos. [En línea]. <http://www.rinconcitodelphi.com/articulos/IA/Articulo.htm> [2005, julio 14].

Samper, J. (s.a.) Introducción a los Sistemas Expertos. [En línea]. <http://www.redcientifica.com/doc/doc199908210001.html> [2005, julio 16].

Salinas, J. (2004). Educación Superior y Tecnología Digital. *Nuevas Tecnologías y Educación*, *1*(1), 113-118.

Silvio, J. (2004). ¿Cómo Transformar la Educación Superior con la Tecnología Digital?. *Nuevas Tecnologías y Educación*, *1*(1), 93-112.

Trujillo, J. (2002). Un Tour por el *Mathematica.* [En línea]. <http://nereida.deioc.ull.es/~pcgull/ihiu01/cdrom/mathematica/contenido/math.html> [2005, Julio 16].

Valdés, N. y otros (2000). La Enseñanza de la Demostración Matemática. [En línea]. < http://www.unne.edu.ar/cyt/2001/9-Educacion/D-021.pdf#search='ense%C3%B1anza%20de%20la%20matem%C3%A1tica%20y%20sistemas%20expertos > [2005, julio 10].

UNA INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS

E. Caligaris, Roberto,
Rodríguez, Georgina B.,
Caligaris, Marta G.

Abstract. *Los sistemas dinámicos tratan sobre la evolución de los sistemas en el tiempo, analizando si los mismos tienden a quedarse en equilibrio, si permanecen repitiendo ciclos o si tienen un comportamiento más complicado. En este trabajo se hace una breve introducción a los sistemas dinámicos y se muestran algunas herramientas gráficas que pueden utilizarse como soporte en las clases en las que se trabaja con estos temas. No existe en este trabajo una originalidad absoluta sino un esfuerzo para introducir al interesado en el uso de herramientas vinculadas a una de las áreas de investigación actual más dinámicas, complejas y en rápida evolución.*

Introducción

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar en dos grupos, discretos y continuos, según la naturaleza de su variable independiente, el tiempo. Cuando ésta evoluciona en forma discontinua, típico en problemas de Biología, el sistema dinámico se representa mediante una ecuación recursiva. En cambio, cuando evoluciona en forma continua, los sistemas dinámicos se describen mediante ecuaciones diferenciales.

En el estudio de los sistemas dinámicos no se buscan las soluciones analíticas de las ecuaciones que lo definen. Se analiza el comportamiento a largo plazo: si se estabilizará, y hacia qué estado, o no se estabilizará, y qué pasa si se cambian las condiciones iniciales. Se buscan los puntos fijos, valores de la variable que son constantes en el tiempo, y los puntos periódicos, estados del sistema que se repiten una y otra vez.

Existen sistemas dinámicos sensiblemente dependientes de las condiciones iniciales. Una consecuencia de este comportamiento es la imposibilidad de prever completamente la evolución futura del sistema. Incluso conociendo exactamente la definición de las reglas de evolución de estos sistemas la predicción a largo plazo resulta imposible. Estos sistemas se denominan caóticos.

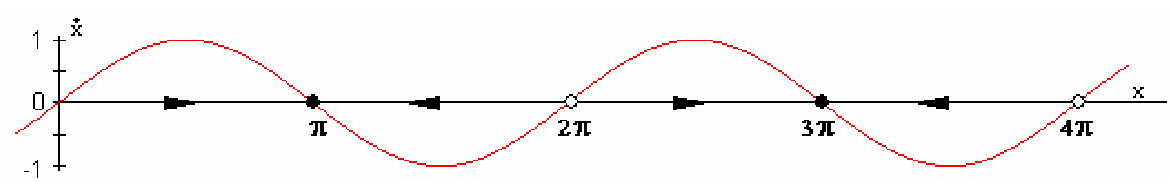
En este trabajo se presentan algunas herramientas gráficas que permiten trabajar desde los sistemas dinámicos no lineales más simples, hasta los sistemas caóticos denominados atractores extraños. Para éstos se han preparado distintos comandos específicos, agrupados en un paquete propio denominado **Caos**. Se pretende que este trabajo sea un factor motivante para que el lector se sienta atraído hacia este apasionante tema de investigación.

Sistemas dinámicos unidimensionales

Cuando se trabaja en una dimensión, el sistema dinámico se reduce a una ecuación simple del tipo $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} = f\,(x)$. Aún cuando exista solución analítica, una alternativa para estudiar esta ecuación diferencial ordinaria es haciendo un análisis gráfico.

Por ejemplo, si $f\,(x)$ = sen x, ¿cómo se comporta la solución cuando $t \to \infty$, para distintas condiciones iniciales?

Si se supone que x es la posición de una partícula que se mueve a lo largo de la recta, $\dot{x}$ es su velocidad, la ecuación $\dot{x}$ = sen x representa un campo vectorial en la recta. Para representarlo, se grafica $\dot{x}$ vs x y luego se dibujan flechas hacia la derecha si $\dot{x} > 0$ y hacia la izquierda si $\dot{x} < 0$. Los puntos en los que $\dot{x} = 0$, se denominan puntos fijos o de equilibrio.

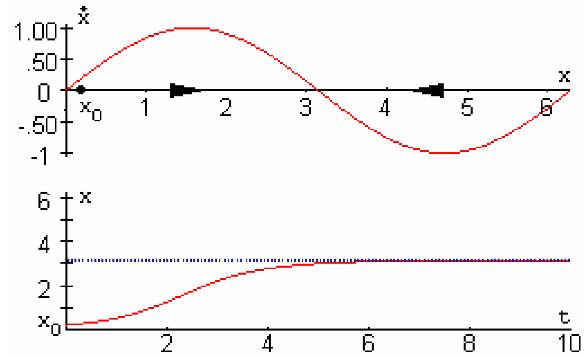


Se observa que hay dos clases de puntos fijos:

- ✓ puntos fijos estables, llamados generalmente **atractores**, representados por dos flechas orientadas hacia el punto de equilibrio o por puntos negros en el gráfico $\dot{x}$ vs x, y
- ✓ puntos fijos inestables, llamados generalmente **repulsores**, representados por dos flechas que salen del punto de equilibrio o por puntos blancos en el gráfico $\dot{x}$ vs x.

A partir del análisis del gráfico de $\dot{x}$ vs x, se puede tener una idea cualitativa de la solución de $\dot{x} = f\,(x)$. Por ejemplo, si $x(t_0) = x_0 = \frac{\pi}{16}$, la “partícula” se moverá cada vez más rápido hacia la derecha, hasta alcanzar $x = \frac{\pi}{2}$ y luego cada vez más lentamente se aproximará al punto fijo estable x = □.

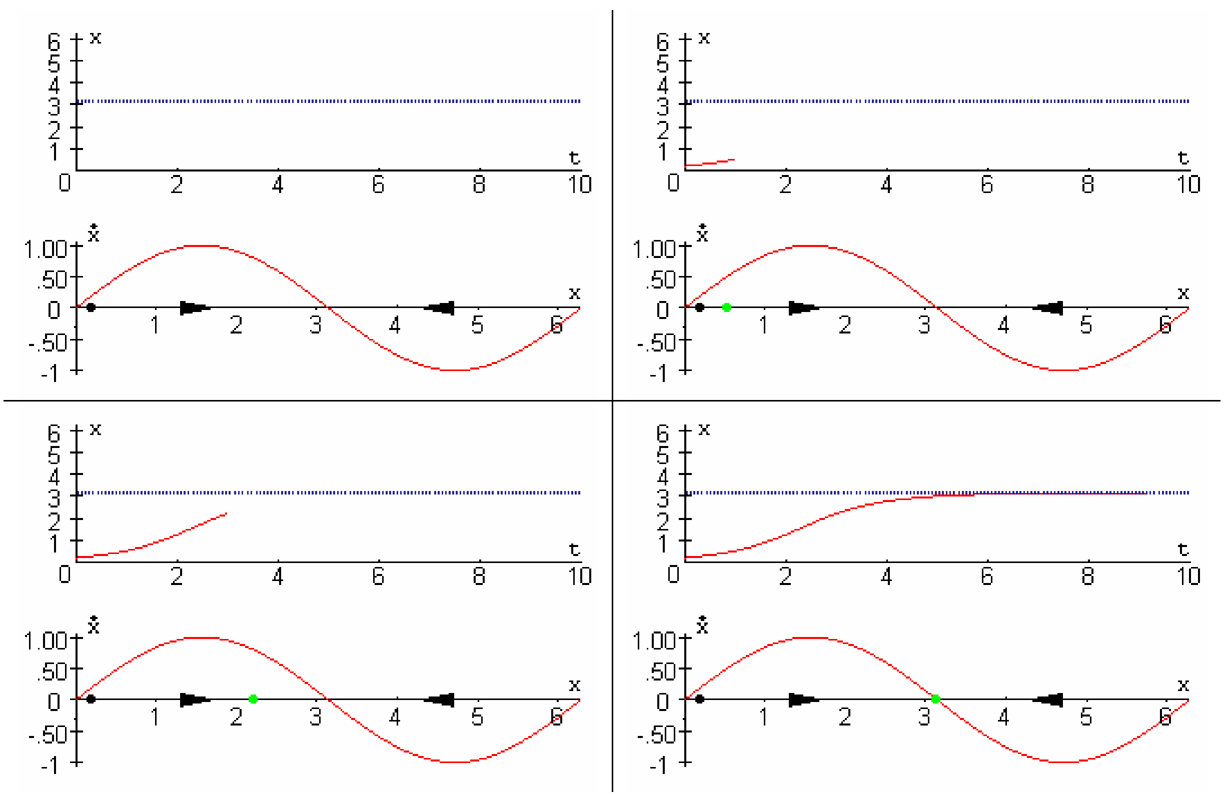
La curva x(t) es cóncava hacia arriba hasta $x = \frac{\pi}{2}$ y cóncava hacia abajo hasta x = □.



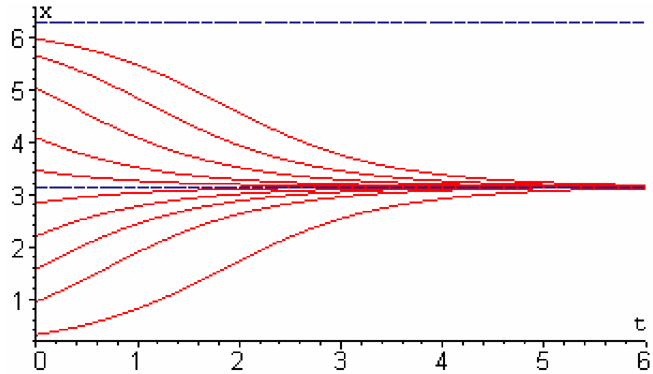
Los gráficos siguientes forman parte de una “animación” en la que se muestra de que manera se mueve la partícula desde su posición inicial y como a partir de este movimiento se puede obtener una idea de la solución de la ecuación.

Con un punto negro se indica la posición inicial y con un punto verde la posición actual, en el gráfico $\dot{x}$ vs x. La solución de la ecuación diferencial se ha obtenido con el método de Runge-Kutta-Fehlberg, que Maple usa por defecto para aproximar numéricamente las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, no es simplemente una aproximación cualitativa, en este caso.

La evolución se muestra de derecha a izquierda y desde arriba hacia abajo.



Un análisis similar puede hacerse para cualquier condición inicial.



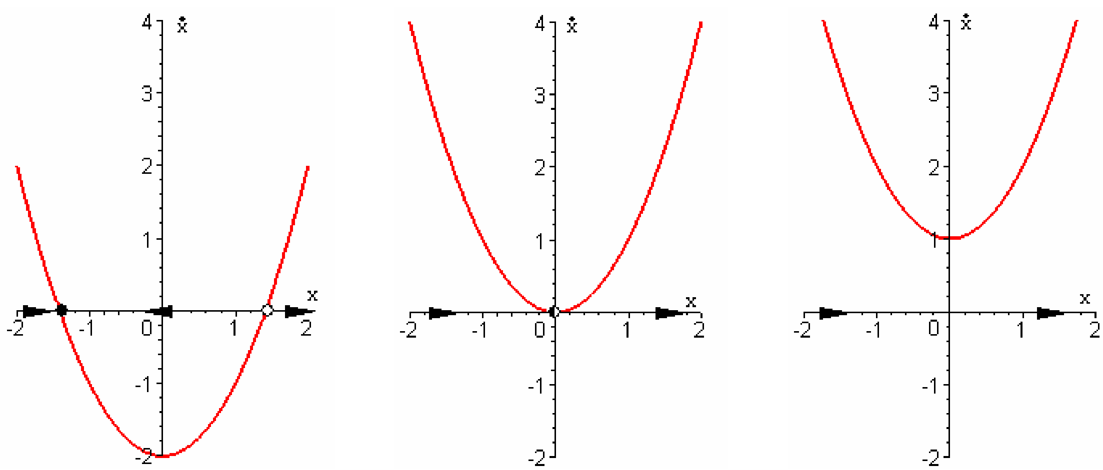
Así, para cualquier condición inicial entre $x_0 = 0$ y $x_0 = 2$ □, por ejemplo, la partícula termina aproximándose al atractor x = □, como se muestra en la figura de la izquierda.

Bifurcaciones en una dimensión

La presencia de puntos fijos es la característica principal de los sistemas unidimensionales. Los únicos comportamientos posibles para estos sistemas serán: que las trayectorias alcancen un punto fijo o sean divergentes. En estos sistemas no hay oscilaciones.

El comportamiento de un sistema dinámico depende de sus parámetros. A medida que éstos cambian, los puntos fijos pueden aparecer, desaparecer o cambiar su estabilidad. Estos cambios cualitativos en la dinámica del sistema se denominan **bifurcaciones**. El momento en que el punto fijo cambia su estabilidad recibe el nombre de **punto de bifurcación**. A ambos lados de este punto, el sistema tiene un comportamiento a largo plazo muy diferente.

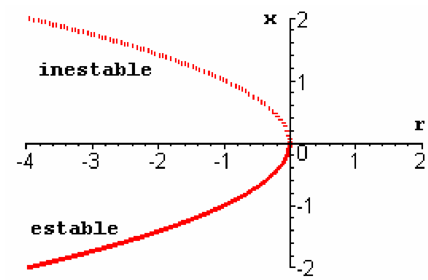
La bifurcación de silla - nodo (saddle-node) es el tipo más simple de bifurcación. Con ella se crean y destruyen puntos fijos. El ejemplo más simple de este tipo de bifurcación se presenta en la ecuación $\dot{x} = r + x^2$. Si $r < 0$, hay dos puntos fijos, uno estable y el otro inestable. A medida que el parámetro r va aumentando los puntos fijos se acercan entre sí y cuando $r = 0$ se convierten en un único punto fijo que sólo es estable por la izquierda. Para valores positivos de r, no hay puntos fijos.



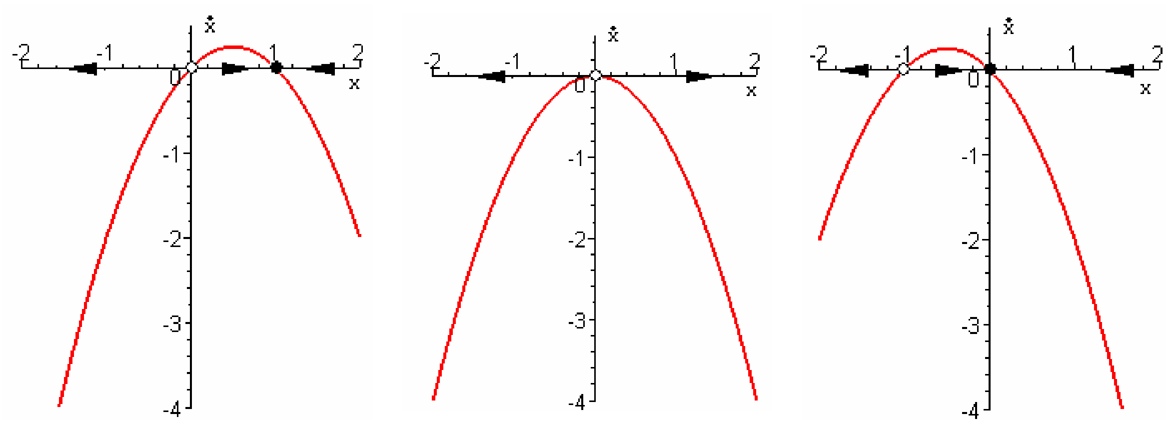
Suelen graficarse los puntos fijos en función del parámetro.

En este caso, $\dot{x} = r + x^2$, los puntos fijos se encuentran en $x = \pm\sqrt{-r}$ si $r \leq 0$ y si r es mayor que cero no hay puntos fijos.

Los puntos fijos correspondientes a cada valor del parámetro se observan en el gráfico de la derecha.

