Descomposición Tensorial y sus Aplicaciones en Procesamiento de Imágenes

Juan Pablo Soto Quirós

Escuela de Matemática

Instituto Tecnológico de Costa Rica

jusoto@tec.ac.cr

Coloquios Virtuales de Matemática Aplicada

18 de Octubre de 2021

1 Parte 1: Conceptos Básicos

2 Parte 2: Operaciones Tensoriales

3 Parte 3: Descomposición Tensorial

4 Parte 4: Aplicaciones en Imágenes

5 Parte 5: Referencias Bibliográficas

1 Parte 1: Conceptos Básicos

2 Parte 2: Operaciones Tensoriales

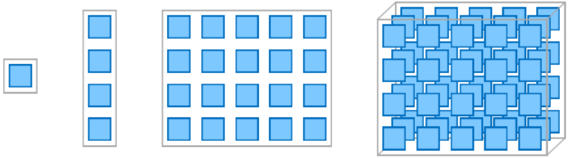
3 Parte 3: Descomposición Tensorial

4 Parte 4: Aplicaciones en Imágenes

5 Parte 5: Referencias Bibliográficas

Tensor

- Un tensor de orden p es un arreglo multidimensional de p dimensiones.
- Si $\mathcal{A}$ es un tensor de orden p, entonces escribiremos que $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2 \times \ldots m_p}$.
- La entrada $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ de un tensor $\mathcal{A}$ se denota $\mathcal{A}(i_1, i_2, \ldots, i_p)$.
- Formalmente, un tensor de orden p es un elemento del producto tensorial de p espacios vectoriales, el cual cada uno tiene su propio sistema de coordenadas.
- Un tensor es una generalización del concepto de matrices.



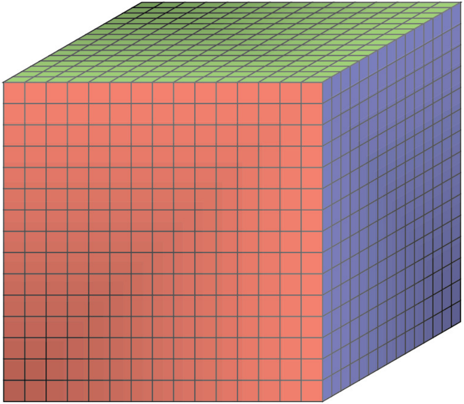
$$x \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4, \boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{4\times 5}, \boldsymbol{\mathcal{X}} \in \mathbb{R}^{4\times 5\times 3}$$

Parte 1: Conceptos Básicos

- El concepto de tensor en esta presentación no se debe confundir con el concepto de tensor en física e ingeniería, el cual se refiere generalmente a campos tensoriales en matemática.
- En el transcurso de esta presentación trabajaremos con tensores de entradas reales, aunque también se puede trabajar otros conjuntos (complejos).
- Tipos de Tensores:
  - Los números reales se conocen como tensores de orden 0.
  - Los vectores se conocen como tensores de orden 1.
  - Las matrices se conocen como tensores de orden 2.
  - Los tensores de orden mayor o igual a 3 se conocen como tensores de orden mayor.

Parte 1: Conceptos Básicos

- En esta presentación trabajaremos con tensores de orden 3.



$\boldsymbol{X}$

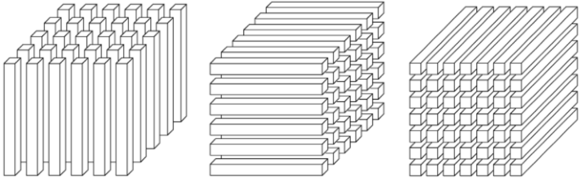
$[K, M, N]$

Parte 1: Conceptos Básicos

Fibras

Una fibra es un tensor de orden 1 obtenido al fijar todos salvo uno de los índices de un tensor de orden mayor.

- Las fibras $\mathcal{A}(:, j, k)$ se llaman fibras de modo-1 o columnas.
- Las fibras $\mathcal{A}(i, :, k)$ se llaman fibras de modo-2 o filas.
- Las fibras $\mathcal{A}(i, j, :)$ se llaman fibras de modo-3 o tubos.

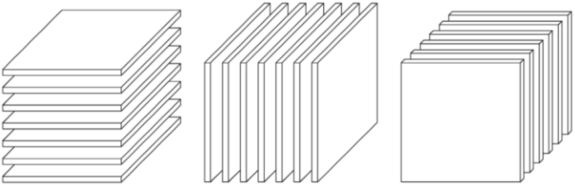


(a) Mode-1 (column) fibers: $\mathbf{x}_{:jk}$ (b) Mode-2 (row) fibers: $\mathbf{x}_{i:k}$ (c) Mode-3 (tube) fibers: $\mathbf{x}_{ij:}$

Caras (*Slices*)

A las matrices que se obtienen como subarreglos de tensores se conocen como caras o *slices*. Estas se obtienen al fijar una de las entradas del tensor.

- Las caras $A(i,:,:)$ se llaman caras horizontales.
- Las caras $A(:,j,:)$ se llaman caras laterales.
- Las caras $A(:,:,k)$ se llaman caras frontales.



(a) Horizontal slices: $\mathbf{X}_{i::}$ (b) Lateral slices: $\mathbf{X}_{:j:}$ (c) Frontal slices: $\mathbf{X}_{::k}$ (or $\mathbf{X}_k$)

1 Parte 1: Conceptos Básicos

2 Parte 2: Operaciones Tensoriales

3 Parte 3: Descomposición Tensorial

4 Parte 4: Aplicaciones en Imágenes

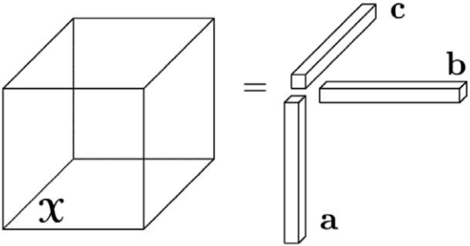
5 Parte 5: Referencias Bibliográficas

Producto Exterior y Tensores de Rango 1

- Sean $a \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^p$. El tensor $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{m \times n \times q}$ tal que $\mathcal{X}(i, j, k) = a(i) \cdot b(j) \cdot c(k)$, se conoce como un tensor de rango 1 y se denota como

$$\mathcal{X} = a \circ b \circ c,$$

donde $\circ$ es el producto exterior.



Producto de Tensor y Matriz

- Sea $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$ un tensor con caras frontales $A_1, ...A_p$. Sea $U \in \mathbb{R}^{r \times m}$. Entonces se define el tensor $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}^{r \times n \times p}$ tal que

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} \times_1 U$$

  como la multiplicación que genera las caras frontales $Y_j = U A_j$, para todo $j = 1, ..., p$.
- De forma similar, se puede definir un producto de tensor y matriz, utilizando las caras laterales y horizontales.

Parte 2: Operaciones Tensoriales

Operaciones `bcirc`, `unfold` y `fold`

Sea $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$ un tensor con caras frontales $A_1, ...A_p$. Entonces

$$\texttt{bcirc}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A_1 & A_p & \cdots & A_2 \\ A_2 & A_1 & \cdots & A_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_p & A_{p-1} & \cdots & A_1 \end{pmatrix}.$$

$$\texttt{unfold}(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}.$$

$$\texttt{fold}(\texttt{unfold}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}.$$

Producto T de Tensores

Sean $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$ y $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times q \times p}$ entonces se define el producto T entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como $\mathcal{A} * \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times q \times p}$ tal que

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \texttt{fold}(\texttt{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot \texttt{unfold}(\mathcal{B})).$$

Parte 2: Operaciones Tensoriales

Producto T de Tensores

Sean $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n\times p}$ y $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n\times q\times p}$ entonces se define el producto T entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ como $\mathcal{A} * \mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m\times q\times p}$ tal que

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \texttt{fold}(\texttt{bcirc}(\mathcal{A}) \cdot \texttt{unfold}(\mathcal{B})).$$

- **Observación:** El producto T es computacionalmente costo, ya que trabaja con matrices de bloques.
- Utilizando la transformada discreta de Fourier a los tubos de los tensores $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, se puede obtener un método más eficiente para el cálculo de $\mathcal{A} * \mathcal{B}$.

Sean $\overline{\mathcal{A}} = \texttt{fft}(\mathcal{A}, [], 3)$ y $\overline{\mathcal{B}} = \texttt{fft}(\mathcal{B}, [], 3)$ dos tensores a los cuales se les aplicó la transformada discreta de Fourier a los tubos de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, respectivamente.