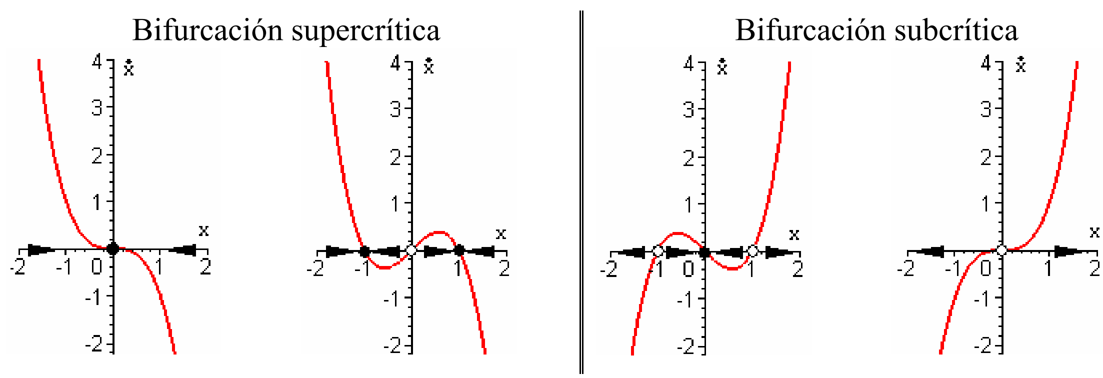


Otro tipo de bifurcación es la transcrítica. Esta no crea ni destruye puntos fijos. A medida que varía el parámetro r, dos puntos fijos se encuentran e intercambian su estabilidad. Un ejemplo simple de bifurcación transcrítica se presenta en la ecuación $\dot{x} = r\,x - x^2$.

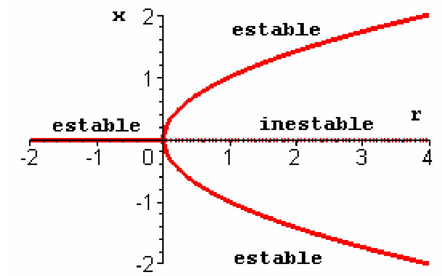


Por último se analizará la bifurcación de horquilla (pitchfork): un único punto fijo se bifurca en tres, uno de los cuales tiene la misma estabilidad que el original y los otros dos la contraria. Una ecuación simple que da lugar a una bifurcación de horquilla es $\dot{x} = r\,x - x^3$.

Las bifurcaciones de horquilla pueden clasificarse en dos grupos importantes: subcríticas y supercríticas. En la bifurcación supercrítica, un punto fijo estable se bifurca en dos puntos fijos estables y uno inestable. En la subcrítica dos puntos fijos inestables y uno estable colapsan en un punto fijo inestable.



Si la ecuación es $\dot{x} = r\,x - x^3$, por ejemplo, los puntos fijos se encuentran en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{r}$.
Los puntos fijos correspondientes a cada valor del parámetro se observan en el gráfico de la derecha.



Sistemas dinámicos tridimensionales. Atractores extraños

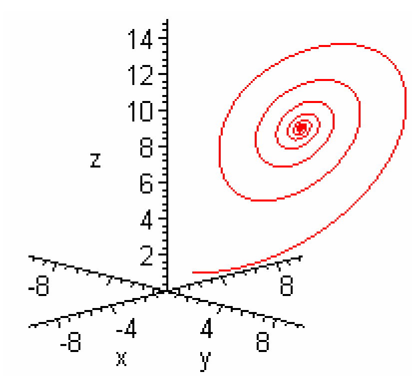
Un atractor extraño es un sistema dinámico que muestra dependencia muy sensible a las condiciones iniciales. El adjetivo extraño tiene su origen histórico en la observación de que tenían propiedades geométricas "raras", lo que hoy llamamos propiedades fractales. El atractor extraño más conocido es el generado por las ecuaciones de Lorenz.

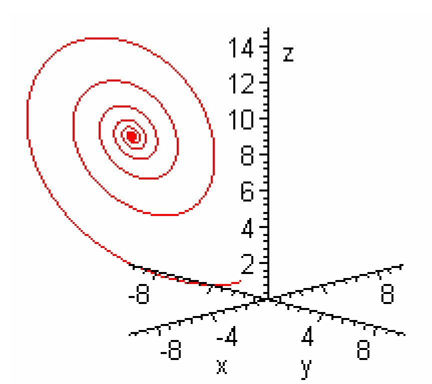
Las ecuaciones de Lorenz son un conjunto de tres ecuaciones diferenciales no lineales acopladas que describen el estado del sistema.

Estas ecuaciones son: $\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \sigma\,(y - x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = r\,x - y - x\,z \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = x\,y - b\,z \end{cases}$, donde r, b y σ son parámetros del sistema.

Estas ecuaciones fueron propuestas como un modelo muy simplificado del movimiento convectivo en las capas superiores de la atmósfera.

Para los valores $\sigma = 10$, r = 10, y b = 2,667 de los parámetros, el comportamiento del sistema es estable, de forma que en el tiempo tiende a uno de dos puntos fijos, normalmente llamados C^+ y C^-. En los gráficos siguientes se observa el comportamiento del sistema cuando las condiciones iniciales (t = 0) son (1, 1, 1) y (–1, –1,1).



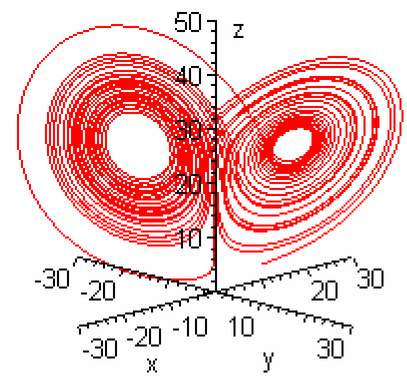


La posición exacta de los puntos fijos C^+ y C^- varía cuando cambian los parámetros. El sistema tiene otro punto fijo en el origen de coordenadas. Este punto no cambia de posición con los parámetros, pero es inestable. Debido a que todas las trayectorias que empiezan cerca del origen acaban escapando de él, este punto recibe el nombre de **repulsor**.

Por el motivo contrario, C^+ y C^- reciben el nombre de **atractores**.

Si se aumenta r por encima de 24,74 (manteniendo $\sigma = 10$ y b = 2,667), ninguno de los puntos fijos es ya un atractor de la trayectoria.

Sin embargo, puede demostrarse que la trayectoria está acotada, aunque todos los puntos fijos del sistema son repulsores.



El conjunto de puntos en los que la trayectoria se encuentra recibe el nombre de atractor. Dadas las características tan especialmente complejas de este objeto, que ya hemos descrito anteriormente, en este caso particular recibe el nombre de **atractor extraño**. Toda trayectoria sigue un camino en este atractor, pero el camino concreto que sigue es impredecible, y muy inestable.

El más pequeño cambio en las condiciones iniciales puede producir comportamientos a largo plazo extremadamente diferentes. Esto se conoce popularmente como el **efecto mariposa**.

El programa **Lorenz**, del paquete propio **Caos**, permite animar la solución de las ecuaciones de Lorenz, ingresando los valores de los parámetros y luego las condiciones iniciales de la siguiente manera:

```
> Lorenz();
¿Cuál es tu elección para sigma?
> 10
¿Cuál es tu elección para r?
> 28
¿Cuál es tu elección para b?
> 2.6667
¿Cuál es la condición inicial para x?
> 1
¿Cuál es la condición inicial para y?
> 1
¿Cuál es la condición inicial para z?
> 1
```

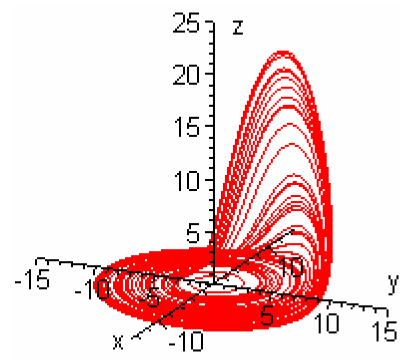
Luego se muestra la animación obtenida, cuya última gráfica es la que aparece al inicio de esta página.

El programa **Lorenz**, como todos los programas del paquete, admite argumentos opcionales que permiten modificar algunas características del gráfico obtenido.

Un atractor menos conocido es el de Rössler, que modela una reacción química.

Las ecuaciones del atractor de Rössler son:

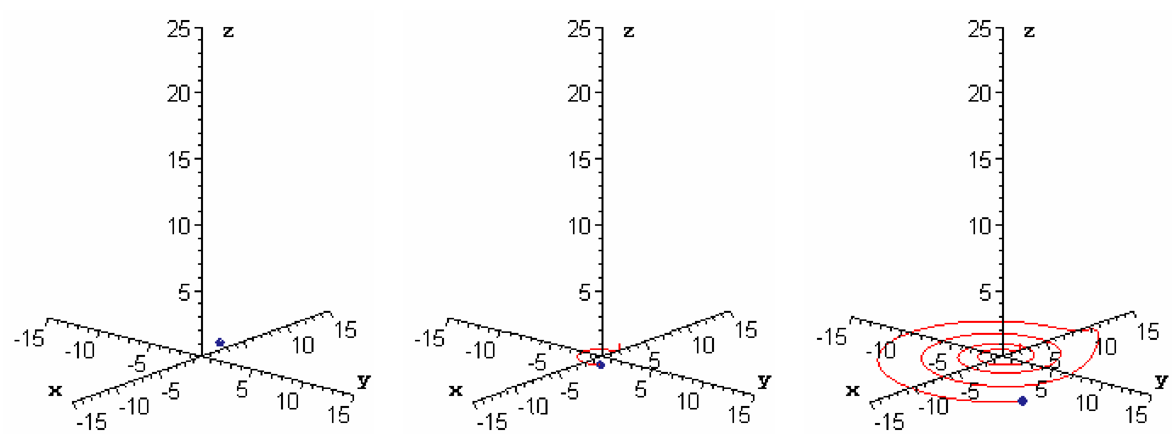
$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -y - z \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = x + \alpha y \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \alpha + x z - \mu z \end{cases}$$

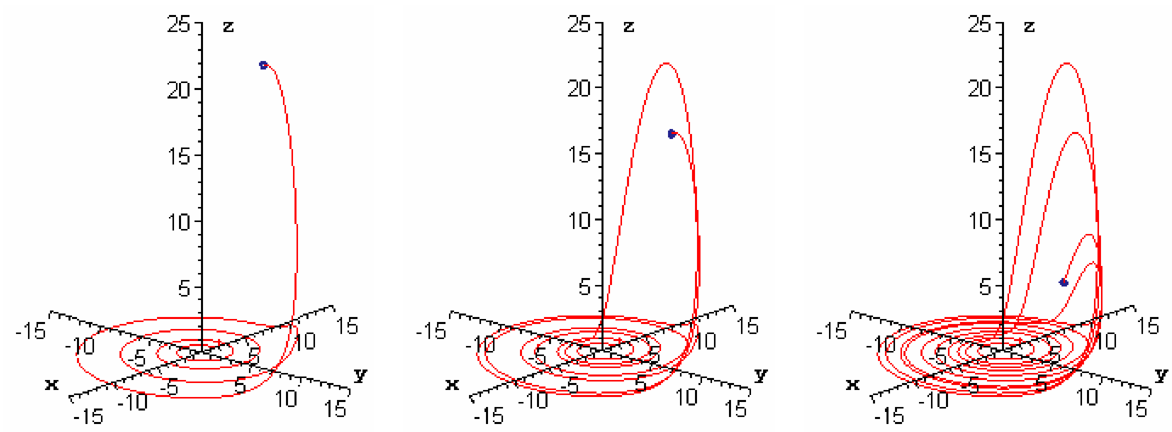


El gráfico de la derecha fue obtenido para $\alpha = 0.2$ y $\mu = 5.7$.

Con el programa correspondiente podrán obtenerse los resultados para otros parámetros, con el mismo esquema mostrado para **Lorenz**.

La evolución del sistema, para la condición inicial P(1, 1, 1), se observa en la siguiente secuencia de gráficos:



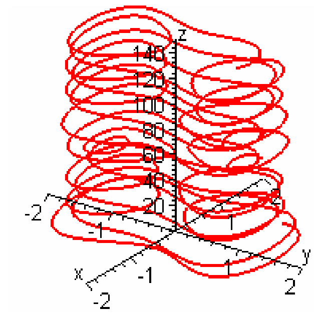


Las imágenes anteriores son algunos cuadros de la animación que se obtiene con el programa **Rossler**, del paquete propio **Caos**.

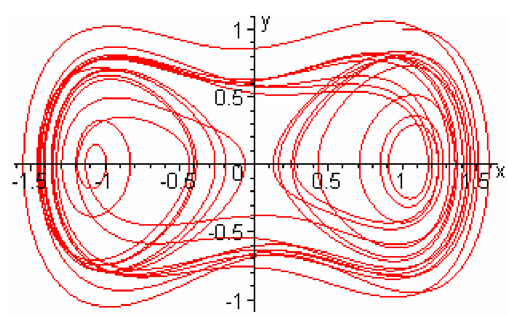
Como último ejemplo en esta presentación se muestra un sistema oscilatorio forzado de Duffing. La ecuación que describe el sistema es $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = - \delta \frac{\partial\theta}{\partial t} + \theta - \theta^3 + \gamma \cos(\omega\, t)$.

Llamando $x = \theta$, $y = \frac{\partial\theta}{\partial t}$, y $z = \omega t$, la ecuación anterior puede escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = -\delta\, y + x - x^3 + \gamma \cos z \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \omega \end{cases}$$



El gráfico anterior fue obtenido para $\delta = 0.2$, $\gamma = 0.3$ y $\omega = 1$



El gráfico de la izquierda se obtiene como solución del sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}} = \mathbf{y} \\ \dfrac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{t}} = -\boldsymbol{\delta}\, \mathbf{y} + \mathbf{x} - \mathbf{x}^3 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{cos}\,(\boldsymbol{\omega}\, \mathbf{t}) \end{cases}$$

con los mismos parámetros.

Conclusiones

Cuando un lector no iniciado intenta acometer la lectura de un artículo acerca de sistemas dinámicos, o aún un texto actual, se puede encontrar con un galimatías y es muy probable que más o menos rápidamente abandone su intento.

Teniendo en mente esta situación se ha preparado el presente trabajo y se puso mucho énfasis en describir cuidadosa y detalladamente el comportamiento de los sistemas dinámicos en una dimensión, tratando de mostrar sino todos, al menos la mayoría de los casos que se pueden presentar, confiando en que aquel lector descorazonado podrá encontrar el tema desmitificado.

Luego de esta circunstanciada exposición se pasó a describir sistemas dinámicos tridimensionales sin entrar en tantos detalles, confiando que los mismos puedan ser más fácilmente entendidos y que todo este trabajo pueda ser útil en la cátedra.

Cuarto CIEMAC

Una introducción a los sistemas dinámicos

Roberto E. Caligaris
Georgina B. Rodríguez
Marta G. Caligaris

Grupo de Informática Educativa
Facultad Regional San Nicolás
Universidad Tecnológica Nacional
Argentina

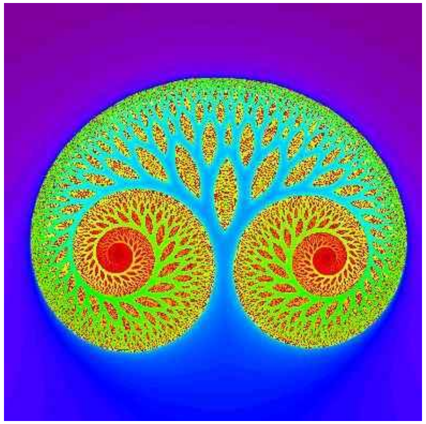
Sistemas dinámicos

Discretos

Continuos

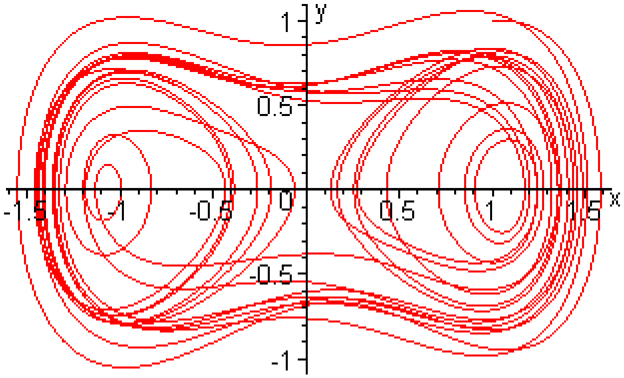
Ecuaciones recursivas

$$z_{n+1} = z_n^{1,5} + 0,2$$



Ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = -\delta\, y + x - x^3 + \gamma \cos(\omega\, t) \end{cases}$$



Sistemas dinámicos continuos

No se busca la solución analítica.

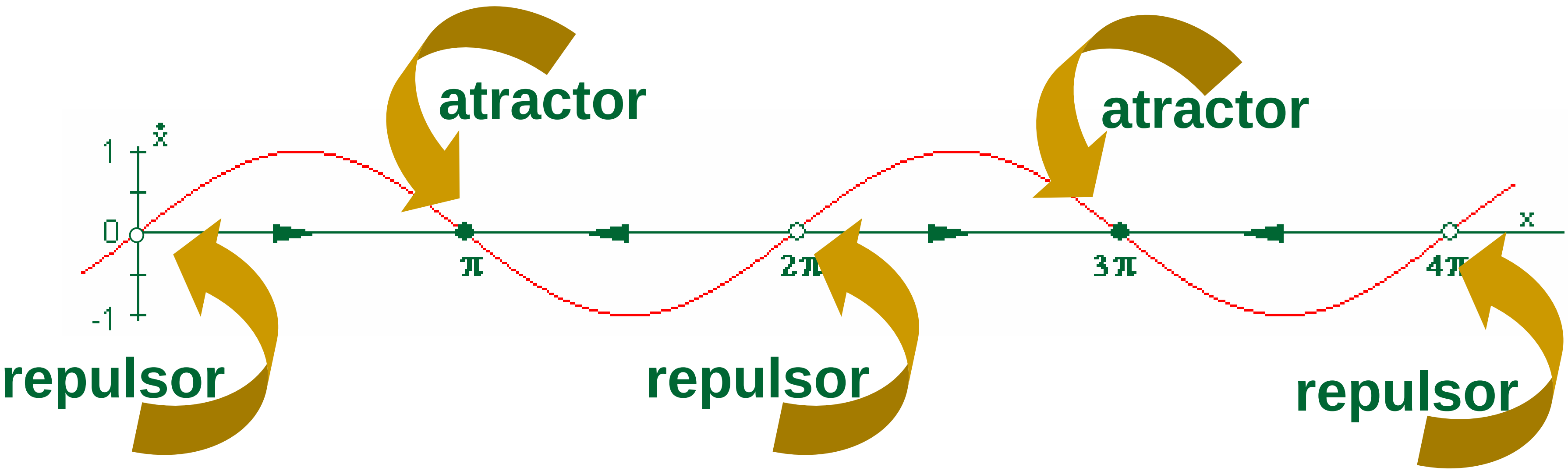
Se estudia:

- **Comportamiento a largo plazo**
- **Estabilidad**
- **Respuesta ante la variación de las condiciones iniciales**

Sistemas dinámicos unidimensionales

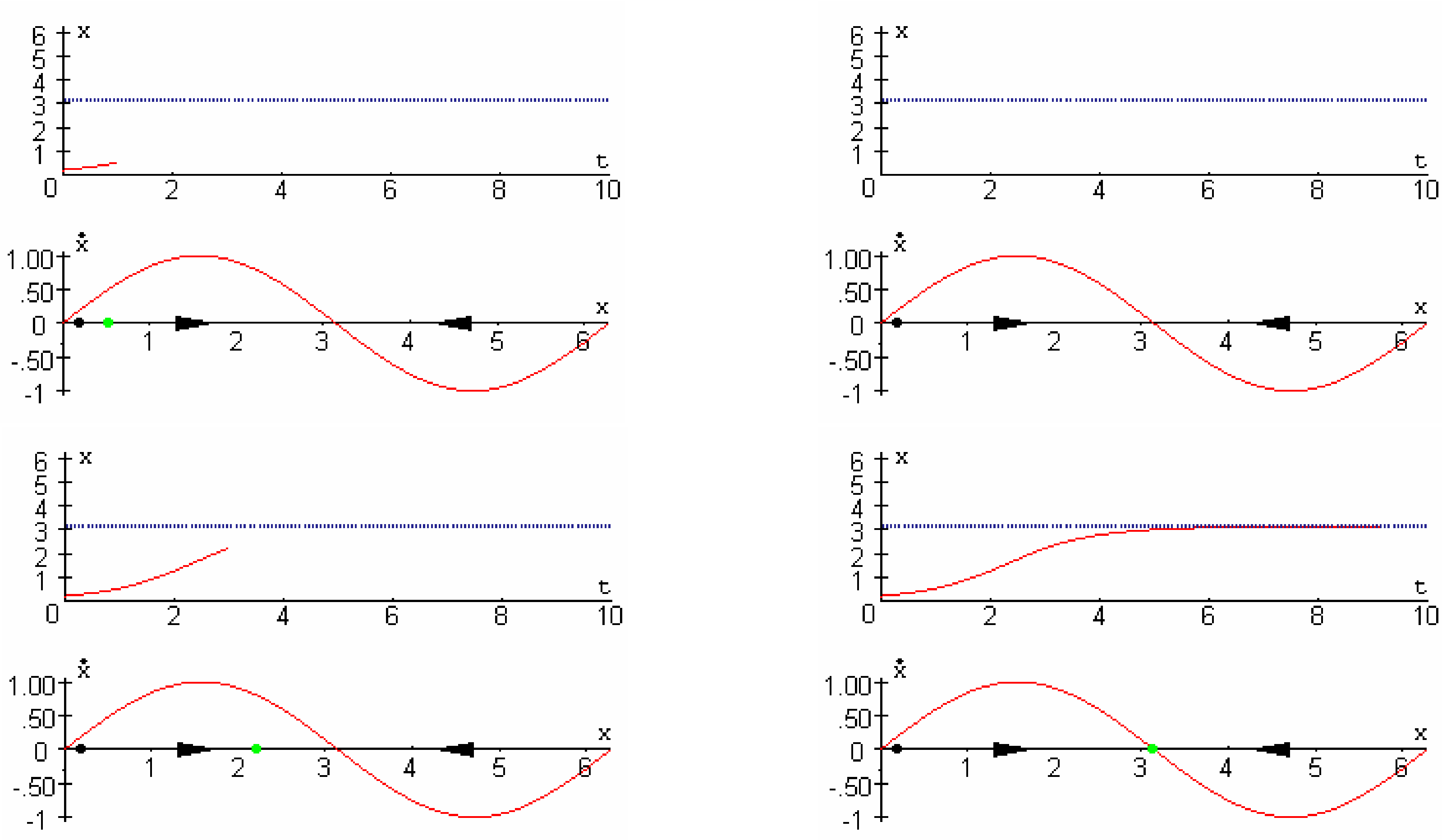
$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t} = f(x)$$

- **Análisis gráfico: ¿cómo se comporta la solución cuando t → ∞, para distintas condiciones iniciales?**



Sistemas dinámicos unidimensionales

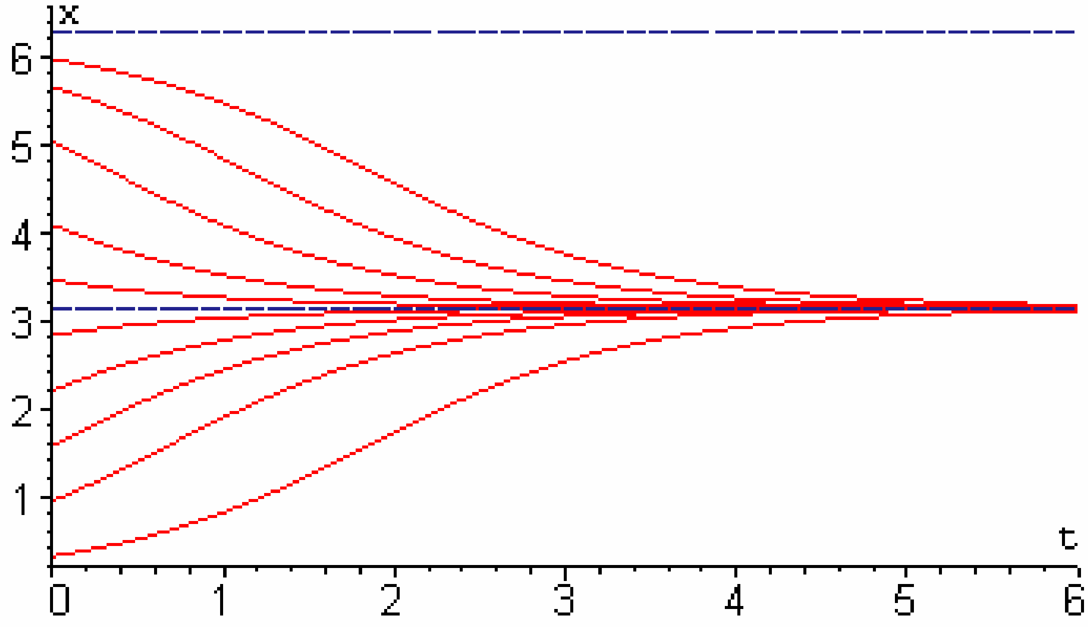
Evolución del sistema paso a paso



Sistemas dinámicos unidimensionales

Esto significa…

Si la condición inicial está en (0, 2π) la solución tiende a π, cuando t→?.



Sistemas dinámicos unidimensionales
Bifurcaciones

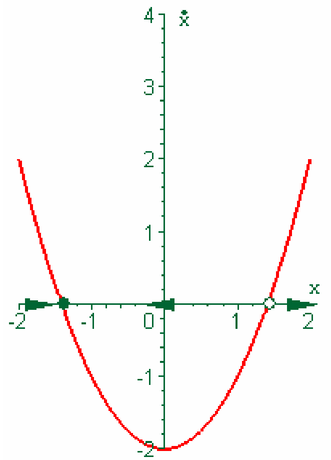
La presencia de puntos fijos es la característica principal de los sistemas unidimensionales.

El comportamiento de un sistema dinámico depende de sus parámetros. A medida que éstos cambian, los puntos fijos pueden aparecer, desaparecer o cambiar su estabilidad. Estos cambios cualitativos en la dinámica del sistema se denominan **bifurcaciones**. El momento en que el punto fijo cambia su estabilidad recibe el nombre de **punto de bifurcación**. A ambos lados de este punto, el sistema tiene un comportamiento a largo plazo muy diferente.

Sistemas dinámicos unidimensionales
Bifurcaciones

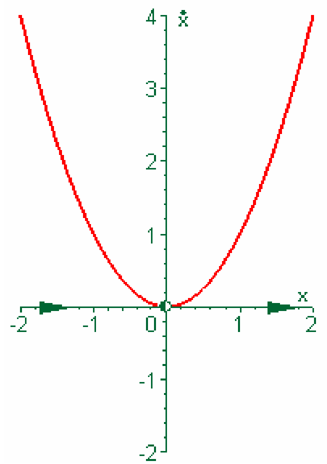
La bifurcación de silla - nodo (saddle-node)

El ejemplo más simple de este tipo de bifurcación se presenta en la ecuación $\dot{x} = r + x^2$



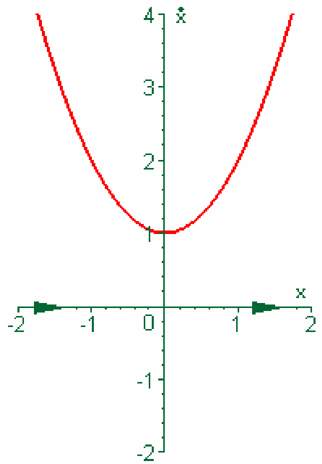
$r < 0$

Dos puntos fijos



$r = 0$

Un punto fijo

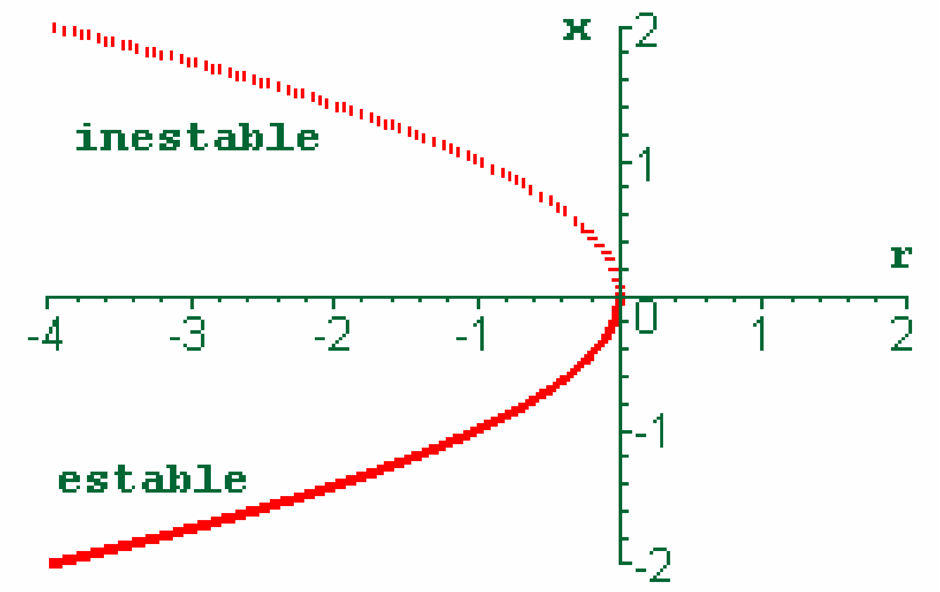


$r > 0$

No hay puntos fijos

Sistemas dinámicos unidimensionales
Bifurcaciones

En este caso, los puntos fijos se encuentran en $x = \pm\sqrt{-r}$ si $r \leq 0$ y si r es mayor que cero no hay puntos fijos.

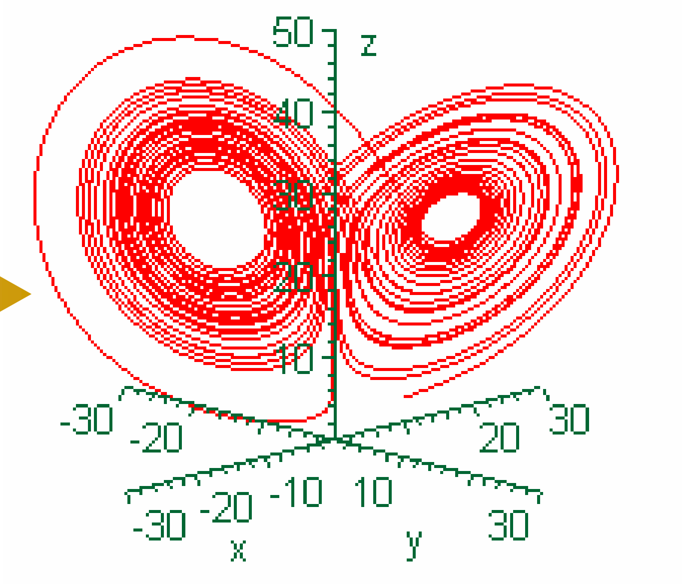


Sistemas dinámicos en 3 D
Atractores extraños

Un atractor extraño es un sistema dinámico que muestra dependencia muy sensible a las condiciones iniciales.

El atractor extraño más conocido es el generado por las **Ecuaciones de Lorenz**.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = 10\,(y - x) \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = 28\,x - y - x\,z \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = x\,y - 2{,}6667\,z \end{cases}$$

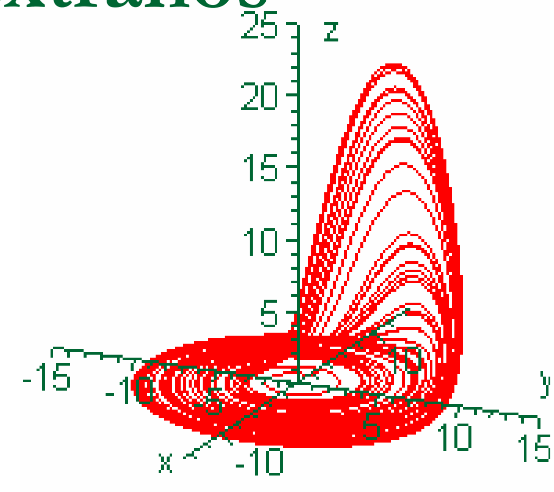


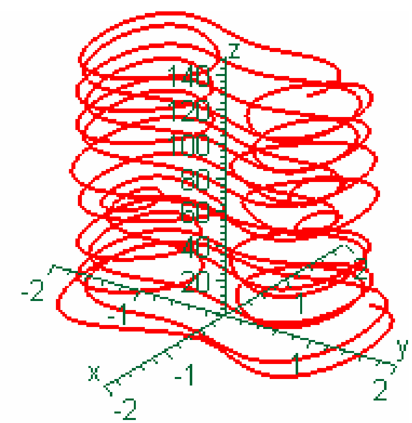
Sistemas dinámicos en 3 D

Otros atractores extraños

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = -y - z \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = x + 0{,}2\, y \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = 0{,}2 + x\, z - 5{,}7\, z \end{cases}$$

Rossler





Duffing

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = y \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} = -0{,}2\, y + x - x^3 + 0{,}3 \cos z \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = 1 \end{cases}$$

Conclusiones

Cuando un lector no iniciado intenta acometer la lectura de un artículo acerca de sistemas dinámicos se puede encontrar con un galimatías y es muy probable que más o menos rápidamente abandone su intento.

Entonces, hemos preparado este trabajo con mucho énfasis en la descripción cuidadosa y detallada del comportamiento de los sistemas dinámicos en una dimensión.

Luego pasamos a describir sistemas dinámicos tridimensionales sin entrar en tantos detalles, confiando que los mismos puedan ser más fácilmente entendidos y que todo este trabajo pueda ser útil en la cátedra.

UNA LECCIÓN DE ESTEREOMETRÍA ASISTIDA POR COMPUTADORA

Sergio Mata C.
Cristian Quesada F.

Resumen

Con el desarrollo de este trabajo se pretende mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje del tema de estereometría y lograr una mayor comprensión de los conceptos relacionados con el tema, como prismas, pirámides, alturas, apotemas, entre otros; así como hacer más fácil la comprensión de su construcción y el cálculo de áreas y volúmenes. También se pretende mostrar la factibilidad de desarrollar proyectos con el programa Geometers Sketchpad, que permitan desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, principalmente en el área de geometría del espacio.

INTRODUCCIÓN

Si vemos atrás en la historia, apreciamos que los avances en la matemática, en cualquiera de sus ramas, han sido de manera gradual. Se ha tomado décadas e incluso siglos para que se de un avance realmente importante, y muchas veces, este solo ha sido un comienzo para el desarrollo de otros estudios posteriores más avanzados.