Algorithm 1 Tensor-Tensor Product [4]

Input: $\boldsymbol{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, $\boldsymbol{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{n_2 \times l \times n_3}$.
Output: $\boldsymbol{\mathcal{C}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} * \boldsymbol{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times l \times n_3}$.

1. Compute $\bar{\boldsymbol{\mathcal{A}}} = \texttt{fft}(\boldsymbol{\mathcal{A}}, [\,], 3)$ and $\bar{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = \texttt{fft}(\boldsymbol{\mathcal{B}}, [\,], 3)$.
2. Compute each frontal slice of $\bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}$ by

$$\bar{\boldsymbol{C}}^{(i)} = \begin{cases} \bar{\boldsymbol{A}}^{(i)} \bar{\boldsymbol{B}}^{(i)}, & i = 1, \cdots, \lceil \frac{n_3+1}{2} \rceil, \\ \texttt{conj}(\bar{\boldsymbol{C}}^{(n_3-i+2)}), & i = \lceil \frac{n_3+1}{2} \rceil + 1, \cdots, n_3. \end{cases}$$

3. Compute $\boldsymbol{\mathcal{C}} = \texttt{ifft}(\bar{\boldsymbol{\mathcal{C}}}, [\,], 3)$.

---

1 Parte 1: Conceptos Básicos

2 Parte 2: Operaciones Tensoriales

3 Parte 3: Descomposición Tensorial

4 Parte 4: Aplicaciones en Imágenes

5 Parte 5: Referencias Bibliográficas

Descomposición CP

- La descomposición CP trata de expresar un tensor como la suma finita de tensores de rango 1.
- Sea $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$. El objetivo de la descomposición CP es encontrar $a_j \in \mathbb{R}^m$, $b_j \in \mathbb{R}^n$, $c_j \in \mathbb{R}^p$, para $j = 1, ..., r$, tal que

$$\mathcal{X} = \sum_{j=1}^{r} a_j \circ b_j \circ c_j.$$

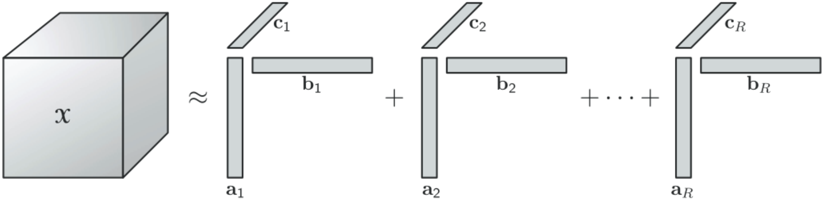
- Si r es el entero más pequeño que satisafce dicha igualdad, entonces se dice que $\mathcal{X}$ es un tensor de rango r.

Parte 3: Descomposición Tensorial

- Dado un valor de r, este tipo de descomposición trata de encontrar los vectores a_j, b_j, c_j que minimicen el siguiente problema:

$$\min_{A,B,C} \left\| \mathcal{X} - \sum_{j=1}^{r} a_j \circ b_j \circ c_j \right\|_{fr}^{2},$$

donde $A = [a_1 \dots a_r]$, $B = [b_1 \dots b_r]$ y $C = [c_1 \dots c_r]$.



- La solución de dicho problema se realiza de forma iterativa.
- Sea $B^{(0)}$ y $C^{(0)}$ matrices iniciales. Entonces

$$A^{(k+1)} = \arg\min_{A} \|X_{(1)} - A(C^{(k)} \odot B^{(k)})\|_{fr}^2,$$

$$B^{(k+1)} = \arg\min_{B} \|X_{(2)} - B(C^{(k)} \odot A^{(k+1)})\|_{fr}^2,$$

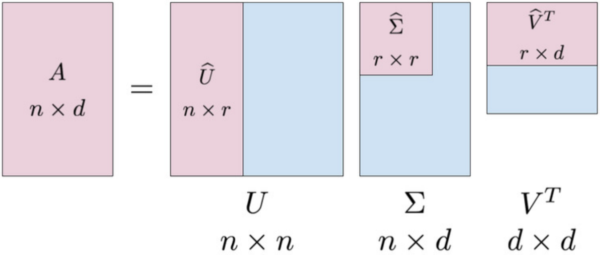
$$C^{(k+1)} = \arg\min_{C} \|X_{(3)} - C(B^{(k+1)} \odot A^{(k+1)})\|_{fr}^2,$$

donde:

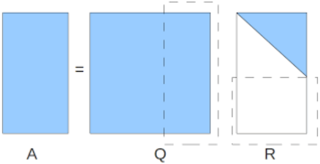
- $P \otimes Q = \begin{pmatrix} p_{11}Q & \cdots & p_{1s}Q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1}Q & \cdots & p_{rs}Q \end{pmatrix}$ (Producto Kronecker)
- $P \odot Q = [p_1 \otimes q_1 \ ... \ p_s \otimes q_s]$ (Producto Khatri-Rao)
- $X_{(1)}, X_{(2)}$ y $X_{(3)}$ son las representaciones matriciales de las caras horizontales, laterales y frontales, respectivamente.

Parte 3: Descomposición Tensorial

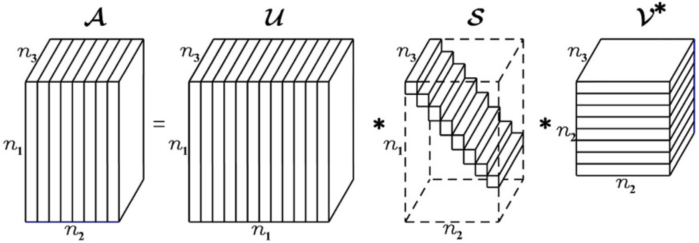
- Descomposición en Valores Singulares (SVD) de Matrices



- Factorización QR de Matrices



- La $T-$SVD de Tensores



- La $T-$SVD de tensores se obtiene utilizando la transformada discreta de Fourier.

Algorithm 1: t-SVD for Third Order Tensors.

Input: $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$.
Output: $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$, $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$, $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2 \times n_3}$.
$\mathcal{D} \leftarrow \mathrm{fft}(\mathcal{M}, [\,], 3)$
for $i = 1$ to n_3 **do**
  $[\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}] = \mathtt{svd}(\mathcal{D}^{(i)})$
  $\widehat{\mathcal{U}}^{(i)} = \mathbf{U}$; $\widehat{\mathcal{S}}^{(i)} = \mathbf{S}$; $\widehat{\mathcal{V}}^{(i)} = \mathbf{V}$;
end for
$\mathcal{U} \leftarrow \mathrm{ifft}(\widehat{\mathcal{U}}, [\,], 3)$; $\mathcal{S} \leftarrow \mathrm{ifft}(\widehat{\mathcal{S}}, [\,], 3)$;
$\mathcal{V} \leftarrow \mathrm{ifft}(\widehat{\mathcal{V}}, [\,], 3)$

- La $T-$SVD de tensores se obtiene utilizando la transformada discreta de Fourier.

Algorithm 2. T-SVD

Input: $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$.

Output: T-SVD components $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ and $\mathcal{V}$ of $\mathcal{A}$.

1. Compute $\bar{\mathcal{A}} = \texttt{fft}(\mathcal{A}, [\,], 3)$.
2. Compute each frontal slice of $\bar{\mathcal{U}}$, $\bar{\mathcal{S}}$ and $\bar{\mathcal{V}}$ from $\bar{\mathcal{A}}$ by

   for $i = 1, \ldots, \lceil \frac{n_3+1}{2} \rceil$ **do**

   $[\bar{U}^{(i)}, \bar{S}^{(i)}, \bar{V}^{(i)}] = \mathrm{SVD}(\bar{A}^{(i)})$;

   end for

   for $i = \lceil \frac{n_3+1}{2} \rceil + 1, \ldots, n_3$ **do**

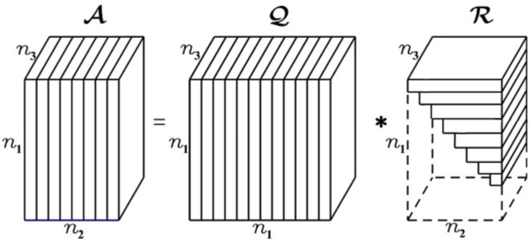
   $\bar{U}^{(i)} = \texttt{conj}(\bar{U}^{(n_3-i+2)})$;

   $\bar{S}^{(i)} = \bar{S}^{(n_3-i+2)}$;

   $\bar{V}^{(i)} = \texttt{conj}(\bar{V}^{(n_3-i+2)})$;

   end for
3. Compute $\mathcal{U} = \texttt{ifft}(\bar{\mathcal{U}}, [\,], 3)$, $\mathcal{S} = \texttt{ifft}(\bar{\mathcal{S}}, [\,], 3)$, and $\mathcal{V} = \texttt{ifft}(\bar{\mathcal{V}}, [\,], 3)$.