Sin duda alguna, ha sido la geometría, por su alto grado de aplicación, la que desde períodos muy antiguos de la historia humana ha impulsado grandes avances. Podemos mencionar a los babilonios, quienes con sus problemas básicos de repartición de terrenos o construcción, calcularon áreas de figuras planas sencillas y volúmenes de sólidos simples, utilizando para ello ciertas fórmulas, que si bien no son tan precisas como las actuales, en primera instancia les proporcionaron aproximaciones bastante aceptables que les sirvieron en la resolución de estos problemas.

Por otro lado, si miramos la geometría egipcia, esta muy posiblemente tuvo su origen y desarrollo con un problema muy práctico que necesitaban resolver como el de evitar que sus cosechas se perdieran al crecerse el río Nilo. Para esto tuvieron que trazar linderos en los terrenos cultivados, teniendo así que usar algunas fórmulas para calcular áreas de rectángulos, trapecios, círculos etc. También usaron fórmulas, quizá no muy exactas (como ya dijimos con respecto a los babilonios) para el cálculo de volúmenes de algunos sólidos. Está demás mencionar la aplicación de la geometría la construcción de uno de los legados más importantes que nos dejó esta cultura, las pirámides de Egipto.

El mundo en el que vivimos posee tres dimensiones, no dos, por lo que la geometría plana se queda un poco corta en la explicación del entorno. De allí que pasamos de círculos, triángulos, cuadrados, etc., a esferas, prismas, pirámides, cilindros y conos; cinco de las figuras sólidas mas elementales que podemos distinguir en nuestro entorno.

De acuerdo con lo antes expuesto, es evidente la importancia que tiene el estudio de la geometría del espacio, y de allí surge principalmente el interés en buscar métodos y estrategias más eficaces para su enseñanza.

Es clara la dificultad que este tema presenta en su enseñanza con métodos tradicionales de la tiza y el pizarrón ya que resulta en muchas ocasiones complicada la tarea de representar un objeto tridimensional en una superficie plana. No todos los educadores de matemática poseen destrezas como dibujantes, por lo cual a veces resulta difícil darse a entender.

Las deficiencias en el estado actual de la educación matemática proporcionan razones suficientes para buscar un cambio metodológico, o al menos enriquecer y complementar los ya existentes.

Una respuesta a la problemática de la matemática y su enseñanza lo ha aportado el paradigma de los procesos de enseñanza asistidos por computadora.

Algunos de los objetivos que se buscan cumplir con este tipo de enseñanza son:

- Que el estudiante adquiera conceptos matemáticos utilizando el aspecto gráfico, la rapidez y precisión que ofrece esta nueva tecnología.

- Que el estudiante construya las estructuras cognitivas que les faciliten la comprensión de los diferentes conceptos matemáticos.

En nuestro país, el tema del uso de la computadora en la enseñanza, principalmente de la matemática, ha sido muy abordado durante los últimos años, principalmente con la realización de congresos y festivales de matemática organizados por las universidades estatales. En dichos eventos se han generado foros de discusión que han permitido visualizar los pros y los contras que se generan mediante la inserción de este recurso tecnológico en el proceso de instrucción.

Como menciona Meza en *Memorias de II CIEMAC* (2001) "Para desarrollar procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática asistidos por computadora debemos encauzar esfuerzos, realizar las actividades y utilizar los recursos de manera apropiada para asegurar el logro de los objetivos educativos propuestos".

Por lo anterior, es que mediante el uso del computador se busca principalmente cumplir algunos propósitos que son mencionados a continuación.

OBJETIVOS

- Contribuir en el mejoramiento de la labor del docente en el aula, mediante la representación de figuras tridimensionales con el computador.
- Motivar a los estudiantes en el estudio y aprendizaje de la estereometría.
- Facilitar a los alumnos el aprendizaje de propiedades y características de los cuerpos sólidos.
- Orientar al alumno en la utilización de softwares que le permitan una mejor interpretación de problemas de la vida cotidiana.

METODOLOGÍA

Si echamos un vistazo al programa de estudios de la educación diversificada podemos encontrar, entre otros, los siguientes objetivos:

- Identificar por su nombre y sus características, cuerpos geométricos básicos: prisma, cubo, cilindro, cono, pirámide, esfera; considerando sus elementos: vértices, aristas, diagonales, caras.
- Determinar área basal, área lateral, área total de los cuerpos geométricos en estudio.
- Determinar áreas de círculos, triángulos, cuadriláteros o polígonos regulares determinados por cortes transversales en un cuerpo geométrico.

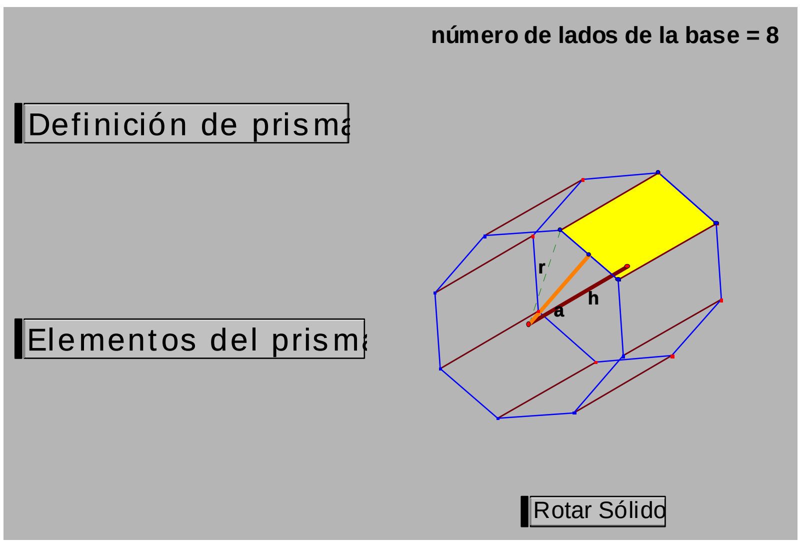
- Aplicar el concepto de volumen, en la interpretación y descripción de modelos concretos o gráficos de prismas y otras figuras, construidos agrupando cubos uniformes.
- Aplicar las unidades de volumen del Sistema Internacional y sus equivalencias en la resolución de problemas.
- Aplicar el concepto de capacidad, las unidades de capacidad y sus equivalencias en la resolución de problemas.
- Aplicar la relación volumen-capacidad, para determinar la capacidad de recipientes regulares y el volumen de cuerpos amorfos, en situaciones concretas y en la resolución de problemas.
- Resolver problemas que involucran áreas y volúmenes de dos o más cuerpos geométricos interrelacionados.

Como se mencionó anteriormente, resulta un poco difícil y en ocasiones tedioso el dibujar sólidos en la pizarra. Por lo general nos remitimos a graficar los más sencillos. ¿Que tal si un problema nos habla sobre un endecágono? Tal vez este polígono no sea tan complicado de dibujar, pero si fuera una pirámide cuya base es un endecágono, si estaríamos en problemas.

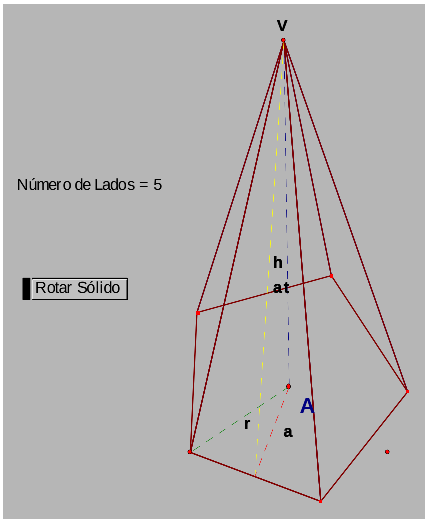
Nuestro objetivo es mostrar que mediante la utilización de softwares, en este caso, el Geometers Sketchpad, es factible la realización de muchos dibujos que nos permitan brindar una mejor explicación de los cuerpos tridimensionales a nuestros alumnos. Pero esto no se queda allí. También es posible llevar a cabo animaciones, rotaciones, construcciones paso a paso, y un gran número más de acciones que contribuyen enormemente al mejoramiento de la enseñanza en este tema.

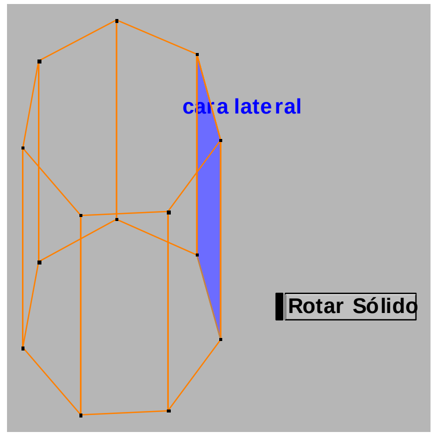
El Geometers Sketchpad es un programa computacional que fue diseñado para servir como herramienta en la enseñanza. Como menciona Meza (2002), si bien es cierto, el programa fue creado básicamente para el uso en clases de geometría en secundaria, su práctica ha demostrado que puede ser usado por muchas personas (diseñadores y dibujantes) e incluso para la enseñanza de otras ramas de la matemática.

Con esta aplicación se desarrolló un proyecto muy dinámico que permite mostrarle al estudiante las características de un sin número de sólidos entre pirámides, prismas, conos y cilindros.

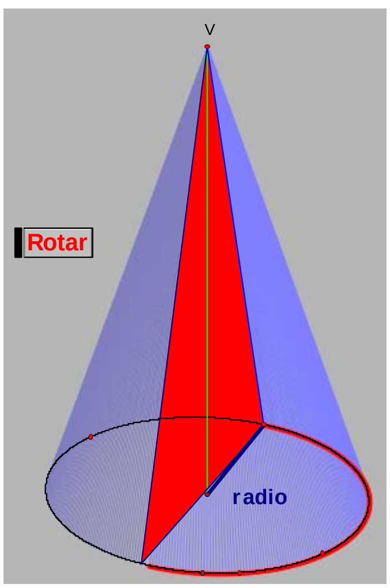


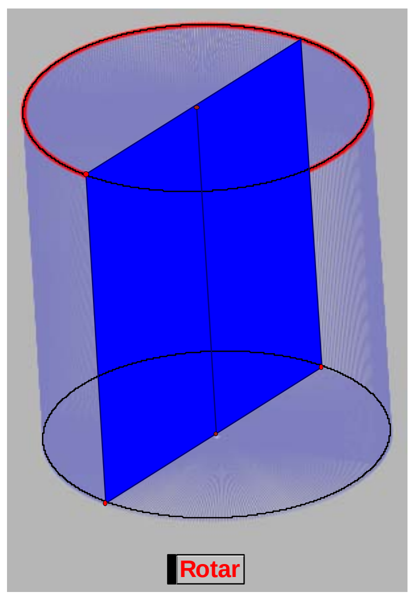
En este programa es posible aumentar o disminuir con facilidad el número de lados del polígono que se desea que tenga como base el prisma o la pirámide.





Así mismo, es posible también rotar los sólidos construidos, ver como se origina un cono o un cilindro (a partir de la rotación de un triángulo o rectángulo) e incluso ver el desarrollo del sólido para efectos de construirlo con material concreto como cartulina.





Este trabajo ya ha sido utilizado por varios educadores del país, obteniéndose buenos resultados, en primera instancia en el aspecto motivacional del estudiante, quien ha mostrado bastante interés en el tema. Además se ha logrado una mejor comprensión de los conceptos y visualización de los mismos.

CONCLUSIONES:

Actualmente, el desarrollo de la geometría, y específicamente de la estereometría, ha permitido al ser humano alcanzar grandes avances en muchos campos, especialmente en el científico y tecnológico, por lo que resulta importante la calidad en su enseñanza.

La intención de este trabajo fue, además de buscar alternativas para mejorar la enseñanza de la estereometría en la secundaria, el motivar a los educadores en la investigación y desarrollo de proyectos que impulsen esta labor.

Estamos convencidos de que la enseñanza asistida por computadora, puede traer muchos beneficios. Con ella es posible complementar la enseñanza tradicional y crear diferentes situaciones de aprendizaje que motiven tanto a alumnos como profesores.

BIBLIOGRAFÍA:

- Meza, L. G. "Estrategias didácticas para desarrollar procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática asistidos por computadora". En: *Memorias del Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de la matemática asistida por computadora.* Cartago, Costa Rica, 2001.
- Meza, L. G. "Simulaciones en computadora con fines didácticos programadas en Geometers Sketchpad". En: *Memorias del Segundo matemática.* San José, Costa Rica, 2002.
- Ministerio de Educación Pública. *Programa de estudios. Educación Diversificada. Matemática*. San José, Costa Rica, 2005.

Uso de diferentes herramientas en la resolución de problemas de regresión lineal múltiple[1]

Carlos E. Azofeifa[2]

Resumen

Se presentan la hoja electrónica Excel, sus complementos PHStat y el CB Predictor de Crystal Ball, así como el conocido software estadístico SPSS, como herramientas facilitadoras en la resolución de problemas relacionados con los modelos de regresión lineal múltiple.

Palabras clave

Regresión lineal, control estadístico de la calidad, inferencia estadística, pronósticos, pruebas de hipótesis.

Introducción

Muchas veces necesitamos encontrar un modelo que nos ayude a describir la relación entre una variable dependiente y una o más variables independientes. Cuando hemos recolectado datos de una variable dependiente y, y de n variables independientes: x_1, x_2,..., x_n, entonces se desean usarlos para encontrar la mejor relación entre estas variables. Encontrar el mejor modelo que nos exprese esta relación entre las variables, no solamente nos ayuda a medir dicha relación, sino también que el modelo nos pueda servir como pronóstico. En este sentido el análisis de la regresión lineal múltiple fue concebido por estadísticos y economistas matemáticos, para auxiliar en el pronóstico de la actividad económica de diferentes segmentos de la economía.

Es obvio que la revolución de las computadoras personales ha modificado dramáticamente la enseñanza de la estadística y los métodos cuantitativos en los salones de clase, por tanto cualquier software es parte del proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística. Sin embargo creemos que

[1] Este artículo fue financiado por el Proyecto No 820-A2-115, inscrito en la Vicerrectoría de Investigación de la U.C.R
[2] Profesor Escuela de Matemática U.C.R – U.N.A

una de las maneras de hacer la enseñanza de la estadística más efectiva, amena y atractiva es usando la hoja electrónica en todos los aspectos.

PHStat es un complemento de Excel que proporciona un menú de opciones conducente a cuadros de diálogos que activan opciones para realizar análisis específicos. De hecho PHStat minimiza el trabajo asociado en la elaboración de las soluciones en Excel al crear las respuestas en hojas y gráficas. Este software viene incorporado en el paquete del suplemento en la edición en español del libro *Estadística para administradores* de M. Berenson, D. Levine y Krehbiel, de la editorial Prentice Hall. Todo el trabajo estadístico se basa en el uso primordial del computador, en nuestro caso particular, a saber, resolver problemas de regresión lineal múltiple, de hecho muchos autores recomiendan no usar la regresión múltiple, a menos que se disponga de una computadora.

Desarrollo

En esta parte presentaremos tres herramientas que nos ayudarán a resolver de manera muy sencilla problemas de regresión lineal, ya sea simple o múltiple, en nuestro caso nos enfocaremos al de nuestro interés, es decir la regresión lineal múltiple.

El modelo de regresión múltiple con p variables independientes es dado por la ecuación:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{pi} + \in_i \qquad \text{donde}$$

$\beta_0 =$ ordenada en Y

$\beta_1 =$ pendiente de Y con la variable X_1, y las variables $X_2, X_3, \ldots, X_p$

$\beta_2 =$ pendiente de Y con la variable X_2, y las variables $X_1, X_3, \ldots, X_p$

$\beta_3 =$ pendiente de Y con la variable X_3, y las variables $X_1, X_2, X_4, \ldots, X_p$

$\beta_p =$ pendiente de Y con la variable X_p, y las variables $X_1, X_2, \ldots, X_{p-1}$

$\in_i =$ error aleatorio en Y para la observación *i*

Para nuestro caso particular usaremos el modelo de regresión múltiple con dos variables independientes, es decir

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \in_i$$

donde

β_0 = ordenada en Y

β_1 = pendiente de Y con la variable X_1, y la variable X_2 constante

β_2 = pendiente de Y con la variable X_2, y la variable X_1 constante

$\in_i$ = error aleatorio en Y para la observación *i*

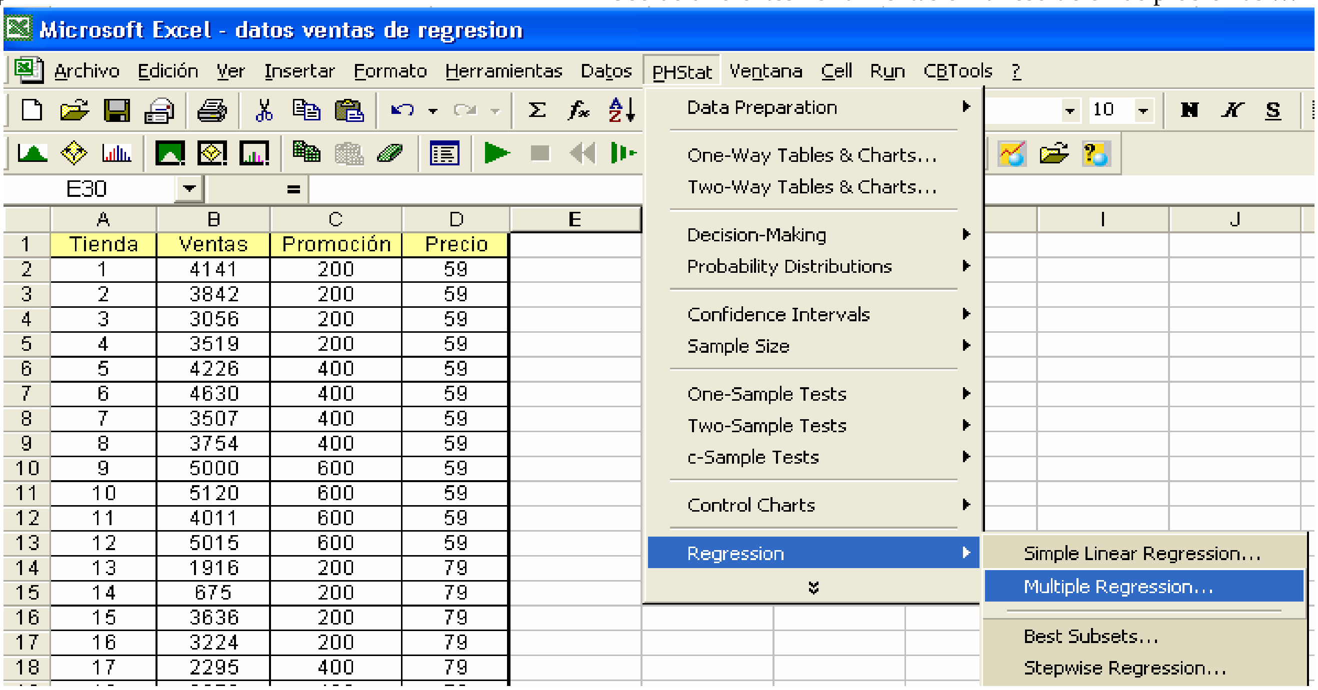
β_1 se conoce como el coeficiente de regresión neto y representa el cambio en la media de Y por unidad de cambio en X_1, sin perder el efecto de X_2.

Consideremos ahora las ventas de un producto[3], donde se ha seleccionado una muestra de 34 tiendas de la cadena para observar en las ventas, el efecto del precio y de las promociones dentro de la tienda, pues se considera que existe un potencial para este producto.

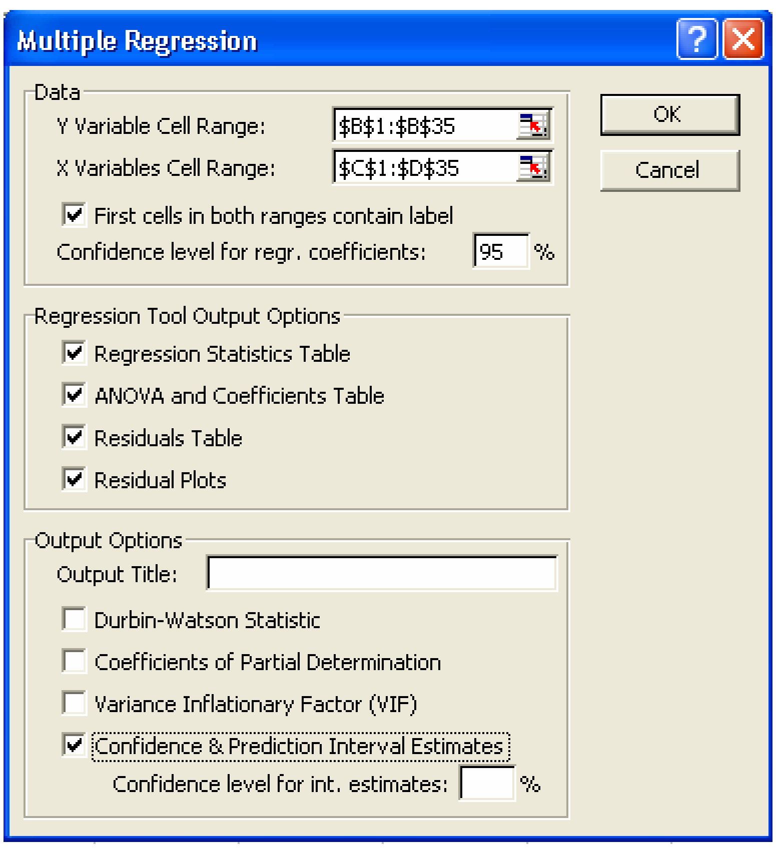
	A	B	C	D
1	Tienda	Ventas	Promoción	Precio
2	1	4141	200	59
3	2	3842	200	59
4	3	3056	200	59
5	4	3519	200	59
6	5	4226	400	59
7	6	4630	400	59
8	7	3507	400	59
9	8	3754	400	59
10	9	5000	600	59
11	10	5120	600	59
12	11	4011	600	59
13	12	5015	600	59
14	13	1916	200	79
15	14	675	200	79
16	15	3636	200	79
17	16	3224	200	79
18	17	2295	400	79
19	18	2370	400	79
20	19	2618	400	79
21	20	4421	400	79
22	21	4113	600	79
23	22	3746	600	79
24	23	3532	600	79
25	24	3825	600	79
26	25	1096	200	99
27	26	761	200	99
28	27	2088	200	99
29	28	820	200	99
30	29	2114	400	99
31	30	1882	400	99
32	31	2159	400	99
33	32	1602	400	99
34	33	3354	600	99
35	34	2927	600	99

En este problema consideraremos dos variables independientes: el precio X_1 y el presupuesto mensual para gastos de promoción en dólares X_2 . La variable Y es el número de barras vendidas en un mes. Usando el complemento PHStad de Excel para los datos de ventas de barras, procedemos así:

[3] Estos datos se tomaron del Libro de Berenson-Levine-Krehbiel, Estadística para administradores, con el fin de aplicarles los software descritos antes.



Posteriormente hacemos clic en ***Multiple Regresión*** y llenamos la siguiente información:



Observemos que es posible marcar más salidas. Si pulsamos ***OK*** obtenemos las siguientes salidas:

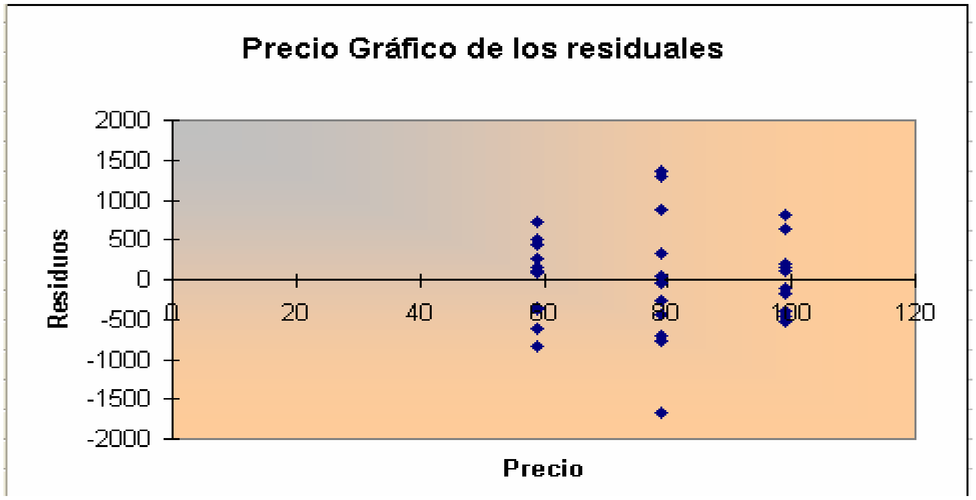
	A	B	C	D	E	F	G
1	**Análisis de regresión para las ventas de barras**						
2							
3	*Estadísticas de la regresión*						
4	Coeficiente de correlación múltiple	0.867383593					
5	Coeficiente de determinación R^2	0.752354297					
6	R^2 ajustado	0.736377155					
7	Error típico	647.5179185					
8	Observaciones	34					
9							
10	ANÁLISIS DE VARIANZA						
11		*Grados de libertad*	*Suma de cuadrados*	*Promedio de los cuadrados*	*F*	*Valor crítico de F*	
12	Regresión	2	39487249.64	19743624.82	47.08941637	4.0214E-10	
13	Residuos	31	12997663.1	419279.4547			
14	Total	33	52484912.74				
15							
16		*Coeficientes*	*Error típico*	*Estadístico t*	*Probabilidad*	*Inferior 95%*	*Superior 95%*
17	Intercepción	5833.181473	637.4559685	9.150720617	2.55376E-10	4533.080729	7133.282217
18	Promoción	3.607700893	0.695373291	5.188149932	1.25225E-05	2.189476924	5.025924861
19	Precio	-53.27090774	6.953732911	-7.660764142	1.22157E-08	-67.45314742	-39.08866805

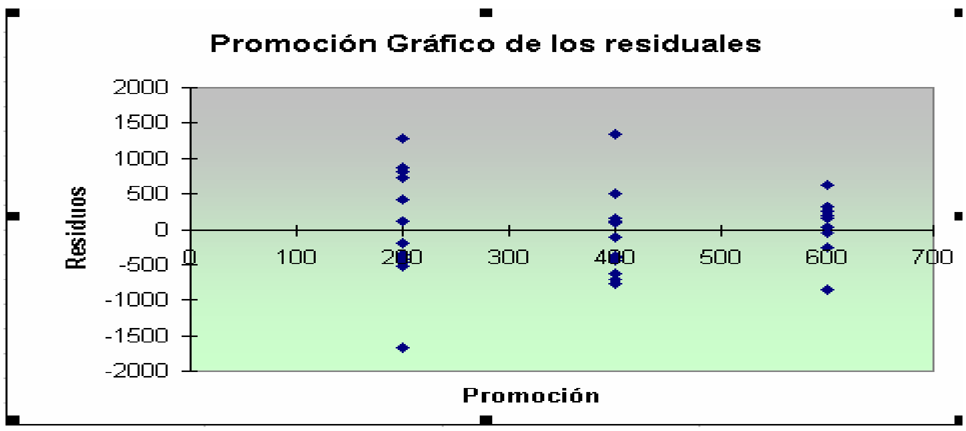
Aquí podemos obtener los valores calculados de los coeficientes de la regresión múltiple, a saber: $\beta_0 = 5833{,}18$ $\beta_1 = \text{-}53{,}27$ y $\beta_2 = 3{,}607$, es decir la ecuación de la regresión múltiple se puede expresar como $\boxed{\hat{Y}_i = 5833{,}18 - 53{,}27X_{1i} + 3{,}607X_{2i}}$

β_0 estima el número esperado de barras vendidas en un mes si el precio es de \$0,0 y si la cantidad total gastada en promociones también es de \$0,0. La pendiente del precio β_1 significa que para una cantidad dada de gasto mensual en promoción, se estima que las ventas esperadas de barras disminuyen en 53,27 barras al mes por cada centavo de incremento en el precio. β_2 es la pendiente del gasto mensual en promoción y significa que para un precio dado, se estima que las ventas esperadas de barras aumenten 3,607 barras por cada dólar adicional ganado. La siguiente salida es el análisis residual para el modelo, veamos:

23	**Análisis de los residuales**		
24			
25	*Observación*	*Pronóstico Ventas*	*Residuos*
26	1	3411.738095	729.2619048
27	2	3411.738095	430.2619048
28	3	3411.738095	-355.7380952
29	4	3411.738095	107.2619048
30	5	4133.278274	92.72172619
31	6	4133.278274	496.7217262
32	7	4133.278274	-626.2782738
33	8	4133.278274	-379.2782738
34	9	4854.818452	145.1815476
35	10	4854.818452	265.1815476
36	11	4854.818452	-843.8184524
37	12	4854.818452	160.1815476
38	13	2346.31994	-430.3199405
39	14	2346.31994	-1671.31994
40	15	2346.31994	1289.68006
41	16	2346.31994	877.6800595
42	17	3067.860119	-772.860119
43	18	3067.860119	-697.860119
44	19	3067.860119	-449.860119
45	20	3067.860119	1353.139881
46	21	3789.400298	323.5997024
47	22	3789.400298	-43.40029762
48	23	3789.400298	-257.4002976
49	24	3789.400298	35.59970238
50	25	1280.901786	-184.9017857
51	26	1280.901786	-519.9017857
52	27	1280.901786	807.0982143
53	28	1280.901786	-460.9017857
54	29	2002.441964	111.5580357
55	30	2002.441964	-120.4419643
56	31	2002.441964	156.5580357
57	32	2002.441964	-400.4419643
58	33	2723.982143	630.0178571
59	34	2723.982143	203.0178571

El estudio de los residuales es muy importante pues al examinar el patrón en los residuales en función de los valores pronosticados, si se observa un patrón en varios valores pronosticados entonces se proporciona evidencia de al menos una variable explicativa y consecuentemente en la necesidad de cambiar la variable Y. En los modelos a continuación no se observa ningún patrón, por tanto podemos asegurarnos que nuestro modelo de regresión múltiple es adecuado para usarlo como modelo de pronóstico.





Coeficientes de determinación múltiple

Este coeficiente representa la proporción de la variación en la variable *Y* la cual explica el conjunto de las variables explicativas seleccionadas, este coeficiente está dado por la razón de la suma de cuadrado de regresión *SCR* entre la suma de cuadrados total, es decir

$$r_Y^2 = \frac{SCR}{SCT} = \frac{39487249{,}64}{52484912{,}74} = 0{,}7523,$$

lo cual se interpreta como el 75,23% de la variación de las ventas se puede explicar por la variación respectiva en el precio y en los gastos de promoción. Si se quiere reflejar el número de variables explicativas en el modelo como en el tamaño de la muestra se puede utilizar una r^2 ajustada, en efecto, si p es el número de variables explicativas en la ecuación de regresión el modelo para este coeficiente es:

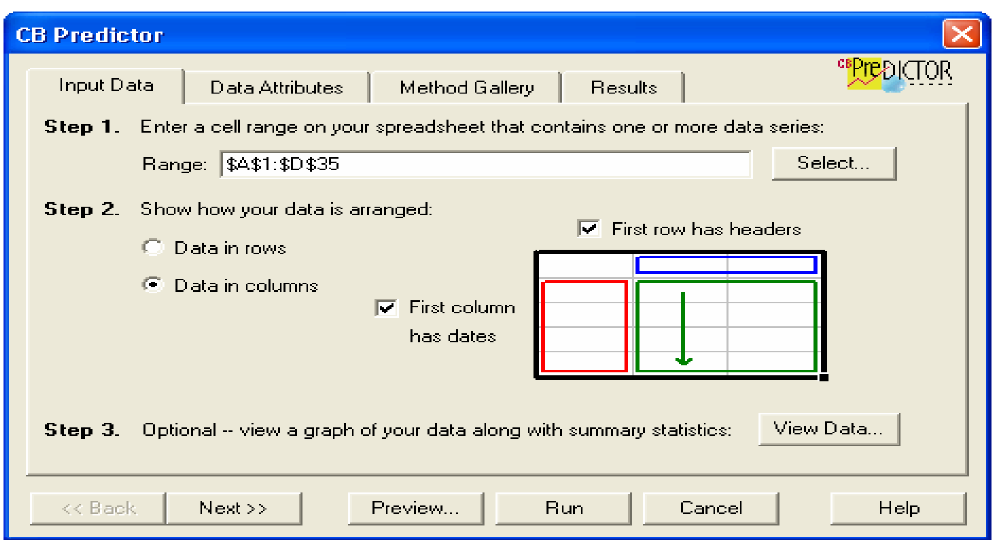
$$r_{aj}^2 = 1 - \left[\left(1 - r_Y^2\right)\frac{n-1}{n-p-1}\right] = 1 - \left[\left(1 - 0{,}7523\right)\frac{34-1}{34-2-1}\right] = 1 - [0{,}2477 * 1{,}0645] = 1 - 0{,}26368 = 0{,}7363$$

Así el modelo explica el 73,63% de la variación en las ventas.

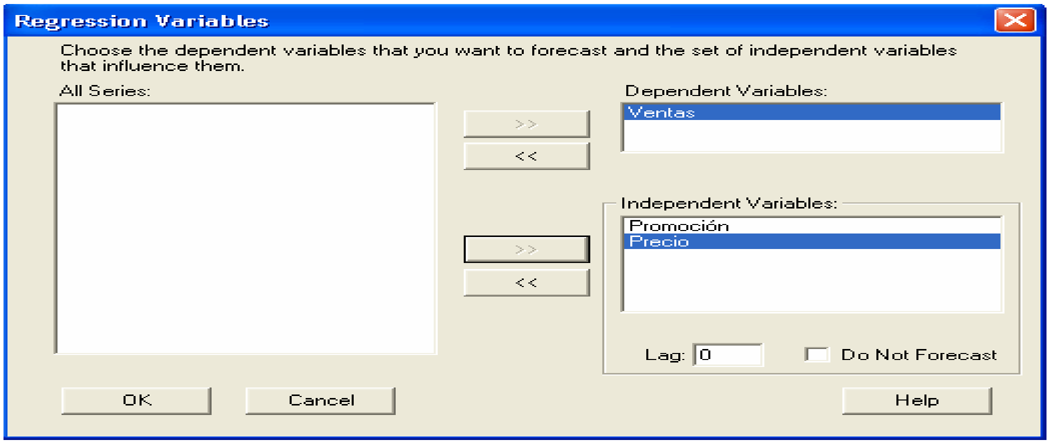
Crystal Ball

En el caso que quisiéramos usar el complemento Crystal Ball, desarrollado y publicado por Decisioneering. Inc. Esencialmente Crystal Ball automatiza los más tediosos pasos en el proceso de la Simulación Montecarlo, principalmente en el análisis de riesgo y en aplicaciones de modelos de pronósticos, como es el caso que nos compete.

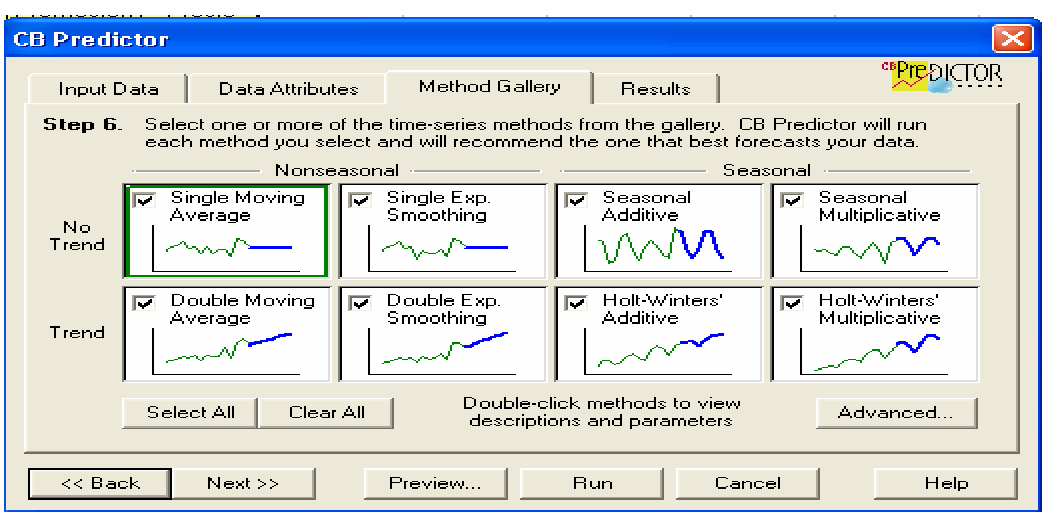
Procedemos entonces de la siguiente manera, hacemos clic en ***CB Tools*** para abrir el ***CB Predictor***, y luego procedemos a introducir la información así:



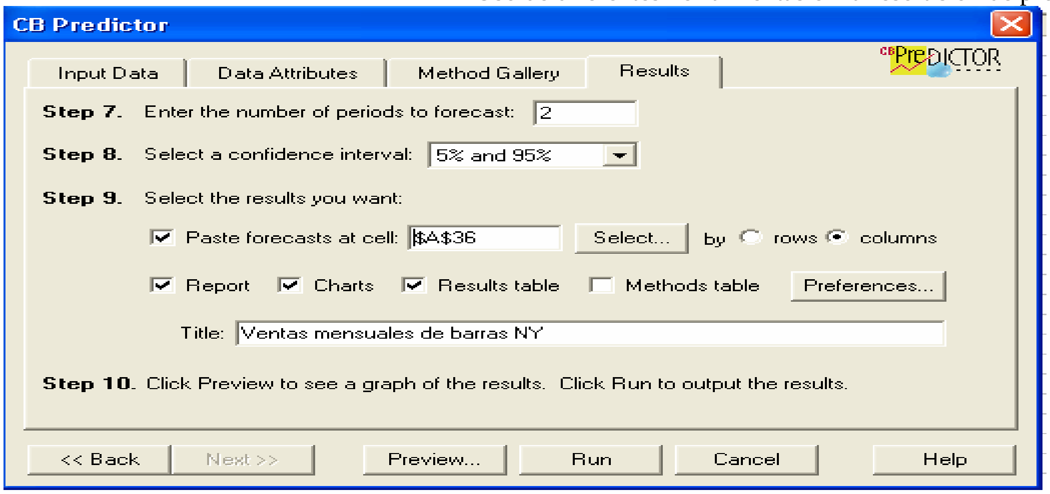
Después pulsamos ***Next*** y en la siguiente hoja declaramos que los datos son mensuales y marcamos las casillas que habilitan a ***Use multiple linear Standard*** e ***Incluye constant in regresión equation***. Luego pulse ***Next*** para obtener:



Al desplegarse la ventana anterior las variables aparecen en el lado izquierdo, es decir se almacenan en ***All Series*** y posteriormente se trasladan al lado derecho según sean variables dependientes o independientes. Posteriormente hacemos clic en ***OK*** y la página siguiente nos muestra la galería de modelos a utilizar, luego hacemos clic en ***Nex***t:



En esta hoja marcamos ***Select All***, para que Predictor escoja de acuerdo al estudio estadístico, cual es el modelo adecuado para nuestro problema, luego hacemos clic en ***Next*** para obtener:



En el paso 7, expresamos el número de períodos a pronosticar, en el paso 8 seleccionamos un intervalo de confianza y en el paso 9 escogemos la celda donde se depositará el pronóstico y posteriormente lo más importante pedir el reporte del estudio conjuntamente con el gráfico, luego pulsamos ***Run*** y obtenemos el siguiente reporte con salidas similares al del modelo anterior, únicamente con más detalle y mostrando los estudios estadísticos que dan la validez al modelo escogido, en efecto:

Report for Ventas mensuales de barras NY

Created: 13/11/2005 at 07:48:01 p.m.

Summary:

Number of series: 3
Periods to forecast: 2
Seasonality: 12 months
Error Measure: RMSE

Series: Ventas **Range: B2:B35**

Method: Multiple Linear Regression

Statistics:

R-squared: 0.752
Adjusted R-squared: 0.7364
SSE: 1.29E+7
F Statistic: 47.089
F Probability: 4.02E-10
Durbin-Watson: 2.206
No. of Values: 34
Independent variables: 2 included out of 2 selected

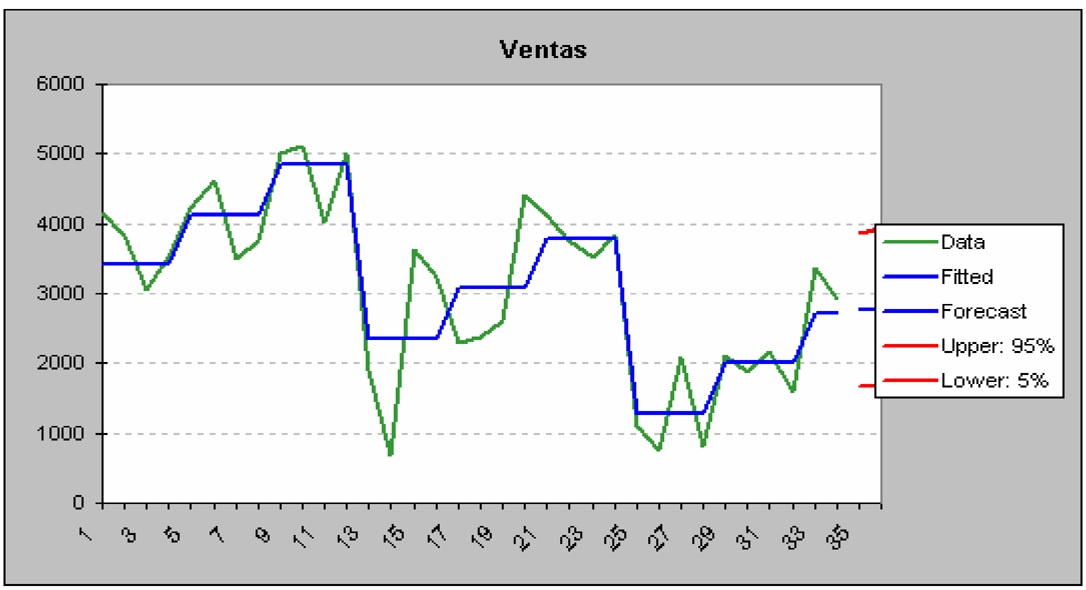
Series Statistics:

Mean: 3088.088235
Std. Dev.: 1261.131199
Minimum: 675
Maximum: 5120
Ljung-Box: 22.6197

Forecast:

Date	Lower: 5%	Forecast	Upper: 95%
35	1665.608879	2763.053642	3860.498405
36	1666.835483	2798.575395	3930.315306

Podemos observar como los coeficientes R-cuadrado y el R -cuadrado ajustado son bastantes similares al caso del software PHStad utilizado anteriormente. Tenemos además las dos ventas pronosticadas por el modelo. Sin embargo, podemos usar este modelo para pronosticar ventas de acuerdo a valores particulares deseados de las variables precio y promoción. Seguidamente observaremos los gráficos correspondientes a las variables en estudio, en efecto:



Regression Variables:

Variable	Coefficient	t Statistic	Probability
Constant	5833.2	9.1507	2.55E-10
Promoción	3.6077	5.1881	1.25E-05
Precio	-53.271	-7.6608	1.22E-08

Series: Promoción **Range: C2:C35**

Method: Seasonal Multiplicative
Parameters:
Alpha: 0.999
Gamma: 0.618
Error: 0

Series Statistics:
Mean: 388.2352941
Std. Dev.: 162.8621017
Minimum: 200
Maximum: 600
Ljung-Box: 80.2894

Forecast:

Date	Lower: 5%	Forecast	Upper: 95%
35	1665.608879	2763.053642	3860.498405
36	1666.835483	2798.575395	3930.315306

Seguidamente este reporte también nos presenta los métodos de errores, los métodos estadísticos y los métodos paramétricos para validar el modelo.

Method Errors:

	Method	RMSE	MAD	MAPE
Best:	Seasonal Multiplicative	0	0	0%
2nd:	Holt-Winters' Multiplicative	0	0	0%
3rd:	Seasonal Additive	34.3	5.8883	2.94%
4th:	Holt-Winters' Additive	34.3	6.0677	3.00%
5th:	Single Exponential Smoothing	128.34	58.882	19.14%
6th:	Double Exponential Smoothing	128.38	58.953	19.16%
7th:	Single Moving Average	130.27	60.606	19.70%
8th:	Double Moving Average	169.2	124.19	41.13%

Method Statistics:

	Method	Durbin-Watson	Theil's U
Best:	Seasonal Multiplicative	undefined	0
2nd:	Holt-Winters' Multiplicative	undefined	0
3rd:	Seasonal Additive	0.998	0
4th:	Holt-Winters' Additive	1	0.002
5th:	Single Exponential Smoothing	1.998	1
6th:	Double Exponential Smoothing	1.999	1
7th:	Single Moving Average	2	1
8th:	Double Moving Average	2.093	1.487

Method Parameters:

	Method	Parameter	Value
Best:	Seasonal Multiplicative	Alpha	0.999
		Gamma	0.618
2nd:	Holt-Winters' Multiplicative	Alpha	0.999
		Beta	0.618
		Gamma	0.618
3rd:	Seasonal Additive	Alpha	0.999
		Gamma	0.001
4th:	Holt-Winters' Additive	Alpha	0.999
		Beta	0.001
		Gamma	0.001
5th:	Single Exponential Smoothing	Alpha	0.999
6th:	Double Exponential Smoothing	Alpha	0.999
		Beta	0.001
7th:	Single Moving Average	Periods	1
8th:	Double Moving Average	Periods	2

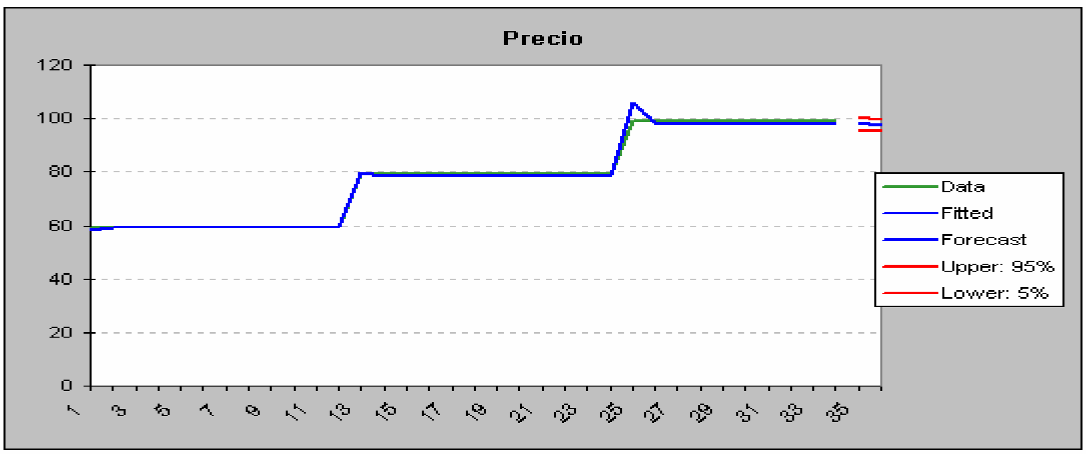
Series: Precio **Range: D2:D35**

Method: Holt-Winters' Multiplicative
Parameters:
Alpha: 0.954
Beta: 0.001
Gamma: 0.001
Error: 1.2547

Series Statistics:
Mean: 77.82352941
Std. Dev.: 16.28621017
Minimum: 59
Maximum: 99
Ljung-Box: 286.5423

Forecast:

Date	Lower: 5%	Forecast	Upper: 95%
35	96.1400046	98.26655091	100.3930972
36	95.40673667	97.59973755	99.79273844



Method Errors:

	Method	RMSE	MAD	MAPE
Best:	Holt-Winters' Multiplicative	1.2547	0.6121	0.71%
2nd:	Holt-Winters' Additive	1.5721	0.2781	0.47%
3rd:	Seasonal Additive	2.0868	1.8395	2.53%
4th:	Seasonal Multiplicative	4.6038	1.541	1.75%
5th:	Double Exponential Smoothing	4.8255	1.4905	1.69%
6th:	Single Exponential Smoothing	4.8507	1.1776	1.34%
7th:	Single Moving Average	4.9237	1.2121	1.38%
8th:	Double Moving Average	6.4758	2.5806	2.94%

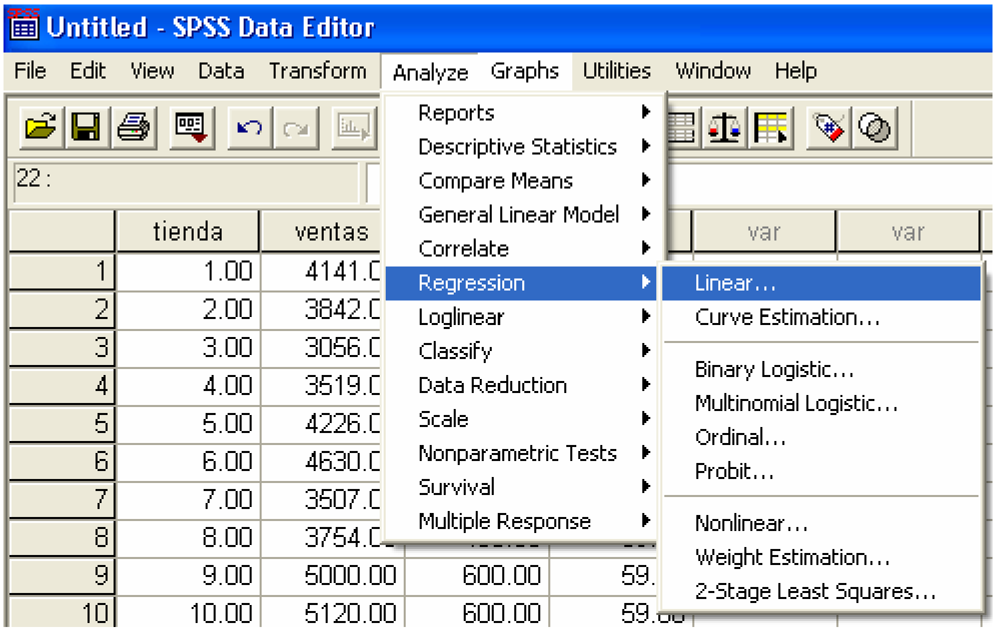
Method Statistics:

	Method	Durbin-Watson	Theil's U
Best:	Holt-Winters' Multiplicative	1.952	0.214
2nd:	Holt-Winters' Additive	1	0.002
3rd:	Seasonal Additive	0.567	0.313
4th:	Seasonal Multiplicative	1.354	0.953
5th:	Double Exponential Smoothing	1.997	0.995
6th:	Single Exponential Smoothing	1.998	1
7th:	Single Moving Average	2	1
8th:	Double Moving Average	2.077	1.169

Method Parameters:

	Method	Parameter	Value
Best:	Holt-Winters' Multiplicative	Alpha	0.954
		Beta	0.001
		Gamma	0.001
2nd:	Holt-Winters' Additive	Alpha	0.999
		Beta	0.001
		Gamma	0.001
3rd:	Seasonal Additive	Alpha	0.999
		Gamma	0.999
4th:	Seasonal Multiplicative	Alpha	0.778
		Gamma	0.999
5th:	Double Exponential Smoothing	Alpha	0.964
		Beta	0.024
6th:	Single Exponential Smoothing	Alpha	0.999
7th:	Single Moving Average	Periods	1
8th:	Double Moving Average	Periods	2

Hemos visto un poco del potencial de complemento Crystal Ball, y de como aprovecharnos de su buen desempeño, principalmente con estos informes tan completos. Seguidamente resolveremos el mismo problema con el conocido software estadístico SPSS para Windows, una potente herramienta para el análisis de datos y la estadística, aplicable en muy diversos campos como la economía, las ciencias sociales, la medicina, la biología o la educación. Por razones de espacio solamente nos limitaremos a sus salidas para compararlas con las respuestas anteriores, en efecto:



USO DE LA CALCULADORA TI-89 EN UN CURSO DE METODOS NUMÉRICOS PARA ESTUDIANTES DE INGENIERÍA

Mynor Chacón Díaz[1]

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar un opción alternativa para impartir un curso de Métodos Numéricos dirigido a estudiantes de ingeniería, utilizando la calculadora TI-89 como una herramienta para agilizar procesos. Se hace énfasis en lograr que el aprendizaje es más significativo mediante la visualización gráfica de determinados problemas y su solución. El curso en mención pretende que el alumno aplique los conceptos y métodos aprendidos mediante el uso de la calculadora, sin tener que pasar por el estudio previo de un lenguaje y su programación.

ANTECEDENTES.

El presente artículo trata sobre un curso de métodos numéricos dirigido a estudiantes de ingeniería. Inicialmente se utilizó, hace aproximadamente 5 años, un laboratorio dotado de calculadoras Hewlett Packard HP-48, actualmente se trabaja con calculadoras Texas Instruments TI-89.

Durante un período intermedio se impartió en un laboratorio de computadoras, sin embargo la experiencia no fue muy provechosa ya que los laboratorios existentes no están totalmente adecuados para una clase de matemática. Por ejemplo, normalmente la disposición de las computadoras dentro del aula no es la óptima para un curso que no sea 100% trabajo con ellas, si no que requiera de la pizarra una porción considerable del tiempo de clase, tal es el caso de matemática o estadística.

El estudiante que llega al curso ya ha tenido experiencia con las calculadoras de manera que esto es un factor que contribuye a que la clase sea más ágil.

[1] Universidad de Costa Rica, **min-60@costarricense.cr**

TECNOLOGÍA VS PROFESORES

Uno de los tópicos de mayor interés en la enseñanza de la matemática en los últimos años ha sido el uso de calculadoras y computadoras como herramientas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Según Susan D.Barton en su artículo "*Reluctant Reforms` Instructional Practice and Conceptions of Teaching Calculus When Using Calculators"*, deben cumplirse tres fases para que la integración de la tecnología en el aula se propague, la cuál precisamente es mi intención al escribir esta notas.

La primera, es que los profesores se den cuenta, tomen conciencia, de la necesidad de mejorar la instrucción matemática, viendo la tecnología como facilitadora del aprendizaje.
La segunda, se da cuando los profesores empiecen a experimentar con distintas formas de utilización de la tecnología en el mejoramiento de la enseñanza.
La tercera, se inicia en el instante en que los nuevos métodos sean los preferidos como formas de enseñanza y aprendizaje.

Aun cuando la primer calculadora grafica aparece en 1985, hoy, veinte años después, una considerable parte de los profesores se niegan a su utilización. Esto significa que existe una gran parte de la población de profesores de matemática que no se pueden ubicar en ninguna de las tres fases mencionadas. Esto nos sitúa lejos aún de lograr la integración de la tecnología en el aula.

¿QUÉ CAMINO DEBEMOS SEGUIR?

En la incansable búsqueda de encontrar un camino para obtener el mejor provecho de la tecnología, algunos colegas se han inclinado por la idea de construir laboratorios de computación, enseñar algún lenguaje de programación para que el alumno pueda programar sus algoritmos para la solución de determinado problema. Otros han hecho uso de computadoras y calculadoras como un instrumento que resuelve ciertos problemas sin preocuparse de la comprensión del concepto.

En este sentido es que debemos hallar un camino intermedio. En un curso para ingenieros, probablemente, gran parte de los alumnos no tengan interés ni tiempo de aprender un lenguaje de programación o el uso de algún software sofisticado de matemáticas. Esto resta tiempo y atractivo al concepto matemático que queremos enseñar.

Por otra parte, recordemos que las calculadoras y las computadoras realizan operaciones, pero no nos informan ha cerca de cómo resolver una situación determinada.

El objetivo debe ser el uso de la calculadora como instrumento facilitador de la comprensión y aprendizaje de los contenidos matemáticos. La disponibilidad de un instrumento como la calculadora gráfica TI-89, ayuda a describir y comprender con claridad los conceptos que sustentan las imágenes que despliegan en la pantalla.

EJEMPLOS DEL USO DE LA TI-89

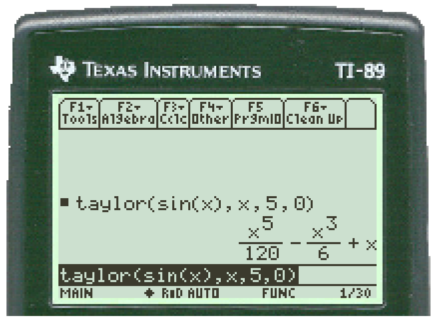
A continuación se presentan dos ejemplos de cómo se puede utilizar la calculadora gráfica TI-89 para la solución de los mismos.

EJEMPLO 1: POLINOMIO DE APROXIMACIÓN DE TAYLOR

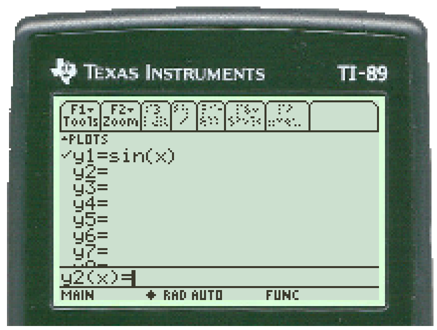
Determine el polinomio de Taylor de grado $n = 5, P_5(x)$ alrededor de $a = 0$, para la función $f(x) = sen(x)$. Graficar la función, el polinomio y dar una estimación de $sen(3/4)$.

SOLUCIÓN:

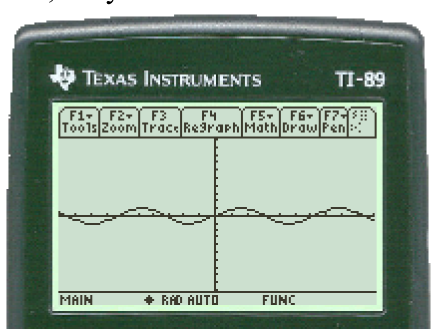
Para obtener el polinomio de Taylor se presionan las teclas ***F3*** y ***9*** (lo cual se denota en lo sucesivo como ***F3; 9)*** y se usa el formato *taylor* $(f(x), x, n, a)$



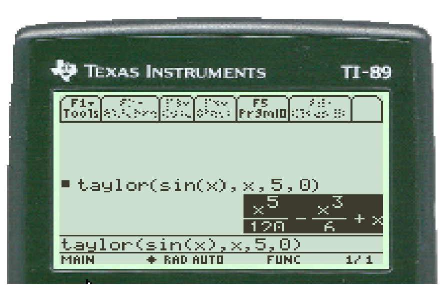
El próximo paso es graficar $f(x) = sen(x)$, para ello se ingresa la función al presionar ◊; F1



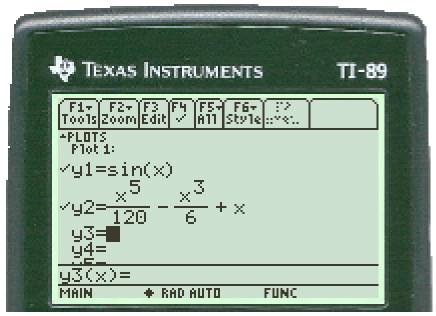
luego para graficar se presiona ◊; F3 y obtenemos:



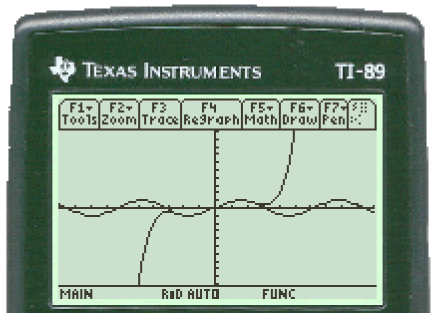
Con el objetivo de ver como aproxima el polinomio $P_5(x)$ a la función $f(x) = sen(x)$ vamos a graficar el polinomio de Taylor en el mismo gráfico de $f(x)$, para esto nos salimos a la pantalla principal con ***HOME***, seguidamente subimos el cursor y marcamos el $P_5(x)$ del $sen(x)$, lo copiamos con ◊; ***COPY***



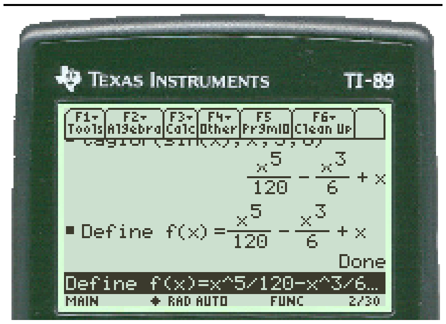
de nuevo ◊; ***F1*** y en el lugar correspondiente a ***y2*** lo copiamos con ◊; ***PASTE***



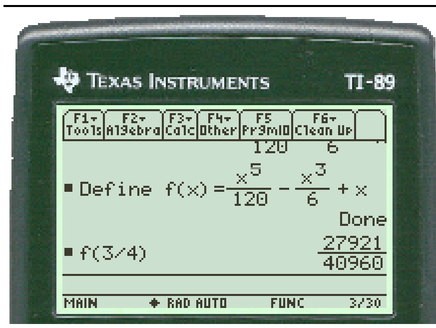
así se obtiene



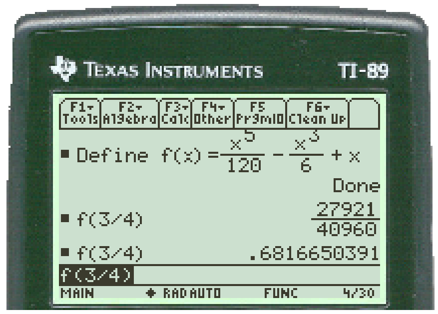
Para obtener la estimación de $sen(3/4)$, marcamos el polinomio obtenido anteriormente, luego presionamos ***F4; 1***, se escribe $f(x)=y$ se copia el polinomio, así queda definida la función por medio del comando ***Define***



ahora se digita $f(3/4)$



para obtener el valor numérico correspondiente (NO en fracción), presionamos ◊; ***ENTER*** y se tiene la aproximación siguiente:

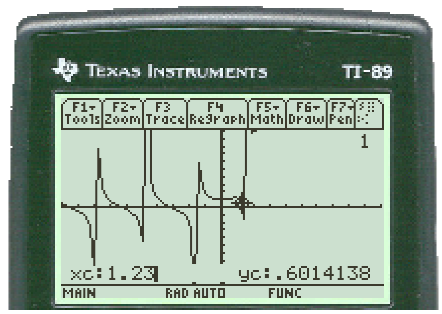


EJEMPLO 2: RESOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES. MÉTODO DE PUNTO FIJO

Determine la solución positiva de la ecuación $e^x = \tan x$

SOLUCIÓN:

Primero graficamos la función $e^x - \tan x = 0$ para determinar la primer aproximación de la raíz, x_0.



tomaremos entonces $x_0 = 1.23$. Luego, existen claramente dos formas distintas de despejar $\boldsymbol{x}$ de la ecuación $e^x = \tan x$, las dos formas son las siguientes: $x = \ln(\tan(x))$ y $x = \arctan(e^x)$

Para poder decidir cuál de las dos promete convergencia para la sucesión x_n, se construye la siguiente tabla:

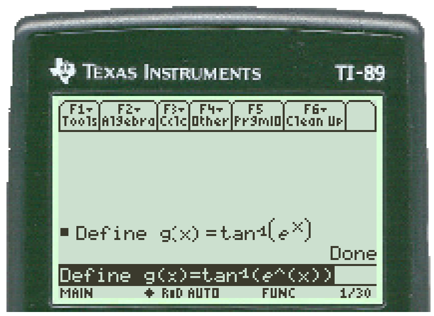
$g(x)$	$g'(x)$	$g'(x_0)$
$\ln(\tan(x))$	$\dfrac{1}{sen(x)\cos(x)}$	3.17

$\arctan(e^x)$	$\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$	0.269

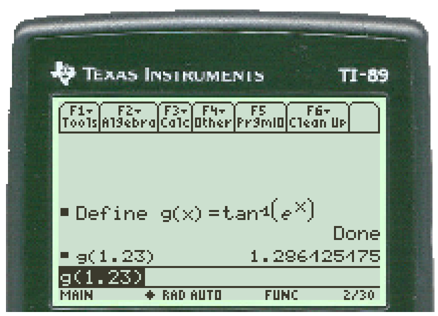
Puesto que $|g'(x_0) < 1|$ para la segunda opción se escoge como ecuación de punto fijo

$$x = \arctan(e^x)$$

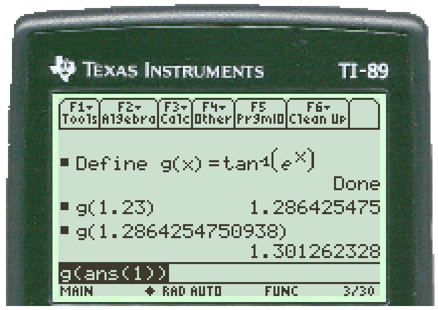
Con el objetivo de determinar los términos de la sucesión x_n, hasta llegar a la aproximación deseada, definimos la función ***(F4; 1)***



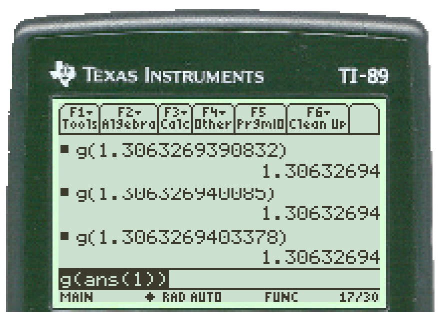
calculamos $g(x_0) = g(1.23)$



obtenemos $x_1 = 1.286425475$, luego $x_2 = g(x_1) = g(1.286425475)$, para realizar este y los siguientes cálculos de una forma rápida e iterativa sin tener que digitar el x_{i-1} para obtener x_i, se procede digitar ***g(ans(1))*** (note que ***ans*** se obtiene con ***2nd; (−)***)luego presionamos ***ENTER*** y se obtiene $x_2 = 1.301262328$



de nuevo presionamos ***ENTER*** y se obtiene $x_3 = g(1.301262328) = 1.305046298$, así sucesivamente se continua presionando ***ENTER*** hasta que $g(x_{i-1}) = x_i$. Al llegar a esta situación el punto fijo es x_{i-1}, en el ejemplo ocurre $g(x_{14}) = x_{15}$ es decir $x_{14} = x_{15} = 1.3063694$, en conclusión la solución aproximada de $e^x = \tan x$ es $x \approx 1.3063694$



CONCLUSIONES

El propósito fundamental del uso de una calculadora gráfica, es enseñar conceptos clásicos con algunos acercamientos interesantes. Recordemos que los estudiantes no hacen visualización gráfica de los problemas matemáticos, estos son más interesantes si los logran ver en la pantalla. El uso de las calculadoras nos permite primero reforzar los conceptos y avanzar más allá en los conocimientos, y segundo enfocar el trabajo del aula en solución de los problemas más que en cálculos tediosos. Permite la comprensión de muchos conceptos con los que tradicionalmente los profesores nos hemos peleado para facilitar su aprendizaje.

Por último, la sola presencia de la calculadora en el aula no produce los efectos que deseamos, estos dependen del papel que se le asigne a la tecnología dentro del sistema curricular.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

-Del Puerto Silvia y Minnard Claudia, *El uso de la calculadora gráfica en el aprendizaje de la matemática*, Universidad CAECE, Argentina; Revista Iberoamericana de Educación.

-Del Puerto Silvia y Minnard Claudia, *La calculadora como recurso didáctico*, Universidad CAECE, Argentina.

-Queralt Llopis Tomás, Un *enfoque constructivista en el aprendizaje de las matemáticas con las calculadoras*; Centro de Formación, Innovación y Recursos Educativos de Torrent(CEFIRE)-España.

-Beaudin Michael, *Teaching mathematics to engineering students with hand-held technology; Ecole de Tecnologie Supérieure*, Montreal, Canada.

-Susan D. Barton, *Reluctant Reformers' Instructional Practice and Conceptions of Teaching Calculus When Using Supercalculators*, Brigham Young University-Hawaii.

CONFERENCIAS

ALGUNOS DESARROLLOS PARA ENCICLOMEDIA

Feliú D. Sagols Troncoso[1]

Resumen:

El proyecto "Enciclomedia" es el esfuerzo más notable que está realizando el gobierno federal en México para impulsar la educación. Se trata de aprovechar los recursos tecnológicos actuales para mejorar la educación en todas las áreas del Sistema Educativo Nacional a nivel básico. Presentamos en esta plática algunos programas interactivos para enseñar conceptos fundamentales en Matemáticas como área, perímetro, volumen, superficie, simetría y escala. También presentamos un lenguaje de programación de problemas parametrizados que es una extensión de los lenguajes XML y SCHEME, así como una hoja electrónica de para propósitos didácticos. Si el tiempo lo permite se harán algunos apuntes sobre los problemas matemáticos que se han tenido que resolver.

[1] Departamento de Matemáticas del CINVESTAV, México, D. F.

CENTRO DE INFORMACIÓN ELECTRÓNICA

Marco Vinicio Torres[1]

Reseña histórica

El Centro de Información Electrónica- Kiosco de Información (CIE) es un proyecto adscrito al Centro Nacional de Didáctica (CENADI). El CENADI es un órgano de desconcentración mínima del Ministerio de Educación Pública (MEP), bajo la dependencia directa del Ministro.

La creación del CIE tiene sus antecedentes en el año 1994. El señor Presidente de ese período, Ing. José María Figueres Olsen, conoce en Puerto Rico, en el Municipio de San Juan, un servicio de información llamado "Estudia Conmigo", cuyo propósito era el de apoyar a madres de familia, trabajadoras, que no contaban con tiempo suficiente para atender a sus hijos con los deberes escolares. En esa misma ciudad, la empresa Burguer King, ofrece al señor Presidente la donación de 40 computadoras para iniciar un proyecto similar en Costa Rica. El señor Presidente comunica, desde Puerto Rico, a su Ministro de Educación, Dr. Eduardo Doryan Garrón, su intención de fundar un proyecto de información en nuestro país. Este asigna a la Máster Eleonora Badilla Saxe conocer y diseñar el proyecto.

En 1995, se integra un equipo multidisciplinario encargado de conceptuar el proyecto. Se construye una propuesta pedagógica variando la idea original de Puerto Rico, la propuesta nacional se orienta hacia la construcción del conocimiento y con fundamento en la Política Curricular Hacia el Siglo XXI, ofreciendo a los usuarios, una unidad didáctica de información (UDI), denominado paquete de información, que incluía tres aspectos fundamentales: información relevante y actualizada, metodología constructivista y ejercicios de autoevaluación. En este mismo año se establecen alianzas estratégicas con empresas públicas y privadas para patrocinar el proyecto. Se selecciona el recurso humano, técnico y pedagógico, para sustentarlo. Se instala la plataforma tecnológica. Y se ubica el Kiosco en la planta física del CENADI. Finalmente, el 24 de febrero de 1995 se inaugura el Kiosco de Información, nombre con el cual se lanza el CIE a la comunidad

[1] Ministerio de Educación Pública,

educativa nacional; iniciando su labor como un servicio dirigido a la población estudiantil de sexto y undécimo años, ampliándolo posteriormente, a los docentes.

En el año 1996, se inicia la atención de consultas a todos los estudiantes de primaria y secundaria del sector público y privado, así como, en las áreas técnica y académica.

Se establecen estrategias de proyectos especiales con el fin de ampliar la cobertura del programa: Proyecto de Copatrocinadores Académicos, Proyecto de Notables, Proyecto de Publicaciones Propias del Kiosco de Información y Proyecto de Codificación, Revisión y Actualización de Paquetes de Información.

En el año 1997 se amplía la cobertura atendiendo estudiantes adultos de la Enseñanza General Básica (EGB) y Educación Diversificada (ED), internos en hospitales, reformatorios infantiles, hogares de rehabilitación, padres y madres de familia y otros usuarios. También, se lleva a la práctica en su totalidad el Proyecto de Notables con especialistas de la Universidad de Costa Rica. Se realiza una evaluación de la experiencia a cargo del Departamento de Investigación del MEP, con resultados excelentes. El Centro Regional de Didáctica (CEREDI) del CENADI facilita la divulgación y distribución de los materiales impresos en el Kiosco. Se publica un catálogo de la base de datos, el cual se ha ido actualizando año con año.

En el año 1998 se desarrollan procesos de capacitación, conjuntamente, con el programa de Desarrollo del Pensamiento. Y en los años siguientes se continúa con el trabajo iniciado manteniendo el proceso de elaboración, revisión y actualización de paquetes de información, así como, de producción de documentos impresos en las distintas áreas y modalidades para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje tanto de estudiantes como de docentes. Durante estos años algunas alianzas estratégicas finalizan.

A partir del año 1999 se trabaja en coordinación con el Departamento de Desarrollo Profesional del CENADI y el Departamento de Educación Académica del MEP en la elaboración de antologías para noveno y undécimo año como parte del Plan Nacional de Capacitación

Para el 2003, algunas alianzas estratégicas se renuevan entre ellas la del Proyecto del Estado de La Nación, Periódico La Prensa Libre, Periódico La Voz de ANDE.

En el año 2004 se inicia un trabajo de difusión radial coordinado con el Sistema Nacional de Radio y Televisión (SINART). Se incursiona en el campo de las videoconferencias realizando una de divulgación y promoción del Kiosco. Se publica una memoria que abarca el período comprendido entre 1995 y junio 2002.

En el año 2005 el CIE cumple diez años de funcionamiento al servicio de la comunidad educativa nacional, iniciándose una nueva etapa, renovando la concepción del Kiosco hacia la conversión del mismo en portal educativo con todas las herramientas que estos brindan y al tenor de los avances en las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC). Este proyecto se encuentra en la fase inicial de estudio y análisis de conceptualización. Se inicia la construcción de Unidades Modulares Didácticas. Los funcionarios del Kioco participan activamente en la realización tres videoconferencias, una en el área de matemáticas, otra en el área de español y otra en conjunto con la Oficina de Protección del Consumidor del Ministerio de Economía, Industria y Comercio.

Objetivo General

Contribuir al mejoramiento de la calidad de la educación costarricense mediante la producción y diseminación de documentos educativos que apoyen el desarrollo curricular.

Objetivos Específicos

1. Producir documentos educativos de calidad que respondan a las necesidades de los usuarios.
2. Mantener, garantizar y desarrollar una plataforma tecnológica de diseminación de la información.
3. Ofrecer capacitación constante, mediante un proceso educativo, formal y no formal, en estrecha concordancia con los temas básicos del currículo por desarrollar a nivel nacional.

Misión

El Centro de Información Electrónica es un Programa del Centro Nacional de Didáctica (CENADI) del Ministerio de Educación Pública (MEP), con tecnología actualizada, que apoya a los usuarios del sistema educativo nacional, en diferentes niveles y modalidades, utilizando los recursos tecnológicos de información y comunicación para el desarrollo de ventajas competitivas, nuevos esquemas de enseñanza y aprendizaje, que generen mayor cobertura educativa con equidad y calidad.

Visión

Ser un departamento consolidado, que utilice las Tecnologías de Información y Comunicación para el diseño, producción y aprovechamiento pedagógico de las diferentes unidades didácticas de aprendizaje, que propicien la incorporación creativa e innovadora en los ámbitos educativos, con proyección nacional e internacional, a través de la interconectividad, fluida y flexible permitiendo la interactividad, la instantaneidad, la digitalización, así como su difusión para contribuir, efectivamente al mejoramiento de la calidad educativa.

Características

El servicio que brinda el Kiosco de Información emplea medios electrónicos: teléfono, fax, página web y correo electrónico.

El servicio es gratuito a disposición de la comunidad educativa nacional.

Ofrece unidades didácticas de información, en las cuales, se desarrollan contenidos de los programas de estudio vigentes del MEP.

Atiende los ciclos de transición (preescolar), I, II, III de la EGB el Ciclo Diversificado. Con usuarios de las áreas académica y técnica, pública y privada.

Estructura

El CIE es un programa conformado por diferentes áreas de trabajo, las cuales, desarrollan su labor en forma conjunta con el aporte de un coordinador.

Áreas: Secretaría, Prestación de servicios, Asesores pedagógicos, Control de calidad e Informática de gestión.

Secretaría se encarga de brindar apoyo secretarial en general: atención del servicio de telefonía y fax, correspondencia, elaboración de documentos, manejo de archivo e inventarios.

Prestación de servicios recibe las llamadas telefónicas de consulta pedagógica, direcciona las consultas a los asesores pedagógicos y envía la información a los usuarios.

Asesores pedagógicos son los especialistas en las diferentes asignaturas. Se encargan de elaborar los documentos pedagógicos que dan respuesta a las consultas de los usuarios.

Control de calidad se encarga de la revisión filológica de los documentos elaborados en el Kiosco de Información.

Informática de gestión se encarga de administrar la red de datos e información, equipo, multimedios, telecomunicaciones, página web, generar manuales y documentos que apoyen la labor de los usuarios internos del Kiosco.

Asignaturas

El área de Asesores pedagógicos brinda atención a todos los niveles de la educación formal abarcando las siguientes asignaturas: español, ciencias, estudios sociales, matemática, educación cívica, física, biología, química, inglés y artes plásticas.

Los asesores pedagógicos son los encargados de buscar, analizar, seleccionar, sistematizar y diseñar creativamente la información para dar respuesta a todas las consultas, a través de la elaboración de paquetes de información.

Labor pedagógica

La presencia del Kiosco en el ámbito educativo nacional se justifica en la necesidad de los estudiantes, docentes y padres de familia, de contar con información relevante y actualizada como apoyo al proceso de enseñanza y aprendizaje.

La labor pedagógica del Kiosco se centra en la elaboración de documentos electrónicos denominados Unidades Didácticas de Información (UDI), conocidas como Paquetes de Información; los cuales, son creados para ser difundidos por medios electrónicos.

También, elabora otros documentos a solicitud del MEP para ser impresos y distribuidos en las instituciones oficiales del país.

El desarrollo de la labor pedagógica del Kiosco se enmarca en la Política Educativa Hacia el Siglo XXI, cuyos fundamentos teóricos se fundamentan en tres corrientes filosóficas: humanismo, racionalismo y constructivismo.

Con relación al humanismo, en los documentos se plantean alternativas para promover los valores. A la vez, ofrece igualdad de oportunidades de acceso a los usuarios.

Con relación al racionalismo, los documentos proporcionan planteamientos para desarrollar el raciocinio mediante el tratamiento de la información según las necesidades individuales.

Con relación al constructivismo, los documentos ofrecen metodologías que contribuyen a la construcción y reconstrucción del conocimiento, además, plantean actividades que promuevan el establecimiento y solución de retos.

El Kiosco brinda, a los actores del sistema educativo nacional, un servicio de información diferente y novedosa, con la finalidad de crear un mecanismo alternativo para dar respuesta a sus necesidades de información, facilitando la construcción del conocimiento.

Usuarios

Se atiende tres tipos de usuarios: docente, estudiante y padre de familia.

Se elaboran documentos del mismo tema para docentes y estudiantes o padres de familia.

Los documentos elaborados para docentes contienen el desarrollo del tema o contenido del programa de estudio, sugerencias metodológicas, así como, ejercicios de práctica para ser aplicados a los estudiantes.

Los documentos elaborados para los estudiantes o padres de familia contienen el desarrollo del tema o contenido con metodología orientada al autoaprendizaje empleando situaciones de la vida cotidiana. Se agrega práctica o ejercicios de autoevaluación.

Consulta de usuarios

Se ofrecen tres formas de consulta al usuario: presencial, telefónica y electrónica.

La consulta presencial se ofrece, especialmente, a docentes que requieran orientaciones metodológicas para el desarrollo de un tema en la clase.

La consulta telefónica la brindan los asesores pedagógicos a usuarios que requieran respuesta a preguntas puntuales; si el usuario demanda más información, se le envía una unidad didáctica de información.

La consulta por medio electrónico la puede solicitar el usuario a través de la página web del MEP <**www.mep.go.cr**> o Kiosco <**www.kiosco.mep.go.cr**>. También, por medio del correo electrónico en el MEP <**kiosco@mep.go.cr**> o el correo alternativo <**kiosco_información@yahoo.es**>. Su solicitud es recibida por el encargado de la página web y canalizada al respectivo asesor pedagógico, quien da respuesta a su solicitud.

Servicio de consulta

El Kiosco ofrece consulta telefónica gratuita por medio del servicio 800. Atiende a los usuarios por los números 800-MAESTRO y 800-APRENDE, o bien, 800-623-7876 y 800-277-3633. La llamada es recibida por el servicio de Prestación de Servicios, quien canaliza la solicitud según la asignatura y complejidad de la misma.

Horario de atención

El servicio se brinda en horas hábiles, de lunes a jueves de 7:00 a.m. a 3:30 p.m. y el día viernes de 7:00 a.m. a 3:00 p.m.

Las consultas son evacuadas en un tiempo máximo de 24 horas hábiles, salvo casos de fuerza mayor.

El servicio de consulta presencial y de respuesta por correo electrónico se atiende dentro del mismo horario.

Población atendida

El Kiosco atiende, principalmente, a la comunidad educativa nacional: docentes, estudiantes y padres de familia. Desde el nivel de preescolar, I, II, III ciclo hasta educación diversificada. En la modalidad técnica y académica tanto del sector público como privado.

También atiende, funcionarios del MEP y otros ministerios, encargados de medios de comunicación colectiva, estudiantes de educación superior, investigadores y públicos en general.

Estadísticas

Se atienden 250 consultas diarias, aproximadamente, desglosadas de la siguiente manera: La cantidad de consultas del servicio ha ido aumentando considerablemente desde su inicio hasta el año 2004. A continuación se presenta un resumen anual de las mismas.

SERVICIO DE CONSULTA	
250	Consulta diarias
62%	Zona urbana
38%	Zona rural
89%	Instituciones públicas
11%	Instituciones privadas

CANTIDAD DE USUARIOS ATENDIDOS POR AÑO	
1995	**2 593**
1996	**6 948**
1997	**24 531**
1998	**46 023**
1999	**36 523**
2000	**73 742**
2001	**98 528**
2002	**50 742**
2003	**104 612**
2004	**81 662**
Total	**525 904**

Publicaciones

En Kiosco realiza publicaciones anuales de antologías con los diferentes documentos elaborados en las asignaturas. También, elabora por solicitud de los departamentos y las autoridades del MEP documentos para proyectos específicos, entre los documentos elaborados se encuentran cuadernos pedagógicos, libros de texto, guías didácticas, fichas para I y II ciclo, módulos alimentarios.

Además, se realizan publicaciones periódicas en los suplementos educativos de los periódicos La Prensa Libre y La Voz de ANDE.

Coordinación con otros proyectos y departamentos

El Kiosco de Información al estar adscrito al CENADI mantiene estrecha relación con todos sus departamentos y unidades. Trabaja en forma conjunta con las unidades de Artes Gráficas y Material Impreso del Departamento de Recurso Didácticos para llevar a cabo las publicaciones.

Se ha establecido una relación muy directa con los CEREDI de las diferentes regiones del país, pues son los centros encargados de brindar a los estudiantes y docentes, materiales de apoyo para el trabajo de aula, por lo que ha facilitado la base de datos para uso estricto de consulta.

Alianzas estratégicas

Actualmente se continúa con la alianza estratégica establecida con el Instituto Costarricense de Electricidad (ICE) desde que inició el Kiosco sus labores. El ICE proporciona la central telefónica, extensiones telefónicas y el servicio técnico.

Con el Proyecto Estado de La Nación se elaboran documentos con carácter didáctico adaptando la información de los informes anuales del Estado de la Nación a los contenidos de los programas de estudio.

Con los periódicos La Prensa Libre y La Voz de Ande se elaboran documentos pertinentes a los programas de estudio para su respectiva publicación en sus suplementos educativos.

Unidad Didáctica de Información

La Unidad Didáctica de Información (UDI), conocida como Paquete de Información, está definido bajo el siguiente formato:

- Breve encabezamiento con el título, créditos, fecha, nivel y código de archivo.
- Resumen de la información contenida en el paquete para ubicar al usuario con el contenido del paquete.
- Palabras claves son los conceptos más importantes contenidos en el paquete y son utilizadas para la búsqueda por la computadora cuando el usuario ingresa por la página web.

- Desarrollo del tema que constituye el cuerpo del paquete pues es la exposición o descripción del tema por parte del asesor pedagógico.
- Valores y actitudes que son recomendaciones acorde con el tema que se pueden trabajar en clase como fomento de actitudes positivas.
- Actividades complementarias que pueden ser sugerencias para la utilización de la información, orientadas hacia el docente y/o ejercicios de autoevaluación para el estudiante.
- Bibliografía.

Retos del CIE

Transformarse en Portal Educativo.

Fundamentar su labor pedagógica en Unidades Modulares Didácticas.

Aumentar la cobertura en el sistema educativo costarricense.

Bibliografía

Centro de Información Electrónica, CENADI, MEP. (2004). **Memoria.** San José, Costa Rica: Imprenta Nacional

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA ASISTIDA POR COMPUTADORA, DIEZ AÑOS DESPUÉS: EXPERIENCIAS Y LOGROS

Silvia Calderón Laguna[1]

Resumen

En ocasión del décimo aniversario de la apertura de la carrera Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora, que imparte el Instituto Tecnológico de Costa Rica, se presenta una visión global de lo que ha sido la carrera a través de estos años.

Se plantea como una opción distinta en la formación de profesionales en el campo de la enseñanza de la matemática, por cuanto, están capacitados para innovar metodológicamente en sus lecciones, haciendo uso de la herramienta computacional.

Se comentan algunas experiencias en ese sentido con sus logros y desaciertos, con la consecuente y continua revisión del programa de estudios con miras a su automejoramiento. Esto en función de la formación de profesionales que pueden incidir en un aprendizaje significativo por parte de sus estudiantes.

[1] Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de CostaRica, scalderon@itcr.ac.cr