- La $T-$QR de Tensores



Parte 3: Descomposición Tensorial

- La $T-$QR de tensores se obtiene utilizando la transformada discreta de Fourier.

Algorithm 1 $T-$QR Decomposition of Tensors

Require: $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$
Ensure: $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1 \times n_3}$ and $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$
  $\mathcal{D} = \texttt{fft}(\mathcal{M}, [\,], 3)$
  for $i = 1 : n_3$ **do**
    $[\widehat{\mathcal{Q}}^{(i)}, \widehat{\mathcal{R}}^{(i)}] = \texttt{qr}(\mathcal{D}^{(i)})$
  end for
  $\mathcal{Q} = \texttt{ifft}(\widehat{\mathcal{Q}}, [\,], 3)$
  $\mathcal{R} = \texttt{ifft}(\widehat{\mathcal{R}}, [\,], 3)$

1 Parte 1: Conceptos Básicos

2 Parte 2: Operaciones Tensoriales

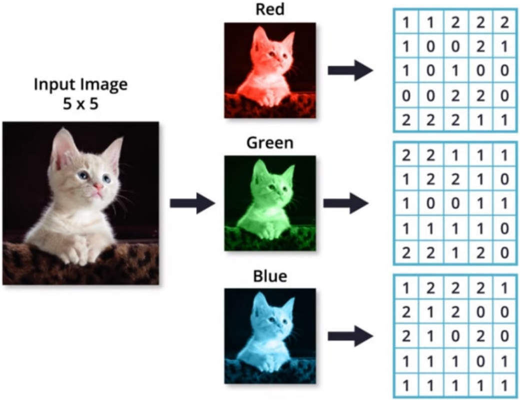
3 Parte 3: Descomposición Tensorial

4 Parte 4: Aplicaciones en Imágenes

5 Parte 5: Referencias Bibliográficas

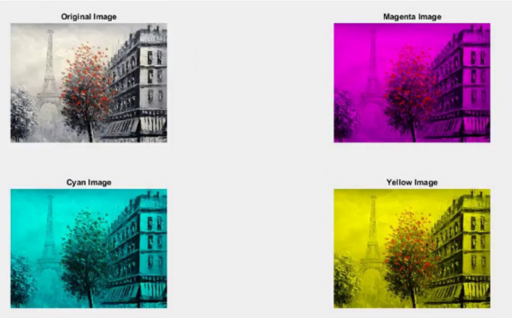
Parte 4: Aplicaciones en Imágenes

- Una imagen a color $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{m\times n\times p}$ se puede interpretar como un tensor de orden 3, donde las primeras dimensiones (m, n) representan el número de filas y columnas de la imágen y la tercera dimensión (p) representa el número de canales.

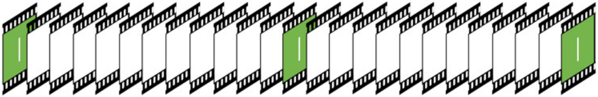


Parte 4: Aplicaciones en Imágenes

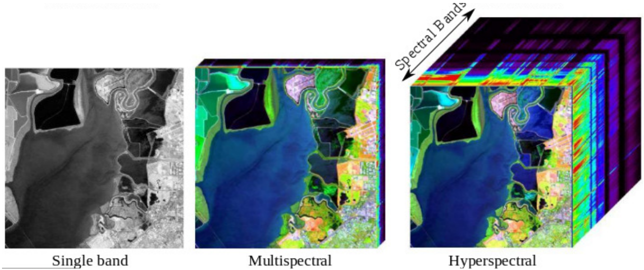
- Una imagen a color $\mathcal{I} \in \mathbb{R}^{m \times n \times p}$ se puede interpretar como un tensor de orden 3, donde las primeras dimensiones (m, n) representan el número de filas y columnas de la imágen y la tercera dimensión (p) representa el número de canales.



- Un video a escala de grises se puede interpretar como un tensor donde las primeras dos dimensiones es el tamaño de cada *frame* del video y la tercera dimensión es el número de frames del video.

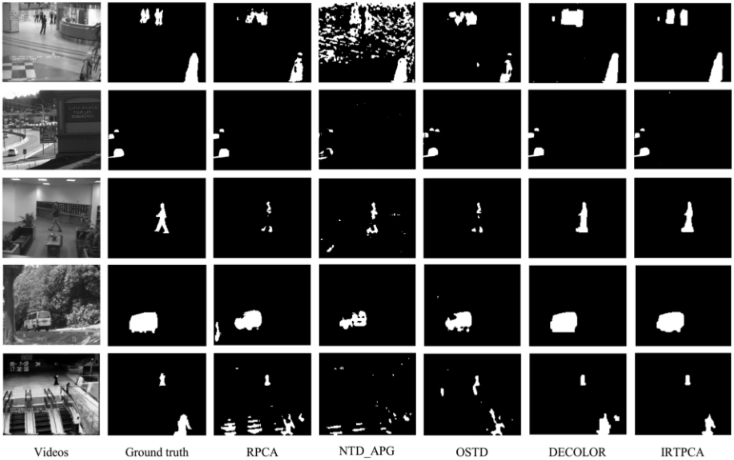


- Similarmente a los videos, el conjunto de impagenes hiperespectrales el espectro electromagnético es un tensor.

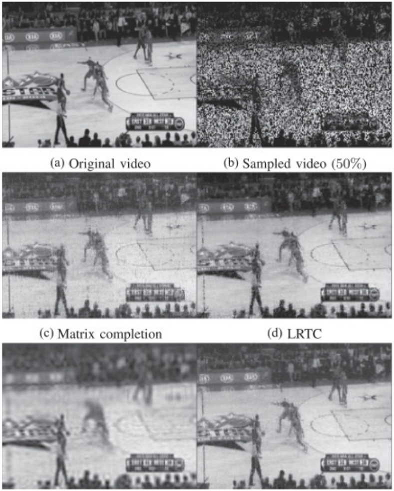


- Eliminación de ruido en imágenes.

- Detección de movimiento en videos.



- Eliminación de ruido en video.

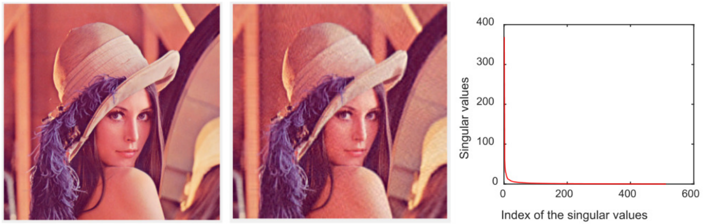


(a) Original video (b) Sampled video (50%)

(c) Matrix completion (d) LRTC

(e) geomCG (f) Our method

- Compresión de imágenes a Color, basado en el $T-$SVD.



(a) (b) (c)

Fig. 3. Color images can be approximated by low tubal rank tensors. (a) A color image can be modeled as a tensor $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{512\times512\times3}$; (b) approximation by a tensor with tubal rank $r = 50$; (c) plot of the singular values of $\mathcal{M}$.

1 Parte 1: Conceptos Básicos

2 Parte 2: Operaciones Tensoriales

3 Parte 3: Descomposición Tensorial

4 Parte 4: Aplicaciones en Imágenes

5 Parte 5: Referencias Bibliográficas

Parte 5: Referencias Bibliográficas

Esta presentación se basó en los siguientes artículos científicos

- Kolda, T. G., & Bader, B. W. (2009). **Tensor decompositions and applications**. SIAM review, 51(3), 455-500.
- Zhang, Z., & Aeron, S. (2016). **Exact tensor completion using t-SVD**. IEEE Transactions on Signal Processing, 65(6), 1511-1526.
- Zheng, Y., & Xu, A. B. (2021). **Tensor completion via tensor QR decomposition and $L_{2,1}-$ norm minimization**. Signal Processing, 189, 108240.
- Lu, C., Feng, J., Chen, Y., Liu, W., Lin, Z., & Yan, S. (2019). **Tensor robust principal component analysis with a new tensor nuclear norm**. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, 42(4), 925-938.
- Rabanser, S., Shchur, O., & Günnemann, S. (2017). **Introduction to tensor decompositions and their applications in machine learning**. arXiv preprint arXiv:1711.10781